

درس سخت افزار

مرجع: مدارهاي منطقي ديگيتال

نوشته: مانو-- مترجم: دكتر سپيدنام

فصل اول:

ورود به سیستم دیجیتال

سیستم ده دهی اعداد (Decimal):

□ ده رقم 0..9

□ موقعیت ، وزن را تعیین می کند:

... 10^4 10^3 10^2 10^1 10^0

1 7 3

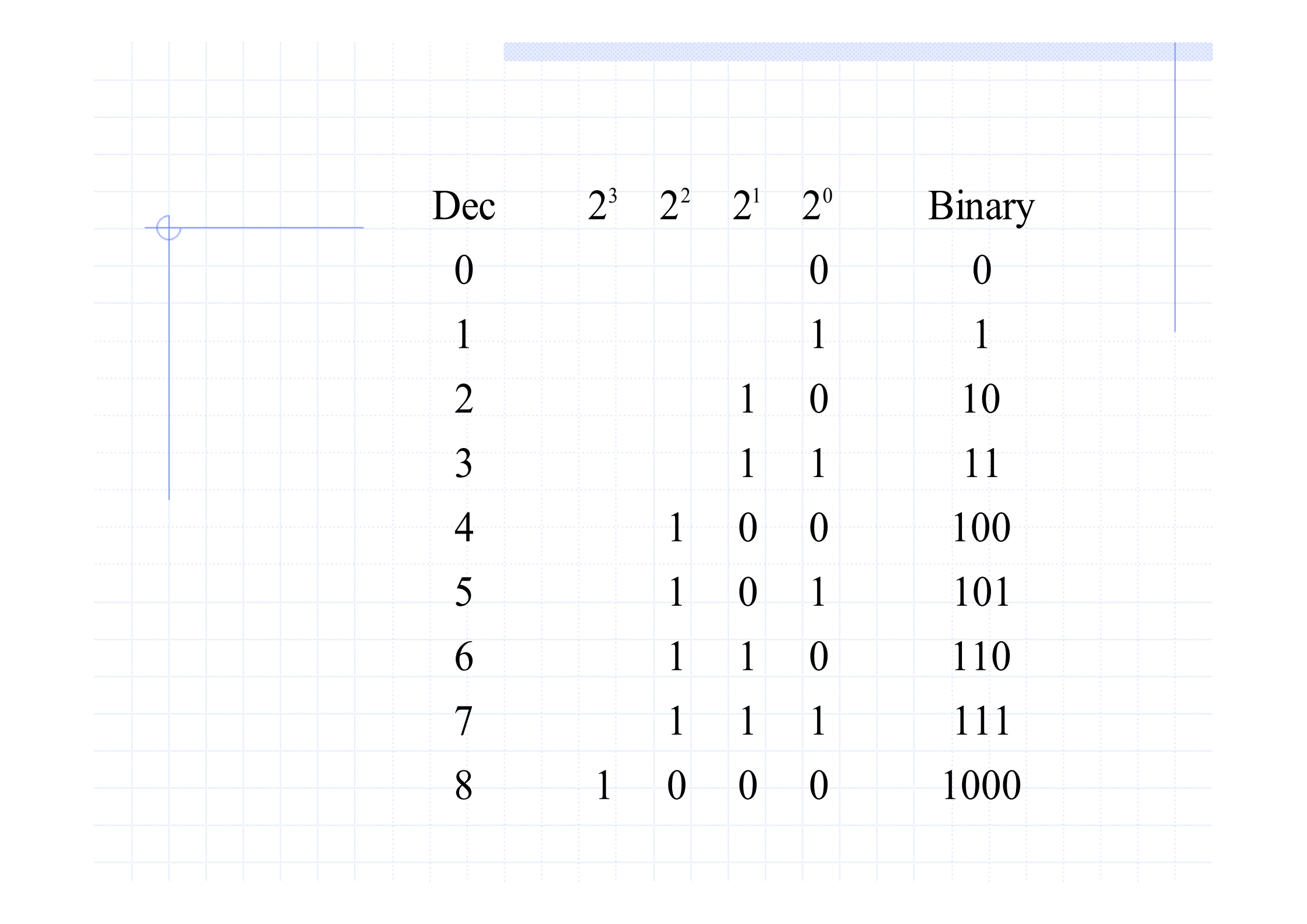
$$= 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$= 100 + 70 + 3$$

$$= 173$$

سیستم دودویی اعداد (binary):

- آسان برای کامپیوتر ها، ناملموس برای ما
- از ارقام دودویی ((binary digits (bits))، به جای ارقام ده دهی استفاده می کند.
- n بیت داده شده می تواند نشانگر 2^n عدد باشد.
- با ده انگشت می شود تا 10^{23} شمرد!
- در این سیستم نیز موقعیت، وزن را تعیین می کند.

