



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



# محافل ریاضی

(تجربه روس‌ها)

تألیف د. فومین / س. گنکین / ای. ایتنبرگ  
ترجمه ارشک حمیدی / مهرداد مسافر



کتاب **محافل ریاضی** در بردارندهٔ سنت پربراری است که از فعالیت‌های فوق برنامهٔ ریاضی در اتحاد شوروی سابق، به ویژه شهر لنینگراد، برجا مانده است. هر فصل این کتاب طوری نوشته شده است که خواننده ضمن آشنایی با موضوع، توانایی‌های بیشتری در مسأله حل کردن هم به دست بیاورد. علاوه بر این، کتاب الگویی مناسب برای برگزاری جلسات و محافل ریاضی در اختیار معلمان می‌گذارد.

مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی، معلمان و سایر علاقه‌مندان مفید است.



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده  
عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)  
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

زیر نظر :  
یحیی تابش  
عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف  
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

# از کتابهای این مجموعه



## کتابهای زرد

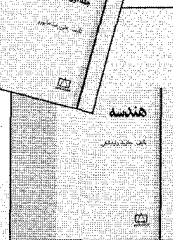
- ◆ نظریه اعداد
- ◆ هندسه
- ◆ جبر
- ◆ ترکیبیات
- ◆ هنر مسأله حل کردن

## کتابهای نارنجی

- ◆ هندسه مسطحه
- ◆ پانصد مسأله ریاضی پیکارجو
- ◆ از اردوش تا کی یف
- ◆ دایره ها
- ◆ فنون مسأله حل کردن
- ◆ محافل ریاضی
- ◆ مباحثی از هندسه
- ◆ ۱۰۲ مسأله ترکیبیات
- ◆ ۱۰۱ مسأله جبر
- ◆ آشنایی با ترکیبیات

## کتابهای قرمز

- ◆ حل مسأله از طریق مسأله
- ◆ برگزیده مسأله های جبر و آنالیز
- ◆ المپیادهای ریاضی چین







# مخافل ریاضی

**( تجربه روسها )**

تألیف د. فومین / س. گنکین / ای. ایتنبرگ  
ترجمه ارشک حمیدی / مهرداد مسافر

# Mathematical Circles

(Russian Experience)

Dmitri Fomin/Sergey Genkin/Ilia Itenberg

American Mathematical Society

رسامی: فاطمه ثقفی  
نظارت بر چاپ: علی محمدپور  
چاپ و صحافی: خاشع

مدیر تولید: فرید مصلحی  
حروفچینی و صفحه‌بندی: سپیده آذروند،  
زهرا حلاج  
طراح جلد: زهرا قورچیان

## محافل ریاضی (تجربه روسها)

مؤلفان: دمیتری فومین، سرگی گنکین، ایلیا ایتنبرگ  
مترجمان: ارشک حمیدی، مهرداد مسافر  
ناشر: انتشارات فاطمی  
چاپ سوم، ۱۳۹۱  
شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه  
قیمت: ۷۸۰۰ تومان  
شابک ۹۶۴-۳۱۸-۴۳۸-۲  
ISBN 964-318-438-2

کلیه حقوق برای انتشارات فاطمی محفوظ است.



انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،

شماره ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)

www.fatemi.ir • info@fatemi.ir

فامین، دمیتری ولادیمیروویچ، ۱۹۶۵ - م.  
محافل ریاضی/مؤلفان دمیتری فامین، سرگی گنکین، ایلیا ایتنبرگ: مترجمان ارشک حمیدی، مهرداد مسافر. - تهران:  
ناظمی، ۱۳۸۶.  
دوازده، ۳۴۸ ص: مصور. (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)  
ISBN 964-318-438-2  
فهرستبوسی بر اساس اطلاعات فیبا.  
چاپ سوم: ۱۳۹۱  
عنوان به انگلیسی:  
۱. ریاضیات - سرگرمی‌ها. الف. گنکین، سرگی آلكساندروویچ، Genkin, Sergei Aleksondrovich. ب. ایتنبرگ،  
ایلیا ولادیمیروویچ، ۱۹۶۶ - Itenberg, I.V. (Ilia Vladimirovich). ج. حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ - مترجم.  
د. مسافر، مهرداد، مترجم. ه. عنوان.

۷۳/۷۴

QA۹۵/۵۸۷.۲

۱۳۸۶

کتابخانه ملی ایران

۱۰۲۶۲۳۸

## فهرست

هفت	آمادگی برای المپیاد ریاضی
نه	پیشگفتار
	بخش اول. سال اول
۱	فصل ۵. فصل صفر
۷	فصل ۱. زوجیت
۱۳	فصل ۲. ترکیبیات-۱
۲۵	فصل ۳. بخش پذیری و باقی مانده‌ها
۴۱	فصل ۴. اصل لانه کبوتری
۵۱	فصل ۵. گرافها-۱
۶۳	فصل ۶. نابرابری مثلث
۷۱	فصل ۷. بازیها
۸۳	فصل ۸. مسأله‌هایی برای سال اول
	بخش دوم. سال دوم
۹۷	فصل ۹. استقرا (ای.س.روبانف)
۱۲۳	فصل ۱۰. بخش پذیری-۲: هم‌نهستی و معادله‌های دیوفانتی
۱۴۱	فصل ۱۱. ترکیبیات-۲
۱۶۱	فصل ۱۲. ناورداها



۱۷۵	فصل ۱۳. گرافها- ۲
۱۹۵	فصل ۱۴. هندسه
۲۱۳	فصل ۱۵. میناهای عددی
۲۲۳	فصل ۱۶. نابرابریها
۲۴۱	فصل ۱۷. مسأله‌هایی برای سال دوم
۲۵۹	پیوست (الف). مسابقه‌های ریاضی
۲۶۹	پیوست (ب). پاسخ، راهنمایی، راه حل

## آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست و یکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش<sup>۱</sup> به صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در

1. Baron Loránd Eötvös

سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپιάد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپιάد ریاضی آنچه اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهاى خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسه انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه آمادگی برای المپιάد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دسته اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریه اعداد، آنالیز و جبر است.

دسته دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعه مسأله‌ها و کتابهای کلاسیک المپιάد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دسته سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته درباره المپιάد ریاضی است. مجموعه آمادگی برای المپιάد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همه چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

\*\*\*

کتاب حاضر از دسته دوم است. این کتاب حاصل تجربه‌هایی است که معلمان و ریاضیدانان برجسته طی سالیان متمادی سر کلاسهای فوق برنامه ریاضی در شهر لنینگراد (سنت پترزبورگ) به‌دست آورده‌اند.

لنینگراد خاستگاه المپιάدهای ریاضی است. نتایج درخشانی که دانش‌آموزان این شهر در مسابقه‌های ریاضی کسب می‌کنند و ریاضیدانان برجسته‌ای که این شهر پرورش داده است حاصل برگزاری منظم این‌گونه کلاسها است.



## پیشگفتار

این کتاب اصولاً برای کمک به کسانی نوشته شده است که در اتحاد شوروی سابق دست‌اندرکار آموزشهای فوق‌برنامه ریاضی بوده‌اند: معلمان مدارس، استادان دانشگاه که با برنامه‌های آموزش ریاضی سروکار دارند، علاقه‌مندان به برپایی محافل ریاضی، یا کسانی که دوستدار مطالعه مطالبی هستند که هم ریاضی است هم سرگرم‌کننده. بی‌شک، دانش‌آموزان هم می‌توانند خودشان از این کتاب استفاده کنند. دلیل دیگر نگاشتن این کتاب، اعتقاد ما بر لزوم ثبت و ضبط کردن نقشی است که سنت آموزش ریاضی لنینگراد (سنت پترزبورگ فعلی) طی شصت سال گذشته ایفا کرده است. با اینکه شهر ما خاستگاه المپیادهای ریاضی در اتحاد جماهیر شوروی بوده است (نخستین سمینارهای دانش‌آموزی در ۱۹۳۱-۳۲) و اولین المپیاد شهری در سال ۱۹۳۴ در این شهر برگزار شده است.) و هنوز هم از پیشگامان این عرصه است، اما تجربیات آموزشی گرانبار آن به قدر کافی برای استفاده علاقه‌مندان ثبت نشده است. هر چند که تنوع مطالب مطرح شده در این کتاب زیاد است، اما روش آموزشی آن همگون است. معتقدیم که این کتاب همه مطالب اصلی برای جلسات محافل ریاضی در دو سال نخست آموزشهای فوق‌برنامه (برای دانش‌آموزان ۱۴-۱۲ ساله) را دربر دارد. هدف اصلی ما فراهم کردن مطالب قابل مطرح شدن در جلسات و جمع‌آوری مسائل ساده برای معلمان (یا کسانی که علاقه‌مندند زمانی را صرف یاد دادن ریاضیات غیرمعمول به دانش‌آموزان کنند) بوده است. می‌خواستیم درباره ایده‌هایی از ریاضیات صحبت به میان آوریم که دانستن آنها برای دانش‌آموزان مهم است، و نیز اینکه چگونه می‌توان توجه دانش‌آموزان را به آنها جلب کرد.

باید تأکید کنیم که آماده کردن و رهبری چنین جلساتی خودش کاری خلاقانه است. بنابراین، پیروی کورکورانه از توصیه‌های ما نامعقول است. با این همه، امیدواریم این کتاب مطالب بیشتر جلسات شما را فراهم آورد. استفاده از این کتاب به روش زیر مناسب‌تر است: هنگام بررسی موضوعی خاص، معلم

فصل مربوط در این کتاب را بخواند و آن را تحلیل کند، سپس برنامه‌ای را برای جلسه موردنظر طراحی کند. البته، گاهی لازم است متناسب با سطح دانش‌آموزان مطالبی تکمیلی را اضافه کرد. مایلیم که دو ویژگی بارز سنت فعالیت‌های فوق‌برنامه آموزش ریاضی لنینگراد را خاطرنشان کنیم: (۱) در جلسات به گفتگوی پرشور میان دانش‌آموزان و معلمان اهمیت زیادی داده می‌شود، حتی اگر ممکن باشد به وضعیت هر دانش‌آموز جداگانه رسیدگی می‌شود. (۲) فعالیتها از سنین نسبتاً پایین شروع می‌شوند: معمولاً در سال ششم (۱۲-۱۱ سالگی) و گاهی حتی زودتر.

این کتاب به عنوان راهنمای ویژه دانش‌آموزان دبیرستانی و معلمان آنها نگاشته شده است. بی‌شک، سن دانش‌آموزان در نحوه برگزاری جلسات مؤثر است. بنابراین، چند پیشنهاد داریم: الف) برای دانش‌آموزان کم سن و سال برگزاری جلسه‌ای طولانی را که فقط به یک موضوع اختصاص دارد مناسب نمی‌دانیم. معتقدیم که عوض کردن بحث حتی در یک جلسه هم مفید است. ب) لازم است گهگاه مطالبی که قبلاً خوانده شده یادآوری شود. می‌توان این کار را با استفاده از مسأله‌هایی که در المپیادها یا مسابقات ریاضی دیگر مطرح شده انجام داد (پیوست (الف) را ببینید).

ج) سعی کنید در بررسی هر موضوع به اصلی‌ترین نتایج بپردازید و مطمئن شوید که این نتایج و ایده‌ها کاملاً درک شده‌اند (نه اینکه فقط به خاطر سپرده شده‌اند!). د) توصیه می‌کنیم که در هر جلسه همواره از فعالیت‌های غیرمعمول و «بازی‌گونه» در کنار بررسی کامل راه‌حلها و اثباتها استفاده کنید. همچنین استفاده از مسأله‌های تفریحی و مطالب بامزه ریاضی مهم است.

\* \* \*

این کتاب از این پیشگفتار، دو بخش اصلی، پیوست (الف) با عنوان «مسابقه‌های ریاضی» و پیوست (ب) با عنوان «پاسخ، راهنمایی، راه‌حل» تشکیل شده است. بخش اول («سال اول») با فصل صفر آغاز می‌شود که از سؤالی که بیشتر مربوط به دانش‌آموزان ۱۱-۱۰ ساله‌اند تشکیل شده است. مسأله‌های این فصل ظاهراً محتوای ریاضی ندارند، و هدف اصلی از مطرح کردن آنها نشان دادن توانایی دانش‌آموزان در ریاضی و منطق است. باقی‌مانده این بخش به هشت فصل تقسیم شده است. هفت فصل اول اینها مربوط به موضوعهایی خاص‌اند و هشتمین فصل (با عنوان «مسأله‌هایی برای سال اول») صرفاً گردآیه‌ای از مسأله‌هایی با موضوعات مختلف است. بخش دوم («سال دوم») از نه فصل تشکیل شده است که برخی از آنها دنباله مطالبی هستند که در بخش اول آمده‌اند (مثلاً، فصلهای «گرافها-۲» و «ترکیبیات-۲»). بقیه فصلها هم شامل مطالبی هستند که برای سال اول دشوارند: «ناورداها»، «استقرا» و «نابرابریها».

پیوست (الف) درباره پنج نوع از مسابقات ریاضی است که در اتحاد شوروی سابق رونق داشته‌اند. این مسابقات را می‌توان در جلسات محافل ریاضی برگزار کرد یا بین محافل ریاضی مختلف یا حتی مدارس ترتیب داد.

\* \* \*

- (۱) مسأله‌های دشوارتر را با علامت ستاره (\*) مشخص کرده‌ایم.
- (۲) در پیوست (ب) تقریباً برای همه مسأله‌ها یا راه‌حل کاملشان را آورده‌ایم یا دست‌کم راهنمایی برای راه‌حل یا پاسخ آنها را. اگر مسأله‌ای محاسباتی باشد، معمولاً فقط پاسخ را ذکر کرده‌ایم. راه‌حل مسأله‌هایی را که خواسته‌ایم خواننده خودش راه‌حل را پیدا کند نیاورده‌ایم (این موضوع، به ویژه، در مورد فصلهای ۸ و ۱۷ درست است).



## فصل ۰

### فصل صفر

در این فصل ۲۵ مسأله ساده آورده‌ایم. برای حل کردن این مسأله‌ها بجز عقل سلیم و ساده‌ترین مهارت‌های محاسباتی چیز دیگری لازم نیست. از این مسأله‌ها می‌توان در جلسات محافل ریاضی برای سنجش میزان توانایی دانش‌آموزان در ارائه استدلال‌های منطقی و به‌طور کلی استعداد ریاضیشان یا به‌عنوان مسأله‌های سرگرم‌کننده استفاده کرد.

\* \* \*

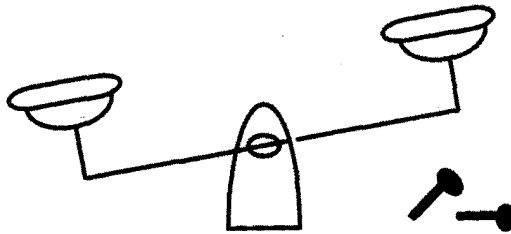
مسأله ۱. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو تا تقسیم می‌شود، یک ثانیه بعد از آن هر یک از باکتری‌های حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شود و همین‌طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چه وقت نصف ظرف پر شده است؟

مسأله ۲. آنا، جان و آلکس سوار اتوبوس دیسنی‌لند می‌شوند. هر کدام از آنها باید ۵ بلیت به‌عنوان کرایه بدهد، اما آنها فقط بلیتهایی به ارزش ۱۰، ۱۵ و ۲۰ دارند (هر یک تعدادی نامحدود از هر نوع بلیت دارد). چگونه می‌توانند کرایه‌شان را بپردازند؟

مسأله ۳. جک چند برگ متوالی از کتابی را کند. شماره نخستین صفحه‌ی کنده شده ۱۸۳ است و می‌دانیم شماره آخرین صفحه‌ی کنده شده هم با همین رقمها منتها به‌ترتیبی دیگر نوشته شده است. جک چند صفحه از کتاب را کنده است؟

مسأله ۴. در یک گونی ۲۴ کیلوگرم میخ وجود دارد. آیا می‌توان فقط با استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای ۹ کیلوگرم میخ از گونی برداشت؟ (شکل ۱ را ببینید.)

مسأله ۵. هزارپایی از زمین به‌راه می‌افتد و از تیرکی چوبی به بلندی ۷۵ سانتیمتر به طرف بالا می‌خزد.



شکل ۱

هر روز ۵ سانتیمتر به طرف بالای تیرک می‌خزد و هر شب ۴ سانتیمتر به طرف پایین آن سر می‌خورد. چه وقت برای اولین بار به بالای تیرک می‌رسد؟

مسئله ۶. یک سال، ماه ژانویه درست چهار تا جمعه و چهار تا دوشنبه داشت. بیستم ژانویه آن سال چه روزی از هفته بوده است؟

مسئله ۷. در جدولی مستطیلی شکل که از  $۹۹۱ \times ۱۹۹$  مربع کوچک برابر تشکیل شده است هر قطر از چند خانه (مربع) می‌گذرد؟

مسئله ۸. از عدد

۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵

۱۰ رقم را طوری خط بزنید که عدد باقی‌مانده بزرگترین عدد ممکن باشد.

\*\*\*

مسئله ۹. پیترو می‌گوید: «پریروز ۱۰ ساله بودم اما سال بعد ۱۳ ساله می‌شوم.» آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسئله ۱۰. گربه پیت همیشه قبل از بارندگی عطسه می‌کند. گربه امروز عطسه کرد؛ پیت خیال می‌کند «عطسه گربه نشانه آن است که امروز باران می‌بارد.» آیا حق با اوست؟

مسئله ۱۱. معلمی روی یک برگ کاغذ چند دایره می‌کشد. سپس از دانش‌آموزی می‌پرسد: «چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «هفت تا.» معلم می‌گوید: «درست است.» و بعد از دانش‌آموز دیگری می‌پرسد: «بگو ببینم چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «پنج تا.» معلم باز هم می‌گوید: «کاملاً درست است.» واقعاً چند دایره روی این برگ کاغذ کشیده شده است؟

مسئله ۱۲. پسر پدر استاد دانشگاهی با پدر پسر آن استاد صحبت می‌کند و خود استاد در این گفتگو شرکت ندارد. آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسأله ۱۳. سه لاک پشت در امتداد راهی مستقیم می‌خزند و در یک جهت پیش می‌روند. لاک پشت اول می‌گوید: «دو لاک پشت دیگر پشت سرم هستند.» دومی می‌گوید: «یک لاک پشت پشت سرم و یکی دیگر جلوی من است.» لاک پشت سوم می‌گوید: «دو لاک پشت جلوتر از من‌اند و یکی دیگر پشت سرم است.» چطور چنین چیزی ممکن است؟

مسأله ۱۴. سه دانشمند در واگن قطاری نشسته‌اند. قطار به مدت چند دقیقه از تونلی می‌گذرد و واگن در تاریکی فرو می‌رود. وقتی از تاریکی بیرون می‌آیند هر یک از آنها می‌بیند که صورت همکارانش با دوده‌ای که به سرعت از پنجره باز تو آمده، سیاه شده است. آنها شروع می‌کنند به یکدیگر خندیدن که ناگهان آن‌که از دو نفر دیگر باهوشتر است می‌فهمد که صورت خودش هم باید کثیف شده باشد. چطور به این نتیجه رسیده است؟

مسأله ۱۵. سه قاشق شیر از یک لیوان شیر برمی‌داریم و توی یک لیوان چای می‌ریزیم و مایع حاصل را حسابی به هم می‌زنیم. بعد از این مخلوط سه قاشق برمی‌داریم و در لیوان شیر می‌ریزیم. اکنون کدام عدد بزرگتر است: درصد شیر در چای یا درصد چای در شیر؟

\* \* \*

مسأله ۱۶. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ مربعی جادویی بسازید؛ یعنی این عددها را در خانه‌های جدولی  $3 \times 3$  طوری قرار دهید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر همگی با هم برابر باشند.

مسأله ۱۷. در یک مسأله جمع حساب حروف را جایگزین رقمها می‌کنیم (به جای رقمهای برابر، حروف یکسان و به جای رقمهای متمایز حروف مختلف می‌گذاریم). نتیجه این می‌شود که

$$\text{LOVES} + \text{LIVE} = \text{THERE}$$

بیشترین مقدار ممکن **THERE** کدام است؟

مسأله ۱۸. سازمان اطلاعات و امنیت روسیه پیغامی رمزی را که از یکی از جمهوریها ارسال شده بود رهگیری کرده است. این پیغام چنین خوانده می‌شود

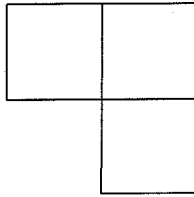
$$\text{BLASE} + \text{LBSA} = \text{BASES}$$

می‌دانیم که در به رمز نوشتن پیغامها رقمهای برابر به حروف یکسان تبدیل می‌شوند و رقمهای متمایز به حروف مختلف. برای این معما از دو کامپیوتر بزرگ دو جواب مختلف به دست آمده است. آیا چنین چیزی ممکن است یا یکی از آنها را باید تعمیر کرد؟

مسأله ۱۹. ۱۲۷ اسکناس یک دلاری را بین ۷ کیف پول طوری تقسیم کنید که بتوان هر مبلغی از ۱ دلار تا ۱۲۷ دلار را که برحسب دلار عددی صحیح است، بدون بازکردن کیف پولها پرداخت.

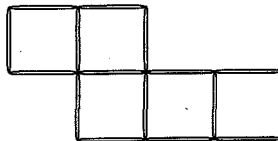
\* \* \*

مسأله ۲۰. شکل زیر را به چهار تا شکل طوری تقسیم کنید که هر یک از آنها مشابه شکل اصلی و ابعادهای آن باشد.



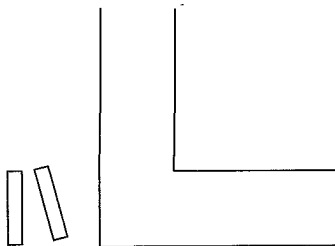
شکل ۲

مسأله ۲۱. تعدادی چوب کبریت به شکل زیر چیده شده اند. دو تا از این چوب کبریتها را طوری جابه جا کنید که این شکل به چهار تا مربع تبدیل شود که هر ضلع هر یک از آنها یک چوب کبریت باشد.



شکل ۳

مسأله ۲۲. رودخانه ای به عرض ۴ متر در جایی  $90^\circ$  تغییر مسیر داده است (شکل ۴ را ببینید). آیا می توان فقط با دو تکه الوار که طول هر یک از آنها  $3/9$  متر است، روی رودخانه پل زد و از آن گذشت؟

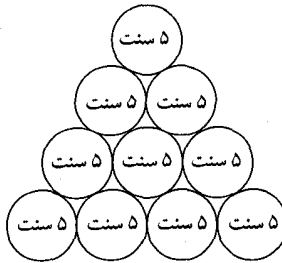


شکل ۴

مسأله ۲۳. آیا می‌توان شش مداد بلند و گرد را طوری چید که هر یک از آنها با همه مدادهای دیگر تماس داشته باشد؟

مسأله ۲۴. با استفاده از قیچی در یک برگ کاغذ معمولی (مثلاً به اندازه همین صفحه) سوراخی ایجاد کنید که فیلی بتواند از آن رد شود.

مسأله ۲۵. ده سکه مانند شکل ۵ چیده شده‌اند. کمترین تعداد سکه‌هایی که باید برداریم تا مطمئن شویم که از سکه‌های باقی‌مانده هیچ سه‌تایشان در رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع قرار ندارند چقدر است؟



شکل ۵

# فصل ۱

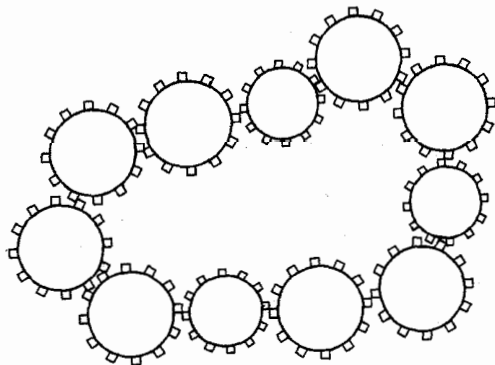
## زوجیت

می‌گوییم زوجیت عددی زوج، زوج است و زوجیت عددی فرد، فرد. با مفهومی به این سادگی می‌توان مسأله‌های گوناگونی را حل کرد. کارایی این روش در حل بسیاری از مسأله‌ها، از جمله برخی مسأله‌های به‌غایت دشوار، ثابت شده است.

به‌دلیل سادگی زیاد این مبحث است که می‌توان مسأله‌هایی جالب برای دانش‌آموزانی طرح کرد که تقریباً هیچ پیش‌زمینه‌ای در ریاضیات ندارند. همین سادگی باعث می‌شود که نشان دادن ایده‌ی مشترک در همه‌ی مسأله‌هایی از این دست حتی از بقیه‌ی مواقع ضروری‌تر به‌نظر برسد.

### ۱. یکی در میانها

مسأله ۱. در صفحه‌ای یازده چرخ‌دنده به‌شکل زیر (شکل ۶ را ببینید.) در یک زنجیره چیده شده‌اند. آیا ممکن است که همه‌ی این چرخ‌دنده‌ها با هم بچرخند؟



شکل ۶

راه حل. پاسخ منفی است. فرض کنید که چرخ دنده اول ساعتگرد بچرخد. در این صورت چرخ دنده دوم باید پادساعتگرد بچرخد، سومی باز ساعتگرد، چهارمی پادساعتگرد و همین طور تا آخر. روشن است که چرخ دنده‌های «فرد» باید ساعتگرد بچرخند و چرخ دنده‌های «زوج» پادساعتگرد. اما در این صورت چرخ دنده‌های اول و یازدهم باید در یک جهت بچرخند که این تناقض است.

ایده اصلی در راه حل این مسأله این است که چرخ دنده‌هایی که ساعتگرد می‌چرخند و چرخ دنده‌هایی که پادساعتگرد می‌چرخند یکی در میان قرار دارند. یافتن چیزهایی که یکی در میان قرار دارند ایده اصلی راه حل مسأله‌های زیر هم هست.

مسأله ۲. در صفحه شطرنج، اسبی از خانه  $a_1$  به راه می‌افتد و بعد از انجام چند حرکت به آنجا باز می‌گردد. ثابت کنید تعداد حرکت‌های این اسب عددی زوج است.

مسأله ۳. آیا ممکن است که اسبی از خانه  $a_1$  صفحه شطرنج به راه بیفتد و به خانه  $h_8$  برود و در مسیرش در هر یک از خانه‌های دیگر درست یک بار بنشیند؟

راه حل. خیر، ممکن نیست. اسب در هر حرکت از خانه‌ای سفید به خانه‌ای سیاه می‌رود و یا برعکس. چون این اسب باید ۶۳ حرکت انجام دهد، با حرکت آخر (حرکت فرد) باید به خانه‌ای برود که رنگش با رنگ خانه‌ای که از آنجا به راه افتاده بود یکی نباشد؛ ولی خانه‌های  $a_1$  و  $h_8$  هم‌رنگ‌اند.

مانند مسأله ۳ در بسیاری از مسأله‌های این بخش باید ثابت کنیم که وجود برخی وضعیت‌ها غیرممکن است. در واقع وقتی در سؤالی پرسیده می‌شود که آیا وجود وضعیتی ممکن است یا نه، پاسخمان در این بخش بدون استثناء «خیر» است. البته این امر برای دانش آموزانی که تجربه ریاضیشان کم است قدری مشکل ایجاد می‌کند. نخستین عکس‌العملشان یا سرخوردگی از این است که نمی‌توانند وضعیت «درست» را (که در شرط‌های غیرممکن موردنظر صدق می‌کند) پیدا کنند یا اعلام این مطلب است که وضعیت موردنظر غیرممکن است، بی‌آنکه درک روشنی از آنچه که برای اثبات این ادعا باید انجام داد داشته باشند. در اینجا مسأله‌ای ساده، مربوط به مسأله‌های «زوج و فرد» که بعداً در این بخش خواهید دید، می‌آوریم که این موضوع را روشن می‌کند:

آیا می‌توانید پنج عدد فرد پیدا کنید که مجموعشان  $100$  شود؟

به دنبال حل این مسأله می‌توان بحثی را پیش کشید که از طریق آن دانش‌آموزان متوجه شوند که فقط ضعف شخصی خودشان نیست که نمی‌گذارد این مجموعه از عددها را پیدا کنند، بلکه تناقضی در طبیعت خود مجموعه موردنظر وجود دارد که در این امر دخیل است. در این سطح، هم اثبات از طریق رسیدن به تناقض باعث سردرگمی دانش‌آموزان می‌شود و هم مفهوم اثبات غیرممکن بودن وجود

برخی وضعیتها. پرداختن به مسأله‌هایی دربارهٔ زوجیت راهی ساده و در عین حال مؤثر برای معرفی هر دو این مفهوماست.

مسألهٔ ۴. مسیری بسته از ۱۱ پاره‌خط تشکیل شده است. آیا ممکن است یک خط که از هیچ‌یک از رأسهای این مسیر نمی‌گذرد همهٔ پاره‌خطهایش را قطع کند؟

مسألهٔ ۵. سه دیسک حاکی روی یخ به نامهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی زمین بازی افتاده‌اند. بازیکنی به یکی از آنها طوری ضربه می‌زند که از میان دوتای دیگر بگذرد. او این کار را ۲۵ بار انجام می‌دهد. آیا با این کار می‌تواند این سه دیسک را به جاهای اولیه‌شان بازگرداند؟

مسألهٔ ۶. کاتیا و دوستانش دور دایره‌ای ایستاده‌اند. می‌دانیم هر دو بغل‌دستی هر یک از این بچه‌ها همجنس‌اند. اگر روی این دایره پنج پسر وجود داشته باشد، تعداد دخترها چندتا است؟

در اینجا اصلی دیگر را که در راه‌حل مسألهٔ قبلی آمده است خاطر نشان می‌کنیم: در زنجیرهٔ بسته‌ای که اشیاء در آن یکی در میان قرار گرفته‌اند، تعداد اشیای یک نوع (پسرها) با تعداد اشیای نوع دیگر (دخترها) برابر است.

## ۲. افراز کردن به جفتها

مسألهٔ ۷. آیا می‌توان مسیری بسته از ۹ پاره‌خط طوری رسم کرد که هر یک از آنها درست یکی از پاره‌خطهای دیگر را قطع کند؟

راه‌حل. اگر رسم چنین مسیر بسته‌ای ممکن باشد، آن وقت همهٔ این پاره‌خطها را می‌شود به چند جفت پاره‌خط متقاطع افراز کرد. اما در این صورت تعداد پاره‌خطها باید عددی زوج باشد.

روی ایدهٔ اصلی این راه‌حل انگشت می‌گذاریم: اگر بتوان مجموعه‌ای از اشیاء را به جفت‌هایی افراز کرد، آن وقت تعداد اشیای این مجموعه عددی زوج است. در اینجا چند مسألهٔ مشابه می‌آوریم:

مسألهٔ ۸. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی  $5 \times 5$  را با دومینوهای  $2 \times 1$  پوشاند؟

مسألهٔ ۹.  $101$  ضلعی محدب که یک محور تقارن دارد داده شده است. ثابت کنید این محور تقارن از یکی از رأسهایش می‌گذرد. در مورد  $10$  ضلعی‌ای که همین ویژگیها را دارد چه می‌توان گفت؟

مسأله‌های  $10$  و  $11$  دربارهٔ یک دست دومینو هستند که از مهره‌های مستطیلی شکل  $1 \times 2$  (شامل دو خانهٔ مربع‌شکل برابر) تشکیل شده است و در هر یک از خانه‌های هر یک از آنها از  $0$  تا  $6$  خال وجود دارد. همهٔ  $28$  جفت تعداد خالهای ممکن (شامل جفتها، مانند جفت یک، جفت دو و...) در



آنها وجود دارد. بازی دومینو این طور انجام می شود که بازیکنان نوبتی مهره ها را پشت سرهم می چینند تا زنجیره ای درست شود که در آن تعداد خالهای خانه های پهلوی هم دومینوهای مجاور با هم برابر است.

مسئله ۱۰. همه مهره های یک دست دومینو به شکل یک زنجیره چیده شده اند (به طوری که تعداد خالهای دو سر پهلوی هم دومینوهای مجاور یکی است). اگر یک سر این زنجیره عدد ۵ باشد عدد سر دیگرش چیست؟

مسئله ۱۱. از یک دست دومینو همه مهره هایی را که دست کم یک خانه شان هیچ خالی ندارد کنار می گذاریم. آیا بقیه دومینوها را می توان طبق قواعد بازی به شکل یک زنجیره چید؟

مسئله ۱۲. آیا می توان ۱۳ ضلعی محدبی را به چند متوازی الاضلاع تقسیم کرد؟

مسئله ۱۳. روی صفحه شطرنجی  $25 \times 25$  بیست و پنج سرباز را طوری قرار داده ایم که خانه هایی که اشغال کرده اند نسبت به قطری از صفحه متقارن اند. ثابت کنید دست کم یکی از این مهره ها روی این قطر قرار دارد.

راه حل. اگر هیچ مهره ای روی قطر مورد نظر نباشد، آن وقت می توان مهره ها را به جفتهایی که نسبت به این قطر قرینه اند افزایش کرد. بنابراین باید یکی (و در حقیقت تعدادی فرد) از مهره ها روی قطر مورد نظر باشد. در حل این مسئله، دانش آموزان اغلب در فهم این مطلب مشکل دارند که به جای فقط یک مهره ممکن است تعدادی فرد از مهره ها روی قطر مورد نظر باشند. در مورد این مسئله، می توانیم حکمان را درباره افزایش کردن به جفتهای این طور صورت بندی کنیم: اگر از اشیای مجموعه ای که تعداد عضوهایش فرد است، تعدادی جفت تشکیل دهیم، دست کم یک شیء جفت نشده باقی می ماند.

مسئله ۱۴. اکنون فرض کنید که در مسئله ۱۳ خانه هایی که مهره ها اشغال کرده اند نسبت به هر دو قطر متقارن باشند. ثابت کنید که یکی از مهره ها در خانه مرکزی صفحه قرار دارد.

مسئله ۱۵. در هر خانه جدولی  $15 \times 15$  یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۵ نوشته شده است. خانه هایی که نسبت به قطر اصلی قرینه اند، عددهایشان با هم برابرند و هیچ سطر یا ستونی شامل دو عدد برابر نیست. ثابت کنید روی قطر اصلی هیچ دو عددی با هم برابر نیستند.

### ۳. زوج و فرد

مسئله ۱۶. آیا می توان اسکناسی ۲۵ روبلی را به ده اسکناس ۱، ۳ یا ۵ روبلی خرد کرد؟

راه حل. خیر، این کار ممکن نیست. این نتیجه گیری بر اساس مطلبی ساده است: مجموع تعدادی زوج عدد فرد، عددی زوج است. این مطلب را می توان این طور تعمیم داد: زوجیت مجموع چند عدد فقط

به زوجیت تعداد جمعوندهای فردش بستگی دارد. اگر تعداد جمعوندهای فرد، عددی فرد (زوج) باشد، آن وقت مجموع موردنظر هم عددی فرد (زوج) است.

مسئله ۱۷. پیت دفتری ۹۶ برگی خرید و صفحاتش را از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری کرد. ویکتور ۲۵ برگ از دفتر پیت را کند و ۵۰ شماره‌ای را که روی این برگها بود با هم جمع کرد. آیا ممکن است که این مجموع برابر با ۱۹۹۰ باشد؟

مسئله ۱۸. حاصل ضرب ۲۲ عدد صحیح برابر با ۱ است. ثابت کنید مجموع این عددها صفر نیست.

مسئله ۱۹. آیا می‌توان با نخستین ۳۶ عدد اول «مربعی جادویی» تشکیل داد؟ در اینجا منظور از «مربعی جادویی» آرایه‌ای  $۶ \times ۶$  از خانه‌هاست که در هر خانه یک عدد وجود دارد و مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر مقداری ثابت است.

مسئله ۲۰. عددهای ۱ تا ۱۰ در یک سطر نوشته شده‌اند. آیا می‌توان میان آنها طوری علامتهای «+» و «-» گذاشت که مقدار عبارت حاصل ۰ شود؟ توجه داشته باشید که عددهای منفی هم می‌توانند فرد یا زوج باشند.

مسئله ۲۱. ملخی در امتداد خطی راست می‌جهد. با نخستین پرشش ۱ سانتیمتر حرکت می‌کند، با دومین پرش ۲ سانتیمتر و همین‌طور تا آخر. در هر جهش می‌تواند به جلو یا به عقب برود. ثابت کنید بعد از ۱۹۸۵ جهش، این ملخ ممکن نیست به نقطه‌ای که از آنجا به‌راه افتاده بود بازگردد.

مسئله ۲۲. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۵ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. همین طوری تصمیم می‌گیریم که دو عدد دلخواه را پاک کنیم و به جای آنها تفاضل مثبتشان را بنویسیم. بعد از اینکه این کار را چند بار انجام دادیم فقط یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. آیا ممکن است این عدد ۰ باشد؟

#### ۴. مسأله‌های گوناگون

در این بخش تعدادی مسئله دشوارتر آورده‌ایم. در راه حل آنها علاوه بر ایده زوجیت از مطالب دیگر هم استفاده می‌شود.

مسئله ۲۳. آیا می‌توان صفحه شطرنج  $۸ \times ۸$  معمولی را با دومینوهای  $۲ \times ۱$  طوری پوشاند که فقط خانه‌های  $a_1$  و  $h_8$  پوشانده نشده باقی بمانند؟

مسئله ۲۴. عدد ۱۷ رقمی دلخواهی را انتخاب می‌کنیم و رقمهایش را به ترتیب عکس می‌نویسیم تا عددی جدید به دست آید. این دو عدد را با هم جمع می‌کنیم. ثابت کنید مجموعشان شامل دست‌کم یک رقم زوج است.

مسئله ۲۵. در گروهی نظامی  $۱۰۰$  سرباز وجود دارند که هر شب سه تایشان مأموریت‌اند. آیا ممکن است که بعد از مدتی هر یک از سربازها با هر سرباز دیگر درست یک بار، با هم مأموریت بوده باشند؟

مسئله ۲۶. چهل و پنج نقطه روی امتداد پاره خط  $AB$ ، و بیرون آن انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها از نقطه  $A$  با مجموع فاصله‌هایشان از نقطه  $B$  برابر نیست.

مسئله ۲۷. نه عدد روی دایره‌ای می‌گذاریم: چهار تا  $۱$  و پنج تا  $۰$ . روی این عددها این عمل را انجام می‌دهیم: میان هر جفت عدد مجاور چنانچه برابر نباشند یک  $۰$  و اگر یکی باشند یک  $۱$  می‌گذاریم و بعد عددهای «قبلی» را پاک می‌کنیم. آیا ممکن است بعد از چندبار انجام این عمل همه عددهای باقی‌مانده برابر شوند؟

مسئله ۲۸. بیست و پنج دانش‌آموز و بیست و پنج معلم دور میزی گرد نشسته‌اند. ثابت کنید هر دو بغل‌دستی دست‌کم یکی از این افراد، دانش‌آموزند.

مسئله ۲۹. حلزونی روی سطحی صاف با سرعت ثابت می‌خزد و هر  $۱۵$  دقیقه به اندازه یک زاویه قائمه می‌چرخد. ثابت کنید که این حلزون فقط بعد از گذشت چند ساعت کامل می‌تواند به نقطه آغاز حرکتش بازگردد.

مسئله ۳۰. سه ملخ در امتداد خطی راست جفتک چارکش بازی می‌کنند. در هر نوبت یکی از ملخها فقط از روی یک ملخ دیگر می‌پرد. آیا ممکن است که این ملخها بعد از  $۱۹۹۱$  پرش به وضعیت اولیه‌شان بازگردند؟ (شکل ۷ را ببینید.)



شکل ۷

مسئله ۳۱. از  $۱۰۱$  سکه  $۵۰$  تایشان تقلبی‌اند و اختلاف وزن هر سکه تقلبی با سکه اصل  $۱$  گرم است. پیترو وسیله اندازه‌گیری به شکل ترازو دارد که اختلاف وزن میان اشیایی را که در کفه‌هایش گذاشته می‌شوند نشان می‌دهد. او یک سکه انتخاب می‌کند و می‌خواهد با یک بار وزن کردن بفهمد که تقلبی است یا نه. آیا می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسئله ۳۲. آیا می‌توان عددهای  $۱$  تا  $۹$  را پشت سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان  $۱$  و  $۲$ ، میان  $۲$  و  $۳$ ، ... و میان  $۸$  و  $۹$  عددی فرد باشد؟

## فصل ۲

### ترکیبیات - ۱

به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟ چند عدد شش رقمی («خوش یمن») وجود دارد؟ چند...؟ اینها و بسیاری پرسشهای مشابه دیگر را در این فصل بررسی می‌کنیم. ابتدا چند مسأله ساده می‌آوریم.

مسأله ۱. پنج فنجان مختلف و سه نعلبکی متفاوت در فروشگاه «مهمانی عصرانه» وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک فنجان و یک نعلبکی خرید؟

راه حل. ابتدا یک فنجان انتخاب می‌کنیم. بعد برای کامل کردن این سرویس می‌توانیم هر یک از سه نعلبکی را انتخاب کنیم. بنابراین ۳ سرویس فنجان و نعلبکی متمایز، شامل فنجان انتخاب شده، وجود دارد. چون پنج فنجان داریم، ۱۵ سرویس متمایز وجود دارد ( $15 = 5 \times 3$ ).

مسأله ۲. در فروشگاه «مهمانی عصرانه» چهار قاشق چایخوری مختلف هم وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک سرویس چایخوری شامل یک فنجان، یک نعلبکی و یک قاشق خرید؟

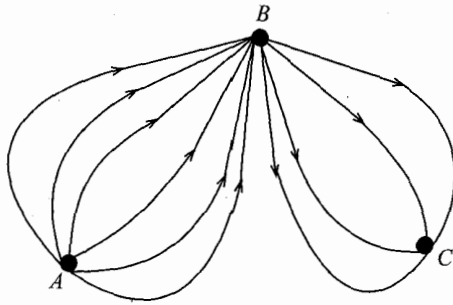
راه حل. یکی از ۱۵ سرویس فنجان و نعلبکی مسأله قبل را در نظر بگیرید. به چهار طریق مختلف می‌توان یک قاشق انتخاب کرد و این سرویس را کامل کرد. بنابراین تعداد همه سرویسهای ممکن برابر با ۶۰ است (چون  $60 = 15 \times 4 = 5 \times 3 \times 4$ ).

درست به همین طریق می‌توانیم مسأله زیر را حل کنیم.

مسأله ۳. A، B و C سه شهر سرزمین عجایب‌اند. از A به B شش راه وجود دارد و از B به C چهار راه (شکل ۸ را ببینید). به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

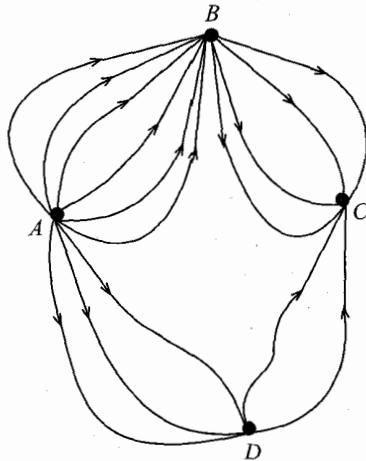
پاسخ:  $4 \times 6$  یا ۲۴ طریق.

در راه حل مسأله ۴ از ایده‌ای جدید استفاده می‌کنیم.



شکل ۸

مسئله ۴. اخیراً در سرزمین عجایب شهری به نام D ساخته شده است و چند راه جدید احداث شده‌اند (شکل ۹ را ببینید). اکنون به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟



شکل ۹

راه حل. دو حالت در نظر می‌گیریم: مسیرمان از B بگذرد یا از D. در هر حالت محاسبه تعداد مسیرها بسیار آسان است؛ اگر از B برویم، آن وقت برای رفتن از A به C، ۲۴ راه وجود دارد. در حالت دیگر ۶ راه وجود دارد. برای به دست آوردن پاسخ مسئله باید این دو عدد را با هم جمع کنیم. بنابراین از ۳۰ مسیر می‌توانیم از A به C برویم.  
تقسیم کردن مسئله به چند حالت ایده بسیار مفیدی است. این ایده در حل کردن مسئله ۵ هم به درد می‌خورد.

مسئله ۵. پنج فنجان، سه نعلبکی و چهار قاشق چایخوری، همگی متمایز، در فروشگاه «مهمانی عصرانه» وجود دارد. به چند طریق می‌توان از میان این لوازم دو قلم کالا با نامهای متفاوت خرید؟

راه‌حل. سه حالت ممکن است پیش آید: یک فنجان و یک نعلبکی بخریم، یا یک فنجان و یک قاشق و یا یک نعلبکی و یک قاشق. محاسبه تعداد راههایی که در هر یک از این حالتها ممکن است پیش آید چندان دشوار نیست: به ترتیب ۱۵، ۲۰ و ۱۲ راه. با جمع کردن این عددها پاسخ مسئله را به دست می‌آوریم: به ۴۷ طریق.

توصیه به معلمان. هدف اصلی که معلمان باید هنگام بحث درباره این مسأله‌ها دنبال کنند ایجاد این قابلیت در دانش‌آموزان است که بفهمند چه وقت تعداد راهها را باید با هم جمع کنند و چه وقت باید آنها را در هم ضرب کنند. البته به این منظور باید تعداد زیادی مسأله برای دانش‌آموزان مطرح کرد (در این باره چند مسأله در آخر این فصل آورده‌ایم (مسأله‌های ۲۸ تا ۳۲) و خود معلم هم می‌تواند چند مسأله طرح کند). از جمله موضوعات مناسب برای این مسأله‌ها خرید اشیا، نقشه‌های رفت و آمد، آرایش اشیا و موضوعاتی از این قبیل‌اند.

مسئله ۶. عددی طبیعی را در صورتی «فردنما» می‌نامیم که همه رقمهایش فرد باشند. چند عدد چهاررقمی فردنما وجود دارد؟

راه‌حل. روشن است که ۵ تا عدد یک‌رقمی فردنما وجود دارد. می‌توان به پنج طریق رقم فرد دیگری را به سمت راست هر یک از عددهای یک‌رقمی فردنما اضافه کرد. بنابراین  $5 \times 5$  یا ۲۵ عدد دورقمی فردنما داریم. به همین ترتیب  $5 \times 5 \times 5$  یا ۱۲۵ عدد سه‌رقمی فردنما و  $5 \times 5 \times 5 \times 5$  یا ۶۲۵ عدد چهاررقمی فردنما به دست می‌آوریم.

توصیه به معلمان. در مسأله آخر پاسخ به شکل  $m^n$  است. معمولاً پاسخی از این دست برای مسأله‌هایی به دست می‌آید که می‌توانیم عضوهای مجموعه‌ای  $m$  عضوی را در هر یک از  $n$  مکان داده شده قرار دهیم. در چنین مسأله‌هایی دانش‌آموزان ممکن است در تشخیص دو عدد  $m$  و  $n$  با مشکل مواجه شوند و در نتیجه پایه و نما را با هم اشتباه کنند.

در اینجا چهار مسأله مشابه دیگر آورده‌ایم.

مسئله ۷. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. با این کار چند دنباله شیر و خط متفاوت می‌توان به دست آورد؟ پاسخ: ۲۳.

مسئله ۸. هر خانه جدولی  $2 \times 2$  را می‌توان با یکی از دو رنگ سیاه یا سفید رنگ کرد. چند رنگ‌آمیزی متفاوت از این جدول وجود دارد؟

پاسخ: ۲۴.

مسئله ۹. به چند طریق می‌توان یک جدول ویژه شرط‌بندی ورزشی را پر کرد؟ در این شرط‌بندی باید نتایج ۱۳ مسابقه‌های روی یخ را پیش‌بینی کنید، این‌طور که یا پیروزی یکی از دو تیم را نشان دهید یا یک نتیجه تساوی را.  
پاسخ: ۳۱۳.

مسئله ۱۰. الفبای کیمیاگری فقط از سه حرف تشکیل شده است: A, B و C. هر کلمه این زبان دنباله‌ای دلخواه از حداکثر چهار حرف است. زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟  
راهنمایی: تعداد کلمه‌های یک حرفی، دو حرفی، سه حرفی و چهار حرفی را جدا جدا حساب کنید.  
پاسخ:  $۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۱۲۰$ .

با مجموعه‌ای دیگر از مسئله‌ها به بحثمان ادامه می‌دهیم.

مسئله ۱۱. در تیم فوتبالی ۱۱ نفره باید یک نفر کاپیتان و یک نفر جانشین کاپیتان انتخاب کرد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل. هر یک از ۱۱ بازیکن را می‌توان به عنوان کاپیتان انتخاب کرد. بعد از آن، هر یک از ۱۰ بازیکن باقی‌مانده را می‌توان برای جانشینی کاپیتان انتخاب کرد. بنابراین  $۱۰ \times ۱۱$  یا ۱۱۰ انتخاب متفاوت وجود دارد.

این مسئله با مسئله‌های قبلی در این نکته تفاوت دارد که انتخاب کاپیتان بر مجموعه داوطلبان مقام جانشینی کاپیتان اثر می‌گذارد، زیرا کاپیتان نمی‌تواند جانشین خودش هم باشد. بنابراین، انتخاب‌های کاپیتان و جانشینش از هم مستقل نیستند (آن‌طور که، مثلاً، انتخاب‌های یک فنجان و یک نعلبکی در مسئله ۱ مستقل بودند).

در زیر، چهار مسئله دیگر از همین نوع آورده‌ایم.

مسئله ۱۲. به چند طریق می‌توان با سه تکه باریک و هم‌عرض پارچه، پرچمی سه‌رنگ دوخت که در آن سه تکه افقی باشند، در صورتی که طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داشته باشیم؟ توجه کنید که میان بالای پرچم و پایینش تمایز قائل می‌شویم.

راه‌حل. می‌توانیم رنگ پارچه تکه پایینی را به شش طریق انتخاب کنیم. بعد از آن، در تکه وسطی فقط می‌توانیم از پنج رنگ پارچه استفاده کنیم و در این صورت فقط چهار رنگ پارچه برای تکه بالایی می‌ماند. در نتیجه، این پرچم را می‌توان به  $۴ \times ۵ \times ۶$  یا ۱۲۰ راه مختلف دوخت.

مسئله ۱۳. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ سیاه را روی صفحه شطرنجی طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

راه‌حل. رخ سفید را می‌توان در هر یک از ۶۴ خانه صفحه شطرنج گذاشت. صرف‌نظر از اینکه این مهره

کجا باشد، دقیقاً ۱۵ خانه را (از جمله خانه‌ای که در آن قرار دارد) تهدید می‌کند. در نتیجه، ۴۹ خانه می‌ماند که رخ سیاه را می‌توان در هر یک از آنها قرار داد. بنابراین برای چیدن این رخها  $49 \times 64$  یا ۳۱۳۶ راه مختلف وجود دارد.

مسئله ۱۴. به چند طریق می‌توان یک شاه سفید و یک شاه سیاه را روی صفحه شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

راه حل. شاه سفید را می‌توان در هر یک از ۶۴ خانه صفحه شطرنج گذاشت. در هر صورت، تعداد خانه‌هایی که این مهره آنها را تهدید می‌کند به مکانش بستگی دارد. بنابراین سه حالت در نظر می‌گیریم: الف) اگر شاه سفید در یکی از گوشه‌های صفحه باشد، آن وقت ۴ خانه را (از جمله خانه‌ای که در آن قرار دارد) تهدید می‌کند. بنابراین ۶۰ خانه می‌ماند که شاه سیاه را می‌توان در هر یک از آنها قرار داد.

ب) اگر شاه سفید جایی روی کناره صفحه شطرنج، بجز گوشه‌ها، باشد (۲۴ خانه از این دست وجود دارد)، آن وقت ۶ خانه را تهدید می‌کند و ۵۸ خانه وجود دارد که می‌توان شاه سیاه را در آنها گذاشت.

ج) اگر شاه سفید روی کناره صفحه شطرنج نباشد (۳۶ خانه از این دست وجود دارد)، آن وقت ۹ خانه را تهدید می‌کند و فقط ۵۵ خانه برای گذاشتن شاه سیاه باقی می‌ماند.

بنابراین، به  $60 \times 64 + 24 \times 58 + 36 \times 55$  یا ۳۶۱۲ راه می‌توان هر دو شاه را طوری روی صفحه شطرنج گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند.

\* \* \*

اکنون می‌خواهیم تعداد راه‌های چیدن  $n$  شیء را در یک ردیف حساب کنیم. آرایشهایی از این دست را جایگشت می‌نامند، که نقشی مهم در ترکیبیات و جبر دارند. اما پیش از این کار باید کمی از موضوع خارج شویم.

اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، آن وقت  $n!$  (بخوانید  $n$  فاکتوریل) حاصل ضرب  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$  است. بنابراین  $2! = 2$ ،  $3! = 6$ ،  $4! = 24$  و  $5! = 120$ . برای آسانتر شدن محاسبات و سازگاری  $0!$  برابر با ۱ تعریف می‌شود.

یادداشت. پیش از کار کردن با جایگشتها دانش‌آموز باید تعریف فاکتوریل را بداند و بیاموزد که چگونه با این تابع کار کند. تمرینهای زیر ممکن است برای این منظور مفید باشند.

تمرین ۱. این عبارتها را ساده کنید: الف)  $11 \times 10!$ ؛ ب)  $n!(n+1)$ .

