۱) حاصل $\iint_D \frac{x+2y}{\cos(x-y)}\,dx\,dy$ که در آن D محدود به ناحیه زیر است را محاسبه کنید؟

$D:\ y=-\frac{1}{2}x\ ,\ y=-\frac{1}{2}x+1\ ,\ y=x-1\ ,\ y=x$

$$\begin{cases} x+2y=u \\ x-y=v \end{cases} \to J=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3 \to dx\,dy=\frac{1}{3}du\,dv$$

$$\begin{cases} y=x \to x-y=0 \\ y=x-1 \to x-y=1 \end{cases} \to 0\leqslant v\leqslant 1 \qquad \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \to 2y+x=2 \\ y=-\frac{1}{2}x \to 2y+x=0 \end{cases} \to 0\leqslant u\leqslant 2$$

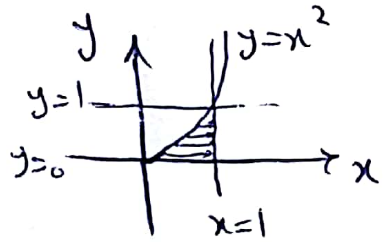
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{1}{3}\int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{2}\frac{u}{\cos v}\,du\,dv=\frac{1}{3}\left(\int_{v=0}^{1}\frac{dv}{\cos v}\right)\left(\int_{u=0}^{2}u\,du\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|\sec v+\operatorname{tg} v|\Big|_{v=0}^{1}\right)\left(\frac{u^2}{2}\Big|_{u=0}^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 1+\operatorname{tg}1|\right)(2)=\boxed{\frac{2}{3}\ln(\sec(1)+\operatorname{tg}(1))}$$

۲) مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{1}\frac{y e^{x^2}}{x^3}\,dx\,dy$$



$$=\int_{x=0}^{1}\boxed{\int_{y=0}^{x^2}\frac{y e^{x^2}}{x^3}\,dy}\,dx$$

$$\frac{e^{x^2}}{x^3}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{x^2}=\frac{e^{x^2}}{x^3}\cdot\frac{x^4}{2}$$

$$=\int_{x=0}^{1}\frac{1}{2}x e^{x^2}\,dx=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_{x=0}^{1}=\boxed{\frac{1}{4}(e-1)}$$

$\boxed{\text{math-teacher.blog.ir}}$

ابراهیمی :
ابراهیم ابراهیمی
خرداد ۹۷

پاسخنامه پایان ترم ریاضی ۲ «ابراهیم شاه ابراهیمی» ، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

---

۳) مقدار کار انجام شده $(\int F.dr)$ توسط میدان برداری

$$F = \sin y \vec{i} + (x\cos y + \cos z)\vec{J} - y\sin z\vec{k}$$

روی مسیر C به معادله $r(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ را بیابید.

$$\overrightarrow{\text{Curl} F} = \begin{vmatrix} i & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & x\cos(y)+\cos(z) & -y\sin(z) \end{vmatrix} = (-\sin z + \sin z, 0-0, \cos y - \cos y) = (0,0,0)$$

← میدان پایستار است.

$$\rightarrow \int F.dr = \int \sin y \, dx + \int \cos z \, dy = \sin y \cdot x + \cos z \cdot y \Big|_{t=0 \xrightarrow{r(t)} (0,1,0)}^{t=\frac{\pi}{2} \xrightarrow{r(t)} (1,0,\pi)}$$

$$= (0+0) - (0+1)$$

$$= \boxed{-1}$$

---

۴) فرض کنید S ، استوانه $x^2+y^2=a^2$ ، $0 \leq z \leq h$ همراه قاعده بالایی آن $(z=h, x^2+y^2 \leq a^2)$ باشد، اگر $F = -y\vec{i} + x\vec{J} + x^2\vec{K}$ ، مطلوب است $\iint_S \text{Curl} F . n d\sigma$ که در آن n بردار قائم خارج S است.

$(g: z-h=0)$

$$\vec{n} d\sigma = \frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{K}|} dA = \frac{(0,0,1)}{1} dA$$

$$\overrightarrow{\text{Curl} F} = \begin{vmatrix} i & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & x^2 \end{vmatrix} = (0, -2x, 2)$$

$$\rightarrow \iint \text{Curl} F . n d\sigma = \iint (0,0,1).(0,-2x,2) dA$$

$$= \iint 2 \, dA = 2\iint dA \xrightarrow{x^2+y^2=a^2} 2(\pi(a)^2) = \boxed{2\pi a^2}$$

$\boxed{\text{math-teacher.blog.ir}}$

«دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی» پاسخنامه پایان ترم «ریاضی ۲»

۹۷/۳/۲۸ «ابراهیم شاه ابراهیمی»

۵) مطلوبست محاسبه انتگرال سطح $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ که در آن

$$F=(2xz)\vec{i}+(1-4xy^2)\vec{j}+(2z-z^2)\vec{k}$$

و S رویه جسم محصور به سهموی $z=6-2x^2-2y^2$ و صفحه xy است.