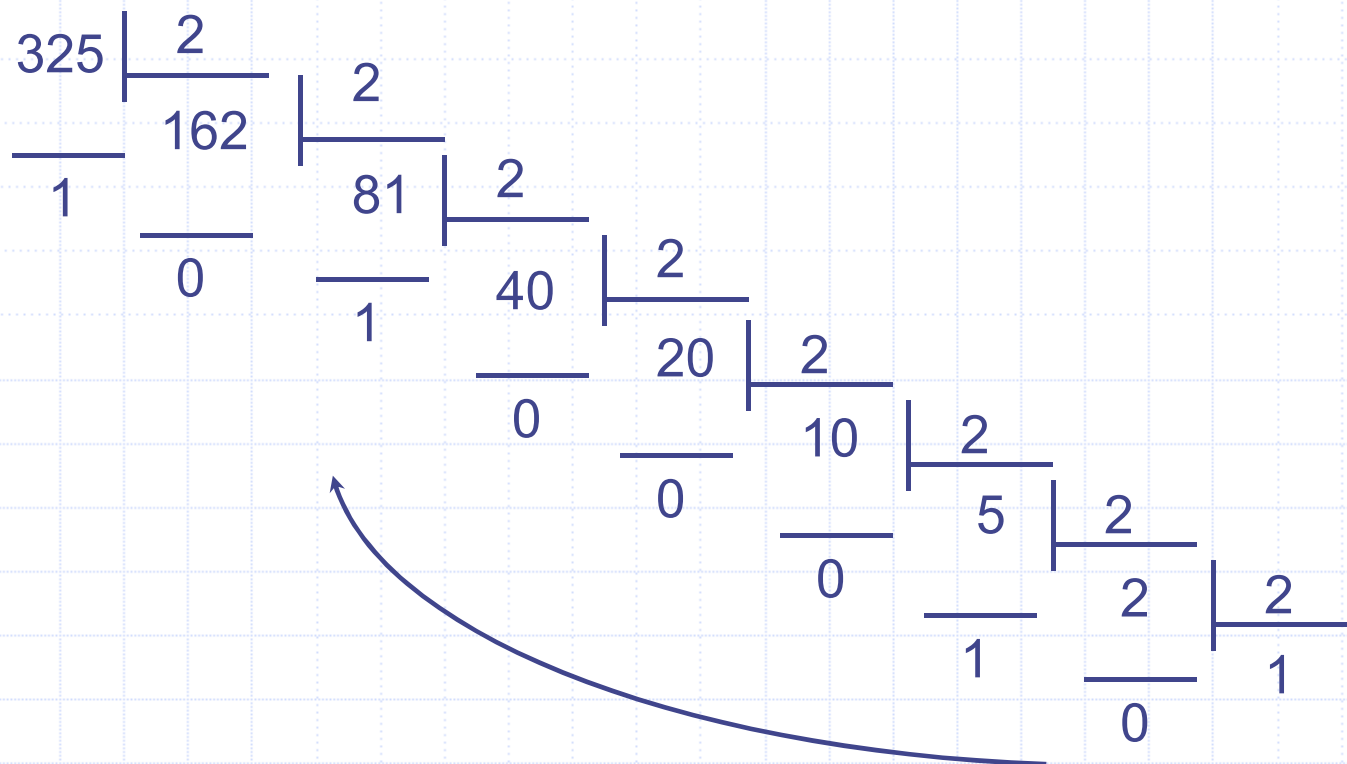


Dec	2^3	2^2	2^1	2^0	Binary
0				0	0
1				1	1
2			1	0	10
3			1	1	11
4		1	0	0	100
5		1	0	1	101
6		1	1	0	110
7		1	1	1	111
8	1	0	0	0	1000

تبدیل از مبنای ده به مبنای دو

روش اول : تقسیمات متوالی

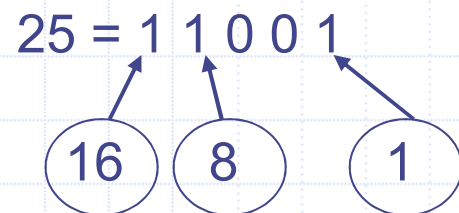
$$(325)_{10} \rightarrow (101000101)_2$$