تمرین ۲. الف) مقدار  $\frac{100!}{98!}$  را حساب کنید؛ ب) عبارت  $\frac{n!}{(n-1)!}$  را ساده کنید.



تمرین ۳. ثابت کنید اگر  $p$  عددی اول باشد، آن وقت  $(p - 1)!$  بر  $p$  بخش پذیر نیست.

اکنون جایگشتها را بررسی می‌کنیم.

مسئله ۱۵. با استفاده از رقمهای ۱، ۲، ۳ و چند عدد سه رقمی (بدون تکرار رقمها) می‌توان نوشت؟

راه‌حل. درست عین راه‌حل مسئله ۱۲ استدلال می‌کنیم. نخستین رقم را می‌توان هر یک از سه عدد داده شده انتخاب کرد، دومی را هم می‌توان هر یک از دو عدد باقی‌مانده انتخاب کرد و سومی هم باید عددی که مانده است باشد. بنابراین  $1 \times 2 \times 3$  یا  $3!$  عدد به دست می‌آید.

مسئله ۱۶. به چند طریق می‌توان چهار توپ به رنگهای قرمز، سیاه، آبی و سبز را در یک ردیف چید؟  
راه‌حل. نخستین مکان ردیف را می‌توان با هر یک از توپهای داده شده پر کرد. دومین مکان را می‌توان با هر یک از سه توپ باقی‌مانده پر کرد و همین‌طور تا آخر. در نهایت پاسخ مسئله به دست می‌آید (شبهه پاسخ مسئله ۱۵):  $1 \times 2 \times 3 \times 4$  یا  $4!$  طریق.

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که  $n$  شیء متمایز را می‌توان به

$$1 \times 2 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

طریق در یک ردیف چید؛ یعنی،

تعداد جایگشتهای  $n$  شیء برابر با  $n!$  است.

به منظور سهولت در نمادگذاری این‌طور قرار می‌گذاریم: هر دنباله متناهی از حروف انگلیسی را «کلمه» می‌نامیم (صرف‌نظر از اینکه بتوان آن را در فرهنگها پیدا کرد یا نه). مثلاً می‌توانیم از هر یک از حروف A، B و C درست یک بار استفاده کنیم و شش کلمه بسازیم: ABC، ACB، BAC، BCA، CAB و CBA. در پنج مسئله زیر باید تعداد کلمه‌های مختلفی را که می‌توان با جابه‌جایی حروف کلمه داده شده به دست آورد حساب کنید.

مسئله ۱۷. «(VECTOR)».

راه‌حل. چون همه حروف این کلمه متمایزند، پس پاسخ مسئله ۱۶ است.

مسئله ۱۸. «(TRUST)».

راه‌حل. این کلمه شامل دو حرف T است و حروف دیگر همگی متمایزند. به‌طور موقت، حروف T را به صورت دو حرف متمایز  $T_1$  و  $T_2$  تصور می‌کنیم. با این فرض ۵! یا ۱۲۰ کلمه متمایز وجود دارد. البته هر دو کلمه‌ای که می‌توان آنها را فقط با جابه‌جا کردن حروف  $T_1$  و  $T_2$  از یکدیگر به دست آورد،

در حقیقت یکی هستند. در نتیجه  $120$  کلمه‌ای که گفتیم به جفت کلمه‌هایی عین هم تقسیم می‌شوند. یعنی پاسخ مسأله  $\frac{120}{2}$  یا  $60$  است.

مسأله ۱۹. «CARAVAN».

راه حل. اگر در این کلمه سه حرف  $A$  را به صورت حروف متمایز  $A_1, A_2, A_3$  تصور کنیم،  $8!$  کلمه متمایز به دست می‌آوریم. البته، همه کلمه‌هایی که می‌توان آنها را فقط با جابه‌جا کردن حروف  $A_i$  از یکدیگر به دست آورد یکی هستند. چون حروف  $A_i$  را می‌توان در مکانهایشان به  $3!$  یا  $6$  طریق با هم جابه‌جا کرد، همه  $8!$  کلمه‌ای که گفتیم به گروه‌هایی از  $3!$  کلمه عین هم تقسیم می‌شوند. بنابراین پاسخ مسأله  $\frac{8!}{3!}$  است.

مسأله ۲۰. «CLOSENESS».

راه حل. سه حرف  $S$  و دو حرف  $E$  در این کلمه وجود دارد. اگر به طور موقت همه آنها را به صورت حروف متمایز تصور کنیم،  $9!$  کلمه به دست می‌آوریم. چون حروف  $E$  یکی هستند، تعداد کلمه‌های متمایز به  $\frac{9!}{2!}$  کاهش می‌یابد. بعد، وقتی این را هم در نظر بگیریم که حروف  $S$  هم یکی هستند، پاسخ نهایی به دست می‌آید:  $\frac{9!}{2!3!}$ .

مسأله ۲۱. «MATHEMATICAL».

پاسخ:  $\frac{12!}{3!2!2!}$

در این مجموعه از مسأله‌ها درباره کلمه‌ها، روشی بسیار جالب و مهم، یعنی ایده شمارش چند برابر، شرح داده شده است. در این روش به جای شمارش تعداد اشیایی که مورد نظرمان است، بعضی وقتها آسانتر است که اشیایی دیگر را بشماریم که تعدادشان مضربی از تعداد اشیای اصلی است.

در اینجا چهار مسأله دیگر را که در حلشان از این روش استفاده می‌شود آورده‌ایم.

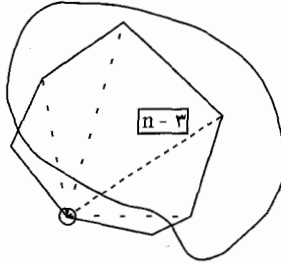
مسأله ۲۲. کشوری  $20$  شهر دارد که میان هر دو تا از آنها خطی هوایی دایر است. چند خط هوایی در این کشور وجود دارد؟

راه حل. هر خط هوایی میان دو شهر برقرار است. می‌توانیم هر یک از  $20$  شهر این کشور (مثلاً شهر  $A$ ) را به عنوان مبدأ خطی هوایی انتخاب کنیم و آن وقت  $19$  شهر باقی می‌ماند که می‌توانیم مقصد خطی هوایی را از میانشان (مثلاً شهر  $B$ ) انتخاب کنیم. با ضرب کردن این دو عدد به دست می‌آید  $380 = 20 \times 19$ . البته، در این محاسبه هر خط هوایی مانند  $AB$  دو بار شمرده شده است: یک بار وقتی که  $A$  به عنوان مبدأ خط انتخاب می‌شود و یک بار هم وقتی که  $B$  به عنوان مبدأ انتخاب می‌شود. بنابراین، تعداد خطوط هوایی برابر با  $\frac{380}{2}$  یا  $190$  است.

مسأله‌ای مشابه این مسأله در فصل «گرافها - ۱» می‌آید، که در آنجا تعداد یالهای گراف را می‌شماریم.

مسأله ۲۳.  $n$  ضلعی محدب چند قطر دارد؟

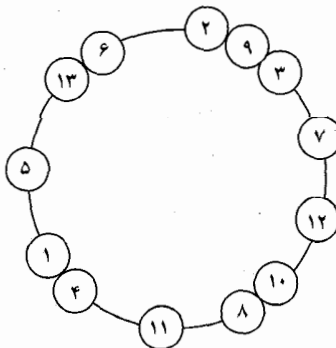
راه حل. هر یک از  $n$  رأس را می توان به عنوان یک سر قطر انتخاب کرد و در این صورت برای انتخاب سر دیگرش  $n - 3$  رأس وجود دارد (هر یک از رأسها، بجز رأس انتخاب شده و دو رأس مجاورش). اگر قطرها را این طور بشماریم، هر قطر دقیقاً دو بار شمرده می شود. بنابراین پاسخ مسأله  $\frac{n(n-3)}{2}$  است. (شکل ۱۰ را ببینید.)



شکل ۱۰

مسأله ۲۴. هر نخ یا زنجیر بسته همراه با چند مهره را که نخ یا زنجیر از درونشان گذشته است «گردنبند» می نامیم. می توانیم گردنبند را بچرخانیم اما نمی توانیم آن را برگردانیم. با ۱۳ مهره مختلف چند گردنبند متمایز می توان ساخت؟

راه حل. ابتدا فرض می کنیم که چرخاندن گردنبند مجاز نباشد. در این صورت روشن است که  $13!$  گردنبند مختلف وجود دارد. البته، هر آرایش از مهره ها را با ۱۲ آرایشی که می توان آنها را از این یکی با چرخاندن گردنبند به دست آورد باید یکی دانست. (شکل ۱۱ را ببینید).  
پاسخ:  $\frac{13!}{13}$  یا  $12!$ .



شکل ۱۱

مسئله ۲۵. اکنون فرض کنید که برگرداندن گردنبند هم مجاز باشد. در این صورت با استفاده از ۱۳ مهره مختلف چند گردنبند می‌توان ساخت؟

راه حل. با مجاز دانستن برگرداندن گردنبند تعداد گردنبندها در مسئله قبلی نصف می‌شود.  
پاسخ:  $\frac{۱۲!}{۲}$ .

در مسئله زیر ایده ترکیبیاتی مهم دیگری توضیح داده شده است.

مسئله ۲۶. چند عدد شش رقمی دست‌کم یک رقم زوج دارند؟

راه حل. به جای شمارش عددهایی که دست‌کم یک رقمشان زوج است، تعداد عددهایی شش رقمی را پیدا می‌کنیم که این ویژگی را ندارند. چون اینها درست عددهایی‌اند که همه رقمهایشان فردند، تعدادشان برابر با  $۵^6$  یعنی ۱۵۶۲۵ است (مسئله ۶ را ببینید). چون در کل ۹۰۰۰۰۰ عدد شش رقمی وجود دارد، پس تعداد عددهای شش رقمی که دست‌کم یک رقمشان زوج است برابر با  $۹۰۰۰۰۰ - ۱۵۶۲۵ = ۸۸۴۳۷۵$  است.

ایده اصلی در این راه حل استفاده از روش متمم‌گیری است؛ یعنی شمارش (یا در نظر گرفتن) اشیای «نامطلوب» به جای اشیای «مطلوب». در اینجا مسئله دیگری را آورده‌ایم که آن را هم می‌توان با استفاده از این روش حل کرد.

مسئله ۲۷. الفبای زبان کیمیاگری شش حرف دارد. در این زبان هر کلمه دنباله‌ای دلخواه از شش حرف است که دست‌کم دو تایشان عین هم‌اند. زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟  
پاسخ:  $۶! - ۶۶$ .

توصیه به معلمان. در پایان مایلیم خاطرنشان کنیم که بسیار مناسب است که به هر یک از ایده‌های مربوط به هر سری از مسائل این فصل (و شاید به موضوعات دیگری فراتر از ترکیبیات) جلسه‌ای جداگانه اختصاص دهید. از این گذشته، توصیه می‌کنیم مطالبی را که تاکنون در جلسه‌های قبلی تدریس شده است مرور کنید. به همین دلیل، در اینجا تعدادی مسئله برای فعالیت مستقل دانش‌آموزان و به‌عنوان تکلیف آورده‌ایم.

### مسئله‌هایی برای فعالیت مستقل دانش‌آموزان

مسئله ۲۸. در یک دفتر پستی پنج نوع پاکت نامه و چهار نوع تمبر وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این دفتر پستی یک پاکت نامه و یک تمبر خرید؟

مسأله ۲۹. به چند طریق می‌توان یک حرف صدادار و یک حرف بی‌صدا از میان حروف کلمه «RINGER» انتخاب کرد؟

مسأله ۳۰. هفت اسم، پنج فعل و دو صفت روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. با انتخاب یک کلمه از هر نوع می‌توانیم جمله‌ای بسازیم و برایمان مهم نیست که این جمله معنی دارد یا نه. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

مسأله ۳۱. هریک از دو کلکسیونر تازه‌کاری ۲۰ تمبر و ۱۰ کارت‌پستال دارد. معاوضه را در صورتی منصفانه می‌نامیم که این دو، یک تمبر را در ازای یک تمبر یا یک کارت‌پستال را در ازای یک کارت‌پستال با هم معاوضه کنند. به چند طریق می‌توان معاوضه‌ای منصفانه میان این دو کلکسیونر ترتیب داد؟

مسأله ۳۲. در چند عدد شش‌رقمی زوجیت همهٔ رقمها یکسان است (یعنی همهٔ رقمها فردند یا زوج)؟

مسأله ۳۳. به چند طریق می‌توانیم شش نامهٔ فوری را ارسال کنیم، به شرطی که سه نفر پیک در اختیار داشته باشیم و هر نامه را بتوان به هریک از آنها سپرد؟

مسأله ۳۴. یک دستهٔ ۵۲ تایی از کارتهایی به چهار رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی داریم که در آن از هر رنگ ۱۳ کارت به شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم چهار کارت انتخاب کنیم که هم رنگهایشان با هم فرق داشته باشد و هم شماره‌هایشان.

مسأله ۳۵. روی طاقچه‌ای پنج کتاب وجود دارد. به چند طریق می‌توان تعدادی از آنها (یا همه‌شان) را در قفسه‌ای چید؟ توجه کنید که حتی می‌توان در این قفسه فقط یک کتاب گذاشت.

مسأله ۳۶. به چند طریق می‌توان هشت رخ را روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسأله ۳۷. در یک کلاس  $N$  نفر راست‌دست‌اند و  $N$  نفر چپ‌دست. به چند طریق می‌توان آنها را برای انجام کار گروهی به زوجهای راست‌دست و چپ‌دست تقسیم کرد؟

مسأله ۳۸. طبق قواعد یک دوره مسابقات شطرنج هر یک از شرکت‌کنندگان باید با هر شرکت‌کنندهٔ دیگر دقیقاً یک بار بازی کند. اگر ۱۸ نفر در این مسابقات شرکت کنند، چند مسابقه برگزار می‌شود؟

مسأله ۳۹. به چند طریق می‌توان

الف) دو فیل؛

ب) دو اسب؛

ج) دو وزیر،

را روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسأله ۴۰. مادری دو تاسیب، سه تا گلابی و چهار تا پرتقال دارد. به مدت نه روز، هر روز صبح به هنگام صبحانه به پسرش یک جور میوه می دهد. به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

مسأله ۴۱. خوابگاهی سه اتاق خالی دارد: یک اتاق یک نفره، یک اتاق دونفره و یک اتاق چهارنفره. به چند طریق می توان هفت دانشجو را در این اتاقها جای داد؟

مسأله ۴۲. به چند طریق می توان یک دست مهره شطرنج را روی نخستین سطر صفحه شطرنج چید؟ این دست از مهره ها از یک شاه، یک وزیر، دو رخ عین هم، دو اسب عین هم و دو فیل عین هم تشکیل شده است.

مسأله ۴۳. با استفاده از دقیقاً پنج حرف A و حداکثر سه حرف B (و بدون هیچ حرف دیگری) چند «کلمه» می توان نوشت؟

مسأله ۴۴. در چند عدد ده رقمی دست کم دو رقم برابرند؟

مسأله ۴۵.\* آیا عددهایی هفت رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ اصلاً وجود ندارد، بیش از ۵۰٪ کل عددهای هفت رقمی را تشکیل می دهند؟

مسأله ۴۶. تاسی را سه بار پرتاب می کنیم. در چند تا از همه برآمدهای ممکن دست کم یک بار شش آمده است؟

مسأله ۴۷. به چند طریق می توان ۱۴ نفر را به هفت گروه دونفره تقسیم کرد؟

مسأله ۴۸.\* در چند عدد نه رقمی مجموع رقمها عددی زوج است؟

## فصل ۳

### بخش پذیری و باقی مانده‌ها

توصیه به معلمان. این مبحث به اندازه برخی مباحث دیگر جنبه تفریحی و سرگرم‌کنندگی ندارد، در عوض شامل مقدار زیادی مطالب نظری مهم است. سعی کنید اصول کار را در جلسات کلاستان معرفی کنید. حتی مسأله‌های بسیار معمولی مانند تجزیه عددهای صحیح را می‌توان با پرسش اینکه «چه کسی می‌تواند این عدد بسیار بزرگ را پیش از بقیه تجزیه کند؟» یا «چه کسی می‌تواند بزرگترین مقسوم‌علیه اول این عدد را پیش از بقیه پیدا کند؟» به چالشی جدی مبدل کرد. بنابراین جلساتی را که به این مبحث اختصاص می‌یابند باید نسبت به سایر جلسات با دقتی بیشتر برگزار کرد. چون بخش‌پذیری در برنامه آموزشی مدارس هم آمده است، می‌توانید از آموخته‌های خود دانش‌آموزان هم در این مورد استفاده کنید.

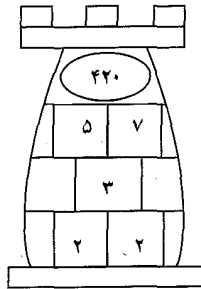
#### ۱. عددهای اول و مرکب

در میان عددهای طبیعی به دو دسته عدد برمی‌خوریم: عددهای اول و عددهای مرکب. عددی طبیعی در صورتی مرکب است که برابر با حاصل ضرب دو عدد طبیعی کوچکتر از خودش باشد. مثلاً ۶ مرکب است، زیرا  $۳ \times ۲ = ۶$ . در غیر این صورت، و چنانچه عدد مورد نظر ۱ نباشد، آن را اول می‌نامند. عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

عددهای اول شبیه «آجرهای» ساختمان‌اند، زیرا می‌توانید همه عددهای طبیعی را با استفاده از آنها بسازید. اما چطور می‌توان این کار را انجام داد؟ عدد ۴۲۰ را در نظر می‌گیریم. شکی نیست که این عدد مرکب است. مثلاً می‌توان آن را به شکل  $۱۰ \times ۴۲$  نوشت. اما هر یک از عددهای ۴۲ و ۱۰ هم خودشان مرکب‌اند. در حقیقت،  $۴۲ = ۶ \times ۷$  و  $۱۰ = ۲ \times ۵$ . چون  $۶ = ۲ \times ۳$ ، پس

$$۴۲۰ = ۴۲ \times ۱۰ = ۶ \times ۷ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۳ \times ۷ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$$

(شکل ۱۲ را ببینید). این «تجزیه» کامل عدد  $420$  است (یعنی نمایش آن به شکل حاصل ضربی از عددهای اول).



شکل ۱۲

روشن است که می‌توانیم هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را هم به همین طریق تجزیه کنیم. برای این کار فقط کافی است همین‌طور پشت سرهم تا آنجا که ممکن است عددهایی را که در هر مرحله به دست می‌آوریم به دو عدد کوچکتر تجزیه کنیم (و چنانچه عاملی از این عوامل را نتوان به شکل چنین حاصل ضربی نمایش داد آن وقت این عامل عددی اول است).

اما اگر سعی کنیم عدد  $420$  را به طریق دیگری تجزیه کنیم چه پیش می‌آید؟ مثلاً می‌توانیم با تجزیه  $420 = 15 \times 28$  شروع کنیم. ممکن است باعث تعجبتان شود که بدانید همیشه به همان نمایش می‌رسیم (حاصل ضربهایی که فقط در ترتیب عواملشان با هم فرق دارند یکی محسوب می‌شوند؛ معمولاً عاملها را به ترتیب صعودی می‌نویسیم).

ممکن است درستی این مطلب واضح به نظر برسد، اما اثباتش آسان نیست. این حکم را قضیهٔ اساسی حساب می‌نامند: هر عدد طبیعی بجز ۱ را می‌توان به‌طور یکتا به شکل حاصل ضربی از عددهای اول، به ترتیب صعودی، نمایش داد.

توصیه به معلمان. بیشتر مطالب این بخش به قضیهٔ اساسی حساب مربوط می‌شوند. دانش‌آموزان باید درک کنند که ویژگیهای بخش‌پذیری تقریباً به‌طور کامل با نمایش عددهای طبیعی به شکل حاصل ضرب عددهای اول مشخص می‌شوند. تمرینهای زیر برای این منظور سودمندند.

۱. آیا  $3 \times 2^9$  بر ۲ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: بله، چون ۲ یکی از عاملها در تجزیهٔ عدد داده شده است.

۲. آیا  $3 \times 2^9$  بر ۵ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: خیر، چون تجزیهٔ این عدد شامل عدد اول ۵ نیست.

۳. آیا  $3 \times 2^9$  بر ۸ بخش‌پذیر است؟

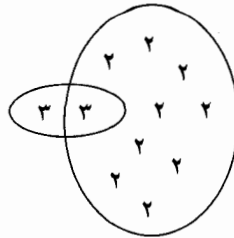


پاسخ: بله، چون  $8 = 2^3$  و نه تا ۲ در تجزیه عدد داده شده وجود دارد.

۴. آیا  $2^9 \times 3$  بر ۹ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: خیر، چون  $9 = 3 \times 3$  و فقط یک عدد ۳ در تجزیه عدد داده شده وجود دارد (شکل

۱۳ را ببینید).

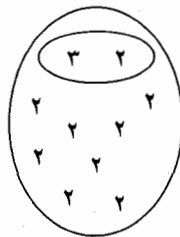


شکل ۱۳

۵. آیا  $2^9 \times 3$  بر ۶ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: بله، چون  $6 = 2 \times 3$  و تجزیه عدد داده شده شامل هر دو عدد اول ۲ و ۳ است (شکل

۱۴ را ببینید).



شکل ۱۴

۶. آیا درست است که اگر عددی طبیعی بر ۴ و ۳ بخش‌پذیر باشد، باید بر  $3 \times 4$  یا ۱۲ هم بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: بله، در واقع تجزیه عددی طبیعی که بر ۴ بخش‌پذیر است باید شامل دست‌کم دو عدد ۲ باشد. از طرف دیگر، چون این عدد بر ۳ هم بخش‌پذیر است، در تجزیه‌اش دست‌کم یک عدد ۳ هم وجود دارد. بنابراین عدد موردنظر بر  $2 \times 2 \times 3$ ، یعنی ۱۲، بخش‌پذیر است.

۷. آیا درست است که اگر عددی طبیعی بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد، باید بر  $4 \times 6$  یا ۲۴ هم بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: خیر. مثالی نقض، عدد ۱۲ است. دلیلش این است که اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، تجزیه‌اش شامل دست‌کم دو عدد ۲ است؛ اگر این عدد بر ۶ هم بخش‌پذیر باشد، بدان معناست که

تجزیه‌اش شامل عددهای ۲ و ۳ است. بنابراین می‌توان خاطر جمع بود که تجزیه این عدد شامل دو تا (اما نه الزاماً سه تا!) عدد ۲ و عدد ۳ است و از این رو فقط می‌توانیم ادعا کنیم که عدد مورد نظر بر ۱۲ بخش پذیر است.

۸. عدد  $A$  بر ۳ بخش پذیر نیست. آیا ممکن است که عدد  $2A$  بر ۳ بخش پذیر باشد؟

پاسخ: خیر، چون عدد ۳ در تجزیه  $A$  وجود ندارد و بنابراین در تجزیه  $2A$  هم نمی‌آید.

۹. عدد  $A$  زوج است. آیا درست است که  $3A$  باید بر ۶ بخش پذیر باشد؟

پاسخ: بله، چون هر دو عدد ۲ و ۳ در تجزیه عدد  $3A$  وجود دارند.

۱۰. عدد  $5A$  بر ۳ بخش پذیر است. آیا درست است که  $A$  باید بر ۳ بخش پذیر باشد؟

پاسخ: بله، چون تجزیه  $5A$  شامل عدد ۳ است در حالی که تجزیه عدد ۵ شامل آن نیست.

۱۱. عدد  $15A$  بر ۶ بخش پذیر است. آیا درست است که  $A$  باید بر ۶ بخش پذیر باشد؟

پاسخ: خیر. مثلاً ممکن است که  $A$  عدد ۲ باشد. دلیلش این است که عدد ۳ که یکی از عاملهای اول

عدد ۶ است در تجزیه عدد ۱۵ هم می‌آید. بنابراین می‌توان فقط خاطر جمع بود که  $A$  عددی زوج است.

### تعریف مهم

دو عدد طبیعی را در صورتی نسبت به هم اول یا متباین می‌نامند که مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتر از ۱ نداشته باشند.

مثلاً، بدیهی است که دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول‌اند. از این گذشته، عدد ۱ نسبت به هر عدد طبیعی دیگر اول است.

با استفاده از استدلالی شبیه استدلال تمرینهای ۶ و ۱۰ می‌توانیم دو حکم زیر را ثابت کنیم.

الف) اگر عددی طبیعی بر دو عدد نسبت به هم اول  $p$  و  $q$  بخش پذیر باشد، بر حاصل ضربشان،

یعنی  $pq$ ، هم بخش پذیر است.

ب) اگر عدد  $pA$  بر  $q$  بخش پذیر باشد، که در اینجا  $p$  و  $q$  نسبت به هم اول‌اند، آن وقت  $A$  هم

بر  $q$  بخش پذیر است.

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان باید چندین مثال را بررسی و حل کنند. مسأله‌های مربوط به عددهای نسبت به هم اول را در پایان این بخش آورده‌ایم.

### دو تعریف مهمتر

۱. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م. یا  $(x, y)$ ) دو عدد طبیعی برابر است با ... شما چه

فکر می‌کنید؟ ... بزرگترین عدد طبیعی که هر دو آنها را می‌شمارد.

۲. کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م. یا  $[x, y]$ ) دو عدد طبیعی برابر است با ... باز حدس بزنید ... کوچکترین عدد طبیعی که بر هر دو آنها بخش‌پذیر است.  
مثلاً،  $6 = (18, 24)$  و  $72 = [18, 24]$ .

با این تعریفها می‌توانیم چند تمرین دیگر را هم بیان کنیم.

۱۲. عددهای  $A = 2^3 \times 3^{10} \times 5 \times 7^2$  و  $B = 2^5 \times 3 \times 11$  داده شده‌اند. مقدار  $(A, B)$  را پیدا کنید.

پاسخ:  $(A, B) = 24 = 2^3 \times 3$ . این عدد بخش مشترک («اشتراک») تجزیه‌های دو عدد  $A$  و  $B$  است.

۱۳. عددهای  $A = 2^8 \times 5^3 \times 7$  و  $B = 2^5 \times 3 \times 5^7$  داده شده‌اند. مقدار  $[A, B]$  را پیدا کنید.  
پاسخ:  $[A, B] = 420000000 = 2^8 \times 3 \times 5^7 \times 7$ . همان‌طور که می‌بینید، این عدد «اجتماع» تجزیه‌های دو عدد  $A$  و  $B$  است.

توصیه به معلمان. از شما می‌خواهیم که مطالب این بخش را فقط به‌عنوان کلیات طرح درسی برای یک جلسه واقعی کلاس در نظر بگیرید. به‌عنوان معلم حتماً مایلید که طرح درسی مفصلتر طرح‌ریزی کنید. در بعضی جاها احتمالاً مجموعه‌ای از مسأله‌ها یا تمرینهای بسیار شبیه به هم را یکی بعد از دیگری به دانش‌آموزان می‌دهید و در عین حال سعی می‌کنید که موضوعات مسأله‌ها همچنان متنوع باشند. دانش‌آموزان را تشویق کنید تا در مورد مسأله‌ها و قضیه‌هایی که درباره آنها بحث می‌کنید خودشان حدس بزنند.

با وجود این، دانش‌آموزان در صورتی این مبحث را به بهترین وجه ممکن فرا می‌گیرند که در جلسات بعدی با استفاده از ایده‌هایی که در بالا شرح داده شدند مسأله‌هایی برایشان مطرح کنید.

در اینجا چندتا از این مسأله‌ها آورده‌ایم. روشها و ایده‌هایی که در این بخش معرفی شدند هم در حل مسأله‌های بخشهای دیگر این فصل به کار می‌آیند هم در حل مسأله‌های فصلهای دیگر کتاب حاضر.

مسأله ۱. دو عدد اول متمایز  $p$  و  $q$  داده شده‌اند. تعداد مقسوم‌علیه‌های متمایز عدد

(الف)  $pq$ ؛

(ب)  $p^2q$ ؛

(ج)  $p^2q^2$ ؛

(د)  $p^nq^m$

را پیدا کنید.

مسأله ۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: در میان هر سه عدد متوالی دست‌کم یک عدد زوج و یک عدد بخش‌پذیر بر ۳ وجود دارد.

راه حل. هر عددی که بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد بر ۶ هم بخش پذیر است و در نتیجه، حکم مورد نظر مستقیماً از راهنمایی بالا به دست می آید.

مسئله ۳. ثابت کنید حاصل ضرب هر پنج عدد طبیعی متوالی

(الف) بر ۳۰؛

(ب) بر ۱۲۰؛

بخش پذیر است.

مسئله ۴. عددی اول مانند  $p$  داده شده است. تعداد عددهایی طبیعی را پیدا کنید که

(الف) از  $p$  کوچکتر و نسبت به آن اول اند؛

(ب) از  $p^2$  کوچکتر و نسبت به آن اول اند.

مسئله ۵. کوچکترین عدد طبیعی مانند  $n$  را پیدا کنید که  $n!$  بر ۹۹۰ بخش پذیر باشد.

مسئله ۶. نمایش اعشاری عدد  $100!$  به چند تا صفر ختم می شود؟

مسئله ۷. آیا ممکن است که به ازای عددی طبیعی مانند  $n$  نمایش اعشاری عدد  $n!$  دقیقاً به پنج تا

صفر ختم شود؟

مسئله ۸. ثابت کنید اگر تعداد مقسوم علیه های عددی فرد باشد، این عدد مربع کامل است.

مسئله ۹. تام دو عدد دورقمی را روی تخته سیاه در هم ضرب کرد. بعد همه رقمها را با حروف عوض

کرد (به جای رقمهای متمایز حروف متفاوت گذاشت و به جای رقمهای برابر حروف یکسان)؛ نتیجه شد

$AB \times CD = EFFF$ . ثابت کنید که تام جایی در کارش اشتباه کرده است.

مسئله ۱۰. آیا ممکن است عددی که با صد تا ۰، صد تا ۱ و صد تا ۲ نوشته شده است مربع کامل

باشد.

راهنمایی: چنین عددی بر ۳ بخش پذیر است اما بر ۹ بخش پذیر نیست.

راه حل. مجموع رقمهای هر یک از آن دست عددهایی که در مسئله مشخص شده اند برابر با

$(2 + 1 + 0) \times 100$  یا  $300$  است که بر ۳ بخش پذیر است اما بر ۹ بخش پذیر نیست. این موضوع

در باره عدد مورد نظرمان، صرف نظر از اینکه ترتیب رقمهایش چه باشد، درست است.

توصیه به معلمان. باید توجه دانش آموزان را به ایده راه حل مسئله آخر جلب کنید. برای این کار مثلاً

می توانید از آنها بپرسید در صورتی که عدد مورد نظر دویست تا ۰، دویست تا ۱ و دویست تا ۲ داشته

باشد، پاسخ مسئله چیست؟ با سیصد تا ۰، سیصد تا ۱ و سیصد تا ۲ چطور؟

مسأله ۱۱.\* عددهای  $a$  و  $b$  در تساوی  $65b = 56a$  صدق می‌کنند. ثابت کنید  $a+b$  عددی مرکب است.

مسأله ۱۲. همه جوابهای معادله‌های

$$\text{الف) } x^2 - y^2 = 31$$

$$\text{ب) } x^2 - y^2 = 303$$

را در مجموعه عددهای طبیعی پیدا کنید.

$$\text{راهنمایی: } x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

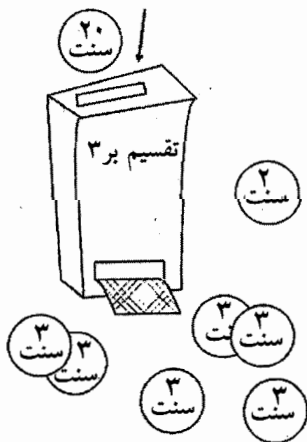
مسأله ۱۳. ریشه‌های صحیح معادله  $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$  را پیدا کنید.

راهنمایی: به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کنید و بعد طرف چپ آن را تجزیه کنید.

مسأله ۱۴. ثابت کنید هر دو عدد طبیعی مانند  $a$  و  $b$  در تساوی  $[a, b][a, b] = ab$  صدق می‌کنند.

## ۲. باقی‌مانده‌ها

فرض کنید در کشوری هستید که در آن سکه‌هایی به برخی مقادیر رایج‌اند و می‌خواهید از یک دستگاه سکه‌ای یک عدد آدامس به قیمت ۳ سنت بخرید. در جیب‌تان یک سکه ۱۵ سنتی دارید، اما هیچ سکه ۳ سنتی‌ای که برای خریدن آدامس لازم است ندارید. با خوش‌اقبالی یک دستگاه پول خردکن پیدا می‌کنید که از آن می‌توانید هر تعداد سکه ۳ سنتی که لازم دارید بگیرید. روشن است که بابت سکه ۱۵ سنتی‌تان پنج سکه ۳ سنتی از این دستگاه می‌گیرید. اما اگر سکه‌ای ۲۰ سنتی داشته باشید چه پیش می‌آید؟ در این صورت به طور قطع شش سکه ۳ سنتی می‌گیرید به علاوه دو سنت بقیه پول. بنابراین در اینجا  $20 = 6 \times 3 + 2$  (شکل ۱۵ را ببینید). این تساوی نمایشی از عمل تقسیم ۲۰ بر ۳ با باقی‌مانده است.



شکل ۱۵

دستگاه پول خردکنمان چطور کار می‌کند؟ این دستگاه همین طور سکه‌های ۳ سنتی را بیرون می‌دهد تا وقتی که باقی‌مانده از ۳ کمتر شود. بعد از آن، این دستگاه به شما سکه‌هایی بابت این باقی‌مانده که برابر با ۰، ۱ یا ۲ است می‌دهد. روشن است که این باقی‌مانده وقتی و فقط وقتی صفر است که عدد اولیه (ارزش سکه‌ای که در دستگاه انداختید) بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

به همین ترتیب می‌توانیم دستگاهی را مجسم کنیم که سکه‌های  $m$  سنتی بیرون می‌دهد و بقیه پول در آن از ۰ تا  $m - 1$  سنت است. با این دستگاه می‌توان عمل تقسیم بر  $m$  با باقی‌مانده را نمایش داد. اکنون تعریفی دقیقتر می‌آوریم:

تقسیم عددی طبیعی مانند  $N$  بر عدد طبیعی  $m$  با باقی‌مانده، یعنی نمایش  $N$  به شکل  $N = km + r$  که در آن  $m > r \geq 0$ . عدد  $r$  را باقی‌مانده تقسیم عدد  $N$  بر  $m$  می‌نامیم.

اکنون مسأله زیر را در نظر بگیرید: شخصی بیست و دو سکه ۵۰ سنتی و چهل و چهار سکه ۱۰ سنتی را در دستگاه پول خردکن می‌اندازد. بعد از اینکه سکه‌های ۳ سنتی را دریافت کرد بقیه پولش چقدر می‌شود؟

حل این مسأله آسان است. کافی است باقی‌مانده تقسیم عدد  $22 \times 50 + 44 \times 10$  را، که آن را با  $x$  نشان می‌دهیم، بر ۳ پیدا کنیم. آنچه در اینجا قابل توجه است این است که نباید مجموع همه این حاصل‌ضربها را حساب کنیم. فرض کنید که باقی‌مانده‌های تقسیم هر یک از این عددها بر ۳ را جایگزین آنها کنیم. در این صورت عدد  $x$  به عدد  $1 \times 2 + 2 \times 1$  تبدیل می‌شود. این عدد برابر با ۴ است که باقی‌مانده تقسیم آن هم بر ۳ می‌شود ۱. ادعا می‌کنیم که باقی‌مانده تقسیم عبارت اولیه (یعنی عدد  $x$ ) هم بر ۳ می‌شود ۱. علت درستی این ادعا حکم زیر است که همیشه درست است:

لم باقیمانده‌ها. باقی‌مانده تقسیم مجموع حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی بر ۳ همان باقی‌مانده تقسیم مجموع حاصل‌ضرب باقی‌مانده‌هایشان بر ۳ است.

یادداشت. اثبات این حکم چندان دشوار نیست، گرچه ممکن است به نظر تازه‌کارها پر از ریزه‌کاریهای فنی باشد.

برای نمونه حکم دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$N_1 = k_1 \times 3 + r_1$$

$$N_2 = k_2 \times 3 + r_2$$

در این صورت

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= (k_1 \times 3 + r_1)(k_2 \times 3 + r_2) \\ &= k_1 k_2 \times 3^2 + k_1 r_2 \times 3 + k_2 r_1 \times 3 + r_1 r_2 \\ &= 3(3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2 \end{aligned}$$

بنابراین در خرد کردن  $N_1 N_2$  سنت، دستگاه  $k_2 r_1 + k_1 r_2 + 3k_1 k_2$  تا سکه ۳ سنتی بیرون می‌دهد و  $r_1 r_2$  سنت در آن می‌ماند. از این رو، بعد از انداختن  $N_1 N_2$  سنت در دستگاه، باقی مانده همان باقی مانده انداختن  $r_1 r_2$  سنت در دستگاه است.

بدیهی است که در لم باقی مانده عدد ۳ را می‌توان با هر عدد طبیعی دیگر عوض کرد: در مورد هر عدد دیگر هم همین اثبات عیناً به‌کار می‌رود.

توصیه به معلمان. از تعمیمهای لم باقی مانده‌ها در سراسر این بخش استفاده می‌شود. دانش‌آموزانتان باید یاد بگیرند که چطور این ایده‌ها را هنگام محاسبه باقی مانده‌ها به‌کار ببرند. توصیه می‌کنیم که تعدادی مسأله شبیه مسأله ۱۵ در زیر را سرکلاس حل کنید و توجه دانش‌آموزان را به چگونگی استفاده از این حکمها جلب کنید.

گمان نمی‌کنیم بحث درباره اثبات لم باقی مانده‌ها سرکلاسها خیلی هم ضروری باشد.

مسأله ۱۵. باقی مانده تقسیم

(الف) عدد  $1992^3 + 1991 \times 1990 \times 1989$  بر ۷؛

(ب) عدد  $91^\circ$  بر ۸،

را پیدا کنید.

راه حل مسأله بعدی شامل ایده‌ای بسیار مهم است.

مسأله ۱۶. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  عدد  $n^3 + 2n$  بر ۳ بخش پذیر است.

راه حل. باقی مانده تقسیم عدد  $n$  بر ۳ یکی از این عددهاست: ۰، ۱ یا ۲. بنابراین سه حالت در نظر می‌گیریم.

اگر باقی مانده تقسیم  $n$  بر ۳ برابر با ۰ باشد، آن وقت هم  $n^3$  بر ۳ بخش پذیر است و هم  $2n$  و در نتیجه  $n^3 + 2n$  هم بر ۳ بخش پذیر است.

اگر باقی مانده تقسیم  $n$  بر ۳ برابر با ۱ باشد، آن وقت باقی مانده‌های تقسیم  $n^3$  و  $2n$  بر ۳ به ترتیب ۱ و ۲ اند و ۱ + ۲ بر ۳ بخش پذیر است.

اگر هم باقی مانده تقسیم  $n$  بر ۳ برابر با ۲ باشد، آن وقت باقی مانده‌های تقسیم  $n^3$ ،  $n^2$  و  $2n$  بر ۳ به ترتیب ۱، ۲ و ۱ اند و ۱ + ۲ بر ۳ بخش پذیر است.

با این تحلیل حالت به حالت اثبات حکم مورد نظرمان کامل می‌شود.

توصیه به معلمان. نکته اصلی راه حل مسأله آخر ایده تحلیل حالت به حالت است که برای بررسی همه باقی مانده‌های ممکن به پیمانه عددی طبیعی استفاده شده است. این روش آن قدر ارزشمند است

که باید آن را برای دانش‌آموزان کاملاً شرح داد. دانش‌آموزان باید بفهمند که با چنین تحلیلی واقعاً اثباتی کامل و دقیق به دست می‌آید.

تحلیل حالت به حالت را می‌توان به غیر از حساب در بسیاری از جاهای دیگر هم به کار برد. برای دانش‌آموزان فراگیری این مهارت بسیار خوب است که بتوانند تشخیص دهند که آیا تحلیلی حالت به حالت در حل مسأله‌ای به کار می‌آید یا نه. امیدواریم که مسأله‌های زیر در تحقق این هدف مفید باشند.

مسأله ۱۷. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مانند  $n$ ،  $n^5 + 4n$  بر ۵ بخش پذیر است.

مسأله ۱۸. ثابت کنید که به ازای هیچ عدد صحیحی مانند  $n$ ،  $n^2 + 1$  بر ۳ بخش پذیر نیست.

مسأله ۱۹. ثابت کنید که به ازای هیچ عدد صحیحی مانند  $n$ ،  $n^3 + 2$  بر ۹ بخش پذیر نیست.

مسأله ۲۰. ثابت کنید که به ازای هر عدد فرد مانند  $n$ ،  $n^3 - n$  بر ۲۴ بخش پذیر است.

راهنمایی: ثابت کنید که عدد داده شده هم مضربی از ۳ است و هم مضربی از ۸.

مسأله ۲۱. الف) اگر  $p$  عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، ثابت کنید  $p^2 - 1$  بر ۲۴ بخش پذیر است.

ب) اگر  $p$  و  $q$  عددهایی اول و بزرگتر از ۳ باشند، ثابت کنید  $p^2 - q^2$  بر ۲۴ بخش پذیر است.

مسأله ۲۲. عددهای طبیعی  $x$ ،  $y$  و  $z$  در تساوی  $x^2 + y^2 = z^2$  صدق می‌کنند. ثابت کنید دست کم یکی از آنها بر ۳ بخش پذیر است.

مسأله ۲۳. می‌دانیم که  $a$  و  $b$  عددهایی طبیعی‌اند که  $a^2 + b^2$  بر ۲۱ بخش پذیر است. ثابت کنید همین مجموع مربعا بر ۴۴۱ هم بخش پذیر است.

مسأله ۲۴. می‌دانیم که  $a$ ،  $b$  و  $c$  عددهایی طبیعی‌اند و  $a + b + c$  بر ۶ بخش پذیر است. ثابت کنید  $a^3 + b^3 + c^3$  هم بر ۶ بخش پذیر است.

مسأله ۲۵. سه عدد اول  $p$ ،  $q$  و  $r$  که همه از ۳ بزرگترند، تصاعدی حسابی تشکیل داده‌اند:  $p = p$ ،  $q = p + 2d$  و  $r = p + 4d$ . ثابت کنید  $d$  بر ۶ بخش پذیر است.

مسأله ۲۶. ثابت کنید اگر از مجموع مربعات سه عدد طبیعی دلخواه عدد ۷ را کم کنیم، عدد حاصل بر ۸ بخش پذیر نیست.

مسأله ۲۷. مجموع مربعات سه عدد طبیعی بر ۹ بخش پذیر است. ثابت کنید می‌توان دو تا از این مربعا را طوری انتخاب کرد که تفاضلشان بر ۹ بخش پذیر باشد.



راهنمایی: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد بر ۹ برابر باشند، تفاضلشان بر ۹ بخش‌پذیر است.

\* \* \*

با مجموعه‌ای دیگر از مسأله‌ها این بخش را پی‌می‌گیریم.

مسأله ۲۸. رقم یکان عدد  $1989^{1989}$  را پیدا کنید.

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که رقم یکان عدد  $1989^{1989}$  عین رقم یکان عدد  $9^{1989}$  است. رقم یکان تعدادی از نخستین توانهای ۹ را می‌نویسیم:  $9, 1, 9, 1, 9, \dots$

برای محاسبه رقم یکان توانی از ۹ کافی است که رقم یکان توان قبلی ۹ را در ۹ ضرب کنیم. از این رو، کاملاً روشن است که بعد از رقم ۹ همیشه رقم ۱ می‌آید ( $9 \times 9 = 81$ ) و پشت سر آن هم همیشه ۹ می‌آید ( $9 \times 9 = 81$ ).

بنابراین رقم یکان توانهای با نمای فرد ۹ همیشه ۹ است. در نتیجه رقم یکان عدد  $1989^{1989}$  هم ۹ است.

مسأله ۲۹. رقم یکان عدد  $25^{\circ}$  را پیدا کنید.

راه‌حل. رقم یکان تعدادی از نخستین توانهای ۲ را می‌نویسیم:  $2, 4, 8, 6, 2, \dots$  می‌توان دریافت که  $25^{\circ}$  مانند  $21$  به ۲ ختم می‌شود. چون رقم یکان هر توان ۲ از روی رقم یکان توان قبلی ۲ تعیین می‌شود یک دور به دست می‌آید:  $26^{\circ}$  به ۴ ختم می‌شود (مانند  $22^{\circ}$ ),  $27^{\circ}$  به ۸ (مانند  $23^{\circ}$ ),  $28^{\circ}$  به ۶,  $29^{\circ}$  به ۲ و همین‌طور تا آخر. چون طول این دور ۴ است، رقم یکان عدد  $25^{\circ}$  را می‌توان با استفاده از باقی‌مانده تقسیم عدد  $50$  بر  $4$  پیدا کرد. این باقی‌مانده ۲ است و در نتیجه رقم یکان  $25^{\circ}$  برابر با رقم یکان  $2^2$ ، یعنی ۴، است.

مسأله ۳۰. رقم یکان عدد  $777777$  چیست؟

مسأله ۳۱. باقی‌مانده تقسیم عدد  $21^{\circ}$  بر ۳ را پیدا کنید.

راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم چند تا از توانهای ۲ بر ۳ را بنویسید. ثابت کنید که این باقی‌مانده‌ها دور تشکیل می‌دهند.

مسأله ۳۲. باقی‌مانده تقسیم عدد  $3^{1989}$  بر ۷ را پیدا کنید.

مسأله ۳۳. ثابت کنید عدد  $55552222 + 22225555$  بر ۷ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم عدد داده شده بر ۷ صفر است.

مسئله ۳۴. رقم یکان عدد  $۷۷۷$  را پیدا کنید.

در مسئله‌های ۱۶ تا ۲۷ از همان ایده تحلیل حالت به حالت باقی مانده‌ها به پیمانه عددی طبیعی مانند  $n$  استفاده کردیم. از این گذشته، در آنجا می‌توانستیم عدد  $n$  را از صورت مسئله‌ها تقریباً بی‌هیچ زحمتی تشخیص دهیم. در مجموعه مسئله‌های بعدی حدس زدن عدد  $n$  چندان آسان نیست. «هنر حدس زدن» نیازمند برخی مهارت‌هاست و با وجود اینکه شگردهای شناخته شده‌ای برایش وجود دارد بعضی وقتها ممکن است واقعاً دشوار باشد.

توصیه به معلمان. برای تداوم بخشیدن به ارتقای مهارت‌های ذکر شده پیشنهاد می‌کنیم که به‌عنوان تمرین جدول ضربیایی برای باقی مانده‌های تقسیم بر عددهای «پُرکاربردی» مانند ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳ و غیره تنظیم کنید. همچنین می‌توانید سعی کنید که همه باقی مانده‌های ممکن تقسیم مربعها و مکعبهای کامل بر این عددها را پیدا کنید.

مسئله ۳۵. الف) می‌دانیم که  $p$ ،  $p + ۱۰$  و  $p + ۱۴$  عددهایی اول‌اند. عدد  $p$  را پیدا کنید.

ب) می‌دانیم که  $p$ ،  $۲p + ۱$  و  $۴p + ۱$  عددهایی اول‌اند. عدد  $p$  را پیدا کنید.

راهنمایی: باقی مانده تقسیم این عددها بر ۳ را پیدا کنید.

مسئله ۳۶. می‌دانیم که  $p$  و  $۸p^۲ + ۱$  عددهایی اول‌اند. عدد  $p$  را پیدا کنید.

مسئله ۳۷. می‌دانیم که  $p$  و  $p^۲ + ۲$  عددهایی اول‌اند. ثابت کنید  $p^۳ + ۲$  هم عددی اول است.

مسئله ۳۸. ثابت کنید که عددهایی طبیعی مانند  $a$  و  $b$  وجود ندارند که  $a^۲ - ۳b^۲ = ۸$ .

مسئله ۳۹. الف) آیا ممکن است مجموع دو مربع کامل فرد مربع کامل دیگری باشد؟

ب) آیا ممکن است مجموع مربعهای سه عدد طبیعی فرد مربع کامل باشد؟

مسئله ۴۰. ثابت کنید مجموع مربعهای پنج عدد طبیعی متوالی مربع کامل نیست.

مسئله ۴۱. اگر  $p$ ،  $۴p^۲ + ۱$  و  $۶p^۲ + ۱$  عددهایی اول باشند، عدد  $p$  را پیدا کنید.

یادداشت. تقریباً در بیشتر موارد مسئله‌های حساب درباره مربعها (مانند مسئله‌های ۳۶ تا ۴۰) را می‌توان با استفاده از باقی مانده‌ها به پیمانه ۳ یا به پیمانه ۴ حل کرد. نکته اصلی این است که باقی مانده‌های تقسیم مربعهای کامل بر ۳ یا ۴ فقط ممکن است عددهای ۰ و ۱ باشند.

مسئله ۴۲. ثابت کنید عدد  $۱۰۰۰۰۰۰۵۰۰۰۰۰۰۱$  (در هر طرف رقم ۵،  $۱۰^۰$  تا صفر وجود دارد) مکعب کامل نیست.

مسئله ۴۳. ثابت کنید به ازای هیچ دو عدد طبیعی مانند  $a$  و  $b$  عدد  $a^3 + b^3 + 4$  مکعب کامل نیست.

مسئله ۴۴.\* ثابت کنید به ازای هیچ عدد طبیعی‌ای مانند  $n$  عدد  $6n^3 + 3$  توان ششم کامل عددی صحیح نیست.

یادداشت. هنگام حل کردن مسأله‌های مربوط به مکعبهای عددهای صحیح (مانند مسأله‌های ۴۲ تا ۴۴) بیشتر وقتها مفید است که باقی‌مانده‌ها به پیمانه ۷ یا ۹ را بررسی کنیم. در هر یک از این دو حالت فقط سه باقی‌مانده وجود دارد: به ترتیب  $\{0, 1, 6\}$  و  $\{0, 1, 8\}$ .

مسئله ۴۵.\* می‌دانیم  $x$ ،  $y$  و  $z$  عددهایی طبیعی‌اند که  $x^2 + y^2 = z^2$ . ثابت کنید  $xy$  بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

توصیه به معلم. از مطالب این بخش می‌توان دست‌کم در دو جلسه کلاس استفاده کرد. نخستین جلسه باید به محاسبه باقی‌مانده‌ها اختصاص یابد. دومین جلسه را می‌توان صرف بررسی ایده تحلیل حالت به حالت در حل مسأله‌های گوناگون کرد.

### ۳. چند مسئله دیگر

این بخش شامل مجموعه‌ای از مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری است که نه صورتشان شبیه هم است و نه روش حلشان. البته در اینجا هم از ایده‌ها و روشهای بخشهای قبلی استفاده می‌کنیم.

مسئله ۴۶. الف) اگر بدانیم  $a + 1$  بر ۳ بخش‌پذیر است، ثابت کنید که  $7a + 4$  هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) می‌دانیم که  $a + 2$  و  $35 - b$  بر ۱۱ بخش‌پذیرند. ثابت کنید  $a + b$  هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

مسئله ۴۷. رقم یکان عدد  $99^2 + \dots + 2^2 + 1^2$  را پیدا کنید.

مسئله ۴۸. هفت عدد طبیعی چنان‌اند که مجموع هر شش تایشان بر ۵ بخش‌پذیر است. ثابت کنید هر یک از این عددها هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

مسئله ۴۹. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند  $n$ ، مجموع هر  $n$  عدد طبیعی فرد متوالی عددی مرکب است.

مسئله ۵۰. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی‌مانده تقسیمش بر ۲، ۱، ۳، ۲، ۴، ۳، ۵، ۴ و ۶ باشد.

مسئله ۵۱. ثابت کنید اگر  $1 + (n-1)!$  بر  $n$  بخش پذیر باشد، آن وقت  $n$  عددی اول است. دو مسئله زیر را مفصلتر بررسی می‌کنیم:

مسئله ۵۲.\* ثابت کنید عددی طبیعی مانند  $n$  وجود دارد که عددهای  $1, n+1, n+2, \dots, n+1989$  همگی مرکب‌اند.

راه حل. سعی می‌کنیم شرح دهیم که چطور می‌توان جوابی برای مسئله به دست آورد. عدد  $n+1$  باید مرکب باشد. برای اینکه راه حل پیچیده نشود فرض می‌کنیم این عدد بر ۲ بخش پذیر باشد. در این صورت عدد  $n+2$  هم باید مرکب باشد، اما دیگر ممکن نیست مضربی از ۲ باشد. باز هم برای پرهیز از پیچیده شدن راه حل فرض می‌کنیم این عدد بر ۳ بخش پذیر باشد. همین‌طور پیش می‌رویم و سعی می‌کنیم عددی مانند  $n$  بیابیم که  $n+1$  بر ۲ بخش پذیر باشد،  $n+2$  بر ۳،  $n+3$  بر ۴ و همین‌طور تا آخر. اما این مطلب معادل این است که بگوییم  $n-1$  بر عددهای ۲، ۳، ۴، ... و ۱۹۹۰ بخش پذیر است. اکنون دیگر یافتن چنین عددی آسان است؛ مثلاً ۱۹۹۰! چنین عددی است. بنابراین می‌توانیم  $1 + 1990!$  را به عنوان عددی که دنبالش می‌گردیم انتخاب کنیم.