قضیه دیورژانس یا گاوس $\longrightarrow$ $\iint F\cdot n\,d\sigma=\iiint \operatorname{div}F\,dv$

$$\operatorname{div}F=2z+(-8xy)+(2-2z)=\underline{2-8xy}$$

$$\iiint(2-8xy)\,dv \qquad \begin{cases} z=6-2(x^2+y^2)\\ xy \text{ صفحه } \longrightarrow z=0\end{cases}$$

مختصات استوانه‌ای $\longrightarrow$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{3}}\int_{z=0}^{6-2r^2}\left(2-8(r\cos\theta)(r\sin\theta)\right)dz\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\underbrace{\int_{r=0}^{\sqrt{3}}(2-4r^2\sin2\theta)(6r-2r^3)\,dr}_{6r^2-r^4(1+6\sin2\theta)+\frac{4}{3}r^6\sin2\theta\Big|_{r=0}^{\sqrt{3}}=9-18\sin2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}(9-18\sin2\theta)\,d\theta=9\theta+9\cos2\theta\Big|_{\theta=0}^{2\pi}$$

$$=\boxed{18\pi}$$

math-teacher.blog.ir

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
«مدرس تخصصی دانشگاه»

math-teacher.blog.ir

« دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی »

پاسخنامه پایانترم ریاضی ۲

ابراهیم شاه ابراهیمی

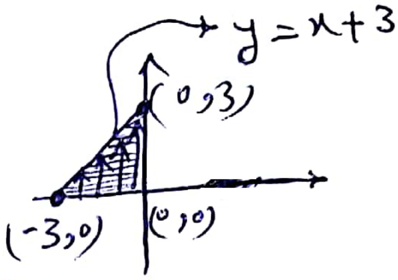
۲۸/۳/۹۷

---

۴) درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $F=(xy^2+x^2)\vec{i}+(4x-1)\vec{J}$

روی مثلث با رئوس $(0,3)$ $(0,0)$ $(-3,0)$ بررسی کنید

$\xrightarrow{\text{قضیه گرین}} \oint F\cdot dr = \iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$



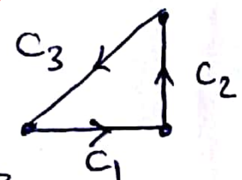
$\xrightarrow{\text{طرف راست}} \begin{cases}\frac{\partial Q}{\partial x}=4\\ \frac{\partial P}{\partial y}=2xy\end{cases} \to \iint 4-2xy \; dA$

$$\int_{x=-3}^{0}\boxed{\int_{y=0}^{x+3}(4-2xy)\,dy}\,dx = \int_{x=-3}^{0}(-x^3-6x^2-5x+12)\,dx$$

$$4y-xy^2\Big|_{y=0}^{x+3} = 4(x+3)-x(x+3)^2$$

$$\to -\frac{x^4}{4}-2x^3-\frac{5}{2}x^2+12x\Big|_{x=-3}^{0} = \boxed{\frac{99}{4}}$$

$\xrightarrow{\text{طرف چپ}} \oint_C F\cdot dr = \int_{C_1}F\cdot dr+\int_{C_2}F\cdot dr+\int_{C_3}F\cdot dr$



$C_1: \; r(t)=(0-(-3),(0-0))t+(-3,0)=(3t-3,0) \begin{cases}F=((3t-3)^2, 4(3t-3)-1)\\ dr=(3,0)dt\end{cases}$

$$\int_{C_1}F\cdot dr = \int_{t=0}^{1}3(3t-3)^2=\boxed{9}$$

$C_2: \; r(t)=(0-0,3-0)t+(0,0)=(0,3t) \begin{cases}F=(0,-1)\\ dr=(0,3)dt\end{cases}$

$$\int_{C_2}F\cdot dr = \int_{t=0}^{t=1}-3\,dt = -3t\Big|_0^1=\boxed{-3}$$

$C_3: \; r(t)=(t,t+3) \begin{cases}F=(t(t+3)^2+t^2, 4t-1)\\ dr=(1,1)dt\end{cases}$

$$\int_{C_3}F\cdot dr = \int_{t=0}^{-3}(t(t+3)^2+t^2+4t-1)\,dt=\boxed{\frac{75}{4}}$$

$\to \oint_C F\cdot dr = 9-3+\frac{75}{4} = \boxed{\frac{99}{4}}$

✓ اثبات شد

math-teacher.blog.ir