روش دوم : کاهش متوالی توان های دو

توان های دو :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 512 \rightarrow 1024 \rightarrow \dots$



تبدیل از مبنای دو به مبنای ده



$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)_{21} = 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 8 + 0 \times 16 + 1 \times 32 = (46)_{10}$$

$\swarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \searrow$
 $2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

اعداد اعشاری

25.43 $\rightarrow$ 11001.01101 ...

$$0.43 * 2 = 0.86$$

$$0.86 * 2 = 1.72$$

$$0.72 * 2 = 1.44$$

$$0.44 * 2 = 0.88$$

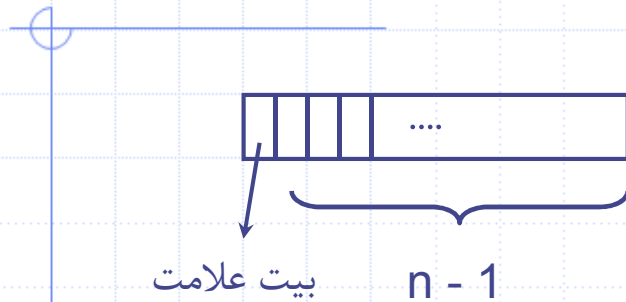
$$0.88 * 2 = 1.76$$

...

اعداد بدون علامت در قالب n بیتی: $\left. \begin{array}{l} \text{حداقل} \\ 0 \\ \text{حداکثر} \end{array} \right\} 2^n - 1$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^a = 2^{(a+1)} - 1$$

اعداد علامت دار



• : +
۱ : -

۱- سیستم علامت مقدار

۲- سیستم متمم دو

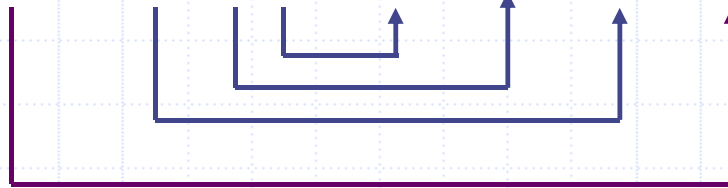
$$258 - 194 = 258 + (999 - 194) + 1 - 1000 =$$

$$A - B = A + \overline{B} + 1$$

متمم دو

در روش متمم دو:

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 = +2^0 + 2^1 + 2^3 - 2^6 = -53$$



تمرین: یک عدد منفی پیدا کنید، که روش نمایش آن در سیستم متمم دو و قالب n بیتی عیناً مشابه نمایش آن در سیستم علامت مقدار و قالب n بیتی باشد.

روش های ممکن جهت نمایش اعداد علامت دار:

سیستم علامت مقدار

$$000 = +0$$

$$001 = +1$$

$$010 = +2$$

$$011 = +3$$

$$100 = -0$$

$$101 = -1$$

$$110 = -2$$

$$111 = -3$$

سیستم متمم یک

$$000 = +0$$

$$001 = +1$$

$$010 = +2$$

$$011 = +3$$

$$100 = -3$$

$$101 = -2$$

$$110 = -1$$

$$111 = -0$$

سیستم متمم دو

$$000 = +0$$

$$001 = +1$$

$$010 = +2$$

$$011 = +3$$

$$100 = -4$$

$$101 = -3$$

$$110 = -2$$

$$111 = -1$$

متمم 2:

۱- عدد بدون علامت به صورت باینری نوشته شود. $(49)_{10} = (110001)_2$

۲- قالب ریزی 00110001

۳- اگر عدد مثبت بود، کار تمام است، اما اگر عدد منفی است لازم است متمم دو شود.

جمع و تفریق اعداد علامت دار:

- 49

+ 23

- 26

1 0 0 1 1 1 1

0 0 1 0 1 1 1

1 1 0 0 1 1 0

- اگر در جمع خطای سرریز رخ داد، باید جمع را در قالب بزرگتری انجام دهیم.

- در سیستم بدون علامت خطای سرریز همان Carry است.

خطای سرریز (Over flow)

- در جمع اعداد بدون علامت، رخداد سرریز همان رقم نقلی است.
- در جمع و تفریق اعداد علامت دار، سرریز در دو هنگام ممکن است رخ دهد: جمع دو عدد مثبت یا جمع دو عدد منفی.