مسئله ۵۳.\* ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

راه حل. فرض کنید فقط  $n$  تا عدد اول وجود داشته باشد و آنها را با  $p_1, p_2, \dots, p_n$  نشان دهید. در این صورت عدد  $1 + p_1 p_2 \dots p_n$  بر هیچ یک از عددهای اول  $p_1, p_2, \dots, p_n$  بخش پذیر نیست. در نتیجه این عدد طبیعی را نمی‌توان به شکل حاصل ضرب عددهای اول نمایش داد که چنین چیزی درست نیست. با این تناقض راه حل مسئله کامل می‌شود.

توصیه به معلمان. مسئله‌های این بخش را نباید طی یک جلسه به دانش‌آموزان داد و انتظار داشت که آنها را حل کنند. می‌توان آنها را در طول یک سال تحصیلی به دانش‌آموزان داد یا از آنها برای المپیادها، انواع گوناگون مسابقات ریاضی و فعالیتهایی از این قبیل استفاده کرد.

#### ۴. الگوریتم اقلیدسی

در بخش اول این فصل مفهوم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی را مطرح کردیم و نشان دادیم که چطور می‌توان ب.م.م. را حساب کرد؛ باید تجزیه‌های هر دو عدد به حاصل ضرب عددهای اول را بنویسید و بعد بخش مشترکشان را حساب کنید.

البته، در مورد عددهای بزرگ استفاده از این روش بدون ماشین حساب عملاً غیرممکن است (سعی کنید این روش را مثلاً در مورد عددهای ۱۳۸۱۹۵۵ و ۶۹۰۷۱۳ اجرا کنید). خوشبختانه راهی

دیگر برای محاسبهٔ ب.م.م. وجود دارد که زحمتش کمتر از قبلی است و آن را الگوریتم اقلیدسی می‌نامند. این روش بر اساس استدلالی ساده است: هر مقسوم‌علیه مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  ( $a > b$ ) عدد  $a - b$  را هم می‌شمارد؛ علاوه بر این، هر مقسوم‌علیه مشترک عددهای  $b$  و  $a - b$  عدد  $a$  را هم می‌شمارد. بنابراین  $(a, b) = (b, a - b)$ . این تساوی، به تعبیری جان کلام الگوریتم اقلیدسی است. در اینجا نشان می‌دهیم که این الگوریتم در مورد دو عدد ۴۵۱ و ۲۸۷ چطور عمل می‌کند:

$$\begin{aligned}(451, 287) &= (287, 164) \\ &= (164, 123) \\ &= (123, 41) \\ &= (82, 41) \\ &= (41, 41) \\ &= 41\end{aligned}$$

توجه کنید که الگوریتم اقلیدسی را می‌توان این‌طور کوتاه‌تر کرد: عدد  $a$  را به جای  $a - b$  با باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $b$  عوض کنید. این الگوریتم «بهبودیافته» را با استفاده از دو عددی که در آغاز این بخش ذکر کردیم توضیح می‌دهیم:

$$\begin{aligned}(1381955, 690713) &= (690713, 529) \\ &= (529, 368) \\ &= (368, 161) \\ &= (161, 46) \\ &= (46, 23) \\ &= (23, 0) \\ &= 23\end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید با این روش خیلی سریع‌تر به نتیجه می‌رسیم.

مسئلهٔ ۵۴. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای  $2n + 13$  و  $n + 7$  را پیدا کنید.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$(2n + 13, n + 7) = (n + 7, n + 6) = (n + 6, 1) = 1$$

مسأله ۵۵. ثابت کنید عددی طبیعی مانند  $n$  وجود ندارد که بتوان کسر  $\frac{12n+1}{30n+4}$  را ساده کرد.

مسأله ۵۶. مقدار  $(1, 2^{120} - 1, 2^{100} - 1)$  را پیدا کنید.

مسأله ۵۷. مقدار  $(111000111, 1100011)$  را پیدا کنید که در آن صد تا ۱ در نمایش اعشاری عدد اول و شصت تا ۱ در نمایش اعشاری عدد دوم آمده است.

توصیه به معلمان. با وجود اینکه الگوریتم اقلیدسی ممکن است ساده به نظر برسد یکی از ابزارهای بسیار مهم حساب است (که می‌توان از آن مثلاً برای اثبات قضیهٔ اساسی حساب استفاده کرد). بنابراین فکر می‌کنیم بسیار بجا باشد که جلسه‌ای جداگانه به این روش فوق‌العاده (همراه با بحثی دربارهٔ ب.م.م.، ک.م.م. و ویژگیهایشان) اختصاص یابد.

## فصل ۴

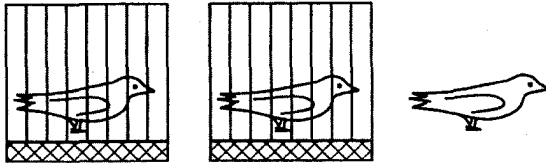
### اصل لانه کبوتری

#### ۱. مقدمه

دانش آموزانی که پیش از این هیچ وقت چیزی درباره اصل لانه کبوتری نشنیده اند ممکن است تصور کنند که این اصل یک جور شوخی است:

اگر  $N + 1$  یا تعدادی بیشتر کبوتر را در  $N$  لانه قرار دهیم، آن وقت لانه‌ای باید شامل دو یا تعدادی بیشتر کبوتر باشد.

به ابهام موجود در عبارت «لانه‌ای باید شامل ...»، «دو یا تعدادی بیشتر ...» توجه کنید. این موضوع در حقیقت وجه تمایز اصل لانه کبوتری است که بعضی وقتها به کمک آن می‌توانیم به نتیجه‌گیری‌هایی کاملاً دور از انتظار برسیم، حتی مواقعی که به نظر می‌رسد اطلاعاتمان کافی نباشد. (شکل ۱۶ را ببینید.)



شکل ۱۶

اثبات این اصل کاملاً ساده است و در آن فقط از شمارش معمولی کبوترها در لانه‌هایشان استفاده می‌شود. فرض کنید در هیچ یک از لانه‌ها بیش از یک کبوتر نباشد. در این صورت روی هم بیش از  $N$  کبوتر وجود ندارد، و این نتیجه با این فرض که تعداد کبوترها  $N + 1$  است تناقض دارد. بنابراین اصل لانه کبوتری با استفاده از روش اثبات با رسیدن به تناقض، که باید بر آن مسلط باشید، ثابت می‌شود.

ممکن است بپرسید که مسأله زیر چه ربطی به کبوترها دارد؟

مسأله ۱. کیسه‌ای شامل مهره‌هایی به دو رنگ سیاه و سفید است. کمترین تعداد مهره‌هایی که باید بدون نگاه کردن از این کیسه بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم در میان آنها حتماً دو مهره هم‌رنگ وجود دارد چند تاست؟

به نظر می‌رسد که مسأله زیر هم ربطی به کبوترها و لانه‌ها نداشته باشد:

مسأله ۲. یک میلیون درخت کاج در جنگلی روئیده‌اند. می‌دانیم که روی هیچ درخت کاجی بیش از ۶۰۰۰۰۰ برگ وجود ندارد. ثابت کنید در این جنگل دو درخت کاج تعداد برگهایشان یکی است.

راه حل مسأله ۱. می‌توانیم سه مهره از کیسه بیرون بیاوریم. اگر در میان آنها از هر رنگ بیش از یک مهره وجود نداشته باشد، آن وقت روی هم بیش از دو مهره بیرون نیاورده‌ایم. این نتیجه‌گیری واضح است و با اینکه سه مهره از کیسه بیرون آورده‌ایم تناقض دارد. از طرف دیگر، روشن است که بیرون آوردن دو مهره کافی نیست. در اینجا مهره‌ها نقش کبوترها را دارند و رنگها (سیاه و سفید) نقش لانه‌ها را.

راه حل مسأله ۲. یک میلیون «کبوتر» (درخت کاج) وجود دارد و متأسفانه ۶۰۰۰۰۱ لانه که از ۰ تا ۶۰۰۰۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. هر «کبوتر» (درخت کاج) را در لانه‌ای قرار می‌دهیم که شماره‌اش تعداد برگهای آن درخت است. چون «کبوترها» بیشتر از لانه‌ها هستند، در لانه‌ای باید دست‌کم دو «کبوتر» (درخت کاج) باشد؛ اگر در هیچ لانه‌ای بیش از یکی نباشد، آن وقت بیش از ۶۰۰۰۰۱ «کبوتر» وجود ندارد. اما اینکه دو «کبوتر» در یک لانه باشند، معنایش این است که تعداد برگهایشان یکی است.

توجه کنید که صورتهای این مسأله‌ها هم همان ابهام اصل لانه‌کبوتری را در خود دارند. درست همین‌جور مسأله‌ها هستند که می‌توان در بیشتر موارد آنها را با استفاده از اصل لانه‌کبوتری حل کرد.

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان در مواجهه با این ابهام دچار مشکل می‌شوند. آنها ابتدا باید چند تمرین ساده مانند مسأله‌های ۱ و ۲ حل کنند. بعضی وقتها حتی فراموش می‌کنند که چه چیزی را باید ثابت کنند. ممکن است لازم باشد که تفاوت میان درکی شهودی و اثباتی واقعی را برایشان روشن کنید.

در بررسی چند مسأله اول مهم است که روی ایده‌های مشترک، بی‌آنکه اصلاً به‌طور آگاهانه به هیچ اصل کلی‌ای استناد شود، تأکید شود. این ایده‌ها آن‌طور که انتظار می‌رود برای دانش‌آموزان واضح نیستند. به‌دنبال آن می‌توان مجموعه‌ای از مسأله‌ها را برای تقلید آگاهانه استدلالهایی که معلم آنها را درست همان موقع ارائه کرده است، آورد (مسأله‌های ۳ تا ۷). آخر سر می‌توانیم به دانش‌آموزان مستقیماً از اصل لانه‌کبوتری بگوییم و تأکید کنیم که این اصل واقعاً اساس راه‌حل مسأله‌های قبلی بوده است. از این مرحله به بعد در تحلیل مسأله‌ها می‌توانیم بعضی از راه‌حلها را به‌طور مفصل، بدون حتی هیچ



ذکری از عبارت «اصل لانه‌کبوتری»، بیاوریم تا دانش‌آموزان وادار شوند که وضعیت موجود را مجدداً بررسی کنند.

مسئله ۳. دوازده عدد صحیح داده شده‌اند. ثابت کنید می‌توان دو تا از آنها را انتخاب کرد که تفاضلشان بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مسئله ۴. شهر لنینگراد پنج میلیون نفر سکنه دارد. اگر بدانیم هیچ شخصی بیش از یک میلیون تار موی سرش نیست، ثابت کنید که دو نفر از ساکنان لنینگراد تعداد موهای سرشان یکی است.

مسئله ۵. بیست و پنج جعبه سیب به فروشگاه‌ای تحویل داده شده‌اند. این سیبها سه نوع مختلف‌اند و همه سیبهای هر یک از جعبه‌ها یک نوع‌اند. ثابت کنید از میان این جعبه‌ها دستکم نه تایشان شامل یک نوع سیب‌اند.

## ۲. تعمیمهای اصل لانه‌کبوتری

اگر مسأله‌های بالا را با دقت خوانده باشید و سعی کرده باشید که مسئله ۵ را از همان راه دو تایی اول حل کنید، احتمالاً در این کار ناکام مانده‌اید. از اصل لانه‌کبوتری سوای هر چیز دیگر فقط می‌توانید نتیجه بگیرید که دو جعبه وجود دارد که سیبهایشان از یک نوع‌اند. برای حل این مسأله می‌توانیم از «اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته» استفاده کنیم:

اگر  $Nk + 1$  یا تعدادی بیشتر کبوتر را در  $N$  لانه قرار دهیم، آن وقت لانه‌ای باید شامل دستکم  $k + 1$  کبوتر باشد.

در حالتی که  $k = 1$ ، اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته به اصل لانه‌کبوتری ساده تبدیل می‌شود. اثبات اصل تعمیم یافته را به‌عنوان تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

راه حل مسئله ۵. این ۲۵ «کبوتر» (جعبه) را در ۳ «لانه» (انواع سیبها) قرار می‌دهیم. چون  $25 = 3 \times 8 + 1$ ، می‌توانیم از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته، در حالتی که  $N = 3$  و  $k = 8$ ، استفاده کنیم. در این صورت نتیجه می‌شود که «لانه»‌ای باید شامل دستکم ۹ جعبه باشد. در تحلیل این راه حل آموزنده است که آن را از نو بدون استفاده از هیچ شکلی از اصل لانه‌کبوتری و فقط با استفاده از استدلال شمارشی معمولی (از همان نوعی که اصل لانه‌کبوتری را ثابت کردیم) بیان کنید.

برای حل کردن بیشتر مسأله‌های زیر استفاده از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته لازم است.

مسئله ۶. در کشور کورلند  $M$  تیم فوتبال وجود دارد که هر کدامشان ۱۱ بازیکن دارد. همه این بازیکنان برای سفر به کشوری دیگر برای برگزاری مسابقه‌ای مهم در فرودگاهی جمع می‌شوند اما باید در «لیست

انتظار» معطل بمانند.  $10^\circ$  پرواز به مقصد مورد نظر آنها وجود دارد و معلوم شده است که در هر پرواز برای درست  $M$  بازیکن جا هست. یک بازیکن به جای سفر با هواپیما آن هم با معطلی در لیست انتظار با بالگرد شخصی اش خود را به مسابقه خواهد رساند. ثابت کنید که دست کم یک تیم کامل مطمئن خواهد بود که خود را به این مسابقه مهم می‌رساند.

مسئله ۷. ۸ عدد طبیعی متمایز که هیچ کدامشان از ۱۵ بزرگتر نیست مفروض اند. ثابت کنید تفاضل مثبت دست کم سه جفت از آنها یکی است. (لازم است این جفتهای به عنوان مجموعه جدا از هم باشند.) هنگام حل کردن مسئله ۷ با مانعی ظاهراً غیرقابل عبور مواجه می‌شویم. در اینجا ۱۴ تفاضل ممکن میان ۸ عدد داده شده وجود دارد (مقدارهای این تفاضلهای عددی از ۱ تا ۱۴ اند). اینها ۱۴ لانه مورد نظرند. اما کبوترهایمان کدام اند؟ آنها هم باید تفاضلهای میان جفتهای عددی داده شده باشند. به هر حال ۲۸ جفت عدد وجود دارد و می‌توانیم آنها را در ۱۴ لانه‌مان طوری جا دهیم که در هر لانه دقیقاً دو «کبوتر» وجود داشته باشد (و بنابراین هیچ لانه‌ای شامل سه کبوتر نباشد). در اینجا باید به نکته‌ای دیگر هم توجه کنیم. نمی‌توانیم بیش از یک کبوتر در لانه شماره ۱۴ قرار دهیم، چون عدد ۱۴ را فقط به یک طریق می‌توان به شکل تفاضل دو عدد طبیعی کوچکتر از ۱۵ یا برابر با آن نوشت:  $15 - 1 = 14$ . یعنی اینکه ۱۳ لانه باقی مانده شامل دست کم ۲۷ کبوترند و از اصل لانه کبوتری تعمیم یافته نتیجه مورد نظرمان به دست می‌آید.

\* \* \*

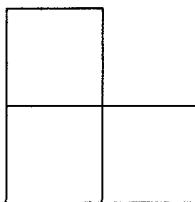
چهار مسئله بعدی را می‌توان با استفاده از اصل لانه کبوتری (معمولی یا تعمیم یافته) و بررسیهای دیگر حل کرد.

مسئله ۸. ثابت کنید در هر گروه پنج نفری دو نفر هستند که تعداد دوستانشان در این گروه یکی است.

مسئله ۹. چند تیم فوتبال در یک دوره مسابقات شرکت کرده‌اند که در آن هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند؟ ثابت کنید در هر لحظه از این دوره مسابقات دو تیم هستند که تا آن لحظه یک تعداد مسابقه برگزار کرده‌اند.

مسئله ۱۰. الف) حداکثر چند تا از خانه‌های صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  را می‌توان سبز کرد، به شرطی که در هر آرایشی از سه خانه مانند شکل ۱۷ (که آن را «سه مربعی» می‌نامند)، دست کم یک خانه سبز نباشد؟ (سه مربعیها ممکن است عین همین شکل در صفحه شطرنج دیده شوند یا اینکه دوران یافته این شکل به اندازه مضربی از  $90^\circ$  باشند.)

ب) دست کم چند تا از خانه‌های صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  را می‌توان سبز کرد، به شرطی که در هر سه مربعی عین شکل ۱۷ (با شرط قسمت الف) دست کم یک خانه سبز باشد؟



شکل ۱۷

راهنمایی مسأله ۱۰ (الف): صفحه شطرنج موردنظر را به شانزده مربع  $2 \times 2$  تقسیم کنید. این مربعهای کوچک لانه‌ها هستند و خانه‌های سبز، کبوترها.

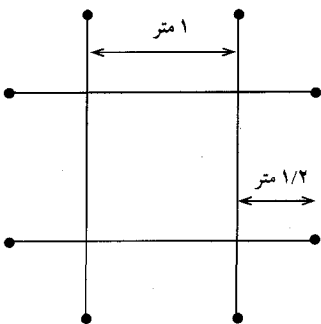
هنگام حل کردن مسأله‌های پیچیده‌تر (مثلاً از مسأله ۱۰ به بعد) بسیار مفید است که فرایندهای تشخیص کبوترها و لانه‌ها، وارد کردن ملاحظات کمکی در استدلال، و به کار بردن خود اصل لانه کبوتری، کاملاً از هم تفکیک شوند. در اینجا یکی از هدفهای مهم پرورش این مهارت است که از صورت مسأله‌ای بتوان تشخیص داد که چه وقت می‌توان اصل لانه کبوتری را در راه حل آن به کار برد.

مسأله ۱۱. ده دانش آموز کلاً ۳۵ مسأله یک المپیاد ریاضی را حل کرده‌اند. هر یک از مسأله‌ها را دقیقاً یک دانش آموز حل کرده است. دست‌کم یک دانش آموز دقیقاً یک مسأله را حل کرده است؛ به همین ترتیب دست‌کم یکی از آنها دقیقاً دو مسأله را حل کرده است و دست‌کم یکی دیگر هم دقیقاً سه مسأله را حل کرده است. ثابت کنید که دست‌کم یک دانش آموز هم وجود دارد که دست‌کم پنج مسأله را حل کرده است.

### ۳. کبوترها در هندسه

مسأله ۱۲. حداکثر چند شاه را می‌توان روی صفحه شطرنج طوری گذاشت که هیچ دوتایشان یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسأله ۱۳. حداکثر چند عنکبوت می‌توانند به‌طور مسالمت‌آمیز روی تار عنکبوت شکل زیر زندگی کنند؟



شکل ۱۸

هر عنکبوت فقط همسایگانی را تحمل می‌کند که فاصله آنها روی تار  $\frac{1}{1}$  متر یا بیشتر باشد.

مسئله ۱۴. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع را نمی‌توان با دو مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر به‌طور کامل پوشاند.

مسئله ۱۵. پنجاه و یک نقطه درون مربعی به طول ضلع ۱ متر پراکنده‌اند. ثابت کنید که مجموعه‌ای از سه تا از این نقطه‌ها را می‌توان با مربعی به طول ضلع  $20$  سانتیمتر پوشاند.

راه‌حل. اگر این مربع را به  $25$  مربع کوچکتر به طول ضلع  $20$  سانتیمتر تقسیم کنیم، از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته نتیجه می‌شود که از این مربعها یکی شامل دست‌کم سه تا از این  $51$  نقطه پراکنده است. خواننده دقیقاً متوجه ایرادی جزئی در این استدلال شده است. در همه جای بحثمان فرض می‌کردیم که لانه‌هایمان جدا از هم‌اند. یعنی ممکن نیست هیچ کبوتری در آن واحد در دو لانه متمایز باشد. به هر حال مربعها، «لانه‌ها»، در این راه‌حل اندکی تداخل دارند: نقطه‌های روی ضلعهای مربعها را می‌توان متعلق به هر دو لانه دانست.

برای رفع این مشکل باید در مورد هر پاره‌خط که مرز یک مربع است انتخابی صورت گیرد، این‌طور که تصمیم بگیریم کدام یک از دو مربع مجاورش شامل نقطه‌های آن فرض شود. این کار را می‌توان مثلاً این‌طور انجام داد که نقطه‌های ضلعهای «شمالی» و «شرقی» هر مربع را کنار بگذاریم و نقطه‌های ضلعهای «جنوبی» و «غربی»‌شان را به حساب بیاوریم (به استثنای نقطه‌های روی ضلعهای مربع اصلی). با این اصلاح جزئی مجموعه‌ای از «لانه‌های واقعی» به دست می‌آید و اثبات مانند قبل ادامه می‌یابد.

#### ۴. تعمیمی دیگر

اکنون توجه کنید که اثبات اصل لانه‌کبوتری بر اساس جمع کردن نابرابریها با هم است. نتیجه‌ای مهم از فرایند جمع کردن نابرابریها را که در بیشتر موارد می‌توان آن را با مضمون اصل لانه‌کبوتری تلفیق کرد، می‌شود این‌طور بیان کرد:

اگر مجموع  $n$  یا تعداد بیشتری عدد برابر با  $S$  شود، آن وقت در میان این عددها باید یک یا تعداد بیشتری عدد وجود داشته باشد که از  $\frac{S}{n}$  بزرگتر نباشند و یک یا تعدادی بیشتر عدد هم باشند که از  $\frac{S}{n}$  کوچکتر نباشند. می‌توانیم این حکم را هم مانند بیشتر شکل‌های اصل لانه‌کبوتری به‌طور غیرمستقیم ثابت کنیم. مثلاً، اگر همه عددهای مورد نظر از  $\frac{S}{n}$  بزرگتر باشند، آن وقت مجموعشان از  $S$  بزرگتر می‌شود که این با فرضمان تناقض دارد.

مسئله ۱۶. پنج کارگر جوان روی هم  $150^\circ$  روبل حقوق می‌گیرند. هر یک از آنها می‌خواهد یک ضبط صوت به قیمت  $32^\circ$  روبل بخرد. ثابت کنید دست‌کم یکی از آنها باید برای خریدن ضبط صوت تا دریافت چک حقوق بعدی‌اش صبر کند.

راه‌حل. مجموع درآمدهای این کارگران، که آن را با  $S$  نشان می‌دهیم،  $۱۵۰۰$  روبل است؛ بنابراین، از اصلی که در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که درآمد دست‌کم یکی از کارگران بیش از  $\frac{۱۵۰۰}{۵}$  یا  $۳۰۰$  روبل نیست. این کارگر باید برای خرید ضبط‌صوتش صبر کند.

مسئله ۱۷. در دسته نظامی ۷ نفره‌ای مجموع سن اعضا ۳۳۲ سال است. ثابت کنید می‌توان سه عضو این دسته را طوری انتخاب کرد که مجموع سنشان از ۱۴۲ سال کمتر نباشد.

راه‌حل. همه سه‌تایی‌های ممکن از اعضای دسته را در نظر بگیرید. اگر سن سه عضو هر یک از این گروه‌ها را با هم جمع کنیم و بعد مجموع عددهای حاصل را حساب کنیم، مجموع نهایی برابر با  $۱۵ \times ۳۳۲$  می‌شود (چون هر نفر در ۱۵ تا سه‌تایی می‌آید). در عین حال، روی هم ۳۵ تا سه‌تایی وجود دارد. یعنی اینکه یک سه‌تایی از اعضای دسته وجود دارد که مجموع سن افرادش از عدد  $\frac{۱۵ \times ۳۳۲}{۳۵}$ ، که از ۱۴۲ بزرگتر است، کمتر نیست.

مسئله ۱۸. بیش از نیمی از سطح سیاره‌ای از منظومه خورشیدی به نام تائو کتاس خشکی است. ثابت کنید که تائو کتانه‌ها می‌توانند تونلی حفر کنند که مستقیم از مرکز سیاره‌شان بگذرد و ابتدا و انتهایش در خشکی باشد (فرض کنید که دانش فنی آنها به قدر کافی پیشرفت کرده باشد).

## ۵. نظریه اعداد

مسئله‌های بی‌نظیر بسیاری درباره ویژگی‌های بخش‌پذیری عددهای صحیح را می‌توان با استفاده از اصل لانه‌کبوتری حل کرد.

مسئله ۱۹. ثابت کنید تفاضل دو تا از توانهای ۲ مضرب از ۱۹۸۷ است.

مسئله ۲۰. ثابت کنید در میان هر ۵۲ عدد صحیح همیشه می‌توان دو عدد طوری پیدا کرد که تفاضل مربعاتشان بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

مسئله ۲۱. ثابت کنید عددی صحیح وجود دارد که نمایش اعشاری‌اش تماماً از رقم‌های ۱ تشکیل شده و بر عدد ۱۹۸۷ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. ابتدا ۱۹۸۸ «کبوتر» به شماره‌های ۱، ۱۱، ۱۱۱، ...، ۱۱۱...۱۱۱ (رقم ۱) در نظر بگیرید و آنها را در ۱۹۸۷ لانه به شماره‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۱۹۸۶ جا دهید. هر عدد در لانه‌ای گذاشته می‌شود که شماره‌اش برابر با باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۹۸۷ است. اکنون بنابر اصل لانه‌کبوتری اطمینان می‌یابیم که دو عدد وجود دارند که باقی‌مانده تقسیمشان بر ۱۹۸۷ یکی است. فرض کنید این عددها به ترتیب  $m$  تا ۱ و  $n$  تا ۱ داشته باشند و  $m > n$ . در این صورت تفاضلشان که برابر با

مسئله ۲۱.  $111000 \dots 111000$  (تا  $m - n$ ) تا  $n$  تا صفر) است بر عدد ۱۹۸۷ بخش پذیر است. چون نه ۲ عاملی از ۱۹۸۷ است و نه ۵، صفرهای طرف راست عدد بالا تأثیری در بخش پذیری بر ۱۹۸۷ ندارند و می توان همه آنها را خط زد تا عددی به دست آید که همه رقمهایش ۱ اند و بر ۱۹۸۷ بخش پذیر است. مسئله ۲۲. ثابت کنید توانی از عدد ۳ وجود دارد که (در نمایش اعشاری) به رقمهای ۰۰۱ ختم می شود.

مسئله ۲۳. هر یک از خانه های جدولی  $3 \times 3$  با یکی از عددهای  $-1, 0, 1$  پر شده است. ثابت کنید از میان هشت مجموع ممکن عددهای روی سطرها، ستونها و قطرهای دوتایشان با هم برابرند.

مسئله ۲۴. بیش از نیمی از  $100$  نفری که دور میزی گرد نشسته اند مردند. ثابت کنید دو مرد وجود دارند که در دو سر یک قطر میز روبه روی یکدیگر نشسته اند.

مسئله ۲۵. پانزده پسر  $100$  عدد گردو جمع کرده اند. ثابت کنید دو تا از این پسرها یک تعداد گردو جمع کرده اند.

مسئله ۲۶. رقمهای  $1, 2, \dots, 9$  به سه گروه تقسیم شده اند. ثابت کنید حاصل ضرب عددهای یکی از این گروهها باید از  $71$  بیشتر باشد.

مسئله ۲۷. خانه های جدولی  $10 \times 10$  را با عددهای صحیح طوری پر کرده ایم که هیچ دو عدد صحیح مجاوری تفاضلشان از  $5$  بیشتر نباشد. (دو عدد صحیح در صورتی مجاورند که خانه هایشان در یک ضلع مشترک باشند). ثابت کنید دو تا از این عددهای صحیح با هم برابرند.

مسئله ۲۸. ثابت کنید در میان هر شش نفر یا سه نفر وجود دارند که هر یک از آنها دو نفر دیگر را می شناسد و یا سه نفر وجود دارند که هیچ یک از آنها دو نفر دیگر را نمی شناسد.

مسئله ۲۹. پنج نقطه مشبکه ای روی مشبکه مربعی نامحدودی انتخاب شده اند. ثابت کنید وسط یکی از پاره خطهایی که دو تا از این نقطه ها را به هم وصل می کند هم نقطه ای مشبکه ای است.

مسئله ۳۰. در انباری از هر یک از شماره های  $41, 42, 43$  و  $200$  لنگه پوتین وجود دارد. از این  $600$  لنگه پوتین،  $300$  تا لنگه چپ اند و  $300$  تا لنگه راست. ثابت کنید می توان در میان این لنگه پوتینها دست کم  $100$  جفت پوتین قابل استفاده پیدا کرد.

مسئله ۳۱. الفبای یک زبان شامل  $22$  حرف بی صدا و  $11$  حرف صدادار است. هر رشته از این حروف به شرطی کلمه ای از این زبان است که در آن هیچ دو حرف بی صدایی کنار هم نباشند و هیچ حرفی هم دو بار به کار نرفته باشد. این الفبا به  $6$  زیرمجموعه (نا تهی) تقسیم می شود. ثابت کنید که حروف دست کم یکی از این گروهها چنان اند که می توان با آنها کلمه ای از این زبان را ساخت.

مسأله ۳۲. ثابت کنيد که می توانيم زیر مجموعه ای از مجموعه ای از ده عدد صحيح داده شده را طوری انتخاب کنیم که مجموع عضوهایش بر  $10^{\circ}$  بخش پذیر باشد.

مسأله ۳۳. ۱۱ عدد طبیعی متمایز که هیچ یک از آنها از  $20^{\circ}$  بزرگتر نیست داده شده اند. ثابت کنيد که می توان دو تا از این عددها را طوری انتخاب کرد که یکی از آنها دیگری را بشمارد.

مسأله ۳۴. یازده دانش آموز در اردویی تابستانی پنج گروه پژوهشی تشکیل داده اند. ثابت کنيد که می توان دو دانش آموز، مانند A و B، طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش آموز A باشد شامل دانش آموز B هم باشد.

دانش آموزان باید به خاطر داشته باشند حتی در صورتی که نتوانند فوراً از پس حل مسأله ای بر بیایند همیشه به صلاحشان است که بعداً به آن بازگردند و ایده هایی تازه را امتحان کنند. به فصل راه حلها نپرداز! و دست آخر، فراموش نکنيد که بعضی از مسأله ها ممکن است راه حل های دیگری داشته باشند که در آنها از اصل لانه کبوتري استفاده نمی شود.

## فصل ۵

### گرافها - ۱

مفاهیمی که در این فصل به آنها می‌پردازیم در حل بسیاری از انواع مسأله‌هایی که در بیشتر موارد از نظر ظاهری اصلاً به هم شباهت ندارند به غایت مفیدند. گرافها هم از این نظر مهم‌اند و هم جذابیتهای خاص خودشان را دارند. بخشی از ریاضیات به‌نام نظریهٔ گراف به مطالعهٔ این مبحث اختصاص یافته است. در اینجا برای اینکه نشان دهیم چطور از گرافها در حل مسأله‌ها استفاده می‌شود چندتا از ایده‌های اولیهٔ این نظریه را بررسی می‌کنیم.

#### ۱. مفهوم گراف

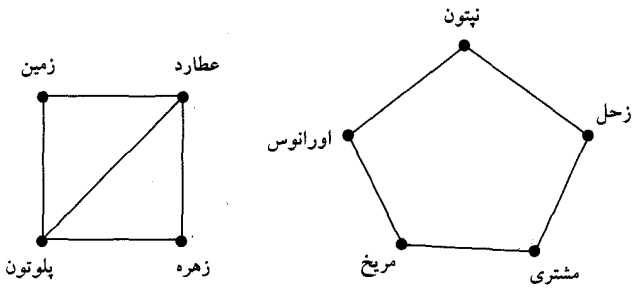
مسألهٔ ۱. میان نه سیارهٔ منظومهٔ خورشیدی ارتباطهای فضایی برقرار شده است. موشکها در این مسیرها حرکت می‌کنند: زمین - عطارد، پلوتون - زهره، زمین - پلوتون، پلوتون - عطارد، عطارد - زهره، اورانوس - نپتون، نپتون - زحل، زحل - مشتری، مشتری - مریخ و مریخ - اورانوس. آیا مسافری می‌تواند از زمین به مریخ برود؟

راه‌حل. می‌توانیم نموداری بکشیم و در آن سیاره‌ها را با نقطه‌ها و مسیرهای ارتباطی میان آنها را با پاره‌خطهای غیرمتقاطع نشان دهیم (شکل ۱۹ را ببینید). از روی این نمودار روشن است که نمی‌توان از زمین به مریخ رفت.

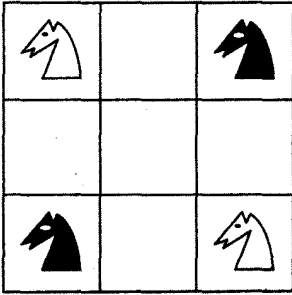
مسألهٔ ۲. چند اسب روی صفحهٔ شطرنجی  $3 \times 3$  مانند شکل ۲۰ گذاشته شده‌اند. آیا می‌توان هر یک از آنها را با استفاده از حداکثر یک حرکت عادی اسب در شطرنج طوری جابه‌جا کرد که وضعیت شکل ۲۱ به‌دست آید؟

راه‌حل. پاسخ منفی است. برای اثبات این ادعا ابتدا خانه‌های صفحهٔ شطرنج موردنظر را با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹ مانند شکل ۲۲، شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت می‌توانیم هر خانه را با یک نقطه

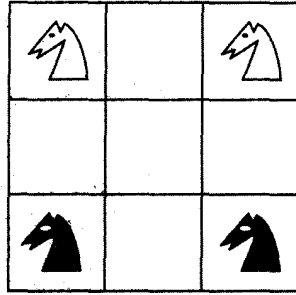




شکل ۱۹



شکل ۲۱



شکل ۲۰

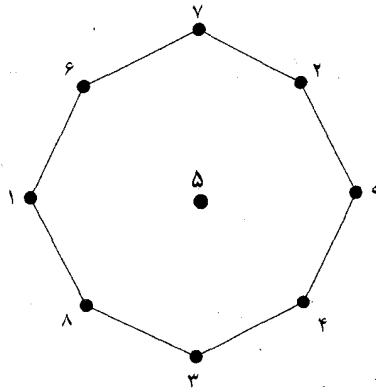
۱	۴	۷
۲	۵	۸
۳	۶	۹

شکل ۲۲

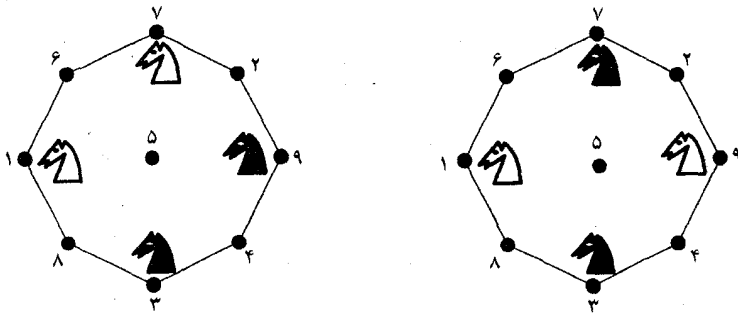
نمایش دهیم. اگر بتوانیم با یک حرکت اسب از یک خانه به خانه‌ای دیگر برویم، نقطه‌های متناظر این خانه‌ها را با یک پاره‌خط به هم وصل می‌کنیم (شکل ۲۳). وضعیت اسبها در ابتدا و در انتها در شکل ۲۴ نشان داده شده است.

روشن است که ترتیب اسبها روی دایره را نمی‌توان تغییر داد. بنابراین نمی‌توان وضعیت اسبها را به شکل موردنظر درآورد.

راه‌حلهای این دو مسأله که ظاهرشان اصلاً به هم شباهت ندارد در ایده‌ای اساسی مشترک‌اند: نمایش دادن داده‌های مسأله با یک نمودار. نمودارهای حاصل هم در چیزی مشترک‌اند؛ هر یک از آنها



شکل ۲۳



شکل ۲۴

شامل مجموعه‌ای از نقطه‌ها هستند که بعضی از آنها با پاره‌خط به هم وصل شده‌اند. شکلی از این دست را گراف می‌نامند. همچنین نقطه‌های موردنظر را رأسهای گراف و پاره‌خطها را یالهای آن می‌نامند.

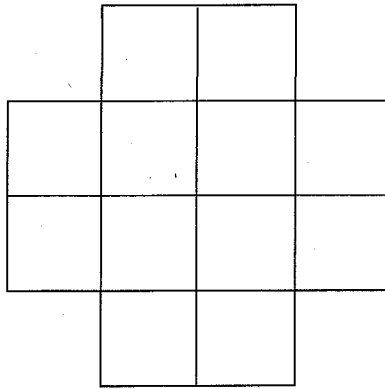
یادداشت. تعریفی که در اینجا برای گراف آورده‌ایم واقعاً زیادی محدودکننده است. مثلاً در مسأله ۲۰ در زیر، کاملاً طبیعی است که برای کشیدن یالهای گراف به جای پاره‌خط از کمان استفاده کنیم. با وجود این، آوردن تعریف دقیق در اینجا ممکن است زیادی پیچیده باشد. توصیف بالا برای اینکه دانش‌آموزان تصویری شهودی از گراف پیدا کنند کافی است. بعدها اگر خواستند می‌توانند این تعریف را اصلاح کنند.

\*\*\*

در اینجا دو مسأله دیگر آورده‌ایم که می‌توان آنها را هم با کشیدن گرافهایی حل کرد.

مسأله ۳. صفحه شطرنجی به شکل یک علامت بعلاوه از حذف کردن خانه‌های گوشه‌ای صفحه

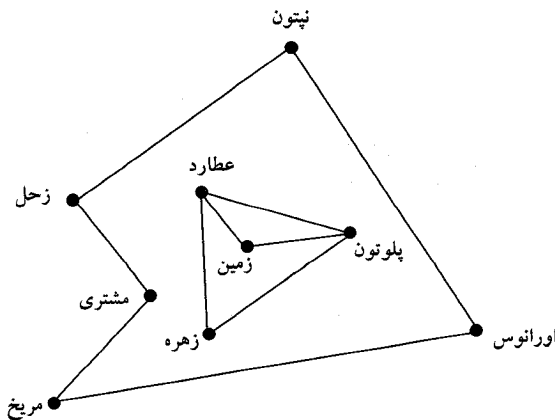
شطرنجی  $4 \times 4$  به دست آمده است (شکل ۲۵ را ببینید). آیا ممکن است اسبی از خانه‌های این صفحه دقیقاً یک بار بگذرد، سرتاسرش را طی کند و به همان خانه‌ای که از آن به راه افتاده بود بازگردد؟



شکل ۲۵

مسئله ۴. کشور فیگورانه شهر به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دارد. مسافری متوجه می‌شود که میان هر دو تا از این شهرها وقتی و فقط وقتی خطی هوایی وجود دارد که عددی دو رقمی که از شماره‌های آنها ساخته می‌شود بر ۳ بخش‌پذیر باشد. آیا با این اوصاف این مسافر می‌تواند با هواپیما از شهر ۱ به شهر ۹ برود؟

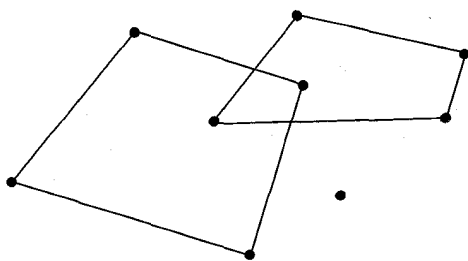
توجه کنید که گراف را می‌توان به راههای مختلف نمایش داد. مثلاً گراف مسئله ۱ را می‌توان مانند شکل ۲۶ هم نمایش داد.



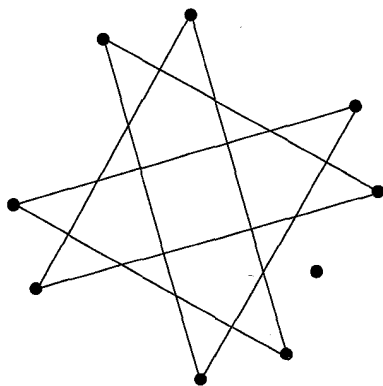
شکل ۲۶

تنها موضوع مهم در مورد گراف این است که کدام رأسهایش به هم وصل اند و کدامها به هم وصل نیستند. دو گراف را که کاملاً عین هم اند و تنها فرقشان احتمالاً این است که به طور متفاوتی رسم شده اند، یکریخت می نامند.

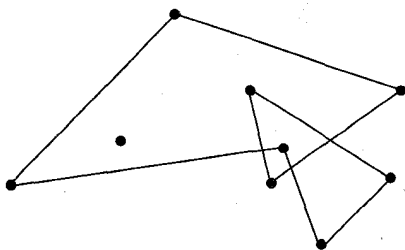
مسئله ۵. سعی کنید در شکل‌های ۲۷، ۲۸ و ۲۹ گرافی یکریخت با گراف مسئله ۲ (شکل ۲۳ را ببینید) پیدا کنید.



شکل ۲۸



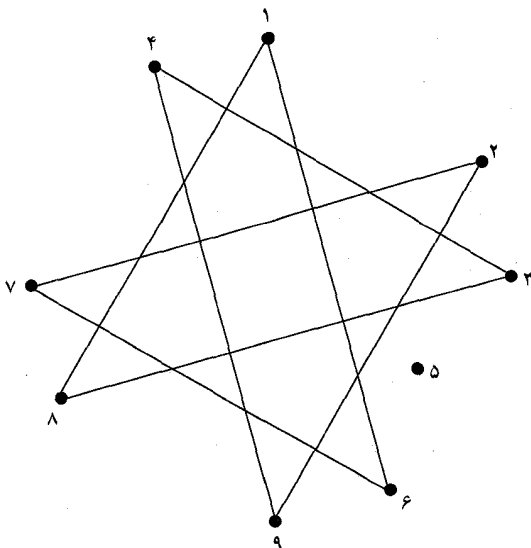
شکل ۲۷



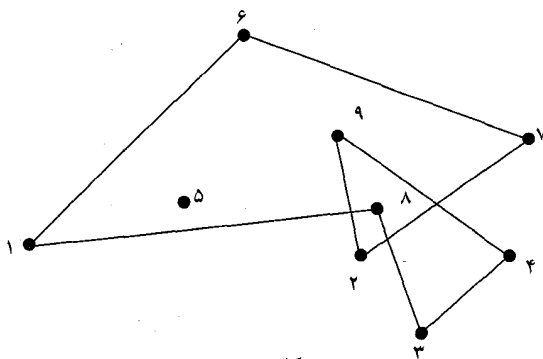
شکل ۲۹

راه حل. گرافهای اولی و سومی با هم یکریخت اند و اطمینان یافتن از اینکه این گرافها هر دو با گراف مسئله ۲ یکریخت اند چندان دشوار نیست؛ فقط کافی است که رأسهایشان را از نو شماره گذاری کنیم (شکل‌های ۳۰ و ۳۱ را ببینید). اثبات اینکه گرافهای شکل‌های ۲۸ و ۲۳ یکریخت نیستند نسبتاً پیچیده تر است.

توصیه به معلمان. مفهوم گراف را باید فقط بعد از مطرح کردن چند مسئله مانند مسئله‌های ۱ و ۲ در بالا که مستلزم استفاده از گراف برای نمایش شرایط مسئله اند معرفی کرد. مهم است که دانش آموزان خیلی زود بفهمند که گراف را می توان به راه‌های مختلف کشید. برای روشن شدن ایده یکریختی دانش آموزان می توانند چند تمرین دیگر را شبیه آنهایی که در اینجا آوردیم حل کنند.



شکل ۳۰



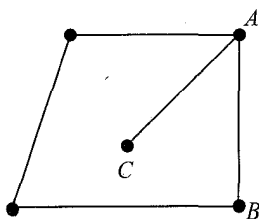
شکل ۳۱

## ۲. درجه رأسها: شمارش یالها

در بخش قبلی گراف را مجموعه‌ای از نقطه‌ها (رأسها) تعریف کردیم که بعضی از آنها با پاره‌خطهایی (یالها) به هم وصل شده‌اند. تعداد یالهایی را که از رأسی خارج شده‌اند درجهٔ این رأس می‌نامند. به این ترتیب، مثلاً در گراف شکل ۳۲ درجهٔ رأس A برابر با ۳، درجهٔ رأس B برابر با ۲ و درجهٔ رأس C برابر با ۱ است.

مسئلهٔ ۶. در اسمالویل ۱۵ تلفن عمومی وجود دارد. آیا می‌توان این تلفن‌ها را با سیم‌کشی طوری به هم وصل کرد که هر تلفن دقیقاً به پنج‌تای دیگر وصل باشد؟

راه‌حل. فرض کنید که چنین کاری ممکن باشد. گرافی را در نظر بگیرید که رأسهایش تلفن‌ها باشند و



شکل ۳۲

یالهایش سیم‌کشیهای موردنظر. این گراف ۱۵ رأس دارد که درجهٔ هر یک از آنها ۵ است. اکنون تعداد یالهایش را می‌شماریم. برای این کار می‌توانیم درجه‌های همهٔ رأسها را با هم جمع کنیم. البته، در این مجموع هر یال دو بار شمرده شده است (هر یال دو رأس را به هم وصل می‌کند). بنابراین تعداد یالهای این گراف برابر با  $\frac{15 \times 5}{2}$  است. اما این عدد، عددی طبیعی نیست. پس چنین گرافی وجود ندارد، یعنی نمی‌توانیم تلفنهای موردنظر را آن‌طور که خواسته شده است به هم وصل کنیم.

در راه‌حل این مسأله نشان داده‌ایم که چطور می‌توان با دانستن درجهٔ هر رأس، یالهای گراف را شمرد: درجهٔ همهٔ رأسها را با هم جمع می‌کنیم و مجموع به‌دست آمده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

مسألهٔ ۷. کشوری ۱۰۰ شهر دارد و از هر شهر چهار جاده به شهرهای دیگر می‌رود. این کشور روی هم چند جاده دارد؟

توجه کنید که از روشی که برای شمارش یالهای گراف بیان کردیم نتیجه می‌شود مجموع درجه‌های همهٔ رأسهای گراف عددی زوج است (در غیر این صورت نمی‌توانستیم آن را بر ۲ تقسیم کنیم تا تعداد یالها به‌دست آید). با استفاده از تعریفهای زیر می‌توانیم این نتیجه را بهتر صورتبندی کنیم: هر رأس گراف را که درجه‌اش عددی فرد باشد رأسی فرد و هر رأس را که درجه‌اش عددی زوج باشد رأسی زوج می‌نامند.

قضیه: تعداد رأسهای فرد هر گراف عددی زوج است.

برای اثبات این قضیه کافی است توجه کنید که مجموع چند صحیح وقتی فقط وقتی عددی زوج است که تعداد جمعوندهای فردش عددی زوج باشد.

یادداشت. این قضیه در این فصل نقش اساسی دارد. مهم است که اثباتش همیشه در ذهنمان باشد و در حل مسأله‌ها بارها و بارها از آن استفاده کنیم. دانش‌آموزان را باید تشویق کرد تا به‌جای اینکه صرفاً صورت قضیه را بدانند اثبات آن را در راه‌حل مسأله‌هایشان تکرار کنند.

این قضیه اغلب برای اثبات وجود یالی از گراف، مانند مسألهٔ ۱۲، به‌کار می‌رود. همچنین می‌توان از این قضیه برای اثبات اینکه رسم گرافی که برخی ویژگیها را داشته باشد غیرممکن است استفاده کرد

(مسئله‌های ۸ تا ۱۱ را ببینید). ممکن است دست و پنجه نرم کردن با مسئله‌هایی از این دست برای دانش‌آموزان دشوار باشد. لازم است که ابتدا سعی کنند گراف خواسته شده را بکشند، بعد حدس بزنند که این کار ممکن نیست و آخر سر با استفاده از قضیه‌ی بالا استدلالی قانع‌کننده یا اثباتی روشن بیاورند که گراف موردنظر وجود ندارد.

مسئله ۸. کلاسی ۳۰ دانش‌آموز دارد. آیا ممکن است که ۹ تا از آنها هر کدام ۳ دوست، ۱۱ تا از آنها هر کدام ۴ دوست و ۱۰ تا از آنها هر کدام ۵ دوست (در این کلاس) داشته باشند؟

راه‌حل. اگر چنین چیزی ممکن باشد، می‌توانیم گرافی هم بکشیم که ۳۰ رأس (معرف دانش‌آموزان) داشته باشد که درجه ۹ تا از آنها ۳، درجه ۱۱ تا از آنها ۴ و درجه ۱۰ تا از آنها ۵ باشد (رأسهایی را که با هم «دوست» اند با یال به هم وصل می‌کنیم). البته، چنین گرافی باید ۱۹ رأس فرد داشته باشد که با قضیه‌ی بالا تناقض دارد.

مسئله ۹. در اسمالویل ۱۵ تلفن عمومی وجود دارد. آیا می‌توان این تلفن‌ها را طوری به هم وصل کرد که الف) هر تلفن دقیقاً به ۷ تای دیگر وصل باشد؛

ب) ۴ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۳ تای دیگر وصل باشد، ۸ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۶ تای دیگر وصل باشد و ۳ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۵ تای دیگر وصل باشد؟

مسئله ۱۰. پادشاهی بر ۱۹ کشور سلطه دارد. آیا ممکن است که هر یک از این کشورها یا ۱ همسایه تحت سلطه داشته باشد یا ۵ تا و یا ۹ تا؟

مسئله ۱۱. آیا ممکن است در کشوری که از هر شهرش ۳ جاده به شهرهای دیگر می‌رود دقیقاً ۱۰۰ جاده وجود داشته باشد؟

مسئله ۱۲. جان به‌هنگام بازگشت از دیسنی‌لند به خانه گفت که در آنجا دریاچه‌ای طلسم شده شامل ۷ جزیره دیده است که به هر یک از آنها یا ۱ پل منتهی می‌شده است یا ۳ پل یا ۵ پل. آیا درست است که دست‌کم یکی از این پلها باید به ساحل دریاچه منتهی شود؟

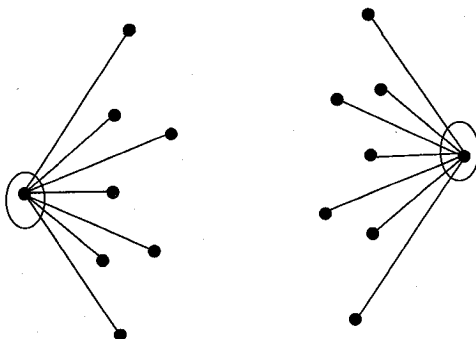
مسئله ۱۳. ثابت کنید از ابتدای خلقت تاکنون تعداد افرادی که در طول حیاتشان تعدادی فرد بار با دیگران دست داده‌اند عددی زوج است.

مسئله ۱۴. آیا ممکن است هر یک از ۹ پاره‌خطی که در صفحه رسم شده‌اند دقیقاً ۳ تای دیگر را قطع کند؟

### ۳. چند تعریف جدید

مسأله ۱۵. کشور هفت ۱۵ شهر دارد که از هر یک از آنها به دست کم ۷ شهر دیگر جاده‌هایی مستقیم کشیده شده است. ثابت کنید می‌توان احياناً از بعضی از شهرها گذشت و از هر شهر این کشور به هر شهر دیگرش رفت.

راه‌حل. دو شهر دلخواه این کشور را در نظر بگیرید و فرض کنید که هیچ مسیری میانشان وجود نداشته باشد. یعنی این که دنباله‌ای از جاده‌ها وجود ندارد که انتهای یکی ابتدای بعدی باشد و این دو شهر را به هم وصل کنند. از یک طرف می‌دانیم از هر یک از این دو شهر دست کم به ۷ شهر دیگر جاده‌هایی مستقیم وجود دارد. این ۱۴ شهر باید همگی متمایز باشد: اگر دو شهر دلخواه از آنها یکی باشند، آن وقت مسیری وجود دارد که از آنها (یا آن) می‌گذرد و این دو شهر را به هم وصل می‌کند (شکل ۳۳ را ببینید). بنابراین دست کم ۱۶ شهر متمایز در این کشور وجود دارد که این با فرض مسأله تناقض دارد.



شکل ۳۳

\* \* \*

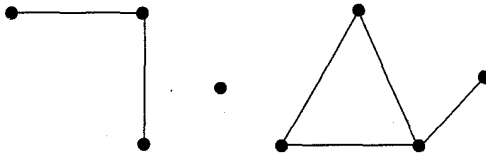
در اینجا دو تعریف مهم می‌آوریم که بی‌ربط به مسأله قبل هم نیستند: گراف را در صورتی همبند می‌نامند که هر دو رأسش را بتوان با مسیری (دنباله‌ای از یالها که هر یک از آنها از انتهای یال قبلی شروع می‌شود) به هم وصل کرد.

مسیر بسته (مسیری که رأسهای ابتدا و انتهایش یکی باشند) را دور می‌نامند. اکنون می‌توانیم نتیجه مسأله قبلی را این طور صورتبندی کنیم: گراف جاده‌های کشور هفت همبند است. مسأله ۱۶. ثابت کنید هر گراف  $n$  رأسی که درجه هر یک از رأسهایش دست کم  $\frac{n-1}{4}$  باشد همبند است.