تشخیص رخداد سرریز:

راه اول : اگر حاصل جمع دو عدد مثبت عددی منفی شود و یا جمع دو عدد منفی، عددی مثبت،

راه دوم : در صورتی که دو رقم نقلی آخر مساوی نباشند.

خطای سرریز (Over flow)

• $-39 + 92 = 53$:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ + 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Carryout without overflow. Sum is correct.

• $-19 + -7 = -26$:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ + 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

Carryout without overflow. Sum is correct.

• $44 + 45 = 89$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ + 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

No overflow nor carryout.

• $-75 + 59 = -16$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ + 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

No overflow nor carryout.

• $104 + 45 = 149$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ + 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Overflow, no carryout. Sum is not correct.

• $10 + -3 = 7$:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ + 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Carryout without overflow. Sum is correct.

• $-103 + -69 = -172$:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ + 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Overflow, with incidental carryout. Sum is not correct.

• $127 + 1 = 128$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ + 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Overflow, no carryout. Sum is not correct.

• $-1 + 1 = 0$:

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ + 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Carryout without overflow. Sum is correct.

جمع اعداد اعشاری :

$$\begin{array}{r}
 25.50 \\
 - 38.75 \\
 \hline
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 0011001.1000 \\
 1011001.0100 \\
 \hline
 1110010.1100 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-13} \quad \swarrow \searrow \\
 \hspace{1.5cm} 0.5 \quad 0.25
 \end{array}$$

$$25 \rightarrow (11001)_2$$

مبنای ۴، ۸، ۱۶

$$\begin{array}{c}
 011001 \\
 \longleftarrow \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 \end{array}
 \rightarrow (121)_4$$

$$\begin{array}{c}
 011001 \\
 \longleftarrow \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 \end{array}
 \rightarrow (31)_8$$

$$\begin{array}{c}
 00011001 \\
 \longleftarrow \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \end{array}
 \rightarrow (19)_{16}$$

کدینگ اطلاعات :

هدف : ورود به سیستم دیجیتال

معیار ها : {
- افزایش سرعت
- کاهش فضا
- راحتی کار با آن
- امنیت
- اطمینان

Binary Coded Decimal

	B	C	D
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	1	0
5	0	1	0
6	0	1	1
7	0	1	1
8	1	0	0
9	1	0	0

(دارای وزن)

- در مورد کاراکترها، از کد اسکی آنها استفاده می کنیم.

ex - 3

	0 0 0 0
	0 0 0 1
	0 0 1 0
0	0 0 1 1
1	0 1 0 0
2	0 1 0 1
3	0 1 1 0
4	0 1 1 1
5	1 0 0 0
6	1 0 0 1
7	1 0 1 0
8	1 0 1 1
9	1 1 0 0
	1 1 0 1
	1 1 1 0
	1 1 1 1

	ex - 3
0	0 0 1 1
1	0 1 0 0
2	0 1 0 1
3	0 1 1 0
4	0 1 1 1
5	1 0 0 0
6	1 0 0 1
7	1 0 1 0
8	1 0 1 1
9	1 1 0 0

(خود مکمل)

تعداد کلید سیستم های خود مکمل :

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ 8 \end{array} * \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 7 \end{array} * \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ 6 \end{array} * \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \\ 5 \end{array} * \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} = 6720$$

یک کد وزنی و خود مکمل :

	2	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	1	1	0	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1

کد گری⁽¹⁾

در این کد، هر کدام از کد ها تنها در یک بیت با کد قبلی متفاوت است و این روند چرخشی است؛ یعنی آخرین کد و اولین کد نیز تنها در ۱ بیت متفاوتند.

کد گری (2)

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Gray code

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

BCD code

نحوه تولید کد گری (3)

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	2
0	1	0	3
1	1	0	4
1	1	1	5
1	0	1	6
1	0	0	7

فصل 2

روش های جبری برای تحلیل

و

طراحی مدارهای منطقی

دستگاه های دیجیتالی

□ جبر بول:

- یک عبارت منطقی می تواند "درست" یا "نادرست" باشد (0 یا 1).
- شامل فرمول های جبری مربوط به ترکیب های مقادیر منطقی است.

◆ در سطح سخت افزار:

- هر عبارت منطقی با یک سیگنال الکتریکی نشان داده می شود.
- ارزش منطقی هر عبارت با ولتاژ الکتریکی سیگنال، مشخص می شود.

اصول جبر بول (1)

اصول اساسی:

اصل ۱:

تعریف: برای هر a و b که متعلق به مجموعه K هستند، $a+b$ و $a.b$ نیز به مجموعه K تعلق دارند.

($a.b$ ، And و $a+b$ ، Or نامیده می شود).

$$\text{If } a \& b \in K \longrightarrow \begin{cases} a.b \in K \\ a+b \in K \end{cases}$$

اصول جبر بول (2)

اصل ۲:

موجودیت عناصر 0 و 1:

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

x	$x + 0$	$x \cdot 1$
0	0	0
1	1	1

اصول جبر بول (3)

اصل ۳:

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

خاصیت عناصر + و . :

x	y	x.y	y.x	x+y	y+x
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

اصول جبر بول (4)

x	y	$x+y$	$x.y$	$y.x'$	x'
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0

اصول جبر بول (5)

اصل ۴:

خاصیت شرکت پذیری اعمال + و .

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

اصول جبر بول (6)

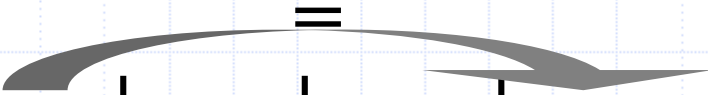
اصل ۵:

خاصیت توزیع پذیری + بر . و . بر +:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

آزمون درستی توزیع پذیری + بر . و . بر + (۲)



x	y	z	y.z	$x+y.z$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)(x+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

اصول اساسی جبر بول (1)

1. خاصیت خود توانی:

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

2. عناصر بی اثر در . و + :

$$a \cdot 1 = a$$

$$a + 0 = a$$

اصول اساسی جبر بول (2)

۳. متمم متمم:

$$a'' = a$$

۴. قانون جذب:

$$a + a \cdot b = a$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

اصول اساسی جبر بول (3)

۵. قانون ۵

$$a) \quad a + a'b = a + b$$

$$b) \quad a(a' + b) = ab$$

مثال:

$$\square \quad B + AB'C'D = B + AC'D$$

$$\square \quad (X + Y)((X + Y)' + Z) = (X + Y)Z$$

[5(a)ق]

[5(b)ق]

۶. قانون ۶

$$a) \quad ab + ab' = a$$

$$b) \quad (a + b)(a + b') = a$$

قوانین دمرگان^(۱)

$$(x.y)'=x'+y'$$

$$(x+y)'=x'.y'$$

این قانون می تواند به صورت زیر تعمیم پیدا کند:

$$(x.y.....t)'=x'+y'+...+t'$$

$$(x+y+...+t)'=x'.y'.....t'$$

قوانین دمرگان^(۲)

مثال:

$$\begin{aligned}\square (a + bc)' &= (a + (bc))' \\ &= a'(bc)' \\ &= a'(b' + c') \\ &= a'b' + a'c'\end{aligned}$$

قوانین دمرگان^(۳)

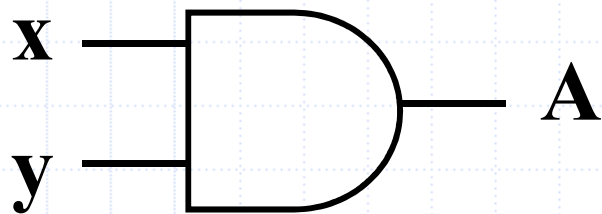
مثال های بیشتری از قوانین دمرگان:

$$\begin{aligned}\square (a(b + z(x + a')))' &= a' + (b + z(x + a'))' && [\neg(b)] \\ &= a' + b' (z(x + a'))' && [\neg(a)] \\ &= a' + b' (z' + (x + a'))' && [\neg(b)] \\ &= a' + b' (z' + x'(a'))' && [\neg(a)] \\ &= a' + b' (z' + x'a) && [\text{متمم متمم}] \\ &= a' + b' (z' + x') && [5(a)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\square (a(b + c) + a'b)' &= (ab + ac + a'b)' && [5(b) \text{ اصل}] \\ &= (b + ac)' && [6(a)] \\ &= b'(ac)' && [\neg(a)] \\ &= b'(a' + c') && [\neg(b)]\end{aligned}$$

گیت‌ها (دریچه‌ها) ^(۱)

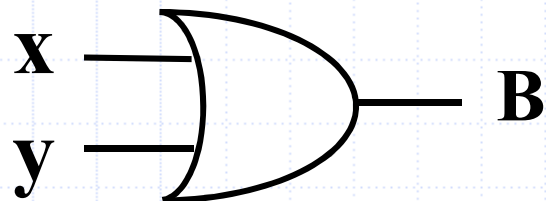
□ And:



x	y	$A = x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

گیت ها (دریچه ها) ^(۱)