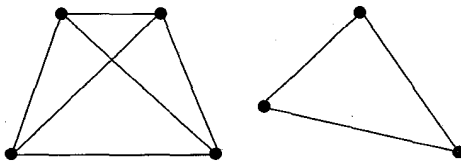
طبیعی است که سؤال شود شکل گرافی ناهمبند چگونه است. گرافی از این دست از چند «تکه»



تشکیل می‌شود که در هر یک از آنها می‌توان از روی یالها از هر رأس به هر رأس دیگر رفت. به این ترتیب، مثلاً، گراف شکل ۳۴ از سه «تکه» تشکیل شده است در حالی که گراف شکل ۳۵ از دو تکه.



شکل ۳۴



شکل ۳۵

این «تکه‌ها» را مؤلفه‌های همبند گراف می‌نامند. بدیهی است که هر مؤلفه همبند، گرافی همبند است. همچنین توجه کنید که هر گراف همبند فقط از یک مؤلفه همبند تشکیل می‌شود.

مسئله ۱۷. در سرزمین رؤیاها فقط یک جور وسیله نقلیه وجود دارد: قالی پرنده. بیست و یک خط قالیبرانی از پایتخت به شهرهای دیگر وجود دارد. یک خط قالیبرانی به فارویل پرواز می‌کند و از هر یک از بقیه شهرها هم دقیقاً ۲۰ خط به شهرهای دیگر می‌رود. ثابت کنید که می‌توان با قالی پرنده از پایتخت به فارویل رفت (فقط ممکن است که لازم شود خط عوض کنیم).

راه حل. آن مؤلفه همبند گراف خطهای قالیبرانی را در نظر می‌گیریم که شامل پایتخت است. باید ثابت کنیم که این مؤلفه شامل فارویل هم است. فرض کنید این طور نباشد. در این صورت درجه یک رأس این مؤلفه ۲۱ و درجه بقیه رأسهایش ۲۰ است. بنابراین، این مؤلفه همبند دقیقاً یک رأس فرد دارد که این تناقض است.

یادداشت. مفهوم همبندی در گرافها بی‌اندازه مهم است و مدام در مطالب بعدی در نظریه گراف از آن استفاده می‌شود. ایده راه حل مسئله ۱۷ - بررسی مؤلفه‌های همبند - ایده‌ای ارزشمند است و معلوم شده است که در بیشتر موارد در حل مسأله‌ها به‌کار می‌آید.

مسئله ۱۸. در کشوری از هر شهر ۱۰۰ جاده به شهرهای دیگر می‌رود و می‌توان از راه این جاده‌ها از

هر شهر به هر شهر دیگر رفت. یکی از جاده‌ها به علت تعمیرات بسته است. ثابت کنید با وجود این باز هم می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

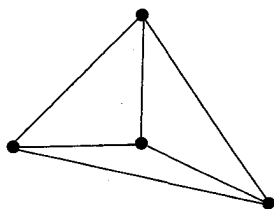
#### ۴. گرافهای اویلری

مسأله ۱۹. آیا می‌توان گراف

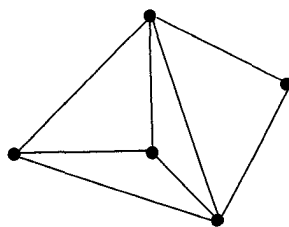
الف) شکل ۳۶؛

ب) شکل ۳۷،

را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد و در ضمن هر یال دقیقاً یک بار کشیده شود؟



شکل ۳۷



شکل ۳۶

راه حل. الف) بله. یک راهش این است که از رأس منتهالیه سمت چپ شروع به کشیدن کنیم و در نهایت به رأس مرکزی برسیم.

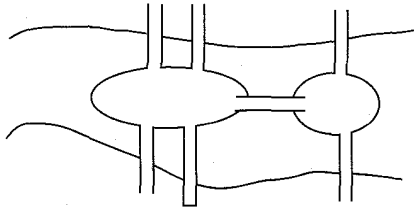
ب) خیر. در واقع اگر بتوانیم گراف مورد نظر را آن‌طور که در مسأله خواسته شده است بکشیم، آن وقت تعداد دفعاتی که به هر رأس وارد می‌شویم برابر با تعداد دفعاتی است که از آن خارج می‌شویم (به استثنای رأسهای ابتدایی و انتهایی). بنابراین درجه هر یک از رأسها، به استثنای دو تا از آنها، باید عددی زوج باشد. اما در مورد گراف شکل ۳۷ این‌طور نیست.

هنگام حل کردن مسأله ۱۹ در حقیقت این اصل کلی را ثابت کرده‌ایم:

گرافی که بتوان آن را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ طوری رسم کرد که هر یال دقیقاً یک بار کشیده شود، بیش از دو رأس فرد ندارد.

این جور گرافها را نخستین بار لئونارد اویلر، ریاضیدان بزرگ سوئیس، در سال ۱۷۳۶ در مورد مسأله‌ای معروف درباره پلهای کونیگسبرگ بررسی کرد (مسأله ۱۲ را هم ببینید). گرافهایی را که می‌توان آنها را این طوری رسم کرد گرافهای اویلری می‌نامند.

مسأله ۲۰. نقشه شهر کونیگسبرگ در شکل ۳۸ نشان داده شده است. این شهر در دو کرانه رودخانه‌ای قرار گرفته است و دو جزیره در رودخانه مورد نظر وجود دارد. هفت پل بخشهای مختلف شهر را به هم



شکل ۳۸

وصل می‌کنند. آیا می‌توان در این شهر گردش کرد و در ضمن از هر یک از پلها دقیقاً یک بار گذشت؟

- مسئله ۲۱. مجمع‌الجزایری با پلهایی طوری به هم وصل شده‌اند که می‌توان از هر جزیره به هر جزیره دیگر رفت. گردشگری به همه جزیره‌ها می‌رود و در ضمن از هر یک از پلها دقیقاً یک بار می‌گذرد. او در این سیاحت سه بار به جزیره سه‌دفعه رفته است. چند پل به جزیره سه‌دفعه وجود دارد در صورتی که
- الف) این گردشگر سیاحتش را نه از این جزیره آغاز کرده باشد و نه در آنجا به پایان برده باشد؛
- ب) این گردشگر سیاحتش را از این جزیره آغاز کرده باشد ولی در آنجا به پایان نبرده باشد؛
- ج) این گردشگر سیاحتش را از این جزیره آغاز کرده باشد و در همان جا به پایان برده باشد؛

مسئله ۲۲. الف) طول تکه سیمی  $۱۲۰$  سانتیمتر است. آیا می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدنش)

اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش  $۱۰$  سانتیمتر باشد؟

ب) کمترین تعداد برشهای لازم در سیم برای اینکه بتوان اسکلت مکعب مورد نظر را

ساخت چقدر است؟

## فصل ۶

### نابرابری مثلث

#### ۱. مقدمه

نابرابری مثلث را به راحتی می‌توان بیان کرد صرف‌نظر از اینکه دانش‌آموزان به‌طور رسمی با هندسه آشنایی داشته باشند یا نه. اما حتی برای آن دسته از دانش‌آموزانی که پیش از این اثباتهای اصل موضوعی یا رسمی هندسه را مطالعه کرده‌اند کاربردهایی غیر بديهی از این نابرابری وجود دارد که کاملاً ورای صورت ظاهری مسأله‌ها نهفته است. همچنین مسأله‌هایی شامل نابرابری مثلث می‌توان طرح کرد که حلشان تلاش فکری چشمگیری را بطلبد.

مضمون این نابرابری این است که در هر مثلث مانند  $ABC$  سه نابرابری زیر برقرار است

$$AB < AC + BC, \quad AC < BC + AB, \quad BC < AB + AC$$

یعنی طول هر ضلع مثلث از مجموع طولهای دو ضلع دیگرش کمتر است.

مسأله ۱. ثابت کنید به‌ازای هر سه نقطه مانند  $A, B, C$ ،  $AC \geq |AB - BC|$ .

هنگام بحث درباره این مسأله مهم است که تعبیر هندسایش هم گفته شود: طول هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل طولهای دو ضلع دیگر کمتر نیست.

مسأله ۲. در مثلث  $ABC$  طول ضلعهای  $AC$  و  $AB$  به ترتیب  $۳/۸$  و  $۰/۶$  است. اگر طول ضلع  $BC$  عددی صحیح باشد مقدارش را پیدا کنید؟

مسأله ۳. ثابت کنید طول هر ضلع مثلث از نصف محیطش بیشتر نیست.

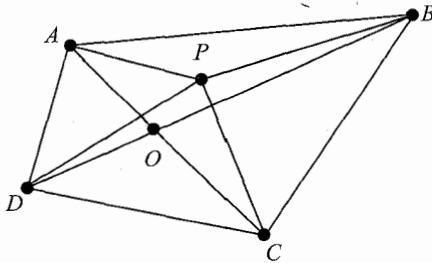
مسأله ۴. فاصله لنینگراد تا مسکو  $۶۶۰$  کیلومتر است. از لنینگراد تا شهر لیکووا  $۳۱۰$  کیلومتر، از لیکووا تا کلین  $۲۰۰$  کیلومتر و از کلین تا مسکو  $۱۵۰$  کیلومتر است. فاصله لیکووا از مسکو چقدر است؟

راهنمایی: توجه کنید که مجموع فاصله‌های لنینگراد از لیکووا، لیکووا از کلین و کلین از مسکو برابر با فاصله لنینگراد از مسکو است. یعنی اینکه این شهرها همگی روی یک خط راست قرار دارند.

توجه کنید که در راه حل مسأله ۴ از این مطلب استفاده می‌کنیم که مجموع طولهای سه ضلع دلخواه هر چهارضلعی از طول ضلع چهارمش بزرگتر است. این مطلب را می‌توان به راحتی با استفاده از نابرابری مثلث ثابت کرد. در حقیقت، در هر چندضلعی مجموع طولهای همه ضلعها، بجز یکی از آنها، از طول ضلع موردنظر بزرگتر است.

این مطلب را می‌توان برای بیشتر دانش‌آموزان در چند حالت ثابت کرد و بعد درستی آن را در همه حالتها به طور شهودی پذیرفت. دانش‌آموزان پیشرفته‌تر می‌توانند با استفاده از استقرا اثباتی برایش بیاورند. مسأله ۵. درون چهارضلعی ای محدب نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌هایش از رأسهای چهارضلعی کمترین مقدار ممکن باشد.

راه حل. چون چهارضلعی موردنظر محدب است قطرهایش در نقطه‌ای درونی مانند  $O$  یکدیگر را قطع می‌کنند. فرض کنید رأسهای چهارضلعی نقطه‌های  $A, B, C, D$  باشند (شکل ۳۹ را ببینید).



شکل ۳۹

در این صورت مجموع فاصله‌های نقطه  $O$  از رأسها برابر با  $AC + BD$  است. اما به ازای هر نقطه دیگر مانند  $P$  (بنابر نابرابری مثلث)،  $PA + PC > AC$  و به همین ترتیب  $PB + PD \geq BD$ . یعنی مجموع فاصله‌های نقطه  $P$  از رأسهای چهارضلعی از  $AC + BD$  کمتر نیست. روشن است که این مجموع فقط وقتی برابر با  $AC + BD$  است که  $O$  و  $P$  یک نقطه باشند. بنابراین  $O$  همان نقطه‌ای است که دنبالش می‌گشیم.

مسأله ۶. نقطه  $O$  در صفحه مربع  $ABCD$  داده شده است. ثابت کنید فاصله  $O$  از یکی از رأسهای این مربع از مجموع فاصله‌هایش از سه رأس دیگر بزرگتر نیست.

مسأله ۷. ثابت کنید مجموع طول قطرهای هر چهارضلعی محدب از محیط آن کمتر است اما از نصف محیطش بیشتر است.

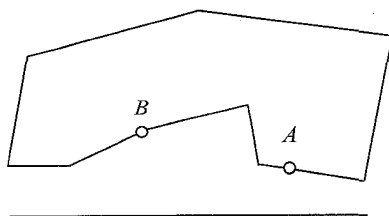
مسئله ۸. ثابت کنید مجموع طول قطرهای هر پنج ضلعی محدب از محیط آن بزرگتر است اما از دو برابر محیطش کمتر است.

مسئله ۹. ثابت کنید فاصله دو نقطه دلخواه درون هر مثلث از نصف محیط این مثلث بزرگتر نیست.

## ۲. نابرابری مثلث و تبدیلهای هندسی

اغلب مثلثی که باید در موردش نابرابری مثلث را به کار ببریم در شکل مسئله به چشم نمی خورد. در این موارد انتخاب مناسب تبدیلی هندسی ممکن است مفید باشد. در مجموعه مسئله های زیر کاربرد تقارن به همراه نابرابری مثلث شرح داده شده است.

مسئله ۱۰. قارچ جمع کنی در نقطه ای مشخص از جنگل خارج می شود. او باید خود را به بزرگرایی برساند که در امتداد خطی راست کشیده شده است و در نقطه مشخص دیگری به جنگل بازگردد (شکل ۴۰). چطور می تواند این کار را از کوتاهترین مسیر ممکن انجام دهد؟



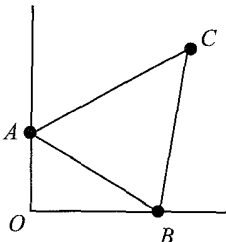
شکل ۴۰

مسئله ۱۱. کلبه یک نفر جنگلی درون شبه جزیره ای به شکل زاویه ای حاده است. این جنگلی باید از کلبه اش خارج شود، ابتدا به یک ساحل شبه جزیره و بعد به ساحل دیگرش برود و آخر سر به خانه اش بازگردد. چطور می تواند برای این کار کوتاهترین مسیر ممکن را انتخاب کند؟

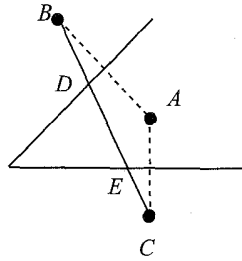
مسئله ۱۲.  $A$  نقطه ای درون زاویه ای حاده است. گزینه های نقطه  $A$  نسبت به دو ضلع این زاویه را پیدا می کنیم و آنها را  $B$  و  $C$  می نامیم. پاره خط  $BC$  ضلعهای این زاویه را در نقطه های  $D$  و  $E$  قطع می کند (شکل ۴۱ را ببینید). ثابت کنید  $DE > \frac{BC}{4}$ .

مسئله ۱۳. نقطه  $C$  درون زاویه ای قائمه قرار دارد و نقطه های  $A$  و  $B$  روی ضلعهای این زاویه اند (شکل ۴۲ را ببینید). ثابت کنید محیط مثلث  $ABC$  از دو برابر طول  $OC$  کمتر نیست، که در اینجا  $O$  رأس زاویه قائمه مورد نظر است.

اکنون مسئله ۱۰ را حل می کنیم. فرض کنید این قارچ جمع کن در نقطه  $A$  از جنگل خارج و در

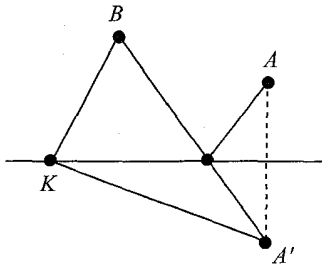


شکل ۴۲



شکل ۴۱

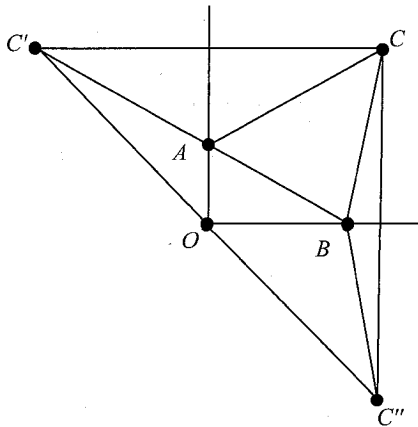
نقطه  $B$  دوباره به آن وارد شود. قرینه نقطه  $A$  نسبت به امتداد بزرگراه را پیدا می‌کنیم و آن را  $A'$  می‌نامیم (شکل ۴۳ را ببینید). اگر  $K$  نقطه‌ای باشد که این قارچ جمع‌کن در آنجا به بزرگراه می‌رسد، آن وقت طول مسیر  $AKB$  برابر با طول مسیر  $A'KB$  است، زیرا  $A'K$  چیزی نیست بجز قرینه پاره خط  $AK$  نسبت به امتداد بزرگراه. اما ممکن نیست مسیر  $A'KB$  از  $A'B$  کوتاهتر باشد. پس نقطه  $K$  باید نقطه‌ای باشد که  $A'B$  بزرگراه را قطع می‌کند.



شکل ۴۳

به همین روش می‌توانیم مسأله‌های دیگر این مجموعه را هم حل کنیم. مثلاً، در مسأله ۱۳ به قرینه‌های نقطه  $C$  نسبت به خطهای  $OA$  و  $OB$  را پیدا می‌کنیم و آنها را  $C''$  و  $C'''$  می‌نامیم (شکل ۴۴)؛ به آسانی می‌توان فهمید که نقطه  $O$  روی خط راست  $C'C'''$  قرار دارد. توجه کنید که محیط مثلث  $ABC$  برابر با مجموع طولهای سه پاره خط  $AB$ ،  $C'A$  و  $BC''$  است. از نابرابری مثلث نتیجه می‌گیریم که مقدار این مجموع از طول  $C'C'''$  کمتر نیست. اما طول این پاره خط هم برابر با  $2OC$  است، زیرا پاره خط  $C'C'''$  وتر مثلثی قائم‌الزاویه است که میانه‌ی وارد بر وترش  $OC$  است. (دانش‌آموزانی که این قضیه را ندیده‌اند می‌توانند برای توجیه این حکم راه شهودیدتری پیدا کنند: مثلاً به وسیله کشیدن مستطیلی که سه رأسش  $C'$ ،  $C''$  و  $C$  اند.)

توصیه به معلمان. در اینجا مهم است که این مسأله‌ها با دقت حل شوند و دانش‌آموزان وادار شوند که شرحی منطقی از راه‌حل بیان کنند و فقط به توجیهی شهودی بسنده نکنند. ابتدا می‌توانیم به



شکل ۴۴

دانش آموزان یادآور شویم که تحت بازتاب نسبت به خط فاصله‌ها تغییر نمی‌کنند. بعد می‌توانیم ایده مشترک در این مسأله‌ها را به آنها نشان دهیم: تبدیل کردن مسیر مورد نظر طوری که طولش تغییر نکند و در ضمن مسأله‌مان به مسأله وصل کردن دو نقطه به هم از کوتاهترین مسیر ممکن تبدیل شود. مهم است بررسی شود که یکی از مسیرهای تبدیل یافته ممکن است واقعاً خطی راست شود و بنابراین جوابی بدیهی به دست آوریم؛ در غیر این صورت راه حل مسأله ممکن است بسیار دشوارتر باشد.

\* \* \*

در بسیاری از مسأله‌ها یافتن کوتاهترین مسیر ممکن در مورد نوعی سطح در فضا مطرح می‌شود. در مسأله‌هایی از این دست نابرابری مثلث را فقط بعد از «گستراندن» سطح مورد نظر روی یک صفحه می‌توان به کار برد. مسأله‌های زیر از این دسته‌اند:

مسأله ۱۴. مگسی روی یک رأس مکعبی چوبی نشسته است. کوتاهترین مسیری که از آن می‌تواند به رأس روبه‌روی مکعب برود کدام است؟

مسأله ۱۵. مگسی روی سطح بیرونی لیوانی استوانه‌ای شکل نشسته است. این مگس باید بدون پرواز کردن به نقطه دیگری واقع در سطح درونی این لیوان برود. کوتاهترین مسیر ممکن برای او را پیدا کنید (از ضخامت لیوان چشم‌پوشی کنید).

### ۳. ترسیمهای افزوده شده

در بسیاری از موارد، اثبات نابرابریهای هندسی مستلزم افزودن بعضی شکلهاست. مسأله‌هایی از این دست غالباً پیچیده‌اند، زیرا انتخاب شکلی که مفید باشد تجربه زیادی می‌خواهد. به کمک مجموعه مسأله‌های زیر تا حدودی چنین تجربه‌ای را کسب می‌کنید.



مسأله ۱۶. ثابت کنید اگر نقطه  $O$  درون مثلث  $ABC$  باشد،

$$AO + OC < AB + BC$$

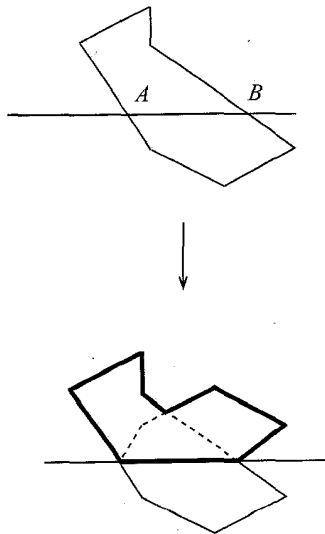
مسأله ۱۷. ثابت کنید مجموع فاصله‌های نقطه  $O$  از رأسهای مثلثی مفروض از محیط این مثلث کمتر است، به شرطی که نقطه  $O$  درون مثلث قرار داشته باشد. اگر نقطه  $O$  بیرون مثلث باشد، چطور می‌شود؟

مسأله ۱۸. مسأله ۱۱ را در حالتی حل کنید که شبه‌جزیره موردنظر به شکل زاویه‌ای منفرجه باشد.

مسأله ۱۹. ثابت کنید در مثلث  $ABC$  طول میانه  $AM$  از نصف مجموع طولهای ضلعهای  $AB$  و  $AC$  بزرگتر نیست. همچنین ثابت کنید مجموع طولهای سه میانه از محیط مثلث بزرگتر نیست.

#### ۴. مسأله‌های گوناگون

مسأله ۲۰. چندضلعی‌ای را از کاغذ درمی‌آوریم و بعد آن را در امتداد خطی راست تا می‌زنیم (شکل ۴۵ را ببینید). ثابت کنید محیط چندضلعی به‌دست آمده از محیط چندضلعی اولیه بزرگتر نیست.



شکل ۴۵

مسأله ۲۱. ثابت کنید ممکن نیست چند ضلعی‌ای محدب سه ضلع داشته باشد که هر یک از آنها از بزرگترین قطر چندضلعی بزرگتر باشد.

مسأله ۲۲. ثابت کنید محیط هر مثلث از  $\frac{4}{3}$  مجموع طولهای میانه‌هایش بزرگتر نیست. (برای حل این مسأله باید بدانید که سه میانه مثلث یکدیگر را به چه نسبتی تقسیم می‌کنند.)

مسأله ۲۳. دو روستا در طرفین رودخانه‌ای که کرانه‌هایش خطهایی موازی‌اند قرار دارند. قرار است روی این رودخانه پلی عمود بر کرانه‌هایش احداث شود. این پل کجا احداث شود تا مسیر میان این دو روستا تا جایی که ممکن است کوتاهتر باشد؟

مسأله ۲۴. ثابت کنید هر پنج ضلعی محدب (یعنی پنج ضلعی‌ای که همه قطرهای آن درونش قرار دارند) سه قطر دارد که می‌توان با آنها یک مثلث رسم کرد.

## فصل ۷

### بازیها

دانش‌آموزان بازی کردن را دوست دارند. صرف‌نظر از اینکه ریاضیاتی که در پس بازی موردنظر نهفته است ساده باشد یا پیچیده، امکان تعامل دوستانه و رقابت برنامه‌ریزی شده در آن، به برهم زدن یکنواختیهای کسالت‌آور دوران تحصیل کمک می‌کند.

در عین حال، این مسأله‌ها محتوایی غنی دارند و دانش‌آموزان با زحمت بسیار به راه‌حلشان می‌رسند. دشواریهای عمده در اینجا عبارت‌اند از اول بیان کردن استراتژی برد و دوم اثبات اینکه استراتژی در نظر گرفته شده همیشه به برد می‌انجامد. هنگام غلبه بر این دشواریها دانش‌آموزان چیزهای بیشتری درباره معیارهای پذیرفته شده استدلال ریاضی می‌آموزند و درک آنها از اینکه اصلاً حل کردن مسأله به چه معناست ارتقا می‌یابد.

دانش‌آموزان باید درک کنند که اظهاراتی به شکل: «اگر شما آن‌طور کنید، من این‌طور می‌کنم» در بیشتر موارد راه‌حل بازیها نیستند. نمونه‌هایی از راه‌حلهای درست را در متن آورده‌ایم.

توصیه می‌کنیم که در هر جلسه کلاس بیش از یکی دو بازی این فصل را برای دانش‌آموزان مطرح نکنید، به استثنای بخش ۴ که شامل مسأله‌هایی است که «از آخر» تحلیل می‌شوند. ایده تقارن (بخش ۲) و مفهوم موقعیت برد (بخش ۳) را خود دانش‌آموزان هم می‌توانند مطالعه کنند. پس از اینکه از هر یک از این موضوعها دو یا سه مسأله بررسی شدند این کار را بهتر می‌توان انجام داد.

چندین نوع بازی در ریاضیات بررسی می‌شود، همین‌طور چندین نوع نظریه بازی. در این فصل فقط به یک نوعشان می‌پردازیم. در هر یک از این بازیها دو بازیکن وجود دارد که نوبتی حرکت‌هایشان را انجام می‌دهند و هیچ بازیکنی نمی‌تواند در نوبتش از انجام حرکت امتناع کند. در اینجا مسأله‌مان همیشه یک چیز است: فهمیدن اینکه کدام بازیکن (اولی یا دومی) استراتژی برد دارد. این توضیحات را دیگر در مورد هر بازی تکرار نمی‌کنیم.

توجه کنید که مسأله‌های ستاره‌دار از بقیه دشوارترند.

## ۱. شبه‌بازیها: بازیهای سرکاری

نخستین دسته از بازیهایی که بررسی می‌کنیم سرکاری از آب در می‌آیند. نتیجه‌های این شبه‌بازیها به اینکه بازی چطور پیش برود بستگی ندارند. به همین دلیل راه‌حل چنین شبه‌بازیهایی شامل استراتژی برد نیستند، بلکه حاوی اثبات این مطلب‌اند که بازیکن اول یا بازیکن دوم در هر صورت بازی را می‌برد (بدون توجه به اینکه بازی چطور پیش برود!).

مسئله ۱. دو تا بچه نوبتی شکلات مستطیل‌شکلی را که عرضش از ۶ مربع و طولش از ۸ مربع تشکیل شده است تکه‌تکه می‌کنند. این دو می‌توانند این شکلات را فقط از روی تقسیم‌بندیهای میان مربعهایش بشکنند. بچه‌ها همین‌طور به تقسیم‌کردن این تکه‌ها ادامه می‌دهند تا اینکه فقط مربعهای تکی بمانند. بازیکنی که دیگر نتواند تکه‌ای را تقسیم کند می‌بازد. چه کسی برنده می‌شود؟

راه‌حل. بعد از هر حرکت تعداد تکه‌ها یکی زیاد می‌شود. در ابتدا فقط یک تکه وجود دارد. در پایان بازی که دیگر انجام هیچ حرکتی ممکن نیست این شکلات به ۴۸ مربع کوچک تقسیم شده است. بنابراین باید ۴۷ حرکت انجام شده باشد که آخرین حرکت را هم مانند هر حرکت شماره فرد دیگر بازیکن اول انجام داده است. بنابراین بازی هر طوری هم که پیش برود بازیکن اول برنده می‌شود.

توصیه به معلمان. شبه‌بازیها این امکان را به دانش‌آموزان می‌دهند که خستگی درکنند و از فشار عصبی ناشی از حل مسئله‌ها یا بردن بازیها فارغ شوند. این جور بازیها به ویژه وقتی بسیار مؤثرند که مثلاً بلافاصله بعد از مطلبی فوق‌العاده دشوار یا در پایان یک جلسه کلاس مطرح شوند. مهم است که به دانش‌آموزان اجازه دهید تا این بازیها را پیش از به‌دست آوردن راه‌حلشان عملاً در کلاس انجام دهند.

مسئله ۲. سه دسته خرده‌سنگ داریم که شامل ۱۰، ۱۵ و ۲۰ تا خرده‌سنگ‌اند. در هر نوبت هر بازیکن می‌تواند یکی از این سه دسته را انتخاب و آن را به دو دسته کوچکتر تقسیم کند. بازنده بازیکنی است که نتواند این کار را انجام دهد. چه کسی بازی را می‌برد و چطور؟

مسئله ۳. عددهای ۱ تا ۲۰ در یک ردیف نوشته شده‌اند. دو بازیکن به نوبت میان این عددها علامتهای بعلاوه و منها می‌گذارند. وقتی همه این علامتها گذاشته شدند، مقدار عبارت حاصل را حساب می‌کنیم (یعنی همه جمعها و تفریقها را انجام می‌دهیم). اگر مجموع به‌دست آمده عددی زوج باشد بازیکن اول بازی را می‌برد و در غیر این صورت دومی برنده است. چه کسی بازی را می‌برد و چطور؟

مسئله ۴. دو بازیکن به نوبت رخیایی را روی صفحه شطرنج طوری می‌گذارند که یکدیگر را تهدید نکنند. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر رخی را روی صفحه بگذارد. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسأله ۵. ده تا ۱ و ده تا ۲ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. در هر نوبت بازیکن می‌تواند دو رقم دلخواه را پاک کند؛ اگر دو رقم پاک شده عین هم باشند به جای آنها یک رقم ۲ و اگر متمایز باشند به جای آنها یک رقم ۱ نوشته می‌شود. اگر رقمی که آخر سر می‌ماند ۱ باشد بازیکن اول و اگر این رقم ۲ باشد دومی برنده می‌شود. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسأله ۶\*. عدد‌های ۲۵ و ۳۶ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. در هر نوبت بازیکن روی تخته سیاه تفاضل (مثبت) دو عدد روی تخته را می‌نویسد، البته به شرطی که این عدد قبلاً روی تخته نباشد. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر عددی روی تخته بنویسد. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسأله ۷. صفحه شطرنجی به ابعاد

(الف)  $9 \times 10$ ؛

(ب)  $10 \times 12$ ؛

(ج)  $9 \times 11$ ؛

داده شده است. در هر نوبت بازیکن می‌تواند یک سطر یا یک ستون را خط بزند به شرطی که در ابتدای حرکت دست‌کم یک خانه از آن سطر یا ستون خط نخورده باقی مانده باشد. بازیکنی که نتواند دیگر حرکتی انجام دهد می‌بازد. چه کسی بازی را می‌برد؟

## ۲. تقارن

مسأله ۸. دو بازیکن به نوبت سکه‌های یک سنتی را روی میزی گرد می‌گذارند بی‌آنکه هیچ سکه‌ای روی دیگری قرار گیرد. بازیکنی که نتواند دیگر سکه‌ای روی میز بگذارد بازنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. در این بازی میز هر چقدر هم که بزرگ باشد بازیکن اول می‌تواند بازی را برد؛ برای این کار، باید اولین سکه را طوری بگذارد که مرکزش بر مرکز میز واقع شود. بعد درازای هر حرکت بازیکن دوم یک سکه را جایی بگذارد که قرینه مکان سکه بازیکن دوم نسبت به مرکز میز باشد. توجه کنید که با چنین استراتژی موقعیتهای دو بازیکن بعد از هر حرکت بازیکن اول متقارن‌اند. پس نتیجه می‌شود که اگر بازیکن دوم بتواند حرکتی انجام دهد آن وقت درازای آن بازیکن اول هم می‌تواند حرکتی انجام دهد و بنابراین بازی را می‌برد.

مسأله ۹. دو بازیکن به نوبت فیلهایی را در خانه‌های صفحه شطرنج طوری می‌گذارند که یکدیگر را تهدید نکنند (این فیلهای را می‌توان در خانه‌هایی از هر رنگ گذاشت). بازیکنی که نتواند دیگر فیلی روی صفحه بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه حل. چون صفحه شطرنج نسبت به مرکزش متقارن است طبیعی است که استراتژی بر مبنای تقارن را امتحان کنیم. اما این بار چون نمی توان فیل را در مرکز صفحه شطرنج گذاشت این تقارن برای بازیکن دوم سودمند است. در مقایسه با مسأله قبلی ممکن است به نظر برسد که با چنین استراتژی بازیکن دوم می تواند برنده شود. با وجود این، اگر بازیکن دوم آن را دنبال کند حتی نمی تواند حرکت دومش را انجام دهد! فیل که بازیکن اول می گذارد هر فیل را که در موقعیت قرینه اش نسبت به مرکز صفحه گذاشته شود تهدید می کند.

با این مثال معلوم می شود که در به کارگیری استراتژی تقارن باید این را در نظر گرفت که حرکت متقارن را می توان متوقف یا از انجامش جلوگیری کرد منتها فقط به وسیله آخرین حرکت حریف. به دلیل تقارن، حرکتهایی که پیشترها انجام شده اند بر حرکت بازیکن تأثیری ندارند. برای حل کردن بازیها با استفاده از استراتژی تقارن باید تقارنی یافت که حرکت قبلی استراتژی انتخاب شده را به باد ندهد.

بنابراین برای حل کردن مسأله ۹ به جای تقارن نسبت به نقطه در صفحه شطرنج باید به تقارن نسبت به خط اتکا کنیم. مثلاً می توانیم خط میان سطرهای چهارم و پنجم را به عنوان محور تقارن انتخاب کنیم. خانه هایی که نسبت به این خط قرینه اند هم رنگ نیستند و بنابراین هر فیل در یکی از خانه ها فیل در موقعیت قرینه اش را تهدید نمی کند. در نتیجه بازیکن دوم می تواند این بازی را ببرد. ایده استراتژی تقارن لازم نیست صرفاً هندسی باشد. به مسأله زیر توجه کنید.

مسأله ۱۰. دو کپه ۷ تایی خرده سنگ داریم. در هر نوبت بازیکن می تواند هر تعداد خرده سنگ را که می خواهد بردارد منتها فقط از یکی از این دسته ها. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر خرده سنگ بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه حل. بازیکن دوم می تواند با استفاده از استراتژی تقارن این بازی را ببرد. این بازیکن در هر نوبت باید همان تعداد خرده سنگ را بردارد که بازیکن اول در آخرین حرکتش برداشته است، منتها از دسته دیگر. به این ترتیب بازیکن دوم همیشه یک حرکت دارد. تقارن در این مسأله حفظ برابری تعداد خرده سنگهای دو دسته است.

مسأله ۱۱. دو بازیکن به نوبت اسبهایی را روی خانه های صفحه شطرنج طوری می گذارند که هیچ یک از آنها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسأله ۱۲. دو بازیکن به نوبت شاههایی را روی خانه های صفحه شطرنجی  $9 \times 9$  طوری می گذارند که هیچ یک از آنها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسأله ۱۳. الف) دو بازیکن به نوبت فیلهایی را روی خانه های صفحه شطرنج می گذارند. در هر نوبت فیل که روی صفحه گذاشته می شود باید دست کم یکی از خانه هایی را تهدید کند که

فیل دیگری آن را تهدید نکرده است. هر فیل خانه‌ای را که در آن قرار دارد «تهدید می‌کند». بازیکنی که نتواند دیگر فیلی در صفحه بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

(ب) \* اگر در قسمت (الف) به جای فیل، رخ باشد چطور می‌شود؟

مسئله ۱۴. صفحه شطرنجی  $10 \times 10$  داده شده است. دو بازیکن به نوبت خانه‌های صفحه را دو تا دو تا با دومینوها می‌پوشانند. هر دومینو مستطیلی است که در عرضش ۱ خانه وجود دارد و در طولش ۲ خانه (که به هر یک از دو حالت که گذاشته شود دو خانه را می‌پوشاند). دومینوها نباید همپوشانی داشته باشند. بازیکنی که نتواند دیگر دومینویی بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۱۵. در هر یک از خانه‌های صفحه شطرنجی  $11 \times 11$  مهره‌ای گذاشته شده است. بازیکنان به نوبت تعدادی دلخواه از مهره‌هایی را که روی یک سطر یا ستون پشت سر یکدیگرند برمی‌دارند. برنده بازیکنی است که آخرین مهره را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۱۶. دو کپه خرده‌سنگ داریم. یکی شامل ۳۰ خرده‌سنگ است و دیگری شامل ۲۰ خرده‌سنگ. بازیکنان به نوبت هر تعداد خرده‌سنگ را که مایل باشند برمی‌دارند منتها فقط از یک دسته. برنده بازیکنی است که آخرین خرده‌سنگ را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۱۷. بیست نقطه دور دایره‌ای گذاشته شده‌اند. بازیکنان به نوبت دو تا از نقطه‌ها را با پاره‌خطی که هیچ‌یک از پاره‌خطهایی را که قبلاً رسم شده‌اند قطع نمی‌کند به هم وصل می‌کنند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۱۸. یک گل داوودی

(الف) ۱۲ گلبرگ؛

(ب) ۱۱ گلبرگ،

دارد. بازیکنان به ترتیب یا یک گلبرگ را می‌کنند یا دو گلبرگ پشت سرهم را. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۱۹. \* مکعب مستطیلی به ابعاد

(الف)  $4 \times 4 \times 4$ ؛

(ب)  $4 \times 4 \times 3$ ؛

(ج)  $4 \times 3 \times 3$ ،

متشکل از مکعبهای واحد داده شده است. بازیکنان به نوبت یک ردیف از مکعبها را (موازی با یالهای شکل) سوراخ می‌کنند. تا وقتی که دست‌کم یک مکعب سوراخ نشده در ردیفی وجود داشته باشد بازی ادامه می‌یابد. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۰. دو بازیکن به نوبت یک تکه شکلات  $1^\circ \times 5^\circ$ ، شامل  $5^\circ$  مربع کوچک، را می‌شکنند. در هر نوبت می‌توانند تکه شکلاتها را از روی تقسیم‌بندیهای میان مربعها بشکنند. بازیکنی که زودتر یک مربع تکی شکلات به دست بیاورد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۱. دو بازیکن به نوبت در خانه‌های صفحه شطرنجی  $9 \times 9$  علامتهای  $x$  و  $o$  می‌گذارند. بازیکن اول  $x$  می‌گذارد و دومی  $o$ . در پایان بازی به ازای هر سطر یا ستونی که در آن تعداد  $x$ ها بیشتر از تعداد  $o$ ها باشند اولی یک امتیاز می‌گیرد و به ازای هر سطر یا ستونی که در آن تعداد  $o$ ها بیشتر از تعداد  $x$ ها باشد دومی یک امتیاز می‌گیرد. بازیکنی که امتیازش بیشتر باشد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

### ۳. موقعیتهای برد

مسئله ۲۲. در صفحه شطرنج یک رخ در خانه  $a1$  قرار دارد. بازیکنان به نوبت این رخ را هر تعداد خانه که بخواهند یا به طور افقی به طرف راست حرکت می‌دهند یا به طور عمودی به طرف بالا. بازیکنی که بتواند این رخ را در خانه  $h8$  قرار دهد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

در این بازی بازیکن دوم بازی را می‌برد. استراتژی بسیار ساده است: در هر نوبت رخ را در یکی از خانه‌های روی قطر میان  $a1$  و  $h8$  قرار می‌دهد. دلیل مؤثر بودن این استراتژی این است که بازیکن اول در هر نوبت مجبور است که رخ را از خانه‌های روی این قطر بیرون ببرد، در حالی که بازیکن دوم همیشه می‌تواند رخ را به خانه‌های روی قطر بازگرداند. چون خانه‌ای که برد در آن به دست می‌آید روی این قطر است، بازیکن دوم در نهایت می‌تواند رخ را در آن بگذارد.

اکنون این راه حل را کمی عمیقتر تحلیل می‌کنیم. در اینجا توانسته‌ایم دسته‌ای از موقعیتهای برد را (که در آنها رخ در یکی از خانه‌های روی قطر میان  $a1$  و  $h8$  واقع است) تعیین کنیم که این ویژگیها را دارند:

(۱) موقعیت پایانی بازی، خود، یکی از موقعیتهای برد است؛

(۲) هیچ‌یک از بازیکنان هرگز نمی‌تواند طی فقط یک نوبت رخ را از یک موقعیت برد به موقعیت برد دیگری ببرد؛

(۳) هر یک از بازیکنان همیشه می‌تواند فقط با یک حرکت رخ را از یک موقعیت غیر برد به یک موقعیت برد ببرد.

یافتن چنین دسته‌ای از موقعیتهای برد برای بازی معادل حل کردن بازی است. در واقع رفتن به موقعیتهای برد در هر حرکت، خودش استراتژی برد است. اگر موقعیت آغازین بازی موقعیت برد باشد، آن وقت بازیکن دوم بازی را می‌برد (همان‌طور که در بازی آخری دیدیم). در غیر این صورت بازیکن اول برنده می‌شود.



توصیه به معلمان. چون از مفهوم موقعیت برد مجموعه‌ای از استراتژیها به دست می‌آید، فقط بعد از حل چند تا از بازیهایی که در این بخش آمده است می‌توان آن را درک کرد. مثل همیشه مهم است که دانش‌آموزان را وادار کنید تا هر بازی را پیش از حل کردنش بازی کنند.

مسئله ۲۳. شاهی در خانه  $a_1$  صفحه شطرنج گذاشته شده است. بازیکنان به نوبت این شاه را یا به طرف بالا می‌برند، یا به طرف راست یا به طور قطری به طرف بالا و راست. بازیکنی که شاه را در خانه  $n_8$  بگذارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۴. دو دسته آب‌نبات داریم. یکی شامل  $2^0$  عدد آب‌نبات است و دیگری شامل  $2^1$  عدد آب‌نبات. بازیکنان به نوبت همه آب‌نباتهای یک دسته را می‌خورند و آب‌نباتهای باقی‌مانده را به دو دسته غیرخالی (که لازم نیست تعداد آب‌نباتهایشان برابر باشد) تقسیم می‌کنند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد منی‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۵. در هر یک از دو سر یک ردیف از خانه‌ها به ابعاد  $1 \times 2^0$  مهره‌ای گذاشته شده است. بازیکنان به نوبت هر یک از مهره‌ها را که بخواهند به طرف دیگری یا یک خانه حرکت می‌دهند یا دو خانه. هیچ‌یک از این دو مهره را نمی‌توان از روی مهره دیگر رد کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند منی‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۶. قوطی‌ای  $3^0$  چوب‌کبریت دارد. بازیکنان به نوبت می‌توانند از  $1$  چوب‌کبریت تا حداکثر نصف تعداد چوب‌کبریت‌های قوطی را بردارند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد منی‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۷. سه کپه خرده‌سنگ داریم. اولی  $5^0$  خرده‌سنگ دارد، دومی  $6^0$  تا و سومی  $7^0$  تا. در هر نوبت هر یک از کپه‌هایی که شامل بیش از یک خرده‌سنگ است به دو کپه کوچکتر تقسیم می‌شود. بازیکنی که بعد از آخرین حرکتش هر یک از کپه‌های حاصل فقط یک خرده‌سنگ داشته باشد منی‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۸. عدد  $6^0$  روی تخته سیاه نوشته شده است. بازیکنان به نوبت از عدد روی تخته مقسوم‌علیه دلخواهی از آن را کم می‌کنند و حاصل تفریق را به جای عدد اولیه می‌نویسند. بازیکنی که عدد  $0$  را بنویسد منی‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۲۹\* . دو دسته چوب‌کبریت داریم:

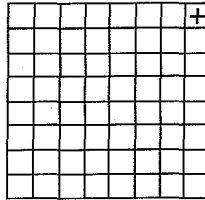
(الف) یک دسته  $1^0$  تایی و یک دسته  $2^0$  تایی؛

(ب) یک دسته  $1^0$  تایی و یک دسته  $2^0$  تایی.

بازیکنان به نوبت چندتا چوب‌کبریت از یک دسته برمی‌دارند که تعدادشان برابر با یکی از مقسوم‌علیه‌های تعداد چوب‌کبریت‌های دسته دیگر است. بازیکنی که آخرین چوب‌کبریت را بردارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

#### ۴. تحلیل از آخر: روشی برای یافتن موقعیتهای برد

کسانی که بخش قبلی را مطالعه کرده‌اند ممکن است این طور احساس کنند که یافتن مجموعه‌ای از موقعیتهای برد فقط متکی به شهود است و از این رو کار آسانی نیست. اکنون روشی کلی را شرح می‌دهیم که با آن می‌توانیم در بسیاری از بازیها مجموعه‌ای از موقعیتهای برد را پیدا کنیم. بار دیگر مسأله ۲۳ را در نظر بگیرید که درباره یک شاه در صفحه شطرنج است. در اینجا هم سعی می‌کنیم مجموعه‌ای از موقعیتهای برد را پیدا کنیم. مثل همیشه موقعیت پایانی این بازی که شاه در خانه  $h8$  قرار دارد باید موقعیت برد باشد. بنابراین یک علامت بعلاوه در خانه  $h8$  می‌گذاریم (شکل ۴۶ را ببینید). همین علامت را در هر خانه دیگر هم که در آن شاه در موقعیت برد قرار می‌گیرد می‌گذاریم و در هر خانه‌ای هم که موقعیت برد نباشد یک علامت منهای می‌گذاریم (اینها را موقعیتهای باخت می‌نامیم).



شکل ۴۶

چون خانه‌هایی که شاه را می‌توان از آنها فقط با یک حرکت به خانه‌های برد منتقل کرد خانه‌های باخت‌اند، شکل ۴۷ را به دست می‌آوریم. از خانه‌های  $h6$  و  $f8$  فقط می‌توان به خانه‌های باخت رفت و از این رو اینها باید موقعیتهای برد باشند (شکل ۴۸). از این موقعیتهای برد جدید موقعیتهای باخت جدید به دست می‌آیند:  $h5, g5, g6, f7, e7$  و  $e8$  (شکل ۴۹). به همین ترتیب کار را ادامه می‌دهیم (شکل‌های ۵۰ و ۵۱ را ببینید). بعد از به دست آوردن مجموعه‌ای از علامتهای منهای، در خانه‌هایی که هر حرکت از آنها در هر صورت به خانه‌های باخت منتهی می‌شود علامت بعلاوه می‌گذاریم و بعد هم در آن خانه‌هایی که از آنها دست‌کم یک حرکت به خانه‌های برد وجود دارد علامت منهای. آخر سر آرایش علامتهای بعلاوه و منهای مانند شکل ۵۲ می‌شود. اکنون به سادگی می‌توان فهمید که خانه‌هایی که علامت بعلاوه در آنها آمده است همان خانه‌های بردی‌اند که در بخش پیش به آنها اشاره کردیم. روش یافتن موقعیتهای برد را که الان شرح دادیم تحلیل از آخر می‌نامند. با استفاده از این روش در

				-	+	-	+
				-	-	-	-
						-	+
						-	-

شکل ۴۹

						+	-	+
							-	-
								+

شکل ۴۸

								-	+
								-	-

شکل ۴۷

-	+	-	+	-	+	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	+	-	+	-	+	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	+	-	+	-	+	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	+	-	+	-	+	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-

شکل ۵۲

				-	+	-	+	-	+
				-	-	-	-	-	-
						-	+	-	+
						-	-	-	-

شکل ۵۱

						+	-	+	-	+
							-	-	-	-
								+	-	+
								-	-	-

شکل ۵۰

مورد بازی مربوط به رخ در بخش قبل (مسأله ۲۲)، به دست آوردن مجموعه موقعیتهای برد این بازی هم چندان دشوار نیست. اگر مانند شکلهای ۵۳ و ۵۴ عمل کنیم خیلی زود به شکل ۵۵ می‌رسیم.

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-
-	-	+	-	-	-	-	-
-	+	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

شکل ۵۵

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	+	-
						-	-
						-	-
						-	-
						-	-
						-	-
						-	-
						-	-

شکل ۵۴

-	-	-	-	-	-	-	+

شکل ۵۳

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان در بیشتر موارد «تحلیل از آخر» را خودشان به طور شهودی انجام می‌دهند. یعنی از چند حرکت قبل، به آخر بازی نگاه می‌کنند و کم‌کم می‌فهمند که از چند حرکت ممکن آخری کدامها به برد می‌انجامند، بعد این را به بقیه بازی تعمیم می‌دهند. در این مورد یادگیری وقتی به بهترین وجه ممکن حاصل می‌شود که دانش‌آموزان (با بازی کردن) خودشان به این کشف برسند، بعد از آنها خواسته شود که آن را بیان کنند.

مسأله ۳۰. وزیر در خانه c۱ صفحه شطرنج قرار دارد. بازیکنان به نوبت این وزیر را هر تعداد خانه که بخواهند به طرف راست، به طرف بالا یا به طور قطری به طرف راست و بالا حرکت می‌دهند. بازیکنی که بتواند این وزیر را در خانه h۸ بگذارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. با استفاده از روش تحلیل از آخر، آرایش علامتهای بعلاوه و منها را که در شکل ۵۶ مشخص شده است به دست می‌آوریم. به این ترتیب بازیکن اول بازی را می‌برد؛ در حقیقت، برای نخستین حرکتش سه انتخاب دارد: به خانهٔ c۵ برود یا به خانهٔ e۳ یا به خانهٔ d۱.

-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-
-	-	-	-	-	-	+
-	-	+	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-

شکل ۵۶

توصیه به معلمان. این بازی را می‌توان پیش درآمدی مناسب برای آشنایی با روش تحلیل از آخر دانست. بعد از این، تمرینهای دانش‌آموزان را مثلاً می‌توان این‌طور طرح کرد که به جای صفحهٔ شطرنج مربع شکل مسأله‌های ۲۲، ۲۳، ۳۰، صفحه‌ای مستطیل شکل به ابعاد دلخواه یا صفحه‌ای به شکل نامتعارف دیگری قرار دهیم. مثلاً، می‌توان مسألهٔ ۲۲ را در مورد صفحهٔ شطرنجی که چهار خانهٔ وسطی‌اش (یا چندتا از خانه‌های دیگرش) حذف شده‌اند حل کرد. آرایش علامتهای بعلاوه و منها در این جور صفحهٔ شطرنج در شکل ۵۷ نشان داده شده است؛ توجه کنید که در این شکل خانه‌های حذف شده سایه دارند.

-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-
-	-	-	-	-	+	-
-	-	+	■	■	-	-
-	+	-	■	■	-	-
-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	+	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-

شکل ۵۷

\* \* \*

در مسألهٔ زیر دانش‌آموزان فرصت می‌یابند که شگرد عوض کردن صورتبندی بازی را بیاموزند.

مسألهٔ ۳۱. دو کپه خرده‌سنگ داریم که یکی از آنها ۷ خرده‌سنگ دارد و دیگری ۵ خرده‌سنگ. بازیکنان به نوبت هر تعداد خرده‌سنگ را که بخواهند از یکی از این کپه‌ها یا تعدادی برابر سنگریزه را از هریک از این کپه‌ها برمی‌دارند. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. شرایط این مسأله را می‌توانیم برحسب شرایطی که در صفحهٔ شطرنج معمولی پیش می‌آید بیان کنیم. ابتدا به هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج مختصات نسبت می‌دهیم، این‌طور که سطرها را از ۰ تا ۷ و از

بالا به پایین و ستونها را هم از  $۰$  تا  $۷$  و از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم. اکنون هر موقعیت بازی اصلی با زوج مرتبی از عددها مشخص می‌شود: تعداد خرده‌سنگهای کپهٔ اول و به دنبال آن تعداد خرده‌سنگهای کپهٔ دوم. به هر موقعیت از این دست خانه‌ای را نسبت می‌دهیم که مختصاتش این عددها هستند. اکنون توجه می‌کنیم که هر حرکت در بازی اصلی متناظر با یک حرکت وزیر در صفحهٔ شطرنج به طرف بالا، به طرف راست یا به طور قطری به طرف بالا و راست است. این صورتبندی جدید مسأله باعث می‌شود که بازی عین همان بازی مسأله‌ی  $۳۰$  شود. توجه کنید که می‌توانیم از همین فن برای صورتبندی دیگری از بازیهای مسأله‌های  $۱۰$  و  $۲۰$  استفاده کنیم.

\* \* \*

**مسألهٔ ۳۲.** اسبی در خانهٔ  $a1$  صفحهٔ شطرنج قرار دارد. بازیکنان به نوبت این اسب را یا دو خانه به طرف راست و یک خانه به طرف بالا یا پایین حرکت می‌دهند یا دو خانه به طرف بالا و یک خانه به طرف راست یا چپ (این اسب مانند اسب معمولی شطرنج حرکت می‌کند منتها در جهت‌های محدود). بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

**مسألهٔ ۳۳.** الف) دو کپهٔ  $۷$  تایی خرده‌سنگ داریم. در هر نوبت بازیکن می‌تواند یک خرده‌سنگ از یکی از این کپه‌ها یا یک خرده‌سنگ از هر یک از آنها بردارد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

ب) علاوه بر حرکت‌هایی که در قسمت الف) برشمردیم، بازیکنان می‌توانند یک خرده‌سنگ از کپهٔ اول بردارند و آن را در کپهٔ دوم بگذارند. بقیهٔ قاعده‌های بازی همانهایی هستند که گفتیم. در این حالت چه کسی استراتژی برد دارد؟

**مسألهٔ ۳۴.** دو دستهٔ  $۱۱$  تایی چوب کبریت داریم. در هر نوبت بازیکن باید دو چوب کبریت از یک دسته و یک چوب کبریت هم از دیگری بردارد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

**مسألهٔ ۳۵.** این بازی با عدد  $۰$  شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند به عدد حاضر هر یک از عددهای طبیعی از  $۱$  تا  $۹$  را که بخواهد اضافه کند. بازیکنی که به عدد  $۱۰۰$  برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

**مسألهٔ ۳۶.** این بازی با عدد  $۱$  شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند عدد حاضر را در هر یک از عددهای طبیعی از  $۲$  تا  $۹$  که بخواهد ضرب کند. بازیکنی که زودتر به عددی بزرگتر از  $۱۰۰۰$  برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

**مسألهٔ ۳۷.** این بازی با عدد  $۲$  شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند به عدد حاضر هر یک از

عددهای طبیعی کوچکتر از آن را که بخواهد اضافه کند. بازیکنی که به عدد  $1000$  برسد برنده می شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسئله ۳۸. این بازی با عدد  $1000$  شروع می شود. در هر نوبت بازیکن می تواند از عدد حاضر هریک از عددهای طبیعی کوچکتر از آن را که توانی از  $2$  باشد (توجه کنید که  $2^0 = 1$ ) کم کند. بازیکنی که به عدد  $0$  برسد برنده می شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

## فصل ۸

### مسأله‌هایی برای سال اول

همان‌طور که در پیشگفتار تأکید شد، در بخش نخست این کتاب مبحث‌های اصلی برای جلسه‌های محافل ریاضی «المپیاد» (ویژه دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۳ ساله) آورده شده‌اند. با این وجود، این مبحث‌ها همه موضوع‌های قابل استفاده دانش‌آموزان این رده سنی نیستند. در فصل حاضر سعی می‌کنیم این خلا را دست‌کم تا اندازه‌ای پر کنیم.

توصیه به معلمان. در اینجا مایلیم این را هم اضافه کنیم که صلاح نمی‌دانیم که هر جلسه فقط با استفاده از مسأله‌های مربوط به یک مبحث برگزار شود. در کلاسها می‌توانید از مسأله‌های نامتعارف هم استفاده کنید که حلشان چیزی جدید و نامعمول، ایده‌های تازه یا صرفاً غلبه بر دشواریهای فنی را بطلبند. چون مسأله‌هایی از این دست در المپیاد، مسابقه‌های ریاضی و فعالیتهایی از این قبیل اهمیت زیادی دارند، آنها را در این فصل گرد آورده‌ایم.

#### ۱. مسأله‌های منطقی

توصیه به معلمان. وقتی با دانش‌آموزان کم‌سن و سال سروکار دارید به یاد داشته باشید که مهمترین هدفتان این است که به آنها بیاموزید منطقی و شفاف فکر کنند. یعنی اینکه چطور علت و معلول را با هم اشتباه نکنند؛ چطور حالتها را با دقت تحلیل کنند بی‌آنکه هیچ کدامشان را از قلم بیندازند؛ چطور تعدادی قضیه و لم را طوری پشت سرهم ردیف کنند که مسأله‌شان حل شود. مسأله‌های منطقی زیر در رسیدن به این هدف کمکتان می‌کنند.

۱. مادر پیترا گفت: «همه قهرمانان ریاضیشان خوب است.» پیترا می‌گوید: «من ریاضیم خوب است.

بنابراین قهرمانم!» استلزامش درست است یا غلط؟

۲. چهار کارت روی میزی وجود دارند که روی طرف قابل رؤیتشان نمادهای A, B, ۴ و ۵ نوشته شده است. دستکم چند کارت را باید برگردانیم تا بفهمیم گزارهٔ زیر درست است یا نه: «اگر روی یک طرف kartی عددی زوج نوشته شده باشد، آن وقت روی طرف دیگرش یک حرف صدادار نوشته شده است»؟

۳. مبلغ پانزده سنت را با دو سکه پرداختیم و در ضمن یکی از این سکه‌ها پنج سنتی نبود. این سکه‌ها چندسنتی بوده‌اند؟

۴. فرض کنید گزاره‌های زیر درست باشند:

(الف) در میان افرادی که تلویزیون دارند کسانی هستند که ریاضیدان نیستند؛

(ب) کسی که ریاضیدان نیست و هر روز در استخر شنا می‌کند تلویزیون ندارد.

آیا می‌توانیم ادعا کنیم که، این طور نیست که همهٔ افرادی که تلویزیون دارند هر روز شنا می‌کنند؟

۵. در محاکمه‌ای در سرزمین عجایب خرگوش خُل ادعا کرد که بیسکویتها را کلاهدوز دیوانه دزدیده است. بعد کلاهدوز دیوانه و سنجابک مدارکی ارائه کردند که به دلایلی ثبت نشدند. بعدها در این محاکمه معلوم شد که بیسکویتها را فقط یکی از این سه متهم دزدیده و علاوه بر این فقط شخص مجرم مدرک واقعی ارائه کرده است. چه کسی بیسکویتها را دزدیده است؟

\* \* \*

۶. در یک جامدادی مدادهایی دستکم از دو رنگ و اندازهٔ متفاوت وجود دارند. ثابت کنید که در این جامدادی دو مداد وجود دارند که هم رنگشان با هم فرق دارد و هم اندازه‌شان.

۷. در سه ظرف تعدادی توپ وجود دارد: اولی شامل دو توپ سفید است، دومی شامل دو توپ سیاه و سومی شامل یک توپ سفید و یک توپ سیاه. برچسبهای WW, BB و WB به ظرفها طوری چسبانده شده‌اند که محتوای هیچ‌یک از ظرفها با برچسبش مطابقت ندارد. آیا می‌توان یک ظرف را طوری انتخاب کرد که بعد از بیرون آوردن یک توپ از آن در هر صورت بتوان محتوای هر یک از ظرفها را مشخص کرد؟

۸. سه نفر به نامهای A, B و C در یک ردیف طوری نشسته‌اند که A, B و C را می‌بیند، B فقط C را می‌بیند و C هیچ کسی را نمی‌بیند. به آنها ۵ تا کلاه بافتنی نشان می‌دهند که ۳ تا از آنها قرمزند و ۲ تا سفید. به این سه نفر چشم‌بند می‌زنند و سه تا کلاه بر سرشان می‌گذارند. بعد چشم‌بندهایشان را بر می‌دارند و از آنها می‌پرسند که آیا می‌توانند رنگ کلاه‌هایشان را مشخص کنند. پس از آن، A و بعد B پاسخ می‌دهد خیر و آخر سر، C پاسخ می‌دهد بله. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۹. سه نفر دوست به نامهای سفید، مشکی و مو قرمز که به ترتیب مجسمه‌ساز، ویولن‌زن و نقاش‌اند یکدیگر را در کافه‌تریایی ملاقات کردند. از میان آنها شخص مومشکی گفت: «این فوق‌العاده است



که از ماها یکی موسفید است، دیگری مو مشکی و سومی مو قرمز، گرچه نام هیچ‌کس رنگ موهایش نیست». سفید هم پاسخ داد: «حق با شماست». رنگ موهای نقاش چیست؟

\* \* \*

موضوع هشت مسأله بعدی درباره ساکنان یک جزیره است. این جزیره‌نشینان دو دسته‌اند، یا «نجیب‌زاده»‌اند، کسانی که همیشه راست می‌گویند، یا «متقلب»‌اند، کسانی که همیشه دروغ می‌گویند.

۱۰. شخص A گفت: «من دروغگو هستم». آیا او یکی از ساکنان جزیره موردنظر است؟

۱۱. فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشین می‌توانیم بفهمیم که جاده‌ای به شهر نجیب‌زادگان منتهی می‌شود یا به شهر متقلبا. با چه سؤالی؟

۱۲. فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشین می‌توانیم بفهمیم که آیا او تماس خانگی دارد یا نه. با چه سؤالی؟

۱۳. فرض کنید در زبان این جزیره تلفظ کلمه‌های «بله» و «نه» چیزی شبیه «شِلپ» و «شلوپ» باشد، منتها نمی‌دانیم کدام به کدام است. با توجه به این موضوع فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشین می‌توانیم بفهمیم که نجیب‌زاده است یا متقلب. با چه سؤالی؟

۱۴. فقط یک سؤال می‌توان از جزیره‌نشینها پرسید که پاسخش همیشه «شِلپ» باشد. این سؤال کدام است؟

۱۵. جزیره‌نشین A در حضور جزیره‌نشین B گفت: «در میان ما دست‌کم یکی متقلب است». A نجیب‌زاده است یا متقلب؟ B چطور؟

۱۶. از سه نفر به نامهای A، B و C یکی نجیب‌زاده است، یکی متقلب و یکی هم غریبه (شخصی عادی) که بعضی وقتها راست می‌گوید و بعضی وقتها دروغ.

A گفت: «من شخصی عادی‌ام.»

B گفت: «A و C بعضی وقتها راست می‌گویند.»

C گفت: «B شخصی عادی است.»

از میان این افراد کدام یک نجیب‌زاده است، کدام یک متقلب و کدام یک شخصی عادی؟

۱۷. چند تن از جزیره‌نشینان در همایشی یکدیگر را دیدند و هر یک از آنها به دیگران گفت: «شما همگی متقلب‌اید.» چند نجیب‌زاده ممکن است در این همایش شرکت کرده باشند؟

## ۲. ساختنیها و وزن کردنها

مسأله‌های ریاضی و منطقی‌ای که برای حلشان باید مثالی خاص پیدا کرد بسیار متداول و ارزشمندند. دانش‌آموزان باید درک کنند که یافتن مثال ممکن است راه‌حل کامل نوعی از مسأله‌ها باشد (مانند

مسئله‌هایی که با عبارت «آیا می‌توان ...؟» آغاز می‌شوند). مسئله‌هایی از این دست معمولاً برای دانش‌آموزان کم سن و سال تر بسیار جذاب‌اند و آنها می‌توانند کلی از وقتشان را صرف تلاش برای یافتن راه‌حلی ساختنی برای سؤال یا معمایی پیچیده کنند.

۱۸. دو تا ساعت شنی داریم: یکی ۷ دقیقه‌ای و دیگری ۱۱ دقیقه‌ای. باید تخم مرغی را درست ۱۵ دقیقه آب‌پز کنیم. چطور می‌توانیم فقط با استفاده از این ساعتها این کار را انجام دهیم؟

۱۹. درون آسانسوری در ساختمانی بیست طبقه دو دکمه وجود دارد. وقتی دکمه اول فشار داده شود آسانسور ۱۳ طبقه بالا می‌رود و وقتی دومی فشار داده شود آسانسور ۸ طبقه پایین می‌رود (اگر تعداد طبقه‌ها برای بالا یا پایین رفتن کافی نباشد دکمه عمل نمی‌کند). چطور می‌توانیم با این آسانسور از طبقه ۱۳ام به طبقه ۸ام برویم؟

۲۰. عدد ۴۵۸ روی تخته سیاه نوشته شده است. هر بار می‌توان یا عدد روی تخته را دو برابر کرد یا رقم یکانش را پاک کرد. چطور می‌توانیم با استفاده از این عملها از عدد داده شده عدد ۱۴ را به دست بیاوریم؟

۲۱. کارتهایی که رویشان عددهای ۷، ۸، ۹، ۴، ۵، ۶، ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است به همین ترتیب در یک ردیف چیده شده‌اند. هر بار می‌توان چند کارت پشت سر هم را انتخاب کرد و آنها را به ترتیب عکس چید. آیا می‌توان بعد از انجام سه عمل از این دست آرایش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را به دست آورد؟

۲۲. عددهای ۱ تا ۱۶ در خانه‌های جدولی  $4 \times 4$  عین شکل ۵۸ (الف) گذاشته شده‌اند. هر بار می‌توان به همه عددهای هر سطر ۱ واحد اضافه کرد یا از همه عددهای هر ستون ۱ واحد کم کرد. آیا می‌توان با استفاده از این عملها جدول شکل ۵۸ (ب) را به دست آورد؟

۱	۵	۹	۱۳
۲	۶	۱۰	۱۴
۳	۷	۱۱	۱۵
۴	۸	۱۲	۱۶

(ب)

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

(الف)

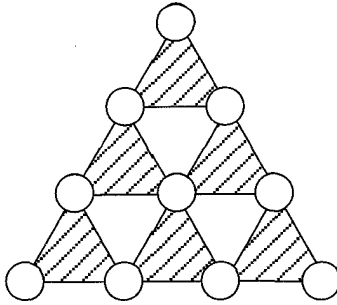
### شکل ۵۸

۲۳. آیا می‌توان عددهای ۱ تا  $100^\circ$  را در یک ردیف طوری نوشت که تفاضل (مثبت) هر دو عدد پهلوی هم از  $5^\circ$  کمتر نباشد؟

۲۴. مجموعه‌ای از سنگریزه‌ها به وزنه‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۵۵۵ گرم را به سه کپه هم‌وزن تقسیم کنید.

۲۵. خانه‌های جدولی  $4 \times 4$  را با عددهایی غیر صفر طوری پر کنید که مجموع عددهای گوشه‌های هر مربع  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$  یا  $4 \times 4$  صفر باشد.

۲۶. آیا می‌توان یالهای مکعبی را با استفاده از عددهای ۱ تا ۱۲ طوری برچسب زد که مجموع عددهای روی هر یک از دو وجه دلخواه مکعب با هم برابر باشد؟
- ۲۷\* آیا می‌توان عددهای ۰ تا ۹ را در دایره‌های شکل ۵۹ بدون تکرار طوری گذاشت که همهٔ مجموعهای عددها در رأسهای مثلثهای سایه‌دار با هم برابر باشند؟



شکل ۵۹

۲۸. ثابت کنید می‌توان چند رقم از اول و چند رقم از آخر عدد  $400$  رقمی  $841984190...84198419$  طوری خط زد که مجموع رقمهایی که می‌ماند  $1984$  باشد.
۲۹. عددی دو رقمی پیدا کنید که وقتی در هر یک از عددهای یک رقمی ضرب می‌شود مجموع رقمهایش تغییر نکند.
۳۰. آیا دو عدد طبیعی متوالی وجود دارند که مجموع رقمهای هر یک از آنها بر  $7$  بخش پذیر باشد؟
۳۱. آیا چند عدد مثبت وجود دارند که مجموعشان  $1$  باشد و مجموع مربعهایشان کمتر از  $1/50$  باشد؟
۳۲. قلعه‌ای از  $64$  اتاق مربع‌شکل عین هم تشکیل شده است که در هر دیوارشان دری وجود دارد و به شکل مربعی  $8 \times 8$  قرار گرفته‌اند. کف همهٔ اتاقها سفیدند. هر روز صبح نقاشی در قلعه گردش می‌کند و رنگ کف همهٔ اتاقهایی را که به آنها می‌رود از سفید به سیاه و برعکس تغییر می‌دهد. آیا ممکن است روزی رنگ‌آمیزی کف کل اتاقها مانند صفحهٔ شطرنج معمولی شود؟
۳۳. آیا می‌توان تعدادی سکهٔ ده سنتی را روی سطح یک میز طوری گذاشت که هر سکه درست به سه سکهٔ دیگر مماس باشد؟
۳۴. در انباری  $N$  تا صندوق به شماره‌های  $1$  تا  $N$  در دو ستون چیده شده‌اند. با یک لیفت‌تراک هر بار می‌توان چند تا صندوق را از بالای یکی از این ستونها برداشت و بالای ستون دیگر گذاشت. ثابت کنید که همهٔ این صندوقها را می‌توان در یک ستون به ترتیب افزایش شماره‌هایشان با  $1 - 2N$  بار استفاده از لیفت‌تراک چید.

مسئله‌های بسیاری درباره وزن کردن وجود دارند که تا حد زیادی به مسئله‌های ساختنی مربوط‌اند. در حل این مسئله‌ها حتی ساده‌ترین یا نامحتمل‌ترین حالتها را هم نباید نادیده گرفت. استدلالهایی مانند «ما بدترین حالت را در نظر می‌گیریم» معمولاً بسیار مبهم‌اند و از این رو غیرقابل قبول.

در همه مسئله‌های این مجموعه فرض می‌کنیم «وزن کردن» با ترازوی دوکفه‌ای معمولی انجام می‌شود که عقربه و وزنه ندارد مگر آنکه خلاف این صراحتاً ذکر شود.

۳۵. ۹ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است (این سکه از بقیه سکه‌ها سبکتر است). با دو بار وزن کردن این سکه تقلبی را پیدا کنید.

۳۶. ۱۰ کیسه داریم که توی آنها سکه است. یکی از آنها فقط شامل سکه‌های تقلبی است که هر یک از آنها از سکه اصل یک گرم سبکتر است. فقط با یک بار وزن کردن با استفاده از ترازوی عقربه‌دار که اختلاف وزن کفه‌ها را نشان می‌دهد کیسه سکه‌های «تقلبی» را پیدا کنید.

۳۷. ۱۰۱ سکه داریم که وزن فقط یکی از آنها با سکه‌های دیگر (که اصل‌اند) فرق می‌کند. باید تعیین کنیم که این سکه تقلبی از سکه اصل سنگینتر است یا سبکتر. چطور می‌توان با دو بار وزن کردن این کار را انجام داد؟

۳۸. ۶ سکه داریم؛ دوتایشان تقلبی‌اند و از سکه‌های اصل سبکترند. با سه بار وزن کردن هر دو سکه تقلبی را مشخص کنید.

۳۹. ۱۰ کیسه داریم که توی آنها سکه است و بعضی از این کیسه‌ها فقط شامل سکه‌های تقلبی‌اند. سکه تقلبی از سکه اصل ۱ گرم سبکتر است. در ضمن، می‌دانیم یکی از کیسه‌ها با سکه‌های اصل پر شده است. با یک بار وزن کردن با استفاده از ترازویی یک شیء کفه‌ای و عقربه‌دار که وزن شیء روی کفه را نشان می‌دهد مشخص کنید که کدام کیسه‌ها فقط شامل سکه‌های «تقلبی»‌اند و کدامها این‌طور نیستند.

۴۰. ۵ سکه داریم که سه‌تایشان اصل‌اند. دو سکه دیگر تقلبی‌اند و یکی از آنها از سکه اصل سنگینتر است و دیگری سبکتر. با سه بار وزن کردن هر دو سکه تقلبی را پیدا کنید.

۴۱. ۶۸ سکه به وزنهای مختلف داریم. با ۱۰۰ بار وزن کردن سنگینترین و سبکترین سکه را پیدا کنید.

۴۲. ۶۴ سنگریزه به وزنهای مختلف داریم. با ۶۸ بار وزن کردن سنگینترین سنگریزه و سنگینترین سنگریزه بعدی را پیدا کنید.

۴۳. ۶ وزنه داریم: دو تا سبز، دو تا قرمز و دو تا سفید. در هر یک از این جفتها یکی از وزنه‌ها سنگینتر است. همه وزنه‌های سنگین هم‌وزن‌اند و وزنه‌های سبک نیز همین‌طورند. با دو بار وزن کردن مشخص کنید که وزنه‌های سنگین کدامها هستند.

۴۴. ۶ سکه داریم که دوتایشان تقلبی‌اند: این سکه‌ها ۰٫۱ گرم از سکه‌های اصل سنگینترند. کفه‌های ترازویی فقط در صورتی از حالت تعادل خارج می‌شوند که اختلاف وزن دو کفه دست‌کم ۰٫۲ گرم باشد. با چهار بار وزن کردن هر دو سکه تقلبی را پیدا کنید.

۴۵. الف) ۱۶ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است؛ وزن این سکه با وزن سکه اصل فرق دارد، اما نمی‌دانیم که از سکه اصل سنگینتر است یا سبکتر. با چهار بار وزن کردن سکه تقلبی را پیدا کنید.

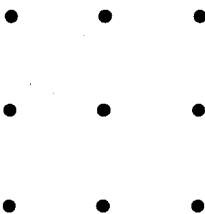
ب) \* ۱۲ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است؛ وزن این سکه با وزن سکه اصل فرق دارد، اما نمی‌دانیم که از سکه اصل سنگینتر است یا سبکتر. با سه بار وزن کردن سکه تقلبی را پیدا کنید.

\* ۴۶. چهارده سکه به‌عنوان مدرک در دادگاه ارائه شده‌اند. قاضی می‌داند که از این سکه‌ها دقیقاً ۷ تا تقلبی‌اند و وزنشان از وزن سکه‌های اصل کمتر است. وکیلی ادعا می‌کند که می‌داند کدام سکه‌ها تقلبی‌اند و کدامها اصل، که از او خواسته می‌شود ادعایش را ثابت کند. این وکیل چطور می‌تواند فقط با سه بار وزن کردن این کار را انجام دهد؟

### ۳. مسأله‌هایی از هندسه

مسأله‌های این بخش را می‌توان به‌طور طبیعی به دو گروه تقسیم کرد. موضوع مسأله‌های گروه نخست (مسأله‌های ۴۷ تا ۵۷) همان موضوع بخش قبلی است؛ این گروه از مسأله‌ها به یافتن مثالهایی هندسی اختصاص دارد. گروه دوم شامل مسأله‌های «متعارف» تر هندسه است.

۴۷. خطی شکسته رسم کنید که از ۴ تکه تشکیل شده باشد و از هر ۹ نقطه شکل ۶۰ بگذرد.



شکل ۶۰

۴۸. مربعی را به ۵ مستطیل طوری تقسیم کنید که هیچ دو تایی از آنها در یک ضلع کامل مشترک نباشند (اما ممکن است بخشهایی از ضلعهایشان مشترک باشند).

۴۹. آیا می‌توان خطی شکسته، ۸ تکه‌ای و بسته رسم کرد که هر یک از تکه‌هایش را دقیقاً یک بار قطع کند؟

۵۰. آیا می‌توان مربعی را به چند مثلث منفرجه تقسیم کرد؟

۵۱. آیا درست است که در میان هر ۱۰ پاره‌خط همیشه ۳ پاره‌خط وجود دارند که می‌توان با آنها یک مثلث رسم کرد؟

۵۲. پادشاهی می‌خواهد ۶ دژ بسازد و هر دو تا از آنها را با یک راه به هم وصل کند. نقشهٔ دژها و راهها را طوری بکشید که در آن فقط ۳ تقاطع وجود داشته باشد و هر یک از آنها محل تلاقی دو راه متقاطع باشد.

۵۳. آیا می‌توان ۶ نقطه را در صفحه انتخاب کرد و آنها را با پاره‌خطهایی جدا از هم (یعنی با پاره‌خطهایی که نقطهٔ درونی مشترکی ندارند) طوری به هم وصل کرد که هر نقطه دقیقاً به ۴ نقطهٔ دیگر وصل باشد؟

۵۴. آیا می‌توان صفحه را با پنج ضلعیهای هم‌نهشت فرش کرد؟

۵۵. مستطیلی  $9 \times 3$  را به ۸ مربع تقسیم کنید.

۵۶. ثابت کنید هر مربع را می‌توان به ۱۹۸۹ مربع تقسیم کرد.

۵۷. مثالی دلخواه را به ۳ تکه ببرید که بتوان آنها را طوری پهلوی هم چید که یک مستطیل تشکیل شود.

\* \* \*

۵۸. در مثلث  $ABC$  نقطه‌های  $M$  و  $K$  به ترتیب روی ضلعهای  $AB$  و  $BC$  قرار دارند. پاره‌خطهای  $AK$  و  $CM$  یکدیگر را در نقطهٔ  $O$  قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر  $OM = OK$  و  $\angle KAC = \angle MCA$ ، آن وقت مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

۵۹. در مثلث  $ABC$  ارتفاع  $AK$ ، نیمساز  $BH$  و میانهٔ  $CM$  یکدیگر را در یک نقطهٔ  $O$  قطع کرده‌اند و  $AO = BO$ . ثابت کنید مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است.

۶۰. در شش‌ضلعی  $ABCDEF$  مثلثهای  $ABC$ ،  $ABF$ ،  $FED$ ،  $CDB$ ،  $FEA$  و  $CDE$  هم‌نهشت‌اند. ثابت کنید قطرهای  $AD$ ،  $BE$  و  $CF$  برابرند.

۶۱. در مثلث حادهٔ  $ABC$  ارتفاع  $CH$  و میانهٔ  $BK$  رسم شده‌اند. اگر

$$\angle KBC = \angle HCB \text{ و } BK = CH$$

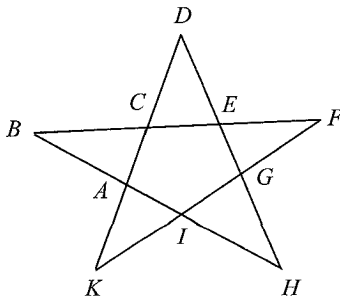
ثابت کنید مثلث  $ABC$  متساوی‌الاضلاع است.

۶۲. در چهارضلعی  $ABCD$  قطرهای  $AC$  و  $BD$  یکدیگر را در نقطهٔ  $O$  قطع می‌کنند. محیط مثلثهای  $ABC$  و  $ABD$  با هم برابر است و محیط مثلثهای  $ACD$  و  $BCD$  نیز با هم. ثابت کنید  $AO = BO$ .

۶۳. ثابت کنید نمی‌توان ستارهٔ شکل ۶۱ را طوری رسم کرد که در آن نابرابریهای

$$BC > AB, \quad DE > CD, \quad FG > EF, \quad HI > GH, \quad KA > IK$$

برقرار باشند.



شکل ۶۱

#### ۴. مسأله‌هایی دربارهٔ عددهای صحیح

این مبحث پیش از این در فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» مطرح شده است. با وجود این، مسأله‌های قشنگ بسیاری دربارهٔ عددهای صحیح وجود دارند؛ چنین مسأله‌هایی آن قدر زیادند که لازم دانستیم تعدادی از آنها را در این بخش بیاوریم. مثلاً مجموعه مسأله‌های ۷۰ تا ۸۴ دقیقاً ادامهٔ مسأله‌های فصل بخش‌پذیری است. محتوای مسأله‌های دیگر جدید است.

۶۴. اگر در کلاسی هر دانش‌آموز راست‌دست یک کیک بخرد و هر دانش‌آموز چپ‌دست یک ساندویچ خرچشان یک سنت کمتر از وقتی می‌شود که هر دانش‌آموز راست‌دست یک ساندویچ بخرد و هر دانش‌آموز چپ‌دست یک کیک. می‌دانیم که تعداد راست‌دست‌های این کلاس از تعداد چپ‌دست‌هایش بیشتر است. اختلاف تعداد راست‌دستها و چپ‌دستها را پیدا کنید.

۶۵. قیمت ۱۷۵ هامپتی از قیمت ۱۲۶ دامپتی بیشتر است. ثابت کنید که نمی‌توانید سه تا هامپتی و یک دامپتی را به یک دلار بخرید.

۶۶. در کلاسی هر دانش‌آموز راست‌دست دقیقاً سه دوست چپ‌دست دارد و هر دانش‌آموز چپ‌دست هم دقیقاً دو دوست راست‌دست. در ضمن، می‌دانیم که در این کلاس فقط ۱۹ نیمکت وجود دارد (که در هر یک از آنها حداکثر دو دانش‌آموز جا می‌گیرد) و ۳۱ نفر از دانش‌آموزان این کلاس فرانسه می‌خوانند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

۶۷. دو تیم در رشتهٔ دهگانه با هم مسابقه می‌دهند. در هر مسابقه تیم برنده ۴ امتیاز می‌گیرد و تیم بازنده ۱ امتیاز، و در صورت تساوی هر یک از تیم‌ها ۲ امتیاز می‌گیرد. بعد از انجام همهٔ ۱۰ مسابقه این دو تیم روی هم ۴۶ امتیاز به‌دست آورده‌اند. چند مسابقه به تساوی ختم شده است؟

۶۸. چهار دوست یک قایق خریدند. اولی، دومی و سومی به ترتیب نصف، یک سوم و یک چهارم مبلغ پرداختی دیگران را پرداخت کردند و چهارمی ۱۳۰ دلار پرداخت کرد. قیمت این قایق چقدر بوده و هر یک از این دوستان چند دلار پرداخت کرده است؟

۶۹. جاده‌ای که دو روستای کوهستانی را به هم وصل می‌کند تماماً سر بالایی یا سرزیری است. اتوبوسی همیشه در سر بالایی با سرعت ۱۵ مایل در ساعت حرکت می‌کند و در سرزیری با سرعت ۳۰ مایل در ساعت. اگر یک سفر رفت و برگشت میان این دو روستا با این اتوبوس دقیقاً ۴ ساعت طول بکشد، فاصلهٔ میان آنها را پیدا کنید.

\* \* \*

۷۰. آیا عددهایی طبیعی مانند  $a$  و  $b$  وجود دارند که  $ab(a - b) = 45 \cdot 45$ ؟

۷۱. مجموع سه عدد طبیعی متوالی را با  $a$  و مجموع سه عدد طبیعی متوالی بعدی را با  $b$  نشان می‌دهیم. آیا ممکن است که حاصل ضرب  $ab$  برابر با عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱ باشد؟

۷۲. ثابت کنید آخرین رقم غیر صفر سمت راست عدد ۱۹۸۵! زوج است.

۷۳. عددهای طبیعی  $x$  و  $y$  در تساوی  $43y = 34x$  صدق می‌کنند. ثابت کنید عدد  $x + y$  مرکب است.

۷۴. آیا عددهایی صحیح و غیر صفر مانند  $a$  و  $b$  وجود دارند که یکی از آنها بر مجموعشان بخش‌پذیر باشد و دیگری به تفاضلشان؟

۷۵. عددهای اول  $p$  و  $q$  و عدد طبیعی  $n$  در برابری

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$$

صدق می‌کنند. این عددها را پیدا کنید.

۷۶. ثابت کنید عددی طبیعی که با استفاده از یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ... و نه رقم ۹ نوشته می‌شود ممکن نیست مربع کامل باشد.

۷۷. هر یک از عددهای طبیعی  $a, b, c$  بر  $d$  بر  $ab - cd$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید  $ab - cd$  یا برابر با ۱ است یا برابر با -۱.

۷۸. در کشوری چهار نوع اسکناس رایج است: اسکناسهای ۱ دلاری، ۱۰ دلاری، ۱۰۰ دلاری و ۱۰۰۰ دلاری. آیا می‌توان مبلغ یک میلیون دلار را دقیقاً با استفاده از پانصد هزار اسکناس پرداخت کرد؟

۷۹. عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. در هر ثانیه به عدد روی تخته مجموع رقمهایش را اضافه می‌کنیم. آیا ممکن است در لحظه‌ای عدد ۱۲۳۴۵۶ روی تخته نقش ببندد؟

۸۰. ثابت کنید عدد ۳۹۹۹۹۹۱ اول نیست.

۸۱. الف) عددی هفت رقمی با رقمهای متمایز پیدا کنید که بر هر یک از رقمهایش بخش‌پذیر باشد.

ب) آیا عددی هشت رقمی با همین ویژگی وجود دارد؟

۸۲. مجموع رقمهای عدد  $19^{100}$  را حساب می‌کنیم. بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را پیدا می‌کنیم

و همین کار را ادامه می‌دهیم، تا وقتی که فقط یک رقم به دست بیاوریم. این رقم کدام است؟



۸۳. ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم هر عدد اول بر  $3^0$  یا  $1$  است یا عددی اول.

۸۴. آیا عددی طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب رقمهایش برابر با  $198^0$  باشد؟

\*\*\*

۸۵. عددی طبیعی به  $2$  ختم می‌شود. اگر این رقم  $2$  را به ابتدای عدد منتقل کنیم عدد موردنظر دو برابر می‌شود. کوچکترین عدد با این ویژگی را پیدا کنید.

۸۶.  $abcdef$  عددی شش‌رقمی است و  $abc - def$  بر  $7$  بخش‌پذیر است. ثابت کنید عدد موردنظر خودش هم بر  $7$  بخش‌پذیر است.

۸۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که یک چهارم عددی باشد که با همان رقمها منتها به ترتیب عکس نوشته می‌شود.

۸۸. در عددی سه‌رقمی اختلاف رقمهای اول و آخر دست‌کم  $2$  است. تفاضل (مثبت) این عدد و مقلوبش (عددی که با همان رقمها منتها به ترتیب عکس نوشته می‌شود) را پیدا می‌کنیم. بعد عدد حاصل را با مقلوبش جمع می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع به‌دست آمده برابر با  $1089$  است.

\*\*\*

۸۹. کدام عدد بزرگتر است:  $23^{00}$  یا  $32^{00}$ ؟

۹۰. کدام عدد بزرگتر است:  $3111$  یا  $1714$ ؟

۹۱. کدام عدد بزرگتر است:  $50^{99}$  یا  $99!$ ؟

۹۲. کدام عدد بزرگتر است

$$888 \dots 88 \times 333 \dots 33$$

یا

$$444 \dots 44 \times 666 \dots 67$$

(هر یک از این عددها  $1989$  رقمی است)؟

۹۳. کدام نوع از عددهای شش‌رقمی بیشترند: عددهایی که می‌توان آنها را به شکل حاصل ضرب دو عدد سه‌رقمی نوشت یا عددهایی که این‌طور نیستند؟

\*\*\*

۹۴. چند مثلث کاغذی همنهشت داریم. رأسهای هر یک از آنها با عددهای  $1$ ،  $2$  و  $3$  علامتگذاری شده‌اند. این مثلثها را طوری روی هم چیده‌ایم که منشوری مثلثی به‌وجود آمده است. آیا ممکن است که مجموع عددهای روی هر یک از یالهای این منشور برابر با  $55$  باشد؟

۹۵. آیا می‌توان  $15$  عدد صحیح را دور دایره‌ای طوری چید که مجموع هر چهار عدد متوالی یا برابر با  $1$  باشد یا برابر با  $3$ ؟

- ۹۶\*. هزار عدد طبیعی پیدا کنید که مجموعشان برابر با حاصل ضربشان باشد.
۹۷. رقمهای دو عدد  $۲۱۹۸۹$  و  $۵۱۹۸۹$  پشت سر هم نوشته شده‌اند. در کل چند رقم نوشته شده است؟
۹۸. یک بلیت اتوبوس را ( که در روسیه شماره‌اش از ۶ رقم دلخواه تشکیل می‌شود) در صورتی «خوش‌یمن» می‌نامند که مجموع سه رقم اولش با مجموع سه رقم آخرش برابر باشد. ثابت کنید تعداد بلیتهای «خوش‌یمن» برابر با تعداد بلیتهایی است که مجموع رقمهایشان ۲۷ است.

## ۵. مسأله‌های گوناگون

۹۹. در کلاسی چهارده دانش‌آموز اسپانیایی می‌خوانند و هشت دانش‌آموز فرانسه. در ضمن، می‌دانیم سه دانش‌آموز هر دو زبان را می‌خوانند. اگر هر یک از دانش‌آموزان دست‌کم یک زبان را بخواند، چند دانش‌آموز در این کلاس وجود دارد؟
۱۰۰. نقطه‌های صفحه را با دو رنگ رنگ می‌کنیم. ثابت کنید دو نقطه هم‌رنگ وجود دارند که فاصله‌شان از هم دقیقاً ۱ متر است.
۱۰۱. خطی راست را با دو رنگ رنگ می‌کنیم. ثابت کنید می‌توانیم روی این خط پاره‌خطی پیدا کنیم که طولش صفر نباشد و دو سر و وسطش هم‌رنگ باشند.
۱۰۲. مربعی  $۸ \times ۸$  از دومینوهای  $۲ \times ۱$  تشکیل شده است. ثابت کنید دو تا از این دومینوها مربعی  $۲ \times ۲$  تشکیل می‌دهند.
۱۰۳. در همهٔ خانه‌های جدولی  $۳ \times ۳$  عدد گذاشته شده است. می‌توانیم به همهٔ عددهای هر مربع  $۲ \times ۲$  در این جدول عدد ۱ را اضافه کنیم. آیا می‌توان با استفاده از این عملها از جدولی که همهٔ دریاهايش صفرند جدول شکل ۶۲ را به دست آورد؟

۴	۹	۵
۱۰	۱۸	۱۲
۶	۱۳	۷

شکل ۶۲

۱۰۴. اتوبوس را در صورتی پرازدحام می‌نامیم که از  $۵۰\%$  حداکثر تعداد مجاز مسافر بیشتر سوار کرده باشد. بچه‌ها برای رفتن به اردویی تابستانی سوار چند تا اتوبوس می‌شوند. کدام یک بزرگتر است: درصد اتوبوسهای پرازدحام یا درصد بچه‌هایی که سوار اتوبوسهای پرازدحام شده‌اند؟
۱۰۵. برگه‌های مسأله‌های المپیاد کشوری در پایه‌های ۶ تا ۱۱ طوری تنظیم شده‌اند که هر یک از برگه‌ها شامل هشت سؤال است و در میان سؤالهای هر پایه دقیقاً سه سؤال وجود دارد که در المپیاد پایه‌های دیگر نیامده است. کمیتهٔ برگزارکننده حداکثر از چند سؤال استفاده کرده است؟

۱۰۶. همه دانش‌آموزان مدرسه‌ای در آرایه‌ای مستطیلی ایستاده‌اند. قد بلندترین دانش‌آموز هر سطر انتخاب می‌شود که در میان اینها جان اسمیت از همه قدکوتاهتر است. بعد در هر ستون قدکوتاهترین دانش‌آموز انتخاب می‌شود که در میان آنها جو براون از همه قد بلندتر است. چه کسی قد بلندتر است: جان یا جو؟

۱۰۷. سی صندوقی در یک ردیف قرار دارند. هر چند وقت یک‌بار یک نفر می‌آید و روی یکی از صندوقهای خالی می‌نشیند. بعد، اگر دو صندوقی پهلوئی این شخص پر باشند یکی از بغل دستیهایش از جای خود بلند می‌شود و صندوقش را ترک می‌کند.

به شرطی که در ابتدا

(الف) همه صندوقها خالی باشند؛

(ب) ده صندوقی پر باشند،

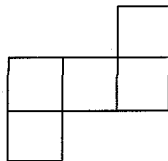
حداکثر چند صندوقی ممکن است همزمان پر باشند؟

۱۰۸. سه مهرهٔ سرباز در رأسهای پنج ضلعی‌ای گذاشته شده‌اند. می‌توان سربازها را روی هر قطر پنج ضلعی به هر یک از رأسهای خالی برد. آیا ممکن است که بعد از انجام چند حرکت از این دست یکی از این سربازها در جای اولیه‌اش قرار گیرد، اما دو تای دیگر جایشان عوض شده باشد؟

۱۰۹. هیچ‌یک از عددهای  $a, b, c, d, e, f$  و  $f$  صفر نیست. ثابت کنید در میان عددهای  $ab, cd, ef, -ac, -be, -df$  هم عدد مثبت وجود دارد هم عدد منفی.

\* ۱۱۰. پرفسور روییک مکعب  $3 \times 3 \times 3$  معروفش را با تیر تکه‌تکه می‌کند. اگر در میان ضربه‌های تیر بتواند بعضی از تکه‌ها را روی تکه‌های دیگر بگذارد، دست‌کم چند ضربه لازم است تا این مکعب به ۲۷ مکعب کوچک تقسیم شود؟

۱۱۱. خانه‌های یک برگ کاغذ شطرنجی با هشت رنگ رنگ شده‌اند. ثابت کنید که در این کاغذ شطرنجی می‌توان شکلی مانند شکل ۶۳ یافت که شامل دو خانهٔ هم‌رنگ باشد.



شکل ۶۳

۱۱۲. عددی شش رقمی داده شده است. چند عدد هفت رقمی وجود دارد که اگر یک رقم آنها را خط بزنیم عدد شش رقمی مورد نظر به دست می‌آید؟

۱۱۳. چند بلیت اتوبوس باید پشت سرهم بخريد تا مطمئن شويد که یک بلیت «خوش‌یمن» به دست آورده‌اید؟ (تعریف بلیت «خوش‌یمن» را می‌توانید در مسألهٔ ۹۸ ببینید. شماره‌های بلیتهای اتوبوس متوالی‌اند و بعد از بلیت شمارهٔ ۹۹۹۹۹۹ بلیت شمارهٔ ۰۰۰۰۰۰ می‌آید).

\*۱۱۴. چندی پیش یک دوره مسابقات والیبال برگزار شد که در آن هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی کرد. در صورتی می‌گوییم تیم A از تیم B بهتر است که یا A، B را شکست داده باشد یا A تیمی مانند C را شکست داده باشد و C، B را. ثابت کنید که تیم قهرمان این مسابقات از هر تیم دیگر بهتر بوده است.

\*۱۱۵. از یک برگ کاغذ شطرنج مستطیلی  $30 \times 20$  می‌بریم. آیا می‌توان خطی راست رسم کرد که از درون  $30$  تا از خانه‌های این مستطیل بگذرد؟

۱۱۶. عددهای طبیعی از ۱ تا ۶۴ در خانه‌های صفحه شطرنجی نوشته شده‌اند و در ضمن هر عدد دقیقاً یک بار نوشته شده است. ثابت کنید که اختلاف عددهای دو تا از خانه‌های پهلوی هم دست‌کم ۵ است.

## فصل ۹

### استقرا

ای. س. روبائف

#### ۱. روند و روش استقرا

(مقدمه‌ای برای معلمان). به ندرت می‌توان کسی را یافت که حتی یک بار هم سرگرمی چیدن دومینوها پشت سر هم و به‌راه انداختن موج را تجربه نکرده باشد. نخستین دومینو را هل می‌دهید و این دومینو، دومی را می‌اندازد، دومی، سومی را می‌اندازد و به‌همین ترتیب تا وقتی که همهٔ دومینوها بیفتند. اکنون مجموعهٔ دومینوها را با زنجیره‌ای نامتناهی از حکمهای  $P_1, P_2, P_3, \dots$ ، که با عددهای طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند، عوض می‌کنیم. فرض کنید بتوانیم ثابت کنیم که (پایه): نخستین حکم این زنجیره درست است؛

(گام): از درستی هر حکم در این زنجیره درستی حکم بعدی نتیجه می‌شود.

در این صورت، در حقیقت همهٔ حکمهای این زنجیره را ثابت کرده‌ایم. در حقیقت، می‌توانیم «نخستین دومینو را هل دهیم» یعنی حکم اول (پایه) را ثابت کنیم و بعد حکم (گام) یعنی اینکه هر دومینو هنگام افتادن دومینوی بعدی را می‌اندازد. هر «دومینویی» (حکمی) که انتخاب کنیم دیر یا زود این موج «افتادن دومینوها» (اثباتها) به آن برخورد می‌کند.

آنچه گفته شد توصیف روش استقرای ریاضی است. قضیهٔ (پایه) را پایهٔ استقرا و قضیهٔ گام را گام استقرایی می‌نامند. از آنچه دربارهٔ موج افتادن دومینوها گفتیم معلوم می‌شود که مرحلهٔ (گام) چیزی نیست بجز شکل کوتاه شده‌ای از زنجیرهٔ قضیه‌هایی که در زیر نشان داده شده‌اند:

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_k \rightarrow P_{k+1} \rightarrow \dots$$

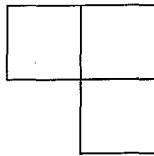
قضیه‌های این زنجیره را «گامهای استقرا» و فرایند پشت سر هم ثابت کردن آنها را «روند استقرا»

می‌نامیم. این فرایند را می‌توان به شکل موجی از اثباتها در طول زنجیره‌ای از قضیه‌ها که از یک حکم به حکمی دیگر می‌رود مجسم کرد.

از لحاظ روانشناسی ماهیت استقرا در روندی که گفتیم نهفته است. اما چطور می‌توانیم این را به دانش‌آموزان بیاموزیم؟ سعی می‌کنیم در قالب گفتگویی میان معلم و دانش‌آموز که کمابیش شبیه فضای یک جلسهٔ محفل ریاضی واقعی است به شما نشان دهیم که چه کار باید کرد. در پایان این گفتگو چند توضیح روش شناختی برای معلمان آورده‌ایم (ارجاعهای این توضیحات را در متن گفتگو نشان داده‌ایم).

\* \* \*

مسئلهٔ ۱. معلم: یکی از خانه‌های کاغذی شطرنجی به ابعاد  $۱۶ \times ۱۶$  را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید شکل حاصل را می‌توان به تعدادی از یک نوع سه‌مربعی به نام «کنج» (شکل ۶۴ را ببینید) تقسیم کرد.



شکل ۶۴

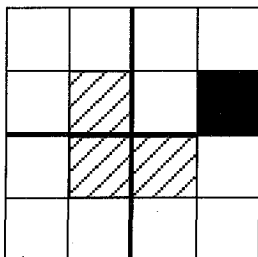
دانش‌آموز: اینکه آسان است؛ هر «کنج» سه خانه دارد و  $۱ - ۱۶^۲$  بر ۳ بخش‌پذیر است. معلم: اگر موضوع به این سادگی‌هاست، آیا می‌توانید نواری  $۱ \times ۶$  را هم به «کنجها» تقسیم کنید؟ عدد ۶ هم که بر ۳ بخش‌پذیر است!

دانش‌آموز: بسیار خوب... اشتباه کردم. اصلاً نمی‌دانم که این مسئله را چطور باید حل کرد. (۱) معلم: خوب، نمی‌توانید این مسئله را حل کنید. آیا امکان دارد که مسئلهٔ دیگری را در نظر بگیرید که شبیه همین باشد و در عین حال آسانتر؟

دانش‌آموز: خوب، می‌توانیم مربع دیگری را در نظر بگیریم که اندازه‌اش کوچکتر باشد، مثلاً  $۴ \times ۴$ . معلم: مربعی  $۲ \times ۲$  را نمی‌توانیم در نظر بگیریم؟ (۲)

دانش‌آموز: آخر در این حالت دیگر چیزی وجود ندارد که ثابت کنیم؛ چون وقتی یکی از خانه‌هایش را حذف می‌کنیم چیزی بجز یک «کنج» نمی‌ماند. حالا آیا از این چیزی می‌فهمیم؟ معلم: اکنون سعی کنید که مسئله را در مورد مربع  $۴ \times ۴$  حل کنید.

دانش‌آموز: آهان. هر مربع  $۴ \times ۴$  را می‌توان به چهار مربع  $۲ \times ۲$  تقسیم کرد. معلوم است با مربعی که شامل خانهٔ حذف شده است چه کار باید کرد. اما در مورد سه‌تای دیگر چه کنیم؟



شکل ۶۵

معلم: سعی کنید از آنها «کنجی» را درآورید که در مرکز مربع بزرگ قرار گرفته است (شکل ۶۵ را ببینید).

دانش‌آموز: فهمیدم! از هر یک از اینها می‌توان یک خانه را در نظر گرفت تا به یک «کنج» تبدیل شود. بنابراین می‌توانیم مسأله را در مورد مربعهای  $4 \times 4$  هم حل کنیم. حالا چی؟  
معلم: مربعی  $8 \times 8$  را در نظر می‌گیریم. می‌توان آن را به چهار مربع  $4 \times 4$  تقسیم کرد. از این استفاده کنید.

دانش‌آموز: خیلی خوب، می‌توانیم مانند قبل استدلال کنیم. یکی از این مربعها شامل خانه «حذف شده» است. همان‌طور که پیش از این ثابت کردیم این مربع را می‌توان به «کنجها» تقسیم کرد. بعد از اینکه از مرکز مربع  $8 \times 8$  یک «کنج» درمی‌آوریم، هر یک از سه مربع دیگر یک خانه کم دارد و در نتیجه آنها را هم می‌توانیم به «کنجها» تقسیم کنیم.

معلم: حالا فهمیدید که مسأله اصلی را چگونه باید حل کرد؟

دانش‌آموز: البته. مربع  $16 \times 16$  را به چهار مربع  $8 \times 8$  تقسیم می‌کنیم. یکی از اینها شامل خانه حذف شده است. همین الان ثابت کردیم که می‌توان آن را به «کنجها» تقسیم کرد، درست است؟ بعد، از مرکز مربع بزرگ یک «کنج» درمی‌آوریم تا سه مربع  $8 \times 8$  دیگر به دست آید که هر یک از آنها یک خانه ندارد و از این رو هر یک را می‌توان به «کنجها» تقسیم کرد. کار تمام است!

معلم: نه هنوز. این مسأله را با ایجاد «پلهایی» که سؤالهای مشابه و در عین حال ساده‌تر را به هم وصل می‌کرد حل کردیم. آیا می‌توانیم چنین پلهایی را باز در مورد سؤالهای پیچیده‌تر دیگر ایجاد کنیم؟ (۳)  
دانش‌آموز: البته که می‌توانیم. مثلاً ثابت می‌کنیم که می‌توان مربعی  $32 \times 32$  را به «کنجها» تقسیم کرد. مجسم کنید که همین الان آن را به چهار مربع  $16 \times 16$  تقسیم کرده‌ایم و ...

معلم: کار تمام است! اما ... آیا ممکن است که باز هم ادامه دهیم؟

دانش‌آموز: البته. با ثابت شدن حکم در مورد مربعی  $32 \times 32$  اکنون می‌توانیم درست به همان طریق روشی برای تقسیم کردن مربعی  $64 \times 64$  به دست بیاوریم، بعد برای مربعی  $128 \times 128$  و همین‌طور در مورد ...

معلم: بنابراین زنجیره‌ای نامتناهی از حکمها در مورد مربعهایی از اندازه‌های مختلف به دست می‌آید. آیا می‌توانیم بگوییم که همه‌شان را ثابت کرده‌ایم؟

دانش‌آموز: بله، همه آنها را ثابت کرده‌ایم. ابتدا نخستین حکم این زنجیره را، که در مورد مربع  $2 \times 2$  بود، ثابت کردیم. بعد، از آن، دومین حکم را نتیجه گرفتیم، بعد از دومی، سومی را و همین‌طور تا آخر. به نظر می‌رسد کاملاً روشن باشد که

وقتی در این زنجیره پیش می‌رویم، دیر یا زود به هر یک از حکمهایش می‌رسیم؛ بنابراین، همه آنها درست‌اند.

معلم: بسیار خوب. این فرایند عین «موج اثبات» است که در طول این زنجیره قضیه‌ها جلو می‌رود

$$2 \times 2 \rightarrow 4 \times 4 \rightarrow 8 \times 8 \rightarrow \dots$$

کاملاً واضح است که هیچ‌یک از حکمهای این زنجیره از این موج قسر در نمی‌رود.

\* \* \*

یادداشت. در این گفتگو آوردن چند توضیح لازم است.

توضیح ۱. وقتی این دانش‌آموز حکم مسأله را با استفاده از بخش‌پذیری بر ۳ «ثابت کرد»، معلم با مشکلی مواجه شد که نوعاً در کلاسها پیش می‌آید و آن اینکه چطور می‌توان ماهیت این اشتباه را توضیح داد بی‌آنکه راه حل مسأله زیادی لو داده شود. معلم با ارائه مثال نقضی که از پیش آماده کرده بود بر این مشکل غلبه کرد. خوب است که همیشه از وجود موانعی از این دست آگاه باشیم و راههایی را بلد باشیم که بتوانیم به موقع از این موانع بگریزیم. این کار باید به راحتی و بدون هیچ انحراف عمده‌ای از روند راه حل صورت گیرد.

توضیح ۲. پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال چندان هم غیرمنتظره نیست. دانش‌آموزان حالت  $2 \times 2$  را موردی مهم به حساب نمی‌آورند، که اصلاً ایرادی ندارد (بعدها چندین بار با این وضعیت مواجه خواهیم شد). به هر حال، معلم می‌داند که برای شروع حل مسأله این حالت از همه آسانتر است.

توضیح ۳. در این بخش از گفتگو منظورمان از ایجاد پلها طرح «گام به گام» زیر است:

$$2 \times 2 \rightarrow 4 \times 4 \rightarrow 8 \times 8 \rightarrow 16 \times 16$$

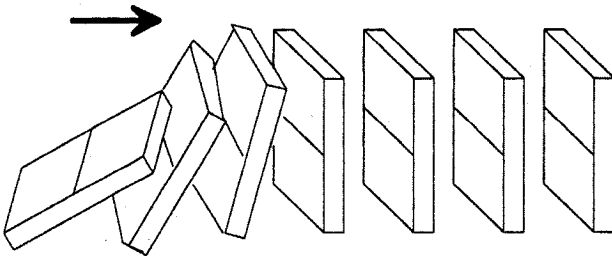
این آغاز روند استقراس: پایه استقرا، یعنی حالت  $2 \times 2$ ، و سه گام نخست استقرا. در اینجا ضروری است که تعدادی کافی از گامهای استقرا را بیاوریم تا دانش‌آموزان متوجه شباهت آنها شوند. اکنون، بعد از این راهنمایی دانش‌آموز می‌تواند کل روند استقرایی را به پیش ببرد.

در حقیقت راه‌حلهای استقرایی دیگری هم برای این مسأله وجود دارند، اما از نظر آموزشی هیچ حسنی ندارند، زیرا مفهوم استقرا در آنها به روشنی راه حل بالا نیست. بنابراین معلم باید دانش‌آموزان را



با استفاده از راهنماییهای دستورالعملی از این راه حلها دور کند. به این ترتیب در اینجا هم معلم نقشش را کاملاً ایفا می کند: بعضی وقتها او دانش آموزان را از شباهتی گمراه کننده دور می کند و کمک می کند تا توان فکری آنان هرز نرود. بسیار مهم است که به آنها مجال دهیم تا مسأله را حل کنند: دانش آموزان هر چه بیشتر بدون کمک دیگران این کار را انجام دهند بهتر است.

آنچه را که به دست آمده است جمع بندی می کنیم. دانش آموز طرح روش استقرای ریاضی را شرح داد (اما بیشتر مواقع این کار وظیفه معلم است). جمله «وقتی در این زنجیره جلو می رویم، دیر یا زود به هر یک از حکمهایش می رسیم» چیزی نیست بجز صورتی غیررسمی از اصل استقرای ریاضی که اساس روش استقرای ریاضی است. با همه این احوال باید بگوییم که صحبت کردن درباره این طرح، آن هم در همان ابتدای بحث خیلی منطقی نیست. این کار ممکن است پیش از موقع یا حتی مضر باشد، زیرا بیان کردن رسمی این حکم که از نظر شهودی واضح است ممکن است باعث احساس بدفهمی و شک و تردید شود. برعکس باید از همه راهها استفاده کرد تا این طرح تا آنجا که ممکن است واضح و روشن شود. علاوه بر «موج» و دومینوها (شکل ۶۶ را ببینید) تشبیه های مفید دیگری از جمله بالا رفتن از پلکان، بستن زیپ و غیره وجود دارند.



شکل ۶۶

\* \* \*

اکنون به گفتگویمان ادامه می دهیم:

معلم: بنابراین زنجیره ای نامتناهی از حکمها درباره امکان تقسیم مربعها به «کنجها» را ثابت کرده ایم. اکنون همه آنها را بی آنکه از عبارت «و همین طور تا آخر» استفاده کنیم می نویسیم.

دانش آموز: اما ... به طور قطع برای این کار همیشه کاغذ کم می آوریم.

معلم: بله، اگر هر حکم را جداگانه بنویسیم، همین طور می شود. اما همه این حکمها شبیه هم اند و فقط اندازه مربعها در آنها فرق می کند. بر این اساس می توانیم کل زنجیره را فقط در یک خط این طور

بنویسیم:

(\* ) می توان هر مربع  $2^n \times 2^n$  را که یک خانه اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد.

در اینجا متغیر  $n$  آمده است. هر حکم زنجیره‌مان را می‌توان از جایگزینی عددی به جای  $n$  به دست آورد. مثلاً در حالتی که  $n = 5$ ، حکمی از زنجیره که در مورد مربع  $32 \times 32$  است، به دست می‌آید. در این صورت دهمین حکم زنجیره چیست؟

دانش‌آموز: در حکم بالا قرار می‌دهیم  $n = 10$  تا حکم مربوط به مربع  $21^0 \times 21^0$  یعنی مربع  $1024 \times 1024$  به دست آید.

معلم: به این نکته توجه کنید: متغیر همان چیز مشترک است، که البته بسیار مؤثر است، زیرا با استفاده از آن می‌توانیم زنجیره‌ای نامتناهی را در یک جمله کوتاه جمع کنیم. با این حساب بگویید که «متغیر» چیست؟

دانش‌آموز: خوب... متغیر فقط یک حرف است... یک مجهول...

معلم: به خاطر داشته باشید: این «حرف» نشان‌دهنده فضایی خالی، مانند یک اتاق، است که در آن می‌توانید عددها یا چیزهایی مختلف را بگذارید. می‌توان آن را «جایبان» هم نامید. آن دسته از عددها یا چیزهایی را که می‌توان در این «اتاق» گذاشت مقادیرهای ممکن متغیر می‌نامند. مثلاً مقادیرهای متغیر  $n$  در حکم (\*) عددهای طبیعی (عددهای صحیح مثبت) هستند. به همین علت حکم (\*) جایگزین زنجیره نامتناهی حکمها می‌شود.

اکنون به اثبات زنجیره نامتناهی (\*) باز می‌گردیم. حکمها را شماره‌گذاری می‌کنیم:  $P_1$  حکم مربوط به مربع  $2 \times 2$  است.  $P_2$  درباره مربع  $4 \times 4$  است و همین‌طور تا آخر.

ابتدا حکم  $P_1$  را ثابت کردیم. بعد به زنجیره نامتناهی قضیه‌های شبیه به هم پرداختیم: اگر  $P_1$  ثابت شود، آن وقت  $P_2$  درست است؛ اگر  $P_2$  ثابت شود، آن وقت  $P_3$  درست است و به همین ترتیب تا آخر. اکنون ببینیم می‌توانیم این زنجیره را هم به شکلی خلاصه بنویسیم: «به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ... دانش‌آموز: ... اگر  $P_n$  درست باشد، آن وقت  $P_{n+1}$  هم درست است.»

معلم: اکنون لطفاً این عبارت را شرح دهید؛ منظور از  $P_n$  و  $P_{n+1}$  چیست؟ دانش‌آموز:

(\*\*) «عدد طبیعی  $n$  هر چه باشد، اگر قبلاً ثابت شده باشد که می‌توان مربعی  $2^n \times 2^n$  را که یک خانه‌اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد، آن وقت این هم درست است که می‌توان مربعی  $2^{n+1} \times 2^{n+1}$  را که یک خانه‌اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد.» معلم: آیا می‌توانید این را ثابت کنید؟

دانش‌آموز: فکر می‌کنم بتوانم. مجسم کنید که مربع  $2^{n+1} \times 2^{n+1}$  را به چهار مربع  $2^n \times 2^n$  تقسیم کنیم. یکی از اینها یک خانه‌اش کم است و بنابر فرض می‌توان آن را به «کنجها» تقسیم کرد. بعد از مرکز مربع بزرگ یک «کنج» طوری درمی‌آوریم که شامل یک خانه از هر یک از سه مربع  $2^n \times 2^n$  دیگر باشد. پس از آن باز می‌توانیم از فرض استفاده کنیم!

معلم: کاملاً درست است. توجه کنید که به محض اینکه قضیه کلی (\*\*\*) را ثابت کردید در واقع همه قضیه‌های این زنجیره را هم که با حکم (\*\*\*) بیان شده‌اند، ثابت کرده‌اید. مثلاً، اگر  $n = 1$ ، همان اثبات اوایل فصل به دست می‌آید، که از امکان تقسیم کردن مربع  $2 \times 2$  امکان تقسیم کردن مربع  $4 \times 4$  نتیجه می‌شود. بنابراین درست همان طور که (\*\*\*) را می‌توان به نوعی کل زنجیره قضیه‌ها دانست، روش استدلالتان را هم می‌توان به نوعی کل «موج اثباتهای» آن قضیه‌ها به حساب آورد. گمان می‌کنم شما هم به این نتیجه رسیده باشید: اثبات زنجیره‌ای از قضیه‌های شبیه به هم به این شکل فشرده سودمندتر و آسانتر است. اما برای این کار باید یاد بگیرید که چطور زنجیره‌ای از قضیه‌ها را به این شکل بیان کنید.

\* \* \*

روشی که در حل مسأله ۱ به کار بردیم چیزی است که آن را روش استقرای ریاضی می‌نامند. اما ماهیت این روش چیست؟  
اولاً حکم (\*) را در نظر می‌گیریم، منتها نه به عنوان یک حکم، بلکه به عنوان زنجیره‌ای نامتناهی از حکمهای شبیه به هم.

ثانیاً، نخستین حکم این زنجیره را، که آن را «پایه استقرا» می‌نامند، ثابت می‌کنیم.  
ثالثاً، حکم دوم را از اولی نتیجه می‌گیریم، سومی را از دومی (به همان طریق) و همین طور تا آخر. این، «گام استقرایی» است و حکم (\*\*\*) چیزی بجز شکل کوتاه شده (فشرده) آن نیست. اکنون چون می‌توانیم از پایه استقرا گام به گام به هر یک از حکمها برسیم، همه آنها درست‌اند.

\* \* \*

«روش ایده‌ای است که (دست‌کم) دو بار از آن استفاده شده باشد»

(جورج پولیا)

برای اینکه روش استقرای ریاضی را به خوبی فرا بگیرید، معمولاً لازم است گفتگوی بالا را در مورد چند مسأله مختلف برای خودتان تکرار کنید. اکنون به چهار «مسأله کلیدی» دیگر توجه کنید.

مسأله ۲. ثابت کنید عدد  $11 \dots 11$  (۲۴۳ تا یک) بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: این مسأله را می‌توان به این حکم تعمیم داد که هر عدد که با  $3^n$  تا یک نوشته می‌شود بر  $3^n$  بخش‌پذیر است.

پایه استقرا: ۱۱۱ بر ۳ بخش‌پذیر است. دانش‌آموزان غالباً با این گزاره استقرا را شروع می‌کنند که ۱۱۱، ۱۱۱۱، ۱۱۱۱۱ بر ۹ بخش‌پذیر است؛ پایه‌ای که ما در نظر گرفتیم برایشان زیادی آسان است. در اینجا دو مانع سر راهمان است.

الف) تلاش دانش‌آموزان برای تعمیم آزمونهای بخش‌پذیری بر ۳ و ۹، و به‌کارگیری «آزمونی» نادرست برای بخش‌پذیری بر ۲۷؛

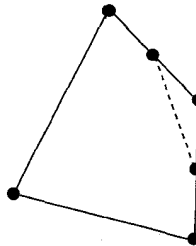
ب) این‌طور استدلال کردن: «اگر عددی بر ۳ و ۹ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت بر  $3 \times 9$  یا ۲۷ بخش‌پذیر است.»

در اینجا شکل درست گام استقرایی این است که عددی را که با  $3^{n+1}$  تا یک نوشته می‌شود بر عددی که با  $3^n$  تا یک نوشته می‌شود تقسیم کنیم و بررسی کنیم که عدد حاصل مضربی از ۳ است.

مسئله ۳. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۳ مانند  $n$ ،  $n$  ضلعی محدب وجود دارد که دقیقاً سه زاویه‌اش حاده است.

توضیح. این سؤال مسئله کلیدی تمام و کمالی است، به شرطی که دانش‌آموزان از پیش بدانند که هر چندضلعی محدب بیش از سه زاویه حاده ندارد. در مورد پایه استقرا، یعنی وقتی که  $n = 4$ ، می‌توان چهارضلعی موردنظر را مستقیماً رسم کرد و درستی حکم را بررسی کرد.

گام استقرایی: ضلعهای یکی از زاویه‌هایی را که حاده نیست «می‌بریم». در این صورت تعداد زاویه‌های چندضلعی موردنظر یکی زیاد می‌شود و همه زاویه‌های حاده هم حفظ می‌شوند (شکل ۶۷ را ببینید).

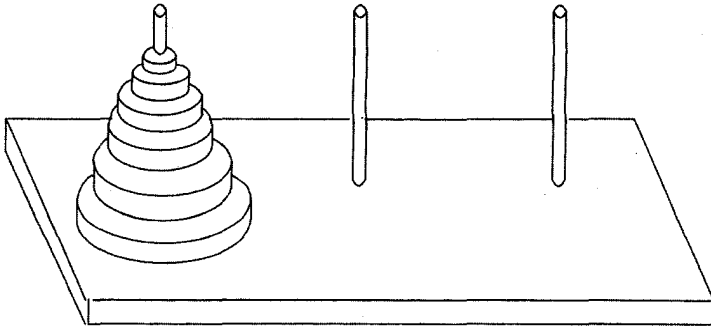


شکل ۶۷

راه دیگرش، ساختن زاویه‌ای جدید روی یکی از ضلعها، کمی دشوارتر است. راه‌حلهای دیگری هم وجود دارند (با استفاده از چندضلعیهای محاطی و غیره) اما دقیق درآوردن بیشترشان برای دانش‌آموزان از این یکی که گفتیم دشوارتر است. امکان دارد که در اینجا معلم حتی بتواند در مورد «بریدن» ضلعهای زاویه دانش‌آموزان را راهنمایی کند.

روشن است که حکم مسئله در حالتی که  $n = 3$  درست است. اما با شروع استقرا از عدد ۳ چیزی به‌دست نمی‌آوریم، زیرا روشی که به‌کار گرفتیم در گام استقرایی از  $n = 3$  به  $n = 4$  به‌کار نمی‌آید. سومین مسئله‌مان نمونه‌ای از ساختن چیزی به استقراست.

مسئله ۴. («برج هانوی») پیتر اسباب‌بازی بچه‌گانه‌ای دارد. این اسباب‌بازی سه میله دارد که روی پایه‌ای قرار گرفته‌اند و  $n$  تا حلقه روی یکی از آنها وجود دارد. این حلقه‌ها به‌ترتیب اندازه‌شان چیده شده‌اند



شکل ۶۸

(شکل ۶۸ را ببینید). می‌توان هر بار حلقه رویی (کوچکترین حلقه) هر میله را به میله دیگر منتقل کرد، منتها هیچ‌وقت نباید حلقه‌های بزرگتر روی حلقه‌های کوچکتر گذاشته شود. ثابت کنید  
 الف) می‌توان همه این حلقه‌ها را به یکی از میله‌های خالی منتقل کرد؛  
 ب) پیتر می‌تواند این کار را با  $2^n - 1$  حرکت انجام دهد؛  
 ج) انجام این کار با کمتر از این تعداد حرکت ممکن نیست.

راهنمایی الف و ب): اثبات درستی حکم در مورد پایه استقرا ( $n = 1$ ) آسان است. گام استقرایی: فرض کنید  $n = k + 1$  و  $n$  حلقه روی میله اولی وجود داشته باشد. بنابر فرض استقرایی می‌توانیم همه حلقه‌ها بجز بزرگترینشان را با  $2^k - 1$  حرکت به میله سوم منتقل کنیم. بعد حلقه باقی‌مانده را به میله دوم می‌بریم. پس از آن می‌توانیم همه حلقه‌های میله سوم را با  $2^k - 1$  حرکت به میله دوم منتقل کنیم. در کل تعداد حرکت‌هایمان برابر با

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1)$$

یا  $2^{k+1} - 1$  است. خوب است که چند گام نخست استقرا را «به‌طور عملی»، حتی با استفاده از نمونه‌ای واقعی، انجام دهید.

ج) در مورد این قسمت از مسأله باید بادقت عمل کرد، زیرا از دیگر مسأله‌هایی که در اینجا آمده‌اند دشوارتر است. ایده اصلی اثبات این است که برای انتقال بهترین حلقه به میله دوم باید ابتدا همه حلقه‌های دیگر را به میله سوم منتقل کنیم.

مسأله ۵. چند خط راست صفحه را به ناحیه‌هایی تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید می‌توان این ناحیه‌ها را با دو رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هر دو ناحیه مجاور به رنگ‌های مختلف باشند (دو ناحیه را در صورتی مجاور می‌نامیم که دست‌کم در یک پاره‌خط مشترک باشند).

راهنمایی: در اینجا با مانع دیگری مواجه می‌شویم: در این حکم برای اینکه بتوانیم از استقرا استفاده کنیم هیچ متغیری به‌طور آشکار نیامده است. بنابرین برای حل کردن مسأله ابتدا این متغیر پنهانی را

پیدا می‌کنیم. به این منظور، صورت مسأله را این‌طور می‌نویسیم: «در صفحه‌ای  $n$  تا خط راست وجود دارند...» اکنون پایه استقرا را می‌توان حالت‌های  $n = 1$  یا  $n = 2$  اختیار کرد (کارمان با هریک از اینها راه می‌افتد). گام استقرایی: چند لحظه  $(k + 1)$  امین خط را بردارید، نقشه حاصل را رنگ کنید، بعد خط برداشته شده را به جای خود برگردانید و رنگ همه ناحیه‌های یک طرف این خط را برعکس کنید.

توصیه به معلمان. این چند مسأله کلیدی اول را هم می‌توان طبق طرح گفتگوی بالا بررسی کرد؛ یعنی، گسترش دادن زنجیره موردنظر از حکمی خاص. دانش‌آموزان باید ماهیت روند استقرایی و ارتباط میان زنجیره‌های قضیه‌ها و حکمها را با استفاده از متغیرهای صحیح درک کنند. اگر دانش‌آموزان برای این کار به اندازه کافی آمادگی نداشتند، می‌توان از ایده ایجاد زنجیره گامهای استقرایی صرف‌نظر کرد. این ایده را می‌توان بعداً در مرحله دوم مطرح کرد که هدف از آن این است که به دانش‌آموزان بیاموزیم که روی گام استقرایی به شکل اختصاریش کار کنند. در حین این کار خوب است برایشان سؤالهایی به شکلی کلی (مانند مسأله‌های ۳ و ۴) مطرح کنید. اکنون زنجیره‌ای از حکمها پیش رویمان است و حل مسأله را می‌توان دقیقاً از «تشریح» صورتش این‌طور آغاز کرد: «در اینجا زنجیره‌ای اختصاری از قضیه‌ها داده شده است. نخستین قضیه‌اش کدام است؟ پنجمی کدام است؟ ۱۹۹۵امی کدام است؟ با این همه، زنجیره گامهای استقرایی را باید طبق طرح قبلی متناوباً گسترش داد و آن را به شکل اختصاری نوشت، تا دانش‌آموزان به این رویه عادت کنند و ارتباط میان زنجیره‌ای طولانی و شکل اختصاریش را خوب بفهمند.

\* \* \*

در اینجا دانش‌آموزان دیگر باید در جمع‌بندی تجربیاتشان در حل مسأله‌های کلیدی بالا

طرح کلی روشی برای حل مسأله‌ها به روش استقرایی ریاضی

پیدا کرده باشند:

۱. در صورت سؤال زنجیره‌ای از حکمهای شیه هم پیدا کنید. چنانچه متغیرها در صورت مسأله پنهان باشند باید سؤال را جور دیگری صورتبندی کرد تا متغیرها آشکار شوند. اگر در صورت مسأله زنجیره‌ای وجود نداشت، زنجیره‌ای از حکمها را طوری گسترش دهید که سؤال موردنظر بخشی از آن شود.

۲. نخستین حکم (پایه استقرا) را ثابت کنید.

۳. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  از درستی حکم  $n$  ام درستی حکم  $(n + 1)$  ام نتیجه می‌شود (گام استقرایی).

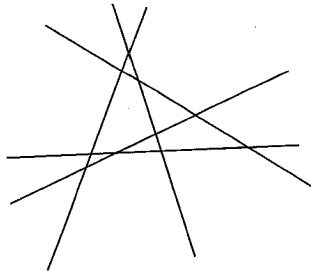
۴. اگر پایه استقرا و گام استقرایی ثابت شوند آن وقت همه حکمهای زنجیره موردنظر هم به طور همزمان ثابت می‌شوند، زیرا با حرکت «گام به گام» از پایه استقرا دیر یا زود به هر یک از آنها می‌رسید.

آخرین مورد در این طرح در همه مسأله‌ها عین هم است و از این رو بیشتر وقتها از آن صرف نظر می‌شود. با وجود این دانستن آن ضروری است. علاوه بر این، روی نخستین مورد در این طرح هم چندان تأکید نمی‌کنیم، زیرا برای آن دسته از افرادی که به روش استقرای ریاضی عادت دارند به کارگیری آن کاملاً طبیعی است؛ با این همه توصیه می‌کنیم که دانش‌آموزان دست کم تا مدتی به آن کاملاً توجه کنند.

## ۲. روش استقرای ریاضی و حدس زدن از راه مقایسه

به گفتگویمان ادامه می‌دهیم.

مسأله ۶.  $n$  خط راست صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند، به شرطی که هیچ دو تایی از آنها موازی نباشند و هیچ سه تایی از آنها از یک نقطه نگذرند؟ (در شکل ۶۹ مثالی که در آن  $n = 5$  نشان داده شده است.)



شکل ۶۹

دانش‌آموز: سعی می‌کنیم که طرح بالا را دنبال کنیم. آیا در اینجا زنجیره‌ای داریم؟ انگار این طور است: یک خط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟ دو خط چطور سه خط چطور...؟  
پایه استقرا معلوم است: یک خط صفحه را به ۲ ناحیه (نیم صفحه) تقسیم می‌کند.  
معلم: یا هیچ خط، به یک ناحیه.

دانش‌آموز: حالا! اما مورد سوم. گام استقرایی...؟!

معلم: مانعی را که سر راهتان وجود دارد می‌دانم: در اینجا با مشکل تازه‌ای مواجه‌ایم. در مسأله‌های قبلی به زنجیره‌های حکمها می‌پرداختیم، نه به زنجیره‌های سؤالها. اما در اینجا هم زنجیره‌ای از حکمها را به دست می‌آوریم، به شرطی که پاسخهای احتمالی و ثابت نشده این سؤالها را پیدا کنیم.

دانش‌آموز: چطور؟

معلم: سعی کنید قاعده موجود را حدس بزنید، یعنی تابعی پیدا کنید که تعداد ناحیه‌ها را، که آن را با  $L_n$  نشان می‌دهیم، برحسب  $n$ ، تعداد خطها، به دست دهد. می‌توانیم آزمایشهایی هم انجام دهیم، یعنی عددهای  $L_n$  را به ازای مقدارهای کوچک  $n$  حساب کنیم. شروع کنید!

دانش‌آموز: خیلی خوب. در اینجا  $L_0 = 1$ ،  $L_1 = 2$ ،  $L_2 = 4$ ،  $L_3 = 7$  و  $L_4 = 11$ . باید کمی فکر کنم... آهان، فهمیدم! وقتی خط  $m$  ام را اضافه می‌کنید تعداد ناحیه‌ها  $m$  تا زیاد می‌شود. بنابراین  $L_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n)$ ، کار را تمام کردم!

معلم: نه، هنوز نه. فراموش نکنید که این رابطه را فقط حدس زده‌اید اما آن را ثابت نکرده‌اید. حدستان را فقط به ازای  $0, 1, 2, 3, 4$  بررسی کرده‌اید. به ازای مقدارهای دیگر این رابطه چیزی نیست بجز حدسی براساس این حدستان که با افزودن خط  $m$  ام تعداد ناحیه‌ها  $m$  تا زیاد می‌شود. اگر این حدس اشتباه باشد چه می‌شود؟ تنها تضمین برای درستی آن آوردن اثبات است. دانش‌آموز: ... به روش استقرای ریاضی.

معلم: اما باید به طرحمان در بخش ۱ مورد دیگری را هم اضافه کنیم:

الف. اگر در مسأله‌ای ریاضی به جای زنجیره‌ای از حکمها زنجیره‌ای از سؤالا وجود داشته باشد، پاسخهای احتمالی تان را هم اضافه کنید. می‌توانید این پاسخها را با آزمایش کردن در مورد چند سؤال اول زنجیره مورد نظر حدس بزنید. با وجود این، بعد از اینکه مطمئن شدید که پاسخها درست‌اند فراموش نکنید که باید آنها را با دقت تمام ثابت کنید.

دانش‌آموز: اکنون می‌دانم چطور این کار را تمام کنم. پیش از این پایه استقرا را ثابت کردیم، درست است؟ اثبات گام استقرایی آسان است: خط  $m$  ام خطهای دیگر را در  $n - 1$  نقطه قطع می‌کند که با این نقطه‌ها خط به  $n$  تکه تقسیم می‌شود. بنابراین خط  $m$  ام  $n$  تا از ناحیه‌های قبلی صفحه را به ناحیه‌های جدید تقسیم می‌کند.

\* \* \*

فرایند حدس زدن از راه مقایسه که دانش‌آموزمان الان آن را توضیح داد ابزاری بسیار مؤثر و بعضی وقتها بسیار خطرناک است: دانش‌آموزان وسوسه می‌شوند قاعده‌ای را که پیدا کرده‌اند با اثبات عوضی بگیرند. دو مثال زیر دارویی مؤثر برای این بیماری‌اند.

مسأله ۷. آیا درست است که به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $n^2 + n + 41$ ،  $n$  عددی اول است. راهنمایی: پاسخ سؤال منفی است: اگر  $n = 40$  آن وقت  $41^2 = 40 + 40^2 + 41$  و اگر  $n = 41$ ،  $43 \times 41 = 41 + 41 + 41^2$ . اما اگر کسی سعی کند که پاسخ را با «آزمایش کردن» در مورد مقدارهای کوچک  $n$  پیدا کند ممکن است به عکس این نتیجه‌گیری برسد، زیرا مقدارهای این دستور به ازای مقدارهای  $n$  از ۱ تا ۳۹ عددهایی اول‌اند. این مثال معروف را لئونارد اویلر پیدا کرده است.



مسئله ۸\* n نقطه روی دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم و هر دو تا از آنها را با پاره‌خطی به هم وصل کرده‌ایم. در ضمن، هیچ سه تایی از این پاره‌خطها از یک نقطه نمی‌گذرند. این پاره‌خطها درون دایره را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

راهنمایی: به‌ازای مقدارهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ از n تعداد ناحیه‌های حاصل به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶ است. این نتیجه‌ها باعث می‌شوند که برای تعداد ناحیه‌ها دستور  $2^{n-1}$  را حدس بزنیم. با وجود این، در حقیقت، تعداد ناحیه‌ها برابر است با

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

### ۳. مسئله‌های مقدماتی کلاسیک

مسئله‌های استقرایی کلاسیک ریاضیات مقدماتی را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد: اثبات اتحادها، اثبات نابرابریها و اثبات بخش‌پذیریها.

با وجود اینکه راه‌حل این مسئله‌ها به‌روش استقرای ریاضی کاملاً ساده به‌نظر می‌رسند، دانش‌آموزان هنگام پرداختن به آنها هم با موانع ذهنی مواجه می‌شوند و هم با موانع مربوط به استفاده از این روش این بخش را با بررسی این موارد آغاز می‌کنیم.

معلم: می‌خواهم مسئله ۶ را بیشتر بررسی کنید. آیا می‌خواهید که عبارت  $1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$  همین‌طوری در این راه‌حل بیاید؟

دانش‌آموز: نه زیاد. این عبارت خیلی گنده است. بهتر است که از سر سه نقطه خلاص شویم.  
معلم: چرا نشویم! می‌توانید به روش استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دانش‌آموز: اما ... برای استفاده از روش استقرای ریاضی زنجیره‌ای از حکمها را لازم داریم ... معلم: دقیق‌تر نگاه کنید: در این دستور متغیر n وجود دارد. همان‌طور که می‌دانید این نشانه خوبی از وجود مجموعه‌ای اختصاری از مسئله‌هاست. مثلاً به‌جای n عدد ۱۹۹۵ را بگذارید.

دانش‌آموز: در این صورت به‌دست می‌آید

$$1 + 2 + \dots + 1995 = \frac{1995 \times 1996}{2}$$

معلم: یعنی یک برابری عددی برقرار است. مجموعه اختصاری مسئله‌هایمان از این برابریها تشکیل شده است (به‌ازای  $n = 1, 2, 3, \dots, 1995$ )! اثبات این دستور یعنی ثابت کردن اینکه همه این برابریهای عددی درست‌اند. اگر این کار را انجام بدهیم می‌گوییم که این برابری «به‌ازای همه مقدارهای

قابل قبول متغیر درست است» و آن را اتحاد می‌نامند. اگر در اتحادی متغیری طبیعی بیاید می‌توانید سعی کنید که آن را به استقرا ثابت کنید.

دانش آموز: اگر برابری مورد نظر به ازای مقداری از  $n$  درست نباشد چطور می‌شود؟

معلم: در این صورت آن برابری اتحاد نیست و هرگز نمی‌توانیم آن را ثابت کنیم؛ یا اثبات پایه استقرا به نتیجه نمی‌رسد یا اثبات گام استقرایی. در واقع برای تمایز قائل شدن میان اتحادها و دیگر برابریهای دلخواه که شامل متغیرند باید اتحادها را با عبارتهایی مانند «به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ...»، آغاز کرد، اما این روال معمول نیست. معمولاً فرض می‌شود که خواننده از متن می‌فهمد که برابری مورد نظر اتحاد است یا برابری شرطی.

دانش آموز: خوب، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. پایه استقرا:  $n = 1$ . بنابراین باید

ثابت کنیم که

$$\dots + 1 + 2 + \dots + 1 = \frac{1 \times 2}{2} = 1?!$$

معلم: نه، نه. باید ثابت کنیم که  $1 = \frac{1 \times 2}{2}$ . عبارت  $1 + 2 + \dots + n$  شما را گیج کرده است.

این عبارت واقعاً کامل و درست است، اما به ازای  $n = 1$ ، «دنباله» اش،  $n + \dots + 2$ ، بی‌معنی است و در حقیقت اصلاً وجود ندارد.

دانش آموز: خیلی خوب، بنابراین درستی پایه استقرا روشن است. برابری دوم این زنجیره را در نظر

می‌گیریم. باید ثابت کنیم که  $1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2}$ . اما این هم آسان است:  $3 = 3$ . اکنون سومین برابری را

در نظر می‌گیریم:  $1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2}$ . این هم آسان است:  $6 = 6$ . بعد نوبت چهارمین برابری ...

که این هم محاسبه ساده دیگری بیش نیست. بگویید ببینیم اکنون چه کنیم؟ باید هر برابری را مستقیماً بررسی کنیم؟ تاکنون هیچ گامی برنداشته‌ایم!

معلم: سعی کنید گام مورد نظر را به شکل کلی اختصاری بنویسید.

دانش آموز (بعد از گذشت مدتی): این کار را هم نمی‌توانم انجام دهم.

توصیه به معلمان. برای آن دسته از افرادی که روش استقرای ریاضی را خیلی خوب یاد گرفته‌اند، اثبات

اتحادها ممکن است بسیار راحت به نظر برسد. با وجود این، از گفتگوی میان معلم و دانش آموز در بالا

معلوم می‌شود که اشکالهای دانش‌آموزان دو منشأ دارد. اولاً، دانش‌آموزان اغلب اتحادی را که در آن

متغیری طبیعی می‌آید به عنوان زنجیره‌ای از حکمها در نظر نمی‌گیرند. احتمالاً به این علت که برابریهای

عددی ساده را حکمهایی مستقل به حساب نمی‌آورند. بجز این، واقعاً چه چیز جالبی ممکن است در

$$\text{برابری مانند } 6 = \frac{3 \times 4}{2} = 1 + 2 + 3 \text{ وجود داشته باشد؟}$$

ثانیاً، فهمیدن اینکه شکل کلی گام استقرایی چگونه است تقریباً غیرممکن است. در حقیقت، وقتی

برابریهای  $1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2}$ ،  $1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2}$  و غیره را بررسی می‌کنید هیچ ارتباطی میان دوتا

از این حکمهای پشت سر هم وجود ندارد و شما فقط آنها را بررسی کرده‌اید.

به همین دلیل است که در اینجا اتحادها با وجود سادگی شان مسأله‌های کلیدی به حساب نمی‌آیند. آغاز کردن فراگیری و یا آموزش استقرای ریاضی از اتحادها مشکل ساز خواهد بود (البته این مطلب در مورد دانش‌آموزان بسیار مستعد چندان هم مهم نیست، آنها در هر صورت از پس فراگیری این روش برمی‌آیند). از طرف دیگر، اتحادها برای تمرین بسیار مفیدند زیرا اثباتشان معمولاً کوتاه و روشن است. معلم: خوب، من به شما کمک می‌کنم. مجسم کنید که گامهای استقرا را پشت سر هم دنبال کرده باشیم و موج اثباتها به حکم  $k$ ام رسیده باشد. این حکم چیست؟ دانش‌آموز: به دست می‌آوریم

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\#)$$

معلم: دقیقاً. اکنون لطفاً به من بگویید که حکم بعدی چیست، یعنی موج اثباتها به کدام حکم هنوز نرسیده است؟

دانش‌آموز: قطعاً حکمی که در آن  $n = k + 1$ ، یعنی

$$1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

معلم: خوب است. این حکم را این طور می‌نویسیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \quad (\#\#)$$

اکنون به من بگویید که گام بعدی استقرا چیست؟

دانش‌آموز: اینکه واضح است. از حکم  $(\#)$ ، حکم  $(\#\#)$  را نتیجه بگیریم.

معلم: فرض کنید یاد گرفتیم که چطور به ازای هر عدد طبیعی مانند  $k$ ، از حکم  $(\#)$ ، حکم  $(\#\#)$  را نتیجه بگیریم. در این صورت همه گامهای استقرا را همزمان ثابت کرده‌ایم. بنابراین گام استقرایی مان چنین است: به ازای هر عدد طبیعی مانند  $k$ ، از برابری  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ، برابری  $1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  نتیجه می‌شود.

به عبارت دیگر: برابری  $(\#)$  داده شده است و باید حکم  $(\#\#)$  را ثابت کنیم. (به شرطی که  $k$  عدد طبیعی دلخواهی باشد). برای آسانتر شدن اثبات طرفهای چپ  $(\#)$  و  $(\#\#)$  را به ترتیب با  $S_k$  و  $S_{k+1}$  نشان می‌دهیم.

دانش‌آموز: در حکم  $(\#\#)$ ،  $S_{k+1} = S_k + (k+1)$ ، حالاً فهمیدید که چرا معلم جمعوند یکی مانده به آخر را نوشته بود! اکنون از قبل می‌دانیم که  $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ . در نتیجه به دست می‌آوریم

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}[k(k+1) + 2(k+1)] = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

معلم: ایده مؤثری را که برای اثبات گام استقرایی به کار بردیم همیشه به یاد داشته باشید: طرف چپ برابری ( $\#\#\$ ) را برحسب طرف چپ برابری ( $\#$ ) نوشتیم و بعد به جای آن طرف راست ( $\#$ ) را قرار دادیم.

توصیه به معلمان. اینجا در مورد اتحادها مشکل دیگری پیش می آید. ممکن است برای دانش آموزان روشن نباشد که چطور گامها را «برحسب حروف» بیان کنند. معلم در گفتگوی بالا نشان داد که چطور باید بر این مشکل غلبه کرد. این مهم است که او برای نمایش متغیر از حرف دیگری، متمایز از حرف به کار رفته در صورت اتحاد، استفاده کرد. موضوع این است که حرف  $k$  نقش متغیر را ندارد، بلکه نقش عددی ثابت (ولی دلخواه) را دارد که نشان دهنده مکانی است که موج اثبات استقرایمان در لحظه مورد نظر به آنجا رسیده است. این حرف بعدها در حکم کلی گام استقرایی نقش متغیر را پیدا می کند. تقریباً در بیشتر موارد متغیرهای صورت حکم و گام استقرایی، هر دو را با یک حرف نشان می دهند، و این همان وقتی است که برای بیان قضیه گام استقرایی عبارتهایی مانند «... اکنون به جای  $n$ ،  $n + 1$  را می گذاریم» را به کار می برند. این کار در آغاز فراگیری استقرا به صلاح نیست، زیرا بیشتر دانش آموزان را هم از لحاظ ادراکی گیج می کند (یافتن زنجیره ای از حکمها در صورت گام استقرایی دشوار است) و هم از لحاظ فنی (برای تازه کارها گذاشتن  $n + 1$  به جای  $n$  آن قدرها آسان نیست). اکنون می توانیم با شخصیت های گفتگویمان خداحافظی کنیم و به حل کردن مسأله ها ادامه دهیم. مسأله های ۹ تا ۱۶ درباره اتحادها هستند که عدد طبیعی  $n$  متغیرشان است.

مسأله ۹. ثابت کنید

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

مسأله ۱۰. ثابت کنید

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مسأله ۱۱. ثابت کنید

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

مسأله ۱۲. ثابت کنید

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$$

مسأله ۱۳. ثابت کنید

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

مسأله ۱۴. ثابت کنید

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a(a+nb)}$$

که در اینجا  $a$  و  $b$  عددهایی طبیعی و دلخواه‌اند.

مسأله ۱۵. ثابت کنید

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$$

که در اینجا،  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ .

مسأله ۱۶. ثابت کنید

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

توضیحات. در مسأله‌های ۹ تا ۱۵ اثبات گام استقرایی درست عین اثبات گام استقرایی در گفتگوی بالاست. اما در مسأله ۱۶ می‌توان آن را آسانتر ثابت کرد، به این ترتیب که طرف چپ حکم  $(k+1)$  ام را نه به شکل مجموع، بلکه به صورت حاصل ضرب طرف چپ حکم  $k$  ام و  $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  نمایش دهید. این شگرد در اثبات بعضی از نابرابریها هم مؤثر است (مسأله‌های بعدی را ببینید).

در مسأله ۱۱ پایه استقرا به جای  $m = 1, n = 2$  است. دانش‌آموزان باید درک کنند که این مطلب

در فرایند استقرا تأثیری ندارد.

در مسأله ۱۵ استقرا روی هر یک از دو متغیر امکان‌پذیر است. آموزنده است که استقرا را در مورد

هر یک از دو متغیر به کار ببرید و دو اثبات را با هم مقایسه کنید. فراموش نکنید که استقرا را از صفر

شروع کنید!

مسأله‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب حالت‌های خاص مسأله‌های ۱۵ (به‌ازای  $m = 2$ ) و ۱۴ (به‌ازای

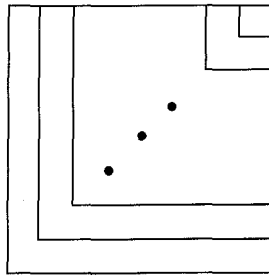
$a = b = 1$ ) هستند. به‌ازای مقدارهای مفروض دیگری از  $m, a$  و  $b$  می‌توان تعدادی تمرین مانند ۱۱

و ۱۲ به دست آورد. خوب است از دانش‌آموزان برجسته بخواهید که سعی کنند صورت مسأله کلی‌ای

را که این تمرینها حالت‌های خاصش هستند پیدا کنند.

بیشتر اتحادهای مسأله‌های ۹ تا ۱۶ اثبات‌های غیراستقرایی زیبایی دارند که چندان هم

دشوار نیستند. مسأله ۹ اثبات هندسی استادانه‌ای دارد (شکل ۷۰ را ببینید). اتحاد مسأله ۱۱ را می‌توان از



شکل ۷۰

اتحادهای مسأله‌های ۹ و ۱۰ به دست آورد. می‌توان اتحاد مسأله ۱۳ را با تقسیم  $x^{n+1} - 1$  بر  $x - 1$  و اتحاد مسأله ۱۶ را با محاسبه مستقیم ثابت کرد. برای اثبات اتحاد مسأله ۱۲ کافی است توجه کنید که طرف چپش برابر است با

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

و این مجموع «در هم ادغام می‌شود».

این شگرد در مورد بعضی اتحادهای دیگر هم مؤثر است.

بررسی این اثباتهای متفاوت برای دانش‌آموزانی که قبلاً درس استقرای ریاضی را خوب یاد گرفته‌اند بسیار سودمند است.

طبیعی است که مرحله بعدی مطالعه‌مان مسأله‌های بخش‌پذیری‌اند. فنون تشکیل دادن حکمها و گامهای استقرایی عین موارد مشابه در اتحادها هستند: معمولاً نمو عبارت موردنظر را پیدا و ثابت می‌کنیم که بر عددی مفروض بخش‌پذیر است. مسأله‌های ۱۷ تا ۱۹ راه‌حلهای ساده دیگری هم دارند (با استفاده از حساب پیمانه‌ای). از مسأله نسبتاً دشوار ۲۲ می‌توان تعدادی تمرین مانند تمرینهای ۱۸ و ۱۹ طرح کرد.

ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ,

مسأله ۱۷.  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسأله ۱۸.  $3^{2n+2} + 8n - 9$  بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

مسأله ۱۹.  $4^n + 15n - 1$  بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسأله ۲۰.  $12^{2n+1} + 11^{n+2}$  بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

مسأله ۲۱.  $2^{3n} + 1$  بر  $3^{n+1}$  بخش‌پذیر است.

مسئله ۲۲.\* اگر عددهای  $a + d$ ،  $c(b - 1)$  و  $ab - a + c$  بر عدد طبیعی  $m$  بخش پذیر باشند، عدد  $ab^n + cn + d$  هم بر  $m$  بخش پذیر است.

گروه سه تایی مسأله‌های متعارفی را که با روش استقرای ریاضی حل می‌شوند با مسأله‌هایی دربارهٔ نابرابریها کامل می‌کنیم. در اینجا اثبات گامهای استقرایی معمولاً متنوع‌ترند.

مسئله ۲۳. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $2^n > n$ .

مسئله ۲۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند  $n$  را پیدا کنید که

$$\text{الف) } 2^n > 2n + 1; \quad \text{ب) } 2^n > n^2$$

مسئله ۲۵. ثابت کنید

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n = 2, 3, \dots$$

مسئله ۲۶. ثابت کنید

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

مسئله ۲۷. ثابت کنید که قدرمطلق مجموع چند عدد از مجموع قدرمطلقهای این عددها بزرگتر نیست.

مسئله ۲۸. ثابت کنید

$$(1+x)^n > 1+nx$$

که در اینجا  $x > -1$ ،  $x \neq 0$  و  $n = 2, 3, \dots$ .

مسئله ۲۹. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

راهنماییها. مسأله‌های ۲۳ و ۲۴: برای اثبات گام استقرایی می‌توانید ثابت کنید که به ازای هر  $n$ ، نمود طرف چپ نابرابری از نمود طرف راست بزرگتر است.

مسئله ۲۴ ب: برای اثبات گام استقرایی از مسئله ۲۴ (الف) استفاده کنید.

مسئله ۲۵: ثابت کنید طرف چپ نابرابری صعودی اکید است.

مسئله ۲۷: روی تعداد جمعوندها از روش استقرا استفاده کنید.

مسئله‌های ۲۸ و ۲۹: راهنمایی مسئله ۱۶ را ببینید.

#### ۴. شکلهای دیگر روش استقرای ریاضی

تاکنون فقط به شکل اصلی روش استقرای ریاضی پرداخته‌ایم. همین‌که دانش‌آموزان این شکل از استقرا را خوب یاد گرفتند می‌توانیم به شکلهای پیچیده‌تر دیگر استقرا بپردازیم. بعضی از اینها را می‌توان نتیجه‌های شکل اصلی استقرا محسوب کرد، اما از دیدگاه روش شناختی طبیعی‌تر است که آنها را به‌طور جداگانه بررسی کنیم و در ضمن همیشه تصویر ذهنی «موج اثباتها» را به‌یاد داشته باشیم. ابتدا به روش «استقرا از همه  $n$ هایی که  $n \leq k$  به‌حالتی که  $n = k + 1$ » می‌پردازیم. گاهی این روش را «استقرای قوی» می‌نامند.

در روش معمولی استقرای ریاضی گام استقرایی نتیجه‌گیری حکم  $P_{k+1}$  از حکم قبلی،  $P_k$ ، است. با وجود این، گاهی برای اثبات درستی  $P_{k+1}$  باید از بیش از یکی از  $P_k$  (یا حتی همه) حکمهای قبلی، یعنی  $P_1$  تا  $P_k$ ، استفاده کنیم. تردیدی نیست که این عمل درست است، زیرا موج اثباتها به حکم  $P_k$  رسیده است و بنابراین همه حکمهای زنجیره هم که پیش از  $P_k$  هستند قبلاً ثابت شده‌اند. به این ترتیب در اینجا صورت گام استقرایی از این قرار است:

(گام): به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $k$  از درستی  $P_1, P_2, \dots, P_k$  و درستی  $P_{k+1}$  نتیجه می‌شود.

\* \* \*

به مثال زیر توجه کنید.

مسأله ۳۰. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به شکل مجموعی از چند توان متمایز ۲ نمایش داد. راه‌حل. ابتدا پایه استقرا را ثابت می‌کنیم. اگر عدد داده شده ۱ یا ۲ باشد آن وقت وجود نمایش خواسته شده روشن است.

اکنون عدد داده شده را با  $n$  نشان می‌دهیم و بزرگترین توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که از  $n$  بزرگتر نباشد. فرض کنید  $2^m$  توان موردنظر باشد؛ یعنی  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ . تفاضل  $n - 2^m$ ، که آن را با  $d$  نشان می‌دهیم، هم از  $n$  کوچکتر است و هم از  $2^m$ ، زیرا  $2^m + 2^m = 2^{m+1}$ . بنابر فرض استقرا  $d$  را می‌توان به شکل مجموعی از چند توان متمایز ۲ نمایش داد و روشن است که  $2^m$  زیادی بزرگ است و در مجموع موردنظر نمی‌آید. به این ترتیب با افزودن  $2^m$  به این مجموع عبارت خواسته شده برای  $n$  را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه استقرا کامل می‌شود.

مسأله ۳۱. ثابت کنید که هر چندضلعی را (که لازم نیست محدب باشد) می‌توان با قطرهای جدا از هم (این قطرها فقط ممکن است در رأسهای چند ضلعی یکدیگر را قطع کنند) به چند مثلث تقسیم کرد. راهنمایی: از استقرا روی تعداد ضلعها استفاده کنید. گام استقرایی بر اساس لمی است به این مضمون که هر چندضلعی (بجز مثلث) دست‌کم یک قطر دارد که کاملاً درون چندضلعی می‌افتد. چنین قطری



چند ضلعی موردنظر را به دو چندضلعی با تعداد ضلعهای کمتر تقسیم می‌کند.

\* \* \*

شکل دیگری از روش استقرای ریاضی در مسألهٔ زیر نشان داده شده است.

مسألهٔ ۳۲. می‌دانیم که  $x + \frac{1}{x}$  عددی صحیح است. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $x^n + \frac{1}{x^n}$  هم عددی صحیح است.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

و از این رو

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

بنابراین درمی‌یابیم که مجموع  $(k+1)$ ام در صورتی عددی صحیح است که دو مجموع قبلی‌اش عددهایی صحیح باشند. در نتیجه، روند استقرایی طبق معمول پیش می‌رود به‌شرطی که بررسی کنیم که دو مجموع نخست،  $x + \frac{1}{x}$  و  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، عددهایی صحیح‌اند. این را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. توضیح. ویژگی این شکل از روش استقرای ریاضی این است که گام استقرایی براساس دو حکم قبلی است نه یک حکم. بنابراین پایهٔ استقرا در این حالت دو حکم نخست زنجیره است (طبیعی است که از کلمهٔ پایه در مورد آن بخش آغازین زنجیره استفاده کنیم که در آنها حکمها را باید مستقیماً بررسی کرد).

مسألهٔ ۳۳. دنبالهٔ عددهای  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  این‌طور تعریف شده است:  $a_1 = 3, a_2 = 5$  و اگر  $n > 2$ ،  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ . ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $a_n = 2^n + 1$ . راهنمایی: مسألهٔ کلی‌تر ۴۳ را ببینید.

یادداشت. در مسألهٔ ۳۳ و سه مسألهٔ بعدی هم با اثبات به‌روش استقرا سروکار داریم و هم با تعریف به‌روش استقرا؛ همهٔ جمله‌های دنباله‌های داده شده، بجز چند جملهٔ نخست آنها، به‌طور استقرایی با استفاده از جمله‌های قبلی تعریف می‌شوند. دنباله‌هایی را که این‌طور تعریف می‌شوند بازگشتی می‌نامند.

مسألهٔ ۳۴. دنبالهٔ  $(a_n)$  این‌طور تعریف شده است:  $a_1 = 1, a_2 = 2$  و اگر  $n > 2$ ،  $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ . ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $a_{n+6} = a_n$ .

مسألهٔ ۳۵. دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی این‌طور تعریف می‌شود:  $F_1 = F_2 = 1$  و اگر  $n \geq 2$ ،  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌شکل مجموع چند عدد فیبوناتچی متمایز نوشت.

مسئله ۳۶.\* ثابت کنید که  $n$  امین عدد فیبوناتچی وقتی و فقط وقتی بر ۳ بخش پذیر است که  $n$  بر ۴ بخش پذیر باشد.

راهنمایی: اثبات این حکم فقط با استفاده از استقرا آسان نیست. حکمی کلی تر را درباره تکرار باقی مانده های عددهای فیبوناتچی به پیمانه ۳ (با دوره تکرار ۸) ثابت کنید.

مسئله ۳۷. بانکی موجودی نامحدودی از اسکناسهای ۳ و ۵ پزویی دارد. ثابت کنید که این بانک می تواند هر مبلغ بیش از ۷ پزو را پرداخت کند.

راهنمایی: استقرا روی مبلغی را که بانک باید پرداخت کند امتحان کنید. پایه استقرا این سه تساوی اند:  $۸ = ۵ + ۳$ ,  $۹ = ۳ + ۳ + ۳$  و  $۱۰ = ۵ + ۵$ . گام استقرایی: اگر بانک بتواند  $k$ ,  $k + ۱$  و  $k + ۲$  پزو را پرداخت کند، آن وقت می تواند  $k + ۳$ ,  $k + ۴$  و  $k + ۵$  پزو را هم پرداخت کند. این استقرا با پایه چند قسمتی را می توان با استفاده از طرحهای زیر به سه استقرای معمولی تقسیم کرد:

$$۸ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۱۴ \rightarrow \dots, \quad ۹ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۵ \rightarrow \dots, \quad ۱۰ \rightarrow ۱۳ \rightarrow ۱۶ \rightarrow \dots$$

توجه کنید که انجام عملی مشابه در مورد مسأله های ۳۲ تا ۳۶ غیرممکن است. در ضمن برای این مسأله راه حلی غیراستقرایی هم براساس رابطه های

$$۳n + ۱ = ۵ + ۵ + ۳(n - ۳), \quad ۳n + ۲ = ۵ + ۳(n - ۱)$$

وجود دارد، اما از راه حل بالا آسانتر نیست.

سه مسأله زیر بسیار شبیه مسأله ۳۷ اند.

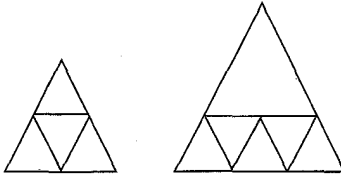
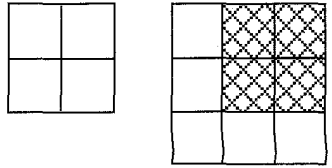
مسئله ۳۸. می توانیم هر تکه کاغذ را به ۴ یا ۶ تکه کوچکتر تقسیم کنیم. ثابت کنید که با پیش گرفتن این قاعده می توانیم یک برگ کاغذ را به هر تعداد تکه کاغذ، بیش از ۸ تا، تقسیم کنیم.

مسئله ۳۹. اگر  $n \geq ۶$ ، ثابت کنید که هر مربع را می توان به  $n$  مربع تقسیم کرد.

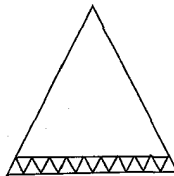
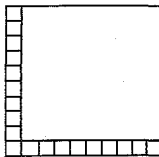
مسئله ۴۰. اگر  $n \geq ۶$ ، ثابت کنید که هر مثلث متساوی الاضلاع را می توان به  $n$  مثلث متساوی الاضلاع تقسیم کرد.

توضیحات. مسئله ۳۸: اگر یک تکه کاغذ را به ۴ یا ۶ تکه کوچکتر تقسیم کنیم، آن وقت تعداد تکه کاغذها به ترتیب ۳ یا ۵ تا زیاد می شود. اکنون از روش راه حل مسئله ۳۷ استفاده می کنیم.

مسئله های ۳۹ و ۴۰: هر مربع (مثلث متساوی الاضلاع) را می توان مانند شکل ۷۱ به ۴ یا ۶ مربع (مثلث متساوی الاضلاع) تقسیم کرد. بنابراین مسئله ۳۹ مانند مسئله ۳۸ حل می شود. راه حل های غیراستقرایی دیگری هم براساس امکان تقسیم کردن مربع (مثلث متساوی الاضلاع) به هر تعداد زوج (بیش از دوتا) مربع (یا مثلث متساوی الاضلاع) وجود دارد؛ شکل ۷۲ را ببینید.



شکل ۷۱



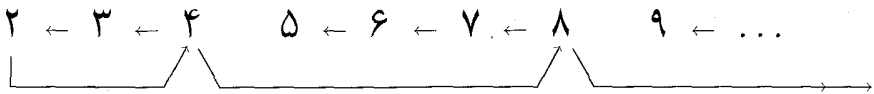
شکل ۷۲

شکلهای دیگر استقرا حتی از اینها هم جالبترند. مثالی از این دست روش «استقرای شاخه شاخه‌ای» است که با آن می‌توانیم نابرابری مهم میانگین حسابی-میانگین هندسی را ثابت کنیم.

مسئله ۴۱\* . اگر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عددهای غیرمنفی دلخواهی باشند، ثابت کنید

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

طرح اثبات. پایه استقرا:  $n = 2$ ! بررسی درستی حکم در این حالت نسبتاً ساده است. بعد برای اثبات نابرابری در مورد همه  $n$ هایی که توانی از ۲ هستند باید از گام استقرایی از  $n = 2^k$  به  $2^{k+1}$  استفاده کنید. آخر سر ثابت کنید که اگر نابرابری در مورد  $n$  عدد دلخواه درست باشد، آن وقت در مورد  $n - 1$  عدد دلخواه هم درست است. موج اثباتها طبق طرح شکل ۷۳ گسترش می‌یابد.



شکل ۷۳

شکلهای دیگر استقرا از جمله «استقرای پسرو» (روی عددهای صحیح منفی) و «استقرای دوگانه (یا ۲ بعدی)» (برای قضیه‌های شامل دو پارامتر طبیعی) در مسأله‌های ۴۳ و ۴۴ توضیح داده شده‌اند.

### ۵. مسأله‌های بدون توضیح

مسأله ۴۲. دو عدد طبیعی نسبت به هم اول  $m$  و  $n$  و عدد  $o$  داده شده‌اند. ماشین حسابی می‌تواند فقط یک عمل را انجام دهد: محاسبه میانگین حسابی دو عدد طبیعی داده شده، آن هم به شرطی که یا هر دو زوج باشد یا هر دو فرد. ثابت کنید که با استفاده از این ماشین حساب می‌توانید همه عددهای طبیعی از ۱ تا  $n$  را به دست آورید، به شرطی که فقط سه عدد اولیه یا نتیجه‌های محاسبه‌های قبلی را در آن وارد کنید.

مسأله ۴۳. در مسأله ۳۳، برای دنباله  $a_1, a_2, \dots$  جمله‌های  $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$  را می‌توانیم طوری تعریف کنیم که رابطه  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  به ازای هر عدد صحیح مانند  $n$  (چه مثبت باشد چه منفی) برقرار باشد. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مانند  $n$ ، باز هم  $a_n = 2^n + 1$ .

مسأله ۴۴. اگر  $m$  و  $n$  عددهایی طبیعی باشند، ثابت کنید  $2^{m+n-2} \geq mn$ .

مسأله ۴۵\*. چندتا مربع داده شده‌اند. ثابت کنید که می‌توان آنها را به تکه‌هایی برید و این تکه‌ها را طوری کنار هم چید که یک مربع بزرگ تشکیل شود.

مسأله ۴۶\*. ثابت کنید که در میان هر  $2^{n+1}$  عدد طبیعی،  $2^n$  عدد وجود دارند که مجموعشان بر  $2^n$  بخش پذیر است.

مسأله ۴۷.  $n$  دایره صفحه را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ در مورد  $n$  مثلث چه می‌توان گفت؟ توجه. این مسأله را با مسأله ۶ مقایسه کنید. مثالهای تقسیمهای مورد نظر را هم می‌توان به استقرا پیدا کرد.

مسأله ۴۸. در صفحه‌ای چندتا دایره وجود دارد. در هر یک از آنها یک وتر رسم شده است. ثابت کنید که این «نقشه» را می‌توان با استفاده از سه رنگ طوری رنگ کرد که رنگهای هر دو ناحیه مجاور مختلف باشند.

مسأله ۴۹\*. به روش «برهان خلف» ثابت کنید که اصل استقرای ریاضی که در همان اوایل فصل حاضر بیان شد با «اصل خوشتریبی» هم‌ارز است: هر مجموعه ناتهی از عددهای طبیعی کوچکترین عضو دارد. سعی کنید که راه‌حل یکی از مسأله‌های قبلی (مثلاً مسأله ۴۶) را با استفاده از این اصل بنویسید و آن را با اثباتش از روش استقرا مقایسه کنید.

\* \* \*

نتیجه‌گیری. روش استقرای ریاضی ایده‌ای بسیار مؤثر و سودمند است. کاربردهایش را هم در قسمتهای مختلف این کتاب خواهید یافت و هم در متون ریاضی دیگر. با وجود این، در مورد «اعتیاد» به آن به شما هشدار می‌دهیم. نباید این‌طور تصور کنید که هر سؤالی که در صورت یا اثباتش، یا در هر دو آنها، عبارتهایی از قبیل «و همین‌طور تا آخر» یا «به‌همین ترتیب» آمده است مسأله‌ای است که به روش استقرای ریاضی حل می‌شود. اثبات به روش استقرا در مورد بسیاری از مسأله‌های از این دست (چند تا از آنها را در فصلهای «گرافها-۲» و «نابرابریها» خواهید دید) در مقایسه با دیگر اثباتهای شامل روشهایی ساده مانند محاسبه مستقیم یا استدلال بازگشتی کمابیش تصنعی به نظر می‌رسد. هنگام آموزش ماهیت روش استقرای ریاضی استفاده از مثالهای غیرعادی از این دست به صلاح نیست، ولی بعد از اینکه دانش‌آموزان این روش را کاملاً خوب یاد گرفتند این‌گونه مثالها را می‌توان به راحتی مطرح کرد.

## فصل ۱۰

### بخش پذیری - ۲:

### همنهستی و معادله‌های دیوفانتی

#### ۱. همنهستی

در فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» مفهوم باقی‌مانده را شرح دادیم. دیدیم که در حل بسیاری از مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری اکثراً به‌جای خود عددها باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر عددی ثابت را بررسی می‌کردیم.

بنابراین طبیعی است که تعریف کنیم: عددهای صحیح  $a$  و  $b$  را در صورتی به‌پیمانه  $m$  همنهست می‌نامند که باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر  $m$  برابر باشند. وقتی  $a$  و  $b$  به‌پیمانه  $m$  همنهست‌اند، می‌نویسند:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad (\text{به‌پیمانه } m)$$

مثلاً،

$$۱۶ \equiv ۹ \pmod{۷} \quad (\text{به‌پیمانه } ۷), \quad ۱ \equiv ۳ \pmod{۲} \quad (\text{به‌پیمانه } ۲), \quad ۹ \equiv ۲۹ \pmod{۱۰} \quad (\text{به‌پیمانه } ۱۰)$$

$$۲n + ۱ \equiv ۱ \pmod{n} \quad (\text{به‌پیمانه } n), \quad ۳ \equiv ۰ \pmod{۳} \quad (\text{به‌پیمانه } ۳)$$

توجه کنید که  $A$  وقتی و فقط وقتی بر  $m$  بخش‌پذیر است که  $A \equiv ۰ \pmod{m}$ .

مسأله ۱. ثابت کنید که وقتی و فقط وقتی  $a \equiv b \pmod{m}$  که  $a - b$  بر  $m$  بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن‌وقت فرض کنید  $r$  باقی‌مانده مشترک تقسیم  $a$  و  $b$  بر  $m$  باشد. در این صورت

$$a = mk_1 + r, \quad b = mk_2 + r$$

بنابراین  $a - b = m(k_1 - k_2)$  و در نتیجه  $a - b$  بر  $m$  بخش پذیر است. برعکس، اگر  $a - b$  بر  $m$  بخش پذیر باشد، آن وقت  $a$  و  $b$  را بر  $m$  تقسیم می کنیم. فرض کنید مثلاً  $a = mk_1 + r_1$  و  $b = mk_2 + r_2$ . در این صورت

$$a - b = m(k_1 - k_2) + r_1 - r_2$$

بنابر فرض،  $a - b$  بر  $m$  بخش پذیر است. بنابراین  $r_1 - r_2$  بر  $m$  بخش پذیر است. چون  $|r_1 - r_2| < m$ ، پس  $r_1 = r_2$ .

با استفاده از این مسأله می توانیم همنهشتی را جور دیگری تعریف کنیم: عددهای صحیح  $a$  و  $b$  در صورتی به پیمانه  $m$  همنهشت اند که  $a - b$  بر  $m$  بخش پذیر باشد. از حالا به بعد همه جا از یکی از این دو تعریف استفاده می کنیم.

توصیه به معلمان. پیش از ارائه تعریفهای همنهشتی مهم است بررسی کنید که آیا دانش آموزانتان به یاد دارند که چطور با باقی مانده ها کار کنند یا نه (مثلاً می توانید برایشان چند مسأله شبیه مسأله های بخش ۲ فصل «بخش پذیری و باقی مانده ها» مطرح کنید).

جالب است بدانید که با استفاده از تعریف همنهشتی می توانیم ویژگیهای اصلی باقی مانده ها را بسیار آسانتر ثابت کنیم.

مسأله ۲. اگر  $a \equiv b(m)$  (به پیمانه  $m$ ) و  $c \equiv d(m)$  (به پیمانه  $m$ )، ثابت کنید  $a + c \equiv b + d(m)$  (به پیمانه  $m$ )  
راه حل. چون  $a - b$  و  $c - d$  بر  $m$  بخش پذیرند و

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

$(a + c) - (b + d)$  هم بر  $m$  بخش پذیر است.

مسأله ۳. اگر  $a \equiv b(m)$  (به پیمانه  $m$ ) و  $c \equiv d(m)$  (به پیمانه  $m$ )، ثابت کنید  $a - c \equiv b - d(m)$  (به پیمانه  $m$ )

مسأله ۴. اگر  $a \equiv b(m)$  (به پیمانه  $m$ ) و  $c \equiv d(m)$  (به پیمانه  $m$ )، ثابت کنید  $ac \equiv bd(m)$  (به پیمانه  $m$ )

راه حل. می توان نوشت

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$$

بنابراین  $ac - bd$  هم بر  $m$  بخش پذیر است.

مسأله ۵. اگر  $a \equiv b(m)$  (به پیمانه  $m$ ) و  $n$  عدد طبیعی دلخواهی باشد، ثابت کنید  $a^n \equiv b^n(m)$  (به پیمانه  $m$ )

یادداشت. حکمها و اثباتهای ویژگیهای باقی مانده‌ها وقتی برحسب همنهشتیها نوشته می‌شوند جالبتر و ساده‌تر به نظر می‌آیند. مثلاً بدون استفاده از نمادگذاری جدید، حکم مسأله ۲ را می‌توان این‌طور بیان کرد: مجموع دو عدد و مجموع باقی مانده‌هایشان به پیمانه  $m$ ، به پیمانه  $m$  هم باقی مانده‌اند.

در مسأله‌های ۲ تا ۵ اساساً بیان شده است که همنهشتیها به پیمانه عددی مفروض را می‌توان مانند تساویها، جمع، تفریق و ضرب کرد یا دوطرفشان را به توان رساند. بررسی مسأله تقسیم همنهشتیها را به بخش ۴ موکول می‌کنیم.

پیش از ادامه بحث نشان می‌دهیم که چطور می‌توان مسأله‌ها را به کمک همنهشتیها حل کرد.

مسأله ۶. ثابت کنید به‌ازای هیچ عدد صحیحی مانند  $n$ ،  $n^2 + 1$  بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

راه‌حل. روشن است که هر عدد صحیح مانند  $n$  به پیمانه ۳ با یکی از عددهای  $0$ ،  $1$  یا  $2$  همنهشت است. اگر (به پیمانه ۳)  $n \equiv 0$ ، آن وقت (به پیمانه ۳)  $n^2 \equiv 0$  (بنابر ویژگی ضرب همنهشتیها) و در نتیجه (به پیمانه ۳)  $n^2 + 1 \equiv 1$  (بنابر ویژگی جمع همنهشتیها).

اگر (به پیمانه ۳)  $n \equiv 1$ ، آن وقت (به پیمانه ۳)  $n^2 + 1 \equiv 2$ .

اگر (به پیمانه ۳)  $n \equiv 2$ ، آن وقت (به پیمانه ۳)  $n^2 + 1 \equiv 2$ .

به این ترتیب هیچ وقت همنهشتی (به پیمانه ۳)  $n^2 + 1 \equiv 0$  به دست نمی‌آید.

اکنون به مسأله دیگری می‌پردازیم که در راه‌حل آن نشان داده شده است که استفاده از عددهای صحیح منفی در همنهشتیها چقدر سودمند است. در حقیقت در حساب باقی مانده‌ها می‌توانیم عددهای صحیح منفی را هم درست مانند عددهای طبیعی به کار ببریم.

مسأله ۷.  $6^{100}$  به پیمانه ۷ با کدام عدد همنهشت است؟

راه‌حل. چون  $7 = 6 + 1 = 6 - (-1) = 6 - 6 \cdot (-1)$ ، پس (به پیمانه ۷)  $6 \equiv -1$ . دو طرف این همنهشتی را به توان  $100$  می‌رسانیم؛ در نتیجه، (به پیمانه ۷)  $6^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1$  یا (به پیمانه ۷)  $6^{100} \equiv 1$ .

در اینجا چند مسأله دیگر را هم که با همین ایده حل می‌شوند می‌آوریم.

مسأله ۸. ثابت کنید  $61^{100} + 3099$  بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

مسأله ۹. ثابت کنید

(الف)  $23^{101} + 43^{101}$  بر ۶۶ بخش‌پذیر است.

(ب) اگر  $n$  عددی فرد باشد،  $a^n + b^n$  بر  $a + b$  بخش‌پذیر است.

مسأله ۱۰. ثابت کنید اگر  $n$  عددی فرد باشد،  $(n-1)^n + n^n + \dots + 2^n + 1^n$  بر  $n$  بخش‌پذیر است.



مسئله ۱۱. ثابت کنید تعدادی نامتناهی عدد طبیعی وجود دارند که نمی‌توان آنها را به شکل مجموع سه مربع کامل نوشت.

مسئله ۱۲. ثابت کنید  $10^{3n+1}$  را نمی‌توان به شکل مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نوشت.

مسئله‌های ۱۱ و ۱۲ از مسئله‌های قبلی بسیار دشوارترند زیرا برای حل آنها باید بدانیم که آنها را بر کدام عدد مانند  $m$  تقسیم کنیم.

اکنون مسئله ۱۲ را حل می‌کنیم. مکعب هر عدد طبیعی به پیمانه ۷ همیشه با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۱- هم‌نهشت است (این را خودتان بررسی کنید!). بنابراین مجموع دو مکعب به پیمانه ۷ همیشه با یکی از عددهای ۰، ۱-، ۱، ۲ و ۲- هم‌نهشت است. چون (به پیمانه ۷)  $3 \equiv 10$ ، پس (به پیمانه ۷)  $1 \equiv 10^3$  و در نتیجه  $10^{3n+1}$  به پیمانه ۷ با یکی از عددهای ۳ یا ۳- هم‌نهشت است. بنابراین، این عدد را نمی‌توان به شکل مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نوشت.

\* \* \*

فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد. در این صورت همه عددهای صحیح مجموعه نامتناهی  $\mathbb{Z}$  خود به خود در  $n$  دسته قرار می‌گیرند: دو عدد در صورتی در یک دسته‌اند که باقی‌مانده‌هایشان به پیمانه  $n$  برابر باشند (یعنی این دو عدد به پیمانه  $n$  هم‌نهشت باشند). مثلاً، اگر  $n = 2$ ، دو دسته به دست می‌آید: عددهای زوج و عددهای فرد. هنگام حل کردن مسئله‌های بخش‌پذیری در بیشتر موارد کافی است که درستی حکمها را به جای هر عدد صحیح فقط در مورد یک نماینده (دلخواه!) از هر دسته بررسی کنیم. به یاد بیاورید که در مسئله‌های بخش ۲ فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» معمولاً به عنوان نماینده همه باقی‌مانده‌های مثبت به پیمانه یک عدد را در نظر می‌گرفتیم و در مسئله‌های ۱۱ و ۱۲ این فصل، انتخاب نماینده‌های دیگر (برخی از عددهای انتخاب شده منفی بودند) مفیدتر واقع شد. در دو مسئله بعدی همین ایده توضیح داده شده است.

مسئله ۱۳. ثابت کنید که در میان هر ۵۱ عدد صحیح، دو عدد وجود دارند که باقی‌مانده‌های مربع‌هایشان به پیمانه ۱۰۰ با هم برابرند.

مسئله ۱۴. عددی طبیعی مانند  $n$  را در صورتی «مناسب» می‌نامند که  $1 + n^2$  بر  $10000001$  بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید تعداد عددهای مناسب در میان عددهای ۱، ۲، ... و  $10000000$  عددی زوج است. مجموعه مسئله‌های پایانی این بخش:

مسئله ۱۵. الف) آیا ممکن است مربع عددی طبیعی به ۲ ختم شود (یعنی ممکن است رقم یکانش ۲ باشد)؟

ب) آیا می‌توان مربع عددی طبیعی را فقط با استفاده از رقمهای ۲، ۳، ۷ و ۸ نوشت (تکرار رقمها مجاز است)؟

مسئله ۱۶. عددی پیدا کنید که وقتی با  $(n^2 + 1)^{1000} (n^2 - 1)^{1000}$  جمع شود عدد حاصل بر  $n$  بخش پذیر باشد.

مسئله ۱۷. باقی مانده تقسیم عدد

$$10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \dots + 10^{1000000000}$$

بر ۷ را پیدا کنید.

مسئله ۱۸. چند عدد طبیعی مانند  $n$  وجود دارند که از  $10000$  بزرگتر نباشند و  $2^n - n^2$  بر ۷ بخش پذیر باشد؟

مسئله ۱۹. حاصل ضرب چند عدد اول نخست (بیش از یک عدد اول) را با  $k$  نشان می‌دهیم. ثابت کنید عدد الف)  $(k - 1)$ ؛ ب)  $k + 1$ ، مربع کامل نیست.

مسئله ۲۰. آیا عددی طبیعی مانند  $n$  وجود دارد که  $n^2 + n + 1$  بر  $1955$  بخش پذیر باشد؟

مسئله ۲۱. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  بر  $133$  بخش پذیر است.

راه حل. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 121 \times 11^n + 12 \times 12^{2n} \\ &= 133 \times 11^n - 12 \times 11^n + 12 \times 12^{2n} \\ &\equiv 12(12^{2n} - 11^n) \\ &= 12(144^n - 11^n) \\ &\equiv 0 \pmod{133} \text{ (به پیمانه ۱۳۳)} \end{aligned}$$

در این راه حل نشان داده‌ایم که اثباتهای استادانه فقط ماحصل ایده‌های زیبا نیستند، بلکه بعضی وقتها محاسبه‌های «دستی» ساده هم منجر به چنین اثباتهایی می‌شوند.

مسئله ۲۲\*. فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $n + 1$  بر  $24$  بخش پذیر باشد. ثابت کنید که مجموع همه مقسوم علیه‌های  $n$  هم بر  $24$  بخش پذیر است.

مسئله ۲۳\*. جمله‌های دنباله‌ای از عددهای طبیعی مانند  $a_1, a_2, a_3, \dots$  به ازای هر  $n$  در شرط  $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$  صدق می‌کنند.

الف) اگر  $a_1 = a_2 = 1$ ، ثابت کنید که هیچ کدام از جمله‌های این دنباله بر ۴ بخش پذیر نیست.

ب) ثابت کنید  $a_1$  و  $a_2$  هر چه باشند، به ازای همه  $n$ هایی که  $n > 10$ ،  $a_n - 22$  عددی مرکب است.

مسئلهٔ بالا فعلاً آخرین مسأله‌مان دربارهٔ همنهشتی است. در اینجا لازم است تأکید کنیم که تقریباً همهٔ مسأله‌های بعدی این فصل در حقیقت ادامهٔ همین مبحث‌اند.

## ۲. نمایش اعشاری و قاعده‌های بخش‌پذیری

بیشتر افراد با قاعده‌های بخش‌پذیری بر عددهای  $10^1$ ،  $2$ ،  $5$  و  $4$  آشنا هستند. هنگام مطالعهٔ همنهشتیها می‌توانیم حکمهایی به مراتب قویتر را بیان و ثابت کنیم.

مسئلهٔ ۲۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی با رقم یکانش به پیمانهٔ الف ( $10^1$ : ب)  $2$ ؛ ج)  $5$ ، همنهشت است. راه‌حل. از عدد موردنظر رقم یکانش را کم می‌کنیم. در این صورت عددی به دست می‌آید که به صفر ختم می‌شود. این عدد بر  $10^1$ ، و در نتیجه بر  $2$  و  $5$ ، بخش‌پذیر است.

توصیه به معلم‌ان. پیش از آغاز مبحث قاعده‌های بخش‌پذیری لازم است که دانش‌آموزان اتحاد

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10^1 + a_n$$

را درک کنند، که در اینجا ردیفی از رقمها که «بالایش خط کشیده شده است» نشان‌دهندهٔ عددی طبیعی است که با این رقمها و به همین ترتیب نوشته می‌شود. مثلاً  $\overline{ab} = 10a + b$  که در آن  $a$  رقم دهگان و  $b$  رقم یکان عدد  $\overline{ab}$  است.

مسئلهٔ ۲۵. ثابت کنید

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n} \equiv \overline{a_{n-1} a_n} \quad (\text{به پیمانه } 4)$$

مسئلهٔ ۲۶. قاعده‌های بخش‌پذیری مشابهی را در مورد  $2^m$  و  $5^m$  بیان و ثابت کنید.

اکنون چند مسأله را مطرح می‌کنیم که در راه‌حلشان از قاعده‌های بخش‌پذیری بالا استفاده می‌شود.

مسئلهٔ ۲۷. رقم آخر مربع عددی طبیعی ۶ است. ثابت کنید که رقم ماقبل آخرش عددی فرد است.

راه‌حل. چون رقم آخر این مربع ۶ است، عدد طبیعی موردنظر زوج است. مربع هر عدد زوج بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد حاصل از دورقم آخرین مربع باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. اکنون به آسانی می‌توان همهٔ عددهای دورقمی مضرب ۴ را که به ۶ ختم می‌شوند نوشت:  $16$ ،  $36$ ،  $56$ ،  $76$  و  $96$ . رقم دهگان همه‌شان عددی فرد است.

مسئلهٔ ۲۸. رقم ماقبل آخر مربع عددی طبیعی عددی فرد است. ثابت کنید رقم آخرش ۶ است.

مسئله ۲۹. ثابت کنید هیچ توانی از ۲ ممکن نیست که به چهار رقم برابر ختم شود.

مسئله ۳۰. دست‌کم یک عدد  $10^k$  رقمی پیدا کنید که هیچ‌یک از رقمهایش در نمایش اعشاری صفر نباشد و بر مجموع رقمهایش بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. با روش آزمون و خطا عددی پیدا می‌کنیم که مجموع رقمهایش برابر با ۱۲۵ شود. بخش‌پذیری هر عدد بر ۱۲۵ از سه رقم آخرش معلوم می‌شود. بنابراین عدد ۱۱۱۰۰۰۱۱۵۹۹۱۲۵ (در اول این عدد ۹۴ تا رقم ۱ آمده است) همان عددی است که می‌خواستیم.

اکنون قاعده‌های بخش‌پذیری بر عددهای ۳ و ۹ را بررسی می‌کنیم که آنها را هم می‌توان به شکلی کلیتر بیان کرد.

مسئله ۳۱. ثابت کنید که هر عدد طبیعی با مجموع رقمهایش به پیمانه الف (۳؛ ب) ۹، همنهشت است.

راه‌حل. عدد

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10^1 + a_n$$

را در نظر بگیرید. روشن است که (به پیمانه ۹)  $10 \equiv 1$ . بنابراین به ازای هر عدد طبیعی مانند  $k$ ، (به پیمانه ۹)  $10^k \equiv 1$ . در نتیجه

$$a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10^1 + a_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{9}$$

راه‌حل مسئله در مورد بخش‌پذیری بر ۳ هم درست عین همین است.

مسئله‌های بعدی مربوط به این قاعده‌ها هستند.

مسئله ۳۲. آیا می‌توان مربعی کامل را فقط با استفاده از الف (رقمهای ۲، ۳، ۶؛ ب) رقمهای ۱، ۲ و ۳ که از هر یک از آنها دقیقاً  $10^k$  بار استفاده شده است، نوشت؟

مسئله ۳۳. مجموع رقمهای عدد  $2^{100}$  را حساب می‌کنیم، بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را حساب می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا اینکه فقط یک رقم بماند. این رقم چیست؟

مسئله ۳۴. ثابت کنید که اگر در هر عدد طبیعی ترتیب رقمها را برعکس کنیم و عدد حاصل را از عدد اولیه کم کنیم، آن وقت این تفاضل بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسئله ۳۵. یک رقم در طرف چپ و یک رقم در طرف راست عدد ۱۵ بنویسید، به طوری که عدد چهاررقمی حاصل بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد.

مسئله ۳۶. چند عدد چهاررقمی که دو رقم وسطی آنها ۹۷ است بر ۴۵ بخش‌پذیرند؟

مسئله ۳۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که بر ۳۶ بخش پذیر باشد و در نمایش اعشاری هر ۱۰ رقم بیایند.

مسئله ۳۸. ثابت کنید حاصل ضرب آخرین رقم عدد  $2^n$  و مجموع همه رقمهایش بجز آخری، بر ۳ بخش پذیر است.

مسئله ۳۹. آیا ممکن است که مجموع رقمهای مربعی کامل برابر با  $1970$  شود؟

مسئله ۴۰. از عددی سه رقمی مجموع رقمهایش را کم می‌کنیم. بعد همین عمل را در مورد عدد حاصل تکرار می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا اینکه این عمل در کل  $10^0$  بار انجام شود. ثابت کنید که عدد آخری صفر است.

مسئله ۴۱. \* فرض کنید  $A$  مجموع رقمهای عدد  $44444444$  و  $B$  مجموع رقمهای عدد  $A$  باشد. مجموع رقمهای عدد  $B$  را پیدا کنید.

با ایده‌هایی بسیار شبیه آنهایی که در اثبات قاعده بخش پذیری بر ۹ به کار رفتند می‌توانیم قاعده بخش پذیری مهم دیگری را ثابت کنیم.

مسئله ۴۲. ثابت کنید

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_1 \quad (\text{به پیمانه } 11)$$

راهنمایی: می‌دانیم که (به پیمانه ۱۱)  $1 \equiv -1$ ؛ بنابراین، به پیمانه ۱۱ توانهای با نمای زوج  $10^0$  همنهشت با ۱ اند و توانهای با نمای فردش همنهشت با  $-1$ . مجموعه مسئله‌های بعدی درباره این قاعده است.

مسئله ۴۳. ثابت کنید عدد  $11100011$  (رقم یک در این عدد آمده است) مرکب است.

مسئله ۴۴. ثابت کنید عدد  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1}$  مرکب است.

مسئله ۴۵. فرض کنید  $a, b, c, d$  رقمهایی متمایز باشند. ثابت کنید عدد  $\overline{cdcdcdcd}$  بر عدد  $\overline{aabb}$  بخش پذیر نیست.

مسئله ۴۶.  $A$  عددی شش رقمی با رقمهای  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  است. ثابت کنید  $A$  بر ۱۱ بخش پذیر نیست.

مسئله ۴۷. ثابت کنید تفاضل عددی که تعداد رقمهایش فرد است و عددی که با همان رقمها منتها به ترتیب عکس نوشته شده است بر ۹۹ بخش پذیر است.

قاعده‌های بخش‌پذیری تنها راه ارتباط دادن ویژگیهای بخش‌پذیری عددها به نمایش اعشاریشان است. این ارتباط در مجموعه مسأله‌های زیر نشان داده شده است.

مسأله ۴۸. آیا می‌توان فقط با استفاده از رقمهای ۲، ۳، ۴ و ۹ دو عدد نوشت که یکی از آنها ۱۹ برابر دیگری باشد؟

مسأله ۴۹. مجموع دو رقم  $a$  و  $b$  بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید عدد  $\overline{aba}$  هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

مسأله ۵۰. مجموع رقمهای عددی سه‌رقمی برابر با ۷ است. ثابت کنید این عدد وقتی و فقط وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که دو رقم آخرش برابر باشند.

مسأله ۵۱. الف) عدد شش‌رقمی  $\overline{abcdef}$  این ویژگی را دارد که  $\overline{def} - \overline{abc}$  بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید این عدد خودش هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

ب) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۷ بیان و آن را ثابت کنید.

ج) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۱۳ بیان و آن را ثابت کنید.

مسأله ۵۲. الف) عدد شش‌رقمی  $\overline{abcdef}$  این ویژگی را دارد که  $\overline{abc} + \overline{def}$  بر ۳۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید این عدد خودش هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

ب) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۳۷ بیان و آن را ثابت کنید.

مسأله ۵۳. آیا عددی سه‌رقمی مانند  $\overline{abc}$  (که در آن  $a \neq c$ ) وجود دارد که عدد  $\overline{abc} - \overline{cba}$  مربع کامل باشد؟

مسأله ۵۴. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که همه رقمهایش یک باشند و بر  $333 \dots 33$  (صدتا رقم ۳ در این عدد آمده است) بخش‌پذیر باشد.

مسأله ۵۵. آیا ممکن است مجموع نخستین چند عدد طبیعی به ۱۹۸۹ ختم شود؟

مسأله ۵۶. همه عددهایی طبیعی را پیدا کنید که وقتی یک صفر میان رقمهای یکان و دهگان‌شان بگذارید ۹ برابر شوند.

راه‌حل. عدد موردنظر را به شکل  $10a + b$  می‌نویسیم که در آن  $b$  رقم یکان است و  $a$  عددی طبیعی. بعد از گذاشتن صفر، تساوی  $10a + b = 9(10a + b)$  به دست می‌آید و از این تساوی هم نتیجه می‌شود  $10a = 8b$  یا  $5a = 4b$ . بنابراین  $b$  باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد. با بررسی دو حالت  $b = 0$  و  $b = 5$  معلوم می‌شود که تنها پاسخ مسأله عدد ۴۵ است.

یادداشت. همان‌طور که الان دیدیم، گاهی نوشتن تساوی برحسب رقمهای عدد خواسته شده بسیار مفید است.

مسئله ۵۷. میان رقمهای عددی دو رقمی که بر ۳ بخش پذیر است صفر می گذاریم و به عدد حاصل دو برابر رقم صدگانش را اضافه می کنیم. عددی که به دست می آید ۹ برابر عدد اولیه است. عدد اولیه را پیدا کنید.

مسئله ۵۸. عددی چهاررقمی پیدا کنید که مربع کامل باشد و دو رقم اولش با هم برابر باشند و دو رقم آخرش هم، با هم.

مسئله ۵۹. همه عددهای سه رقمی را پیدا کنید که هر توانشان به خود عدد اصلی ختم شود.

مسئله ۶۰. دو رقم ۴ و ۳ در طرف راست عددی طبیعی نوشته می شوند و بعد این عمل چند بار تکرار می شود (مثلاً از ۵۱ عدد ۵۱۴۳ به دست می آید، بعد عدد ۵۱۴۳۴۳ و همین طور تا آخر). ثابت کنید با این عمل دیر یا زود به اعدادی مرکب می رسیم.

مسئله ۶۱\*. ثابت کنید همه عددهای

$$۱۰۰۰۱, ۱۰۰۰۱۰۰۰۱, ۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱, \dots$$

مرکب اند.

### ۳. معادله هایی با جوابهای صحیح و مسئله های دیگر

در مسئله ای معروف ادعا شده است که اگر  $N > 7$ ، همیشه می توان مبلغ  $N$  پزو را با اسکناسهای ۳ و ۵ پزویی پرداخت کرد (مسئله ۳۷ از فصل «استقرا» را ببینید). اگر این مسئله را با استفاده از معادله بیان کنیم معنایش این می شود که معادله

$$3x + 5y = N \quad (*)$$

به ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۷ مانند  $N$  جوابی صحیح و غیرمنفی مانند  $x$  و  $y$  دارد. در این بخش جوابهای صحیح معادله های مشابه و دیگر معادله ها را پیدا می کنیم و معمولاً هنگام یافتن این جوابها بجز صحیح بودنشان هیچ محدودیت دیگری قائل نمی شویم.

\* \* \*

مسئله ۶۲. معادله  $3x + 5y = 7$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

در اینجا راه حل مسئله را کاملاً شرح می دهیم. با یادگیری روش حل این مسئله می توان مسئله های دیگر را هم از همین راه حل کرد.

ابتدا یک جواب خاص را پیدا می‌کنیم (این ایده در بیشتر موارد در حل مسأله‌های ریاضی مؤثر است). توجه کنید که  $1 = (-1) \times 5 + 3 \times 2$ . دو طرف این برابری را در عدد ۷ ضرب می‌کنیم تا به دست آید  $7 = (-7) \times 5 + 3 \times 14$  و در نتیجه،  $x_0 = 14$  و  $y_0 = -7$  یک جواب (یکی از جوابهای بسیار) معادله است. بنابراین

$$3x + 5y = 7; \quad 3x_0 + 5y_0 = 7$$

اگر از این معادله‌ها یکی را از دیگری کم کنیم و  $x - x_0$  و  $y - y_0$  را به ترتیب با  $a$  و  $b$  نشان دهیم به دست می‌آید

$$3a + 5b = 0$$

بنابراین درمی‌یابیم که  $b$  باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و  $a$  بر ۵. فرض کنید  $a = 5k$ . در این صورت  $b = -3k$  که در اینجا  $k$  عددی صحیح و دلخواه است. پس این مجموعه جوابها به دست می‌آید:

$$x - x_0 = 5k$$

$$y - y_0 = -3k$$

یا

$$x = 14 + 5k$$

$$y = -7 - 3k$$

که در آنها  $k$  عددی صحیح و دلخواه است. به طور قطع این معادله جواب دیگری ندارد، زیرا تبدیلیایی که به کار بردیم همیشه منجر به معادله‌های هم‌ارز می‌شوند.

توصیه به معلمان. امیدواریم دانش‌آموزانتان هم این حقیقت را به همین روشنی درک کنند. بدون درک کامل این بخش از راه‌حل، یعنی اینکه به ازای  $N = 7$  این زوجهای  $(x, y)$  همه جوابهای معادله (\*) اند، ادامه دادن این مبحث تقریباً غیرممکن است.

مسأله ۶۳. همه ریشه‌های صحیح معادله  $3x - 12y = 7$  را پیدا کنید.

هنگام حل مسأله‌هایی از این دست با مشکلی جدی مواجه می‌شویم. برای اینکه با این مشکل آشنا شوید، مسأله «بسیار دشوار» ۶۴ را به اختصار تحلیل می‌کنیم.



مسأله ۶۴. معادله  $11 = 173y - 1990x$  را حل کنید.

بزرگی ضریبهای این معادله باعث می‌شود که یافتن جواب خاص برای آن دشوار شود. با وجود این، به راحتی می‌توان فهمید که عددهای ۱۹۹۰ و ۱۷۳ نسبت به هم اول‌اند و همین موضوع در حل مسأله مؤثر است.

لم. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م.) این عددها را می‌توان به‌ازای عددهایی صحیح مانند  $m$  و  $n$  به شکل  $173n - 1990m$  نوشت.

می‌توان این لم را با استفاده از اینکه همه عددهایی را که هنگام محاسبه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک از راه الگوریتم اقلیدسی (فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» را ببینید) به دست می‌آیند، به این شکل نوشت ثابت کرد. با وجود اینکه نوشتن این اثبات چندان هم آسان نیست. آن را به خواننده محول می‌کنیم.

به عبارت دقیقتر، از الگوریتم اقلیدسی به دست می‌آید  $m = 2$  و  $n = 23$ . بنابراین  $(2, 23)$  یک جواب خاص معادله  $1 = 173n - 1990m$  است. در نتیجه  $(x_0, y_0)$  که در آن  $x_0 = 2 \times 11 = 22$  و  $y_0 = 23 \times 11 = 253$  هم یک جواب معادله

$$1990x - 173y = 11$$

است. عین مسأله ۶۲ به دست می‌آوریم

$$x = x_0 + 173k = 22 + 173k,$$

$$y = y_0 + 1990k = 253 + 1990k$$

که در اینجا  $k$  عددی صحیح و دلخواه است.

مسأله ۶۵. همه ریشه‌های صحیح معادله  $6 = 48y + 21x$  را پیدا کنید.

توجه. به‌طور کلی، اکنون می‌توانیم هر معادله به شکل  $Ax + By = C$  (این معادله را معادله دیوفانتی خطی دو متغیره معمولی می‌نامند) را نسبت به مجهولهای صحیح  $x$  و  $y$  حل کنیم.

قضیه: اگر در معادله دیوفانتی خطی  $Ax + By = C$  ضریبهای  $A$  و  $B$  نسبت به هم اول باشند، آن وقت عددهایی صحیح مانند  $x_0$  و  $y_0$  وجود دارند که  $Ax_0 + By_0 = C$  و همه ریشه‌های این معادله از این دستورها به دست می‌آیند:

$$x = x_0 + Bk, \quad y = y_0 - Ak$$

تمرین. سعی کنید حکم کلی را که این قضیه حالت خاصی از آن است بیان و آن را با دقت ثابت کنید. (یادتان نرود حالتی را هم که  $A$  و  $B$  نسبت به هم اول نباشند و  $C$  بر  $(A, B)$  بخش‌پذیر نباشد بررسی کنید.)

مسئله ۶۶. معادله  $2x + 3y + 5z = 11$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید. (راستی، آیا این معادله در مجموعه عددهای طبیعی جواب دارد؟)

مسئله ۶۷\*. یک مهره سرباز در یکی از خانه‌های باریکه‌ای از کاغذ شطرنجی به عرض واحد که از هر دو طرف نامتناهی است قرار دارد. این مهره را می‌توان  $m$  خانه به طرف راست یا  $n$  خانه به طرف چپ برد. کدام عددهای  $m$  و  $n$  این ویژگی را دارند که به‌ازای آنها این سرباز را می‌توان درست به‌خانه سمت راستی خانه شروع حرکتش (البته طی چند حرکت) برد؟ کمترین تعداد حرکت‌های لازم برای انجام این کار چقدر است؟

\* \* \*

معادله‌های با بیش از یک متغیر را که جوابهای صحیحشان خواسته می‌شود معادله‌های دیوفانتی می‌نامند؛ این نامگذاری برگرفته از نام دیوفانتوس اسکندرانی، ریاضیدان مشهور یونانی، است که این‌گونه معادله‌ها را در روزگاران قدیم مطالعه کرده است. اکنون چند معادله دیوفانتی دشوارتر را بررسی می‌کنیم.

مسئله ۶۸. معادله  $(2x + y)(5x + 3y) = 7$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسئله ۶۹. معادله  $xy = x + y + 3$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسئله ۷۰. معادله  $x^2 = 14 + y^2$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسئله ۷۱. معادله  $x^2 + y^2 = x + y + 2$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

راه حل همه این مسائله‌ها ماحصل ایده‌ای بسیار معمولی، یعنی تحلیل حالت به حالت است. بی‌تردید نمی‌توان همه زوجهای عددهای صحیح را نوشت و در مورد هر یک از آنها بررسی کرد که آیا در معادله صدق می‌کند یا نه. با وجود این، با انجام تبدیلهای ساده‌ای می‌توان این تحلیل را به بررسی فقط چند حالت خلاصه کرد.

اکنون مسئله ۶۹ را حل می‌کنیم. چون  $xy - x - y = 3$ ، پس  $(x - 1)(y - 1) = 4$ . با این حساب فقط کافی است همه نمایشهای عدد ۴ به شکل حاصل ضربی از دو عامل را بررسی کنیم.

پاسخ:  $(x, y) = (5, 2), (2, 5), (0, -3), (-3, 0), (3, 3), (-1, -1)$

در مسائله‌های ۷۰ و ۷۱ هم می‌توانیم معادله داده شده را تبدیل کنیم. بنابراین نخستین ایده مؤثر در حل معادله‌های دیوفانتی از این قرار است:

ایده یک: تبدیل مناسب معادله موردنظر و بعد استفاده از تحلیل حالت به حالت.

با وجود این، حتی در همین مسئله بعدی هم این ایده به‌کار نمی‌آید.

مسئله ۷۲. معادله  $x^2 + y^2 = 4z - 1$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

روشن است که این معادله را نمی‌توان به معادله‌ای قابل حل‌تر تبدیل کرد؛ بررسی همه سه‌تاییهای

مناسب از عددهای صحیح هم غیرممکن است. این نمونه جدید از «باغ وحش دیوفانتی» مان از این نظر قابل توجه است که هیچ جواب صحیحی ندارد.

ابتدا ببینید که باقی مانده‌های تقسیم مربعهای کامل بر ۴ کدام عددها هستند. (اینکه برای حل این مسأله باید باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۴ را در نظر گرفت از شکل معادله مورد نظر معلوم شده است.) تنها باقی مانده‌های ممکن ۰ و ۱ اند. چون از مجموع هیچ دو تایی از این باقی مانده‌ها باقی مانده ۱ - به دست نمی آید، پس این معادله جواب صحیح ندارد.

بنابراین به دومین ایده مؤثر در حل معادله‌های دیوفانتی می‌رسیم:

ایده دو: باقی مانده‌های عددها به پیمانه عددی طبیعی را در نظر بگیرید.

مسأله ۷۳. معادله  $x^2 - 7y = 10$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۷۴. معادله  $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۷۵. معادله  $15x^2 - 7y^2 = 9$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۷۶. معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۷۷. معادله  $3^m + 7 = 2^n$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

راه حل مسأله ۷۴. چون  $x^3$  به پیمانه ۷ فقط با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۱ - همنهشت است،  $x^3 + 21y^2 + 5$  به پیمانه ۷ باید با یکی از عددهای ۵، ۶ یا ۴ همنهشت باشد و بنابراین ممکن نیست صفر باشد.

یادداشت. احتمالاً تاکنون متوجه شده‌اید که با «ایده دو» فقط می‌توانیم عدم وجود ریشه را ثابت کنیم. در حقیقت، اگر معادله‌ای به پیمانه ۷ یا به پیمانه ۳ جواب داشته باشد، نتیجه نمی‌شود که معادله مورد نظر دست‌کم یک جواب صحیح دارد. مثلاً معادله  $6 = y^3 - 2x^2$  به پیمانه ۷ ریشه دارد ( $x \equiv 0$  و  $y \equiv 1$ ) و همین‌طور به پیمانه ۳ ( $x \equiv 0$  و  $y \equiv 0$ )، اما این معادله جواب صحیح ندارد (به راحتی می‌توانید این حکم را با در نظر گرفتن باقی مانده‌های تقسیم عددها بر ۸ ثابت کنید).

اکنون با مسأله ۷۷ دست و پنجه نرم می‌کنیم. بزرگ می‌توان فهمید که این معادله دست‌کم یک جواب دارد:  $m = 2$  و  $n = 4$ . آیا در اینجا بررسی باقی مانده‌ها منطقی به نظر می‌رسد؟ با عجله نتیجه‌گیری نکنید! سمت چپ معادله به پیمانه ۳ همنهشت با ۱ است. چون (به پیمانه ۳)  $1 \equiv 2$ ، پس  $n$  عددی زوج است، یعنی  $n = 2k$ . بنابراین  $3^m + 7 = 4^k$ . اکنون مانده‌ها به پیمانه ۴ ممکن است به کارمان بیایند. در اینجا، (به پیمانه ۴)  $4^k - 7 = 1$ . از این رو (به پیمانه ۴)  $3^m \equiv 1$  و در نتیجه  $m$  هم عددی زوج است، یعنی  $m = 2p$ . بنابراین معادله مورد نظر به شکل  $3^{2p} + 7 = 2^{2k}$  درمی‌آید.

اما حالا چی؟ از «ایده یک» استفاده می‌کنیم:

$$7 = 2^{2k} - 3^{2p} = (2^k - 3^p)(2^k + 3^p)$$

بنابراین،  $2^k + 3^p = 7$  و  $2^k - 3^p = 1$  و جواب یکتای  $k = 2$  و  $p = 1$  را به دست می‌آوریم؛ در نتیجه،  $m = 2$  و  $n = 4$ .

در اینجا از هر دو ایده یا روشی که پیشتر بررسی شدند استفاده کردیم. این جور تلفیق ایده‌ها در ریاضیات بسیار متداول است.

اکنون به معادله دیوفانتی دیگری می‌پردازیم که در راه حل آن هم تلفیق ایده‌ها عین مسأله قبلی مؤثر است:

مسأله ۷۸. معادله  $n^2 = 3 \times 2^m + 1$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

راه حل. چون (به پیمانه ۳)  $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$  روشن است که  $n$  بر ۳ بخش پذیر نیست. بنابراین یا  $n = 3k + 1$  یا  $n = 3k + 2$ .

الف) اگر  $n = 3k + 2$ ، آن وقت  $9k^2 + 12k + 4 = 3 \times 2^m + 1$ . بعد از ساده کردن به دست

می‌آوریم

$$2^m = 3k^2 + 4k + 1 = (3k + 1)(k + 1)$$

تنها عاملهای توانی از ۲، توانهای دیگر ۲ هستند. بنابراین  $k + 1$  و  $3k + 1$  توانهایی از ۲ اند. مقدرهای  $k = 0$  و  $k = 1$  در اینجا جور درمی‌آیند و به ترتیب جوابهای  $n = 2$  و  $m = 1$  و  $n = 5$  و  $m = 3$  را به دست می‌آوریم. با وجود این، اگر  $k \geq 2$ ، آن وقت  $2(k + 1) < 3k + 1 < 4(k + 1)$ . از این نابرابری معلوم می‌شود که ممکن نیست دو عدد  $k + 1$  و  $3k + 1$  همزمان توانهایی از ۲ باشند.

ب) فرض کنید  $n = 3k + 1$ . اگر عین حالت قبلی عمل کنیم یک جواب دیگر را پیدا می‌کنیم:  $m = 4$  و  $n = 7$ .

علاوه بر ایده‌های تحلیل حالت به حالت و تجزیه، ایده تخمین زدن هم بعضی وقتها به کار می‌آید. ایده سه: هنگام حل معادله‌های دیوفانتی ممکن است استفاده از نابرابریها و یا تخمین زدن مؤثر باشد.

مسأله ۷۹. معادله  $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۸۰. معادله  $x^2 - y^2 = 1988$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسأله ۸۱. ثابت کنید معادله  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$  وقتی و فقط وقتی در مجموعه عددهای طبیعی دقیقاً یک جواب دارد که  $n$  عددی اول باشد.

مسئله ۸۲. معادله  $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

در این بخش کوتاه مجال آن نیست که دیگر روشهای جالب و پیچیده حل معادله‌های دیوفانتی را شرح دهیم.

در اینجا دو مسئله دیگر را که از مسأله‌های بالا بسیار دشوارترند می‌آوریم. ممکن است بخواهید پیش از اینکه خودتان حلشان کنید راهنماییهای آنها را ببینید.

مسئله ۸۳.\* معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

مسئله ۸۴.\* معادله  $x^2 - 2y^2 = 1$  را در مجموعه عددهای صحیح حل کنید.

#### ۴. قضیه «کوچک» فرما

این بخش به قضیه‌ای نابدهی و فوق‌العاده در نظریه اعداد اختصاص دارد که آن را پیر دو فرما، ریاضیدان برجسته فرانسوی قرن هفدهم، بیان و ثابت کرده است. اما پیش از بیان این قضیه، (همان‌طور که در بخش ۱ قول دادیم) مسئله تقسیم در همنهشتیها را بررسی می‌کنیم.

مسئله ۸۵. فرض کنید (به پیمانه  $m$ )  $ka \equiv kb$ ، که در اینجا  $k$  و  $m$  نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید (به پیمانه  $m$ )  $a \equiv b$ .

راه‌حل. چون (به پیمانه  $m$ )  $ka \equiv kb$  و  $ka - kb = k(a - b)$ ، پس  $k(a - b)$  بر  $m$  بخش‌پذیر است. اما چون  $k$  و  $m$  نسبت به هم اول‌اند، پس  $a - b$  بر  $m$  بخش‌پذیر است؛ بنابراین، (به پیمانه  $m$ )  $a \equiv b$ . به راحتی می‌توان برای اثبات اینکه در این مسئله  $k$  و  $m$  باید نسبت به هم اول باشند مثالهایی پیدا کرد. در حقیقت (به پیمانه  $10$ )  $5 \times 3 \equiv 5 \times 7$ ، اما عددهای  $3$  و  $7$  به پیمانه  $10$  همنهشت نیستند. در هر صورت حکم مسئله زیر همواره درست است:

مسئله ۸۶. اگر (به پیمانه  $kn$ )  $ka \equiv kb$ ، آن وقت (به پیمانه  $n$ )  $a \equiv b$ .

اکنون آماده‌ایم که قضیه «کوچک» فرما را بیان و ثابت کنیم.

قضیه: فرض کنید  $p$  عددی اول باشد و عدد  $A$  بر  $p$  بخش‌پذیر نباشد. در این صورت (به پیمانه  $p$ )  $A^{p-1} \equiv 1$ .

اثبات.  $1, A, 2A, 3A, \dots, (p-1)A$  را در نظر بگیرد. می‌توانیم ثابت کنیم که باقی‌مانده‌های تقسیم هیچ دو تایی از این عددها بر  $p$  یکی نیست. در حقیقت، اگر (به پیمانه  $p$ )  $kA \equiv nA$ ، آن وقت (به پیمانه  $p$ )  $k = n$  (مسئله ۸۵ را ببینید). اما اگر  $k$  و  $n$  برابر نباشند و هر دو از  $p$  کوچکتر باشند، چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین در میان باقی‌مانده‌های تقسیم این  $p - 1$  عدد بر  $p$  هر کدام از عددهای

۱ تا  $p-1$  دقیقاً یک بار می‌آید. اگر این عددها را در هم ضرب کنیم به دست می‌آید

$$A \times 2A \times 3A \cdots (p-1)A \equiv 1 \times 2 \times 3 \cdots (p-1)(p) \text{ (به پیمانه } p)$$

یا

$$(p-1)! \times A^{p-1} \equiv (p-1)!(p) \text{ (به پیمانه } p)$$

اکنون توجه کنید که  $p$  عددی اول است و در نتیجه عددهای  $(p-1)!$  و  $p$  نسبت به هم اول‌اند. با استفاده از حکم مسأله ۸۵ به دست می‌آوریم (به پیمانه  $p$ )  $A^{p-1} \equiv 1$ .

نتیجه. فرض کنید  $p$  عددی اول باشد. در این صورت به ازای هر عدد صحیح مانند  $A$ ، (به پیمانه  $p$ )  $A^p \equiv A$ .

قضیه «کوچک» فرما صرفاً حقیقتی دور از انتظار و «قشنگ» نیست. این قضیه روشی بسیار مؤثر برای حل تعداد زیادی از مسأله‌های حساب هم هست. چند مسأله از این دست را در زیر آورده‌ایم.

مسأله ۸۷. باقی‌مانده تقسیم  $2^{100}$  بر  $101$  را پیدا کنید.

مسأله ۸۸. باقی‌مانده تقسیم  $3^{102}$  بر  $101$  را پیدا کنید.

راه‌حل. چون  $101$  عددی اول است، پس (به پیمانه  $101$ )  $3^{100} \equiv 1$ . بنابراین

$$3^{102} = 9 \times 3^{100} \equiv 9(101) \text{ (به پیمانه } 101)$$

توصیه به معلمان. ممکن است تمرینهای محاسباتی از این دست که با استفاده از قضیه فرما حل می‌شوند برای دانش‌آموزان تا حدودی پیش پا افتاده باشند.

مسأله ۸۹. ثابت کنید که  $1 - 3^{300} \equiv 0 \pmod{1001}$  بخش‌پذیر است.

مسأله ۹۰. باقی‌مانده تقسیم  $8^{90}$  بر  $29$  را پیدا کنید.

مسأله ۹۱. ثابت کنید که  $1 - 7^{12} \equiv 0 \pmod{143}$  بخش‌پذیر است.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که  $1 - 7^{12} \equiv 0 \pmod{11}$  و  $1 - 7^{12} \equiv 0 \pmod{13}$  بخش‌پذیر است. در حقیقت

$$(7^{12})^1 \equiv 1 \text{ (به پیمانه } 11) \text{ و } (7^{12})^{12} \equiv 1 \text{ (به پیمانه } 13)$$

مسأله ۹۲. ثابت کنید عدد  $3^{239} + 2393^3$  اول نیست.

مسأله ۹۳. فرض کنید  $p$  عددی اول باشد و  $a$  و  $b$  عددهایی صحیح و دلخواه باشند. ثابت کنید

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \text{ (به پیمانه } p)$$

سعی کنید برای این مسأله دو اثبات پیدا کنید: یکی با استفاده از قضیهٔ «کوچک» فرما و دیگری با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای (فصل «ترکیبات-۲» را ببینید).

مسألهٔ ۹۴. مجموع عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  بر  $۳۰$  بخش پذیر است. ثابت کنید که  $a^5 + b^5 + c^5$  هم بر  $۳۰$  بخش پذیر است.

مسألهٔ ۹۵. فرض کنید  $p$  و  $q$  عددهای اول متمایزی باشند. ثابت کنید

$$\text{الف) (به پیمانه } pq) \quad p^q + q^p \equiv p + q$$

ب) اگر  $۲ \neq p, q$ ، عددی زوج است که در اینجا  $[x]$  تابع جزء صحیح عدد  $x$  است.

مسألهٔ ۹۶. فرض کنید  $p$  عددی اول باشد و  $a$  را شمارد. ثابت کنید که عددی طبیعی مانند  $b$  وجود دارد که  $ab \equiv ۱ \pmod{p}$ .

مسألهٔ ۹۷. (قضیهٔ ویلسون). فرض کنید  $p$  عددی اول باشد. ثابت کنید که  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

مسألهٔ ۹۸. فرض کنید عدد طبیعی  $n$  بر  $۱۷$  بخش پذیر نباشد. ثابت کنید که یا  $n^8 + ۱$  بر  $۱۷$  بخش پذیر است یا  $n^8 - ۱$ .

مسألهٔ ۹۹. الف) فرض کنید  $p$  عددی اول باشد و  $۳ \neq p$ . ثابت کنید که عدد  $۱۱ \dots ۱۱$  (رقم  $p$ ) یک در این عدد آمده است) بر  $p$  بخش پذیر نیست.

ب) فرض کنید  $p$  عددی اول باشد و  $۵ > p$ . ثابت کنید که عدد  $۱۱ \dots ۱۱$  (رقم  $p-۱$ ) بر  $p$  بخش پذیر است.

مسألهٔ ۱۰۰. ثابت کنید که به ازای هر عدد اول مانند  $p$  تفاضل

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ - ۹۹ \dots ۸۸۹۹۹ \dots ۸۸۸ \dots ۳۳ \dots ۲۲۲۲۲ \dots ۱۱۲۲۲ \dots ۱۱۱$$

(در نخستین عدد هر رقم غیر صفر دقیقاً  $p$  بار نوشته شده است) بر  $p$  بخش پذیر است.

# فصل ۱۱

## ترکیبیات - ۲

این فصل دنبالهٔ بلافصل فصل «ترکیبیات - ۱» است. مطالبی که در اینجا می‌آیند با استفاده از مطالبی که در فصل ۲ توضیح داده شدند به دست می‌آیند.

\* \* \*

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان باز هم باید تعدادی مسأله حل کنند که در آنها ایده‌هایی از ترکیبیات که قبلاً مطرح شده‌اند آمده است و فقط وقتی از این مسأله‌ها رد شوند که هیچ مشکلی برای آنها پیش نیاورند. اگر این مسأله‌ها مشکلی پیش آورند، توصیه می‌کنیم که به فصل «ترکیبیات - ۱» مراجعه کنند. مطالب این فصل مربوط به یکی از مهمترین عناصر ترکیبیات می‌شوند که همین الان آن را یاد می‌گیریم.

### ۱. ترکیبها

ابتدا به این مسأله ساده توجه کنید.

مسألهٔ ۱. دو دانش‌آموز باید از میان گروهی سی نفره برای مسابقه‌ای ریاضی انتخاب شوند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد؟

راه حل. می‌توانید اولین شرکت‌کننده در مسابقه را به  $30$  طریق انتخاب کنید. بدون در نظر گرفتن اینکه نفر اول کیست، می‌توان نفر دوم را به  $29$  طریق انتخاب کرد. اما به این ترتیب هر زوج را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین جواب برابر است با  $\frac{30 \times 29}{2}$  یا  $435$  طریق. توجه کنید که صرفاً از روش راه حل مسألهٔ ۲۲ فصل «ترکیبیات - ۱» استفاده کرده‌ایم.

اکنون فرض کنید که باید تیمی  $k$  نفره از میان گروهی  $n$  نفره از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. تعداد راه‌هایی را که می‌توان این کار را کرد تعداد ترکیبهای  $k$  عضو از میان  $n$  عضو می‌نامند و با  $\binom{n}{k}$  (بخوانید «انتخاب  $k$  از  $n$ ») نشان می‌دهند.



مثلاً  $\binom{2}{1} = 2$ ،  $\binom{3}{2} = 3$ ،  $\binom{n}{1} = n$  و  $\binom{n}{n} = 1$ . توجه کنید که  $\binom{n}{0}$  را هم می‌توان به‌طور طبیعی تعبیر کرد: برای اینکه کسی را از میان  $n$  نفر انتخاب نکنیم فقط یک راه وجود دارد. یعنی، به‌ازای هر  $n$ ،  $\binom{n}{0} = 1$ .

جالب است که می‌توان برخی ویژگی‌های این عددها را با استدلال‌های ساده ترکیباتی، بدون استفاده از دستوری برای محاسبه  $\binom{n}{k}$ ، ثابت کرد.

$$1. \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

اثبات. توجه کنید که انتخاب  $k$  تا شرکت‌کننده در مسابقه معادل انتخاب  $n - k$  دانش‌آموز است که در مسابقه شرکت نکنند. بنابراین، تعداد راه‌های انتخاب  $k$  نفر از  $n$  نفر برابر است با تعداد راه‌های انتخاب  $n - k$  نفر از  $n$  نفر؛ یعنی،  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ .

$$2. \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

اثبات. فرض کنید  $n + 1$  دانش‌آموز داریم. یکی از آنها را در نظر بگیرید و نامش را  $A$  بگذارید. همه تیم‌هایی را که می‌توان تشکیل داد به دو دسته تقسیم می‌کنیم: تیم‌هایی که شامل  $A$  اند و تیم‌هایی که شامل  $A$  نیستند. تعداد تیم‌های دسته اول  $\binom{n}{k-1}$  است - زیرا باید تیم را با  $k - 1$  دانش‌آموز دیگر از  $n$  دانش‌آموز باقی‌مانده تکمیل کنیم. تعداد تیم‌های دسته دوم  $\binom{n}{k}$  است - باید کل تیم را از  $n$  دانش‌آموز باقی‌مانده انتخاب کنیم. بنابراین

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

یادداشت. با استفاده از این نحوه استدلال می‌توانیم حکم‌های نسبتاً مهمی را بی‌آنکه محاسبه‌ای انجام دهیم ثابت کنیم. این وضعیت کاملاً مختص ترکیبیات است. معمولاً پس از چند دقیقه تفکر و دریافت خصلت ترکیباتی سؤال می‌توان از انجام محاسبات خسته‌کننده اجتناب کرد. برای همین است که لازم دانستیم اثبات‌هایی این‌چنینی را به تفصیل توضیح دهیم. اکنون دستوری برای محاسبه  $\binom{n}{k}$  پیدا می‌کنیم.

مسئله ۲. به چند طریق می‌توان تیمی سه‌نفره را از میان ۳۰ نفر دانش‌آموز انتخاب کرد؟

راه‌حل. دانش‌آموز اول را می‌توان به ۳۰ طریق انتخاب کرد، دانش‌آموز دوم را می‌توان به ۲۹ طریق انتخاب کرد و دانش‌آموز سوم را می‌توان به ۲۸ طریق انتخاب کرد. بنابراین  $30 \times 29 \times 28$  راه برای انتخاب داریم. البته، هر تیم را چند بار شمرده‌ایم: هر تیم سه‌نفره را می‌توان از راه‌های مختلف انتخاب کرد. مثلاً اینکه اول دانش‌آموز  $A$  را انتخاب کنیم، بعد دانش‌آموز  $B$  را انتخاب کنیم و آخر سر دانش‌آموز  $C$  را انتخاب کنیم، مثل این است که ابتدا دانش‌آموز  $C$  را انتخاب کنیم، بعد دانش‌آموز  $A$  را انتخاب

کنیم و بعد دانش‌آموز B را انتخاب کنیم. چون تعداد جایگشتهای ۳ شیء ۳! است، هر تیم را دقیقاً ۳! یا ۶ بار شمرده‌ایم. بنابراین  $\binom{30}{3}$  برابر است با  $\frac{30 \times 29 \times 28}{3!}$ .

دقیقاً به همین روش می‌توانیم دستوری برای محاسبه  $\binom{n}{k}$  پیدا کنیم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

توصیه به معلمان. عدد  $\binom{n}{k}$  موضوع اصلی این فصل است. بنابراین، مهم است که مطمئن شوید همه دانش‌آموزان بفهمند که در این فصل چه چیزی را می‌شماریم و تعداد ترکیبها را چگونه حساب می‌کنیم. باید پیش از نشان دادن دستورکلی، درباره راه‌حل مسأله‌هایی شبیه مسأله ۲ بحث کرد. چند مسأله دیگر را بررسی می‌کنیم.

مسأله ۳. به چند طریق می‌توان ۴ رنگ را از میان ۷ رنگ مفروض انتخاب کرد؟  
پاسخ:  $\binom{7}{4}$  یا ۳۵ طریق.

مسأله ۴. دانش‌آموزی ۶ کتاب ریاضی دارد و دانش‌آموز دیگری ۸ کتاب. به چند طریق می‌توان ۳ تا از کتابهای دانش‌آموز اول را با ۳ تا از کتابهای دانش‌آموز دوم معاوضه کرد؟

راه‌حل. دانش‌آموز اول می‌تواند ۳ کتابش را به  $\binom{6}{3}$  طریق انتخاب کند و دانش‌آموز دوم می‌تواند این کار را به  $\binom{8}{3}$  طریق بکند. بنابراین تعداد راههای معاوضه کتابها برابر است با

$$\binom{6}{3} \binom{8}{3} = 1120$$

مسأله ۵. ۲ معلم و ۷ دانش‌آموز در باشگاه شطرنجی عضوند. تیمی چهار نفره باید برای شرکت در مسابقه‌ای انتخاب شود، و باید دست‌کم یک معلم عضو این تیم باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل. در تیم موردنظر یا ۱ معلم باید باشد یا ۲ معلم. در حالت دوم، ۲ دانش‌آموز را می‌توان به  $\binom{7}{2}$  طریق به تیم موردنظر اضافه کرد. اگر فقط یک معلم در تیم باشد (به دو طریق می‌توان این معلم را انتخاب کرد)، می‌توان تیم را با اضافه کردن ۳ دانش‌آموز به  $\binom{7}{3}$  طریق کامل کرد. بنابراین تعداد تیمهایی که می‌توان تشکیل داد برابر است با

$$\binom{7}{2} + 2 \binom{7}{3} = 91$$

مسأله ۶. به چند طریق می‌توان ۱۰ پسر را به دو تیم بسکتبال ۵ نفره تقسیم کرد؟

راه حل. تیم اول را می‌توان به  $(\Delta^0)$  طریق انتخاب کرد. با این انتخاب، ترکیب تیم دوم کاملاً مشخص می‌شود. البته، در این نحوه شمارش هر جفت تیم مکمل - مثلاً تیم A و B - را دو بار شمرده‌ایم: بار اول وقتی که تیم A را به عنوان تیم اول انتخاب کرده‌ایم و بار دوم وقتی که تیم B را به عنوان تیم دوم انتخاب کرده‌ایم. بنابراین جواب  $\frac{(\Delta^0)}{2}$  است.

یادداشت. وقتی که با این دستورها آشنا شدیم لزومی ندارد که جوابها را به شکل عددهای اعشاری بنویسیم. اگر عبارت  $\binom{n}{k}$  در جواب وجود داشته باشد، اصلاً بد نیست.

توجه کنید که اینکه از دستور محاسبه  $\binom{n}{k}$  ویژگی ۱ دربارهٔ مقارن بودن یعنی  $\binom{k}{n-k} = \binom{n}{k}$  به دست بیاید تقریباً نامعلوم است. با وجود این، می‌توانیم با ضرب کردن صورت و مخرج این دستور در  $(n-k)!$  کاری کنیم که مقارنتر به نظر آید:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 3 \times 2 \times 1}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

اکنون ویژگی ۱ با استفاده از این دستور به سادگی به دست می‌آید. تمرین. ویژگی دوم  $\binom{n}{k}$  را با استفاده از دستور بالا ثابت کنید.

توصیه به معلمان. توصیه می‌کنیم که دست کم یک جلسه از محفل ریاضی‌تان را صرف تعریف، بیان ویژگیها و دستور محاسبهٔ عدد  $\binom{n}{k}$  کنید. همچنین بهتر است که در این جلسه تعدادی مسألهٔ ساده حل کنید و در جلسه‌های بعدی مسأله‌هایی مرتبط با این موضوع را مطرح کنید.

مسألهٔ ۷. ده نقطه روی صفحه طوری انتخاب شده‌اند که هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. چند مثلث وجود دارند که رأسهایشان از این نقطه‌ها هستند؟

مسألهٔ ۸. جوخه‌ای از ۳ افسر، ۶ استوار و ۶۰ سرباز تشکیل شده است. به چند طریق می‌توان دسته‌ای شامل یک افسر، ۲ استوار و ۲۰ سرباز برای مأموریت انتخاب کرد؟

مسألهٔ ۹. ده نقطه روی خطی راست و یازده نقطه روی خط راست دیگری، موازی خط اول، انتخاب شده‌اند. چند

الف) مثلث

ب) چهارضلعی

وجود دارد که رأسهایشان از این نقطه‌ها هستند؟

مسئله ۱۰. مجموعه‌ای از ۱۵ کلمه مختلف مفروض است. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌ای انتخاب کرد که بیش از ۵ کلمه نداشته باشد؟

مسئله ۱۱. ۴ جفت زن و شوهر در باشگاهی عضوند. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفره انتخاب کرد که هیچ زن و شوهری عضو این کمیته نباشند؟

مسئله ۱۲. کلاسی ۳۱ دانش‌آموز دارد که پت و جان هم عضو آن‌اند. به چند طریق می‌توان تیم فوتبالی (۱۱ نفره) تشکیل داد که پت و جان با هم در این تیم نباشند؟

مسئله ۱۳. به چند طریق می‌توان حروف کلمه «ASUNDER» را طوری از نو مرتب کرد که حروف صدا دار به ترتیب الفبایی باشند، همین‌طور حروف بی‌صدا؟ مثال: (A-E-U, D-N-R-S) DANERUS.

مسئله ۱۴. باید از میان ۱۲ دانش‌آموز و ۱۰ معلم تیمی ۵ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این تیم را انتخاب کرد که حداکثر ۳ معلم در آن باشند؟

مسئله ۱۵. به چند طریق می‌توان ۱۲ سرباز سفید و ۱۲ سرباز سیاه را روی خانه‌های سیاه صفحه‌ای شطرنجی قرار داد؟

مسئله ۱۶. الف) به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به سه تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان دو تیم ۵ نفره از میان ۱۵ نفر انتخاب کرد؟

مسئله ۱۷. عددهای ۱ تا ۱۳ را روی سیزده کارت قرمز نوشته‌ایم، همین‌طور در مورد سیزده کارت آبی، سیزده کارت زرد و سیزده کارت سبز. به چند طریق می‌توانیم ۱۰ کارت از این ۲۵ کارت انتخاب کنیم که الف) دقیقاً روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده باشد؟

ب) دست‌کم روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده باشد؟

مسئله ۱۸. چند عدد شش‌رقمی ۳ رقم زوج دارند و ۳ رقم فرد؟

مسئله ۱۹. چند عدد ده‌رقمی وجود دارد که مجموع رقمهای هر کدامشان

الف) برابر با ۲ است؟

ب) برابر با ۳ است؟

ج) برابر با ۴ است؟

مسئله ۲۰. شخصی ۶ دوست دارد. او می‌خواهد عصر ۵ روز متوالی ۳ نفر از دوستانش را به خانه‌اش دعوت کند، به طوری که هیچ گروه سه‌نفره‌ای دو بار دعوت نشده باشند. به چند طریق می‌تواند این کار را بکند؟

مسأله ۲۱. برای شرکت در لاتاری ورزشی در روسیه باید ۶ عدد از ۴۵ عددی را که روی کارتهای لاتاری چاپ شده‌اند انتخاب کنید (قطع همه کارتهای چاپ شده یکسان است).

الف) به چند طریق می‌توان کارت لاتاری را تکمیل کرد؟

ب) در پایان لاتاری، برگزارکنندگان تصمیم می‌گیرند که تعداد راههای تکمیل کارت لاتاری را طوری حساب کنند که دقیقاً ۳ عدد از ۶ عدد انتخاب شده در میان ۶ عدد برنده باشند. به آنها کمک کنید جواب را پیدا کنند.

## ۲. مثلث پاسکال

این بخش به دلیل ترکیب کردن تقریباً تمامی ایده‌هایی که پیش از این در این فصل توضیح داده شده‌اند قابل توجه است. در این بخش به حکمهای ترکیبیاتی فوق‌العاده زیبایی می‌رسیم. در آغاز، فرض کنید که به‌ازای عددی ثابت مانند  $n$ ، مقدار همه عددهایی مانند  $\binom{n}{k}$  را می‌دانیم. در این صورت، با استفاده از ویژگی دوم، یعنی

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

به‌سادگی می‌توانیم به‌ازای همه  $k$ ها  $\binom{n+1}{k}$  را حساب کنیم.

چون  $\binom{0}{0} = 1$ ،  $1$  را در وسط خط اول صفحه کاغذ می‌نویسیم. در خط بعدی عددهای  $\binom{1}{0}$  و  $\binom{1}{1}$  را، که هر دو برابر با  $1$  اند، طوری می‌نویسیم که  $\binom{0}{0}$  بالای فاصله میان این عددها قرار داشته باشد (شکل ۷۴ را ببینید).



شکل ۷۴

عددهای  $\binom{2}{0}$  و  $\binom{2}{1}$  هم برابر با  $1$  اند. این عددها را در خط بعدی می‌نویسیم (شکل ۷۵ را ببینید) و  $\binom{2}{1}$  را هم که بنابر ویژگی دوم برابر است با  $\binom{1}{0} + \binom{1}{1}$  میان آنها می‌نویسیم (شکل ۷۶ را ببینید). بنابراین، عدد  $\binom{2}{1}$  برابر است با مجموع دو عددی که در سطر قبلی در سمت چپ و سمت راست آن قرار دارند.

به همین قاعده می‌توانیم همه سطرهای بعدی را پر کنیم؛ ابتدا عددهای  $\binom{n}{0}$  و  $\binom{n}{n}$  را در دو طرف

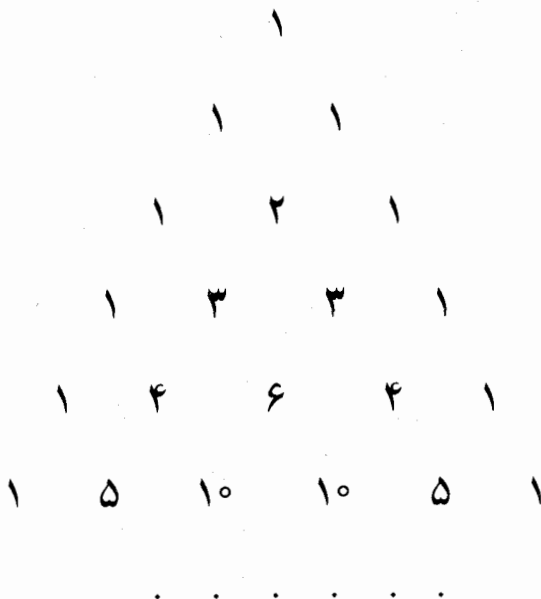


شکل ۷۶

شکل ۷۵

می نویسیم (این عددها همواره ۱ اند) و سپس مجموع هر دو عدد مجاور در سطر قبیل را در فاصله بین آنها در سطر بعد می نویسیم.

به این ترتیب، مثلث عددی که در شکل ۷۷ نشان داده ایم به دست می آید. این مثلث را مثلث پاسکال می نامند.



شکل ۷۷

نحوه تشکیل مثلث پاسکال به گونه ای است که عدد  $\binom{n}{k}$  در مکان  $(k + 1)$  ام سطر  $(n + 1)$  ام این مثلث جای گرفته است. بنابراین، بهتر است که شماره سطرها و شماره جای عددها در سطرها را از صفر شروع کنیم. در این صورت عدد  $\binom{n}{k}$ ،  $k$  امین عدد در سطر  $n$  ام است.

توصیه به معلمان. پیش از اینکه بحث را ادامه دهید، دانش‌آموزان باید ارتباط عددهایی مانند  $\binom{n}{k}$  و مثلث پاسکال را بیاموزند. بهترین تمرین برای رسیدن به این هدف، محاسبه ترکیبها با استفاده از فرایند مثلثی‌ای است که در بالا توصیف کردیم.

اکنون ویژگیهای مثلث پاسکال را بررسی می‌کنیم. مجموع عددهای چند سطر اول را حساب کنید:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

خیلی طبیعی است که حدس بزیم مجموع عددهای سطر  $n$ ام برابر با  $2^n$  است. این حکم را به استقرای روی  $n$  ثابت می‌کنیم (فصل «استقرا» را ببینید). پایه استقرا را قبلاً ثابت کرده‌ایم. برای اثبات گام استقرایی، توجه کنید که هر عدد در هر سطر در مجموعی برای تشکیل دو عدد مجاور در سطر بعدی به‌کار رفته است. بنابراین مجموع عددهای سطر بعدی دقیقاً دو برابر مجموع سطری است که مجموع آن را می‌دانیم. اثبات گام استقرایی کامل شده است.

همچنین، می‌توانیم ثابت کنیم که در هر سطر مثلث پاسکال (بجز صفر صفرم) مجموع عددهایی که شماره جایشان زوج است با مجموع عددهایی که شماره جایشان فرد است برابر است. می‌توانیم حکمی را که درباره مجموع عددهای سطرهای مثلث پاسکال ثابت کردیم به‌شکل اتحاد ترکیبیاتی مهم

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

بنویسیم.

برای این اتحاد اثباتی ترکیبیاتی می‌آوریم. تعبیر ترکیبیاتی این اتحاد این است که تعداد تیمهایی که می‌توان از  $n$  دانش‌آموز تشکیل داد، به‌شرطی که تعداد عضوهای تیم دلخواه باشد، برابر است با  $2^n$  (یا به زبان نظریه مجموعه‌ها: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای  $n$  عضوی برابر است با  $2^n$ ).

دانش‌آموزان را به دلخواه از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کنیم. سپس برای هر تیمی که می‌توان تشکیل داد دنباله‌ای از ۰ و ۱‌ها به‌طریق زیر تشکیل می‌دهیم: اگر دانش‌آموز اول عضو تیم باشد، عضو اول دنباله ۱ است و در غیر این صورت ۰ است. به همین ترتیب عضو دوم، عضو سوم، ... را تعریف می‌کنیم. واضح است که تیمهای مختلف نظیر دنباله‌های مختلف‌اند و برعکس. بنابراین تعداد همه تیمهایی که می‌توان تشکیل داد برابر است با تعداد همه دنباله‌های  $n$  عضوی از ۰ و ۱. هر عضو چنین دنباله‌هایی یا ۰ است یا ۱، یعنی می‌توان آن را به دو طریق انتخاب کرد. بنابراین تعداد همه چنین دنباله‌هایی برابر است با

$$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$$

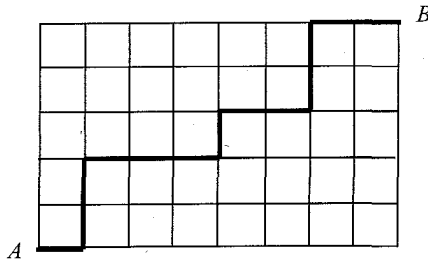
یادداشت. مهمترین قسمت این اثبات برقراری ارتباط میان تیمها و دنباله‌هایی از  $0$  و  $1$  است. این تعبیر معمولاً در حل مسأله‌های ترکیبیاتی دیگر هم خیلی مفید است. در اینجا دو نمونه دیگر از این دست آورده‌ایم.

مسأله ۲۲. شخصی  $10$  دوست دارد. او می‌خواهد طی چند روز تعدادی از دوستانش را به صرف ناهار دعوت کند، به طوری که ترکیب مدعوین هیچ‌گاه تکراری نباشد (مثلاً، می‌تواند هیچ‌کسی را در یک روز دعوت نکند). چند روز پشت سر هم می‌تواند این کار را تکرار کند؟

مسأله ۲۳. پلکانی  $7$  پله دارد (پای پلکان و بالای آن را نشمرده‌ایم). هنگام پایین آمدن می‌توانیم چند پله‌یکی کنیم، حتی  $7$  پله را. به چند طریق می‌توان از این پلکان پایین آمد؟

پیش از اینکه ویژگی بعدی مثلث پاسکال را بگوییم مسأله‌ای را بررسی می‌کنیم که در راه حل آن عددهایی مانند  $\binom{n}{k}$  به‌طور غیرمنتظره ظاهر می‌شوند.

مسأله ۲۴. نقشه شهری در شکل ۷۸ نشان داده شده است. همه خیابانها یک طرفه‌اند، در نتیجه فقط می‌توانیم به سمت «شرق» یا «شمال» رانندگی کنیم. به چند طریق می‌توان از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  رفت؟



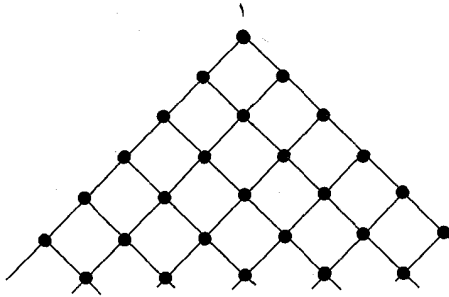
شکل ۷۸

راه حل. هر پاره‌خطی که دو نقطه مجاور روی نقشه را به هم وصل می‌کند «خیابان» می‌نامیم. معلوم است که هر راهی از  $A$  به  $B$  دقیقاً  $13$  خیابان دارد، که  $8$  تای آنها افقی‌اند و  $5$  تای آنها عمودی. هر راهی را که در نظر بگیریم، می‌توانیم دنباله‌ای از حرفهای  $N$  و  $E$  به شکل زیر تشکیل دهیم: وقتی که به سمت «شمال» رانندگی می‌کنیم یک حرف  $N$  و وقتی که به سمت «شرق» حرکت می‌کنیم یک حرف  $E$  به دنباله اضافه می‌کنیم. مثلاً راهی که در شکل ۷۸ نشان داده شده نظیر دنباله  $ENNEEENEENNEE$  است. هر دنباله که به این طریق ساخته می‌شود  $13$  حرف دارد -  $8$  حرف  $E$  و  $5$  حرف  $N$ . کافی است که تعداد چنین دنباله‌هایی را حساب کنیم. هر دنباله‌ای با دانستن  $5$  جایی که حرفهای  $N$  قرار گرفته‌اند (با، معادل آن،  $8$  جایی که حرفهای  $E$  قرار گرفته‌اند) به‌طور یکتا

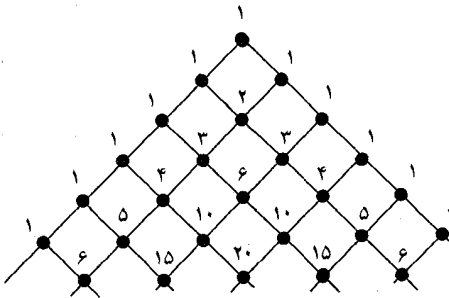


مشخص می‌شود. پنج جا از ۱۳ جا را می‌توان به  $\binom{13}{5}$  طریق انتخاب کرد. بنابراین تعداد دنباله‌های موردنظر، و در نتیجه تعداد راههای موردنظر، برابر است با  $\binom{13}{5}$ .  
از همین روش استدلال معلوم می‌شود که در مستطیل  $m \times n$ ، جواب برابر است با  $\binom{m+n}{m}$  یا معادل آن،  $\binom{m+n}{n}$ .

مثلت پاسکال را در نظر بگیرید و به جای عددهای آن نقطه بگذارید (شکل ۷۹ را ببینید). کنار نقطه  $S$ ، بالاترین نقطه، عدد ۱ را بنویسید و بعد کنار هر نقطه دیگر تعداد راههایی را که می‌توان از نقطه  $S$  به این نقطه رسید، به شرطی که فقط رو به پایین حرکت کنیم، بنویسید. معلوم می‌شود که دوباره به مثلت پاسکال می‌رسیم (شکل ۸۰ را ببینید).

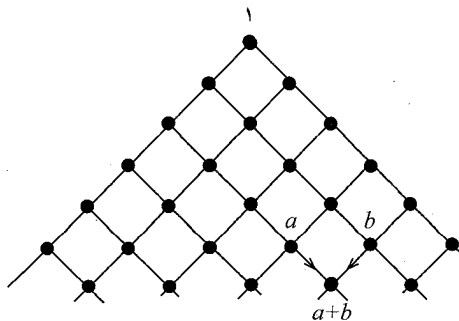


شکل ۷۹



شکل ۸۰

یکی از روشهای اثبات این حکم شبیه روش راه حل مسأله قبل است. البته، در اینجا، مانند اثبات این حکم که مجموع عددهای هر سطر توانی از دو است، از استقرا استفاده می‌کنیم. در حقیقت، برای رسیدن به  $k$ امین نقطه در سطر  $m$ ام فقط می‌توان یا از  $(k-1)$ امین نقطه سطر  $(m-1)$ ام رفت یا از  $k$ امین نقطه سطر  $(m-1)$ ام (شکل ۸۱ را ببینید). بنابراین برای پیدا کردن تعداد راههای موردنظر فقط کافی است تعداد راههای رفتن به این دو نقطه را در سطر قبل با هم جمع کنیم. در نتیجه، با



شکل ۸۱

استفاده از فرض، تعداد راههایی که می‌توان از نقطه  $S$  به  $k$ امین نقطه در سطر  $n$ ام رفت برابر است با

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

یادداشت. هر دو ویژگی مثلث پاسکال را که در بالا آوردیم به دو طریق ثابت کردیم - با استفاده از ایده‌های «هندسی» و از طریق استدلال ترکیبیاتی. هنگام حل کردن مسأله‌های مختلف، به‌ویژه اتحادهای ترکیبیاتی، استفاده از هر دو این روشها مفید است.

برخی دیگر از ویژگیهای مثلث پاسکال را در زیر به‌عنوان مسأله آورده‌ایم که باید آنها را حل کنید. می‌توان این مسأله‌ها را به زبان مثلث پاسکال یا اتحادهای ترکیبیاتی بیان کرد.

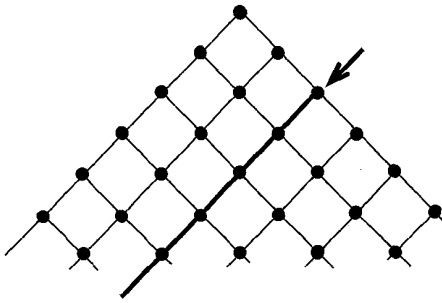
مسأله ۲۵. ثابت کنید می‌توان از میان  $n$  شیء به  $2^{n-1}$  طریق تعدادی زوج شیء انتخاب کرد.

مسأله ۲۶. ثابت کنید

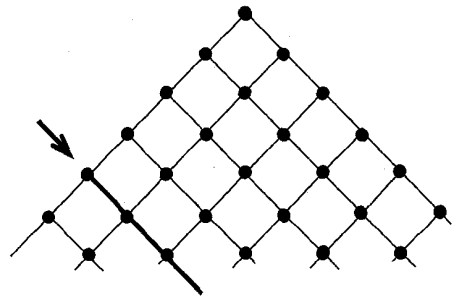
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

برای راحتی کار، از تعریفهای زیر استفاده می‌کنیم. نیمخطهای موازی ضلعهای مثلث پاسکال را قطرهای آن می‌نامیم. به‌طور دقیقتر، نیمخطهای موازی ضلع سمت راست مثلث را قطرهای راست می‌نامیم (یکی از آنها را در شکل ۸۲ مشخص کرده‌ایم) و نیمخطهای موازی ضلع سمت چپ مثلث را قطرهای چپ می‌نامیم (شکل ۸۳ را ببینید).

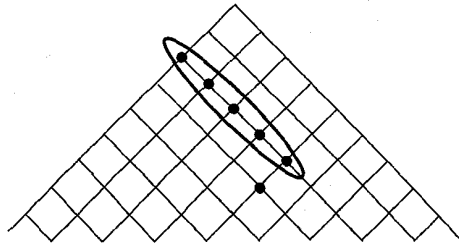
مسأله ۲۷. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند  $a$  برابر است با مجموع عددهایی در قطر راست قبل از آن، که از عددی که در انتهاالیه سمت چپ این قطر قرار گرفته شروع می‌شوند و به عددی که روی همان قطر چپی که  $a$  قرار دارد ختم می‌شوند (شکل ۸۴ را ببینید).



شکل ۸۳

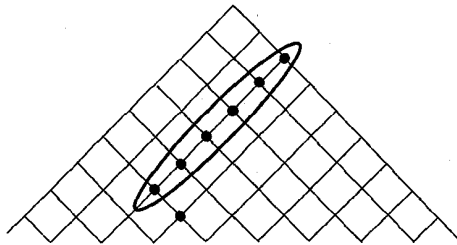


شکل ۸۲



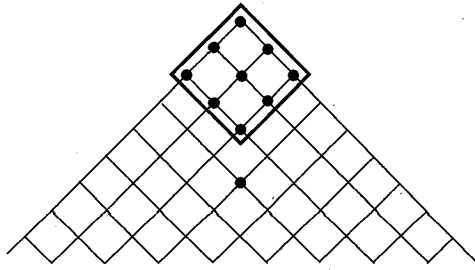
شکل ۸۴

مسأله ۲۸. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند  $a$  برابر است با مجموع عددهایی در قطر چپ قبل از آن، که از عددی که در منتهای سمت راست این قطر قرار گرفته شروع می‌شوند و به عددی که روی همان قطر راستی که  $a$  قرار دارد ختم می‌شوند (شکل ۸۵ را ببینید).



شکل ۸۵

مسأله ۲۹. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند  $a$  منهای ۱ برابر است با مجموع عددهایی که درون متوازی‌الاضلاعی که به ضلعهای مثلث و قطرهایی که از  $a$  می‌گذرند محدود است قرار دارند (عددهایی را که روی این قطرها قرار دارند در نظر نمی‌گیریم؛ شکل ۸۶ را ببینید).



شکل ۸۶

مسأله ۳۰.\* ثابت کنید

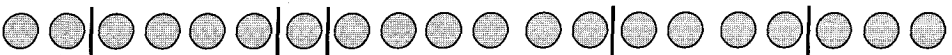
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

### ۳. توپها و جدارها

در ابتدا دو مسأله جالب را بررسی می‌کنیم. هر دو این مسأله‌ها را می‌توان یکراست از طریق شمارش سخت و پیچیده هم حل کرد (این راه را هم امتحان کنید، اما بعداً). از طرف دیگر، می‌توان مسأله را به‌گونه‌ای تعبیر کرد که نسبتاً راحت به جواب (که در هر دو مورد تعداد ترکیهاست) رسید.

مسأله ۳۱. شش جعبه را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان ۲۰ توپ یکسان را در این جعبه‌ها طوری قرار داد که هیچ‌کدام خالی نماند؟

راه‌حل. توپها را در یک ردیف بچینید. برای مشخص کردن نحوه توزیع توپها در جعبه‌ها باید این ردیف را با استفاده از پنج جدار به شش گروه افزایش دهید: گروه اول برای جعبه اول، گروه دوم برای جعبه دوم، و همین‌طور در مورد بقیه (شکل ۸۷ را ببینید). بنابراین، تعداد راههای توزیع توپها در جعبه‌ها برابر است با تعداد راههای قرار دادن پنج جدار در فاصله میان توپها. هر جدار را می‌توان در یکی از ۱۹ شکاف موجود قرار داد (۱ - ۲۰ یا ۱۹ فاصله میان ۲۰ توپ وجود دارد) و هیچ دو تایی از آنها را نمی‌توان در یک شکاف قرار داد (زیرا این کار یعنی اینکه یکی از جعبه‌ها خالی بماند). بنابراین تعداد راههای افزایش برابر با  $\binom{19}{5}$  است.



شکل ۸۷

تمرین. به چند طریق می‌توان  $n$  توپ یکسان را در  $m$  جعبه که از ۱ تا  $m$  شماره خورده‌اند طوری قرار داد که هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟

مسئله ۳۲. شش جعبه را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان  $2^0$  توپ یکسان را در این جعبه‌ها توزیع کرد (این بار ممکن است بعضی جعبه‌ها خالی بمانند)؟

راه‌حل. ردیفی از ۲۵ شیء در نظر بگیرید:  $2^0$  توپ یکسان و ۵ جدار یکسان، که به‌طور دلخواه مرتب شده‌اند. هر چنین ردیفی بی‌هیچ ابهامی نظیر یکی از راههای افزایش توپهاست: توپهایی که سمت چپ جدار اول قرار گرفته‌اند در جعبه اول قرار می‌گیرند؛ توپهایی که بین جدار اول و جدار دوم قرار گرفته‌اند در جعبه دوم قرار می‌گیرند، و همین‌طور در مورد بقیه (ممکن است دو تا از جدارها در این ردیف کنار هم باشند، که یعنی جعبه نظیرشان خالی است). بنابراین، تعداد راههای افزایش توپها برابر است با ردیفهایی که می‌توان از  $2^0$  توپ و ۵ جدار تشکیل داد؛ یعنی، برابر است با  $\binom{25}{5}$  (هر سطر با جاهایی که جدارها قرار گرفته‌اند کاملاً مشخص می‌شود).

خاطر نشان می‌کنیم که راه‌حل دیگری برای مسئله ۳۱ به‌طریق زیر به‌دست می‌آید: در هر جعبه یک توپ قرار دهید (برای اینکه هیچ جعبه‌ای خالی نماند)، سپس از نتیجه مسئله ۳۲ (در مورد ۱۴ توپ به‌جای  $2^0$  توپ) استفاده کنید.

با استفاده از ایده‌هایی که ضمن حل کردن دو مسئله بالا پیدا کردیم می‌توانیم مسئله نسبتاً دشوارتر زیر را بسیار استادانه حل کنیم.

مسئله ۳۳. به چند طریق می‌توان عدد طبیعی  $n$  را به شکل مجموع

(الف)  $k$  عدد طبیعی نوشت؟

(ب)  $k$  عدد صحیح نامنفی نوشت؟

راهنمایی:  $n$  را به‌شکل مجموع  $n$  تا ۱ بنویسید:

$$n = 1 + 1 + \dots + 1$$

این  $n$  تا یک را «توپها» و  $k$  تا جمعوند را «جعبه‌ها» در نظر بگیرید. جوابها چنین‌اند: (الف)  $\binom{n-1}{k-1}$ ؛ (ب)  $\binom{n+k-1}{n}$

یادداشت. راه‌حلهایی که دیده‌ایم باز هم نشان می‌دهند که فرمول‌بندی مجدد خوب حکم مسئله تا چه حد ممکن است مهم باشد. دلیل اینکه مسئله توزیع توپها در جعبه‌ها را اینقدر کامل بررسی کردیم این است که چنین فرمول‌بندیهای مجددی (وارد کردن «جدارها» و غیره) برای حل کردن مسئله‌هایی کاملاً متفاوت، نه‌تنها در ترکیبیات، بلکه در سایر شاخه‌های ریاضی و به‌طور کلیتر در علوم، بسیار مفید است.

مسئله ۳۴. به چند طریق می‌توان ۱۲ سکه یک ریالی را در پنج کیف پول مختلف طوری قرار داد که هیچ‌کدام از آنها خالی نماند؟

مسئله ۳۵. صحافی می‌خواهد ۱۲ کتاب یکسان را با جلدهایی به رنگ قرمز، سبز یا آبی جلد کند. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسئله ۳۶. به چند طریق می‌توان گردنبندی (به شکل دایره‌ای کامل) را که ۳۰ قطعه مروارید در آن به کار رفته است به ۸ قسمت تقسیم کرد (فقط می‌توان گردنبند را از جاهایی میان مرواریدها برید)؟

مسئله ۳۷. سی نفر به ۵ نامزد احراز پستی رأی می‌دهند. اگر هر یک از آنها به یکی از نامزدها رأی دهد چند ترکیب از نظر تعداد رأی‌هایی که ممکن است به هر یک از نامزدها داده شود وجود دارد؟

مسئله ۳۸. در فروشگاهی ۱۰ نوع کارت تبریک وجود دارد. به چند طریق می‌توان الف) ۱۲ کارت تبریک خرید؟  
ب) ۸ کارت تبریک خرید؟

مسئله ۳۹. قطاری با  $m$  نفر مسافر باید در  $n$  ایستگاه توقف کند.

الف) مسافران به چند طریق ممکن است در ایستگاهها از قطار پیاده شوند؟  
ب) اگر فقط تعداد مسافرانی را که در هر ایستگاه پیاده می‌شوند در نظر بگیریم، به سؤال قسمت الف) جواب دهید.

مسئله ۴۰. در کیفی ۲۰ سکه یک تومانی، ۲۰ سکه پنج تومانی و ۲۰ سکه ده تومانی قرار دارد. به چند طریق می‌توانیم ۲۰ سکه از این ۶۰ سکه انتخاب کنیم؟

مسئله ۴۱. به چند طریق می‌توان هفت توپ سفید و دو توپ سیاه را در نه جعبه قرار داد؟ می‌توان برخی جعبه‌ها را خالی گذاشت و جعبه‌ها متمایزند.

مسئله ۴۲. سه نفر به چند طریق می‌توانند شش سیب یک‌شکل، یک پرتقال، یک آلو و یک نارنگی را میان خودشان تقسیم کنند (با این شرط که میوه‌ها را نبرند)؟

مسئله ۴۳. به چند طریق می‌توان چهار توپ سیاه، چهار توپ سفید و چهار توپ آبی را در شش جعبه مختلف گذاشت؟

مسئله ۴۴. جماعتی  $n$  نفره نماینده‌شان را با رأی‌گیری انتخاب می‌کنند.

الف) اگر هر کسی به یک نفر (که ممکن است خودش هم باشد) رأی دهد، به چند طریق می‌توان نتیجه رأی‌گیری را «علنی» کرد؟ رأی‌گیری علنی یعنی اینکه نه تنها رأی‌های کسب‌شده هر کس را می‌گوییم، بلکه نام کسانی را که به هر کس رأی داده‌اند هم می‌گوییم.

ب) اگر رأی‌گیری علنی نباشد (و فقط تعداد رأیهای داده شده به هر نفر را اعلام کنیم)، به سؤال قسمت (الف) پاسخ دهید.

مسئله ۴۵. به چند طریق می‌توان پنج توپ قرمز، پنج توپ آبی و پنج توپ سبز را طوری در یک ردیف چید که هیچ دو توپ آبی‌ای پشت سر هم قرار نداشته باشند؟

مسئله ۴۶.\* به چند طریق می‌توان عدد  $۱۰۰۰۰۰۰$  را به شکل حاصل ضرب سه عدد طبیعی نوشت (حاصل ضربهایی را که ترتیب ضرب عاملهایشان متفاوت است متمایز در نظر می‌گیریم)؟

مسئله ۴۷.\* ۱۲ کتاب در قفسه‌ای چیده شده است. به چند طریق می‌توان پنج تا از این کتابها را طوری انتخاب کرد که از کتابهای انتخاب شده هیچ دو تایی در قفسه کنار هم نبوده باشند؟

#### ۴.\* قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن

توصیه به معلمان. این بخش را ستاره‌دار کرده‌ایم، زیرا برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی نسبتاً دشوار است. با وجود این، تصمیم گرفتیم که این فصل را حذف نکنیم، زیرا مطالبی خیلی نزدیک به عددهایی مانند  $\binom{n}{k}$  و مثلث پاسکال دارد. البته بی‌هیچ شکی قضیهٔ دوجمله‌ای جزئی ضروری برای آموزش ریاضی است، هر چند که می‌توان آموزش آن را به بعد موکول کرد.

یادداشت. این موضوع به ترکیبیات ربط دارد، اما مبحثی جدا از آن است. با این وجود، بهتر است که صورت و اثبات قضیهٔ اصلی آن را در اینجا بیاوریم، زیرا در ترکیبیات مکرراً از آن استفاده می‌کنند و در اثباتش هم ایده‌های ترکیبیاتی به‌کار می‌آید.

اتحاد

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

را همه می‌شناسند.

می‌خواهیم دستوری به‌دست بیاوریم که با استفاده از آن بتوانیم دوجمله‌ای  $(a + b)$  را به هر توانی با نمای صحیح و نامنفی برسانیم. چند توان متوالی دوجمله‌ای موردنظر را بنویسید:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

معلوم است که ضریبهای عبارتهای سمت راست این اتحادها سطرهای متناظر مثلث پاسکال را

تشکیل می دهند. بنابراین می توانیم حدس بزنیم که اتحاد زیر درست است:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

در حقیقت، این اتحاد درست است و این بسط را قضیه دوجمله‌ای نیوتن می نامند. برای اثبات این قضیه، حاصل ضرب

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)(a + b)$$

را بدون اینکه جمله‌های مشابه را دسته بندی کنیم و بدون اینکه ترتیب عاملها را در هر یک از یک جمله ایها تغییر دهیم بسط می دهیم. مثلاً

$$(a + b)(\underline{a} + \underline{b})(\bar{a} + \bar{b}) \\ = a\underline{a}\bar{a} + a\underline{a}\bar{b} + a\underline{b}\bar{a} + a\underline{b}\bar{b} + \underline{b}a\bar{a} + \underline{b}a\bar{b} + \underline{b}\bar{a} + \underline{b}\bar{b}$$

اکنون ضریب جمله  $a^{n-k}b^k$  را پس از ساده کردن جمله‌های مشابه پیدا می کنیم. معلوم است که این ضریب برابر با تعداد یک جمله ایهایی است که  $b$  دقیقاً  $k$  بار (و  $a$  دقیقاً  $n - k$  بار) در آنها آمده است. این تعداد برابر است با  $\binom{n}{k}$ ، زیرا این عدد برابر است با تعداد راههای انتخاب کردن  $k$  جا برای قرار دادن حرف  $b$ .

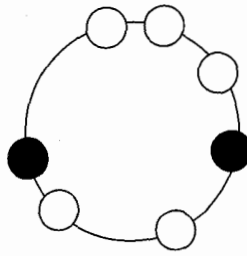
تمرین. قضیه دوجمله‌ای را به استقرا ثابت کنید.

#### ۴. چند مسأله دیگر

توصیه به معلمان. مطالعه این بخش اختیاری است، زیرا مطلب جدید مهمی ندارد و صرفاً تعدادی مسأله در آن آورده ایم. از گنجاندن این بخش در این فصل دو هدف را در نظر داشته ایم. اول اینکه مسأله‌های زیادتری را برای کلاس فراهم کرده باشیم. دوم اینکه پس از آموختن ایده‌های اصلی ترکیبیات بهتر است که بارها و بارها آنها را مرور کرد. این کار را می توان در جلسه‌های جداگانه، المپیادهای ریاضی، «پیکارهای ریاضی» و رویدادهایی از این قبیل انجام داد. می توان از مسأله‌های زیر برای جلسه‌های دوره کردن یا مسابقه‌ها استفاده کرد.

مسأله ۴۸. با استفاده از ۵ مهره قرمز یک جور و ۲ مهره آبی یک جور چند گردنبد می توان ساخت؟ (شکل ۸۸ را ببینید).





شکل ۸۸

مسئله ۴۹. الف) باشگاهی ۳۰ نفر عضو دارد و مربی باشگاه باید ۴ نفر را برای شرکت در مسابقه دو

۱۰۰۰ متر انتخاب کند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان تیمی چهارنفره برای دو امدادی

$$۴۰۰ \text{ متر} + ۳۰۰ \text{ متر} + ۲۰۰ \text{ متر} + ۱۰۰ \text{ متر}$$

انتخاب کرد؟

مسئله ۵۰. در چند «کلمه» شش حرفی (انگلیسی) دست‌کم یک حرف A به‌کار رفته است (هر دنباله از حرفها را کلمه به حساب می‌آوریم)؟

مسئله ۵۱. به چند طریق می‌توان مسیر شکسته بسته‌ای با پاره‌خطهایی که رأسهایشان رأسهای شش‌ضلعی‌ای منتظم اند رسم کرد (اشکالی ندارد که پاره‌خطها یکدیگر را قطع کنند)؟

مسئله ۵۲. با استفاده از رقمهای ۱، ۲، ۳، و ۴ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۴ می‌توان نوشت، به شرطی که

الف) از هر رقم فقط یک بار استفاده کنیم.

ب) از هر رقم هر چند بار که خواهیم بتوانیم استفاده کنیم.

مسئله ۵۳. پدري ۲ سیب و ۳ گلابی دارد. او از شنبه تا چهارشنبه یکی از این میوه‌ها را به دخترش می‌دهد. به چند طریق می‌تواند این کار را بکند؟

مسئله ۵۴. گروه تئاتری ۳۰ بازیگر دارد. به چند طریق می‌توان دو گروه شش‌نفره از بازیگران را برای دو اجرای یک نمایش طوری انتخاب کرد که هیچ‌یک از بازیگران در هر دو اجرا حضور نداشته باشد؟

مسئله ۵۵. مجموع همهٔ عددهای سه‌رقمی را که می‌توان با رقمهای ۱، ۲، ۳، و ۴ نوشت پیدا کنید (تکرار رقمها اشکالی ندارد).

مسأله ۵۶. از هر یک از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد ۱۳ کارت داریم و روی کارتهای هر یک از رنگها هم عددهای ۱ تا ۱۳ را نوشته‌ایم. به چند طریق می‌توانیم شش تا از این ۵۲ کارت را طوری انتخاب کنیم که از هر رنگ کاردتی انتخاب شده باشد؟

مسأله ۵۷. به چند طریق می‌توان یک سکه ۱ تومانی و ده سکه بیست و پنج تومانی را در چهار جعبه متمایز قرار داد؟

مسأله ۵۸. تعداد عددهای صحیح از ۰ تا ۹۹۹۹۹۹ را پیدا کنید که در نمایش اعشاری آنها هیچ دو رقم کنار هم برابری وجود نداشته باشد.

مسأله ۵۹. از هر یک از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد ۹ کارت داریم و روی کارتهای هر یک از رنگها هم عددهای ۱ تا ۹ را نوشته‌ایم. به چند طریق می‌توانیم این ۳۶ کارت را به دو دسته طوری تقسیم کنیم که در هر دسته دقیقاً دو تا از کارتهایی که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است وجود داشته باشد؟

مسأله ۶۰. رخی در آخرین خانه سمت چپ نواری  $30 \times 1$  از خانه‌ها قرار گرفته است و در هر حرکت می‌توان آن را هر تعداد از خانه‌ها که بخواهیم به سمت راست حرکت دهیم.

(الف) به چند طریق می‌توان رخ را به آخرین خانه سمت راست برد؟

(ب) به چند طریق می‌توان با هفت حرکت، رخ را به آخرین خانه سمت راست برد؟

مسأله ۶۱. در هر طرف قایقی دقیقاً چهار قایقران می‌توانند بنشینند. به چند طریق می‌توان تیمی از قایقرانان از میان ۳۱ نفر داوطلب انتخاب کرد، به شرطی که ده نفر از آنان بخواهند در طرف چپ قایق بنشینند، دوازده نفر بخواهند در طرف راست قایق بنشینند و نه نفر بقیه هم طرف خاصی را در نظر نداشته باشند؟

مسأله ۶۲\*. در جدولی از  $m$  سطر و  $n$  ستون، خانه محل برخورد سطر  $p$ ام و ستون  $q$ ام را علامت گذاشته‌ایم. چند تا از مستطیلهایی که از خانه‌های این جدول تشکیل شده‌اند این خانه علامت‌دار را دربر دارند؟

مسأله ۶۳\*. مکعبی  $10 \times 10 \times 10$  از مکعبهای واحد تشکیل شده است. ملخی در مرکز یکی از مکعبهای گوشه‌ای، که آن را نقطه  $O$  می‌نامیم، نشسته است. ملخ در هر لحظه می‌تواند به مرکز یکی از مکعبهای که وجهی مشترک با مکعبی که در آن نشسته دارد ببرد، به شرط اینکه با این پرش فاصله نقطه  $O$  تا جایی که ملخ در آن نشسته بیشتر شود. این ملخ به چند طریق می‌تواند به مکعب واحدی که در گوشه مقابل قرار گرفته است برود؟

## فصل ۱۲

### ناورداها

#### ۱. مقدمه

معلم: «بباید بازی کنیم. همان طور که می بینید، ۱۱ عدد روی تخته سیاه وجود دارد - شش تا صفر و پنج تا یک. عمل زیر را  $10^{\circ}$  بار انجام دهید: دو تا از عددها را خط بزنید. اگر این دو عدد برابر بودند یک صفر دیگر روی تخته سیاه بنویسید و اگر برابر نبودند، یک عدد یک دیگر بنویسید. در دفترتان به هر ترتیبی که دلتان می خواهد این کار را انجام دهید. تمام شد؟ اکنون به شما می گویم که چه عددی دارید. عددتان باید ... یک باشد!»

پس از این بازی کوتاه یک سؤال به طور طبیعی پیش می آید: معلم از کجا می داند که عدد دانش آموزان در پایان بازی کدام عدد است؟ در حقیقت، می توان بازی را به طرق مختلف انجام داد، اما چه چیزی همواره یکسان است: پس از هر بار خط زدن و عدد نوشتن، مجموع عددهای روی تخته سیاه (یا در دفتر) عددی فرد است. به سادگی می توان این مطلب را تحقیق کرد، زیرا مجموع مورد نظر یا اصلاً کم یا زیاد نمی شود یا ۲ تا کم یا زیاد می شود. مجموع اولیه عددی فرد است، در نتیجه، پس از  $10^{\circ}$  بار خط زدن و عدد نوشتن، تنها عددی که باقی می ماند هم باید فرد باشد. برای توضیح این وضعیت، احتمالاً نمی توان از چیزی بجز کلمه جادویی «ناوردا» استفاده کرد.

خوب، «ناوردا» چه چیزی است؟ طبیعتاً، چیزی است که ناورداست، یعنی تغییر نمی کند - مانند زوجیت مجموع عددها در مثال قبل. مثال دیگری از ناوردا می آوریم:

مسأله ۱. در زبان  $AO-AO$  فقط دو حرف وجود دارد:  $A$  و  $O$ . علاوه بر این، قوانین زیر در این زبان رعایت می شوند: اگر دو حرف کنار هم  $AO$  را از کلمه ای حذف کنید، کلمه ای به دست می آورید که معنی اش همان قبلی است. به همین ترتیب، اگر ترکیبهای  $OA$  یا  $AAOO$  را هر جایی در کلمه ای

بگنجانید معنایش عوض نمی‌شود. آیا می‌توانیم مطمئن باشیم که معنی کلمه‌های AOO و OAA یکسان است؟

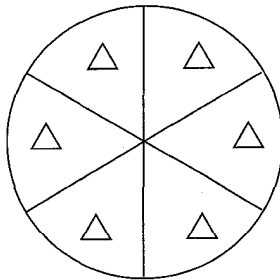
راه‌حل. توجه کنید که در حذف یا اضافه کردن هر ترکیبی از حرفها، تعداد Aها در این ترکیب با تعداد Oها برابر است. یعنی اینکه تفاضل تعداد Aها و تعداد Oها ناورداست. به مثال زیر توجه کنید

$$O \rightarrow OOA \rightarrow OAAOOOA \rightarrow OAOOA$$

در همهٔ این کلمه‌ها تعداد Oها از تعداد Aها یکی بیشتر است. راه‌حل را پی‌می‌گیریم. تفاضل موردنظر در مورد کلمهٔ AOO برابر با ۱- و در مورد کلمهٔ OAA برابر با ۱ است. بنابراین، نمی‌توانیم با استفاده از عملهای مجاز کلمهٔ OAA را از کلمهٔ AOO به دست بیاوریم، و نمی‌توانیم ادعا کنیم که این کلمه‌ها مترادف‌اند.

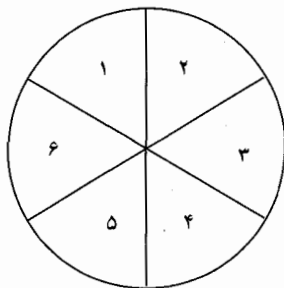
در این راه‌حل ایدهٔ اصلی مربوط به ناورداها را توضیح داده‌ایم. چند شیء داریم و مجازیم که عملیاتی را روی این اشیا انجام دهیم. سؤال این است: آیا می‌توان با استفاده از این عملیات یکی از این اشیا را از دیگری به دست آورد. برای پاسخ دادن به این سؤال کمیتی را مشخص می‌کنیم که تحت عملیات مجاز تغییر