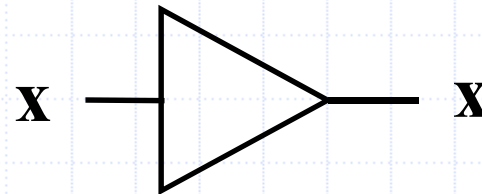
□ Or:



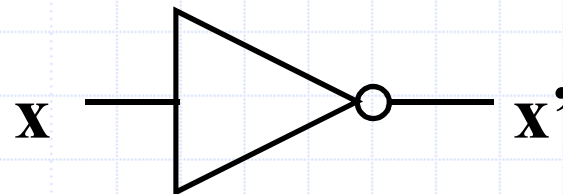
x	y	A = x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

گیت ها (۲)

تقویت کننده:



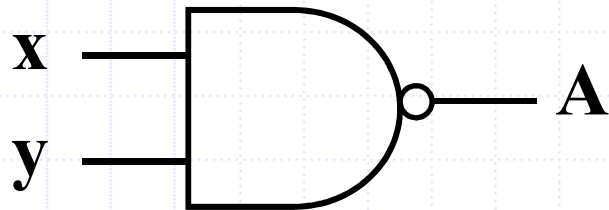
متمم:



x	x'
0	1
1	0

گیت ها (۳)

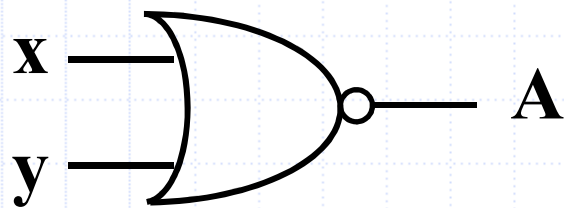
□ Nand:



x	y	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

گیت ها (۳)

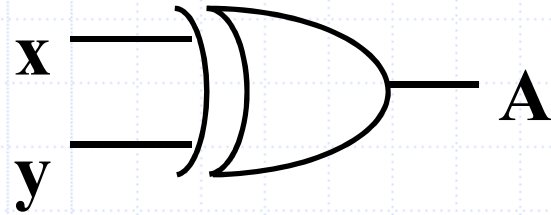
□ Nor:



x	y	A
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

گیت ها (۴)

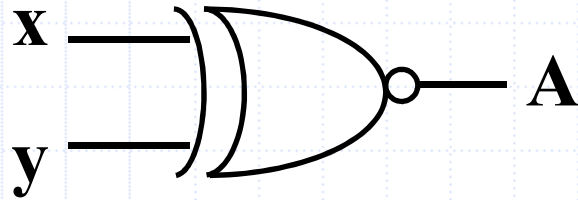
□ Xor:



x	y	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

گیت ها (۴)

□ Xnor:



x	y	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

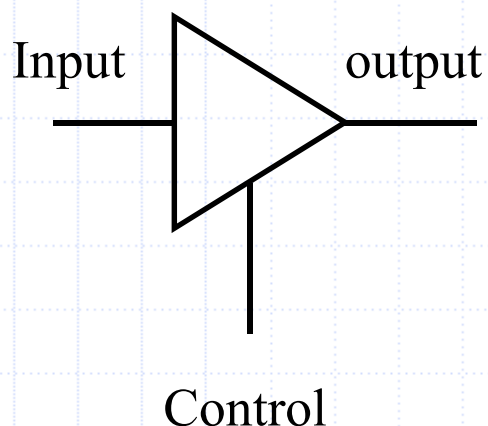
Xor & Xnor

$$\square x \oplus y = x \cdot y' + x' \cdot y$$

$$\square x \odot y = x' \cdot y' + x \cdot y$$

x	y	$x \cdot y$	$x + y$	$x \oplus y$	$x \odot y$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

گیت یا بافر ۳ وضعیتی^(۱)

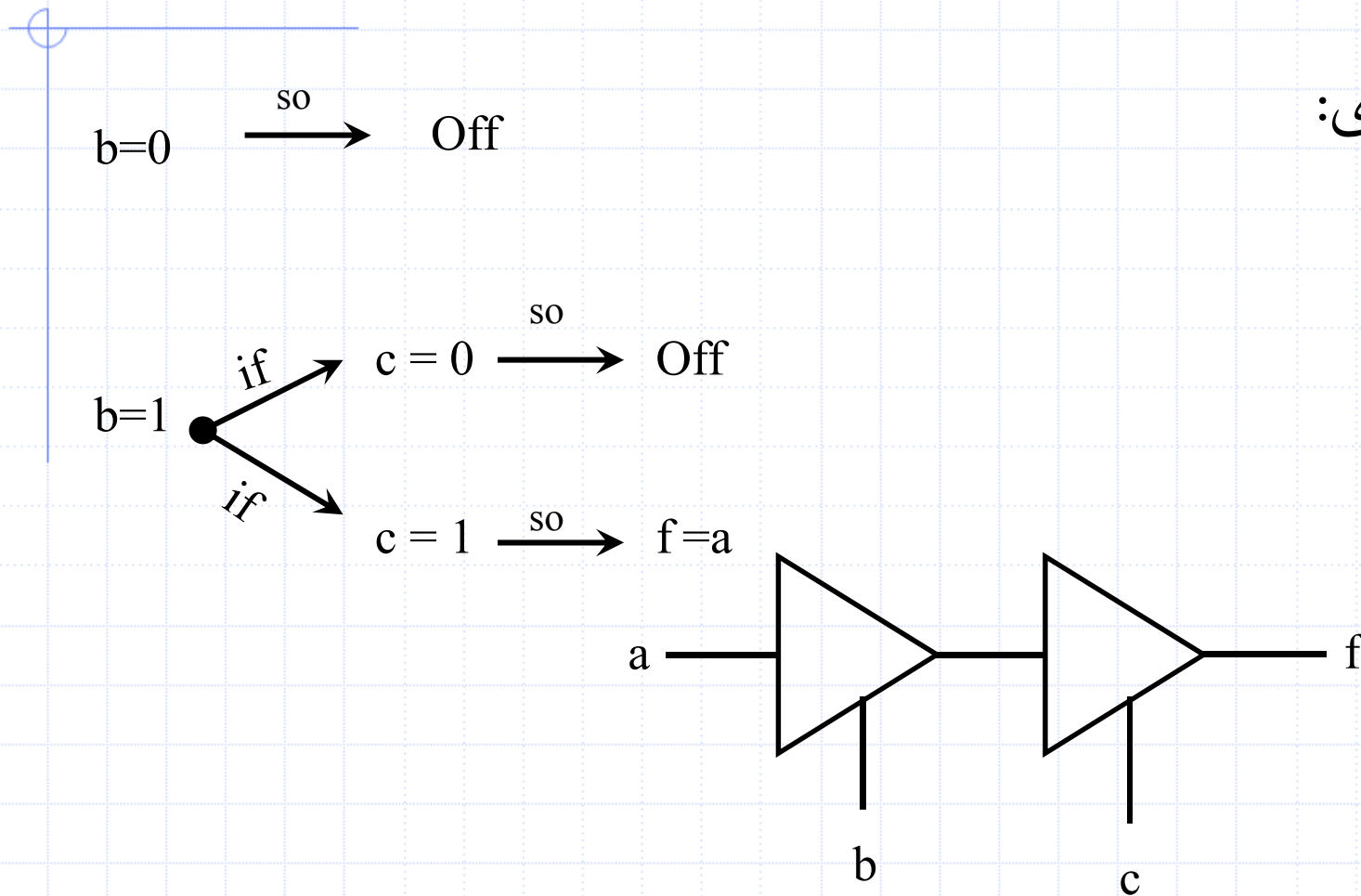


این گیت ها دارای یک دریچه ورودی، یک خروجی و یک کلید کنترل است که هر گاه کلید کنترل ۱ گردد؛ ورودی بر روی خروجی قرار میگیرد.

$$\text{Output} = \begin{cases} \text{Input} & \text{If control} = 1 \\ \text{Hz} & \text{If control} = 0 \end{cases}$$

گیت یا بافر ۳ وضعیتی^(۲)

اتصال سری:

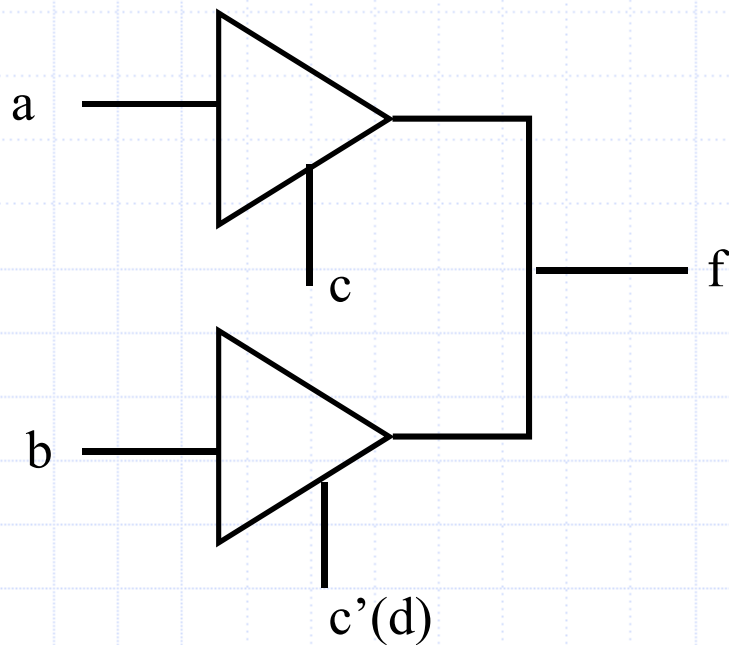


گیت یا بافر ۳ وضعیتی^(۳)

اتصال موازی:

$$c = 0 \xrightarrow{so} f = b$$

$$c = 1 \xrightarrow{so} f = a$$



$$c.d = 0$$

مینترم (SOP) و ماکسترم ها (POS)^(۱)

x	y	z	$x+y+z$	Minterm		Maxterm	
0	0	0	0	$x'.y'.z'$	m0	$x+y+z$	M0
0	0	1	1	$x'.y'.z$	m1	$x+y+z'$	M1
0	1	0	1	$x'.y.z'$	m2	$x+y'+z$	M2
0	1	1	1	$x'.y.z$	m3	$x+y'+z'$	M3
1	0	0	1	$x.y'.z'$	m4	$x'+y+z$	M4
1	0	1	1	$x.y'.z$	m5	$x'+y+z'$	M5
1	1	0	1	$x.y.z'$	m6	$x'+y'+z$	M6
1	1	1	1	$x.y.z$	m7	$x'+y'+z'$	M7

مینترم (SOP) و ماکسترم ها (POS)^(۲)

مثال:

$$f(x,y,z) = \sum m(1,2,4,5,6)$$



$$f(x,y,z) = \prod M(0,3,7)$$

مینترم (SOP) و ماکسترم ها (POS)(2)

مثال: تابع زیر را به صورت مینترمی بنویسید.

$$F(x, y) = x \cdot y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

۱. رسم جدول درستی

۲. تعیین مینترم ها

$$F(x, y) = \sum F(2)$$

مینترم (SOP) و ماکسترم ها (POS)(3)

مثال: $f(A, B, Q, Z)$ و $f'(A, B, Q, Z)$ را به صورت مینترمی بنویسید.

$$f(A, B, Q, Z) = A'B'Q'Z' + A'B'Q'Z + A'BQZ' + A'BQZ$$

$$f(A, B, Q, Z) = A'B'Q'Z' + A'B'Q'Z + A'BQZ' + A'BQZ$$

$$= m_0 + m_1 + m_6 + m_7$$

$$= S m(0, 1, 6, 7)$$

$$f'(A, B, Q, Z) = m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12}$$

$$+ m_{13} + m_{14} + m_{15}$$

$$= S m(2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

فصل 3

خصوصیات توابع سویچی

جدول کارنو

برای ساده سازی توابع با حداکثر ۶ ورودی، میتوان از جدول کارنو استفاده کرد.

در این روش جدولی با توجه به تعداد ورودی ها در نظر گرفته میشود؛ و به هر مینترم یک خانه از این جدول اختصاص میابد.

جدول کارنو برای 3 ورودی

$f(x,y,z)$

yz

x

00 01 11 10

0

0

1

3

2

1

4

5

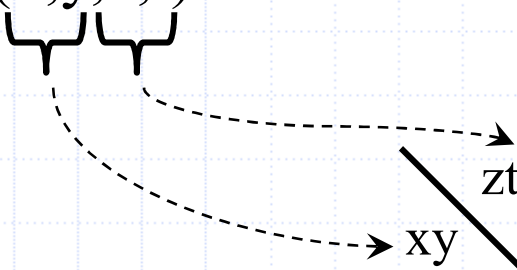
7

6

	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

جدول کارنو برای 4 ورودی

$f(x,y,z,t)$



	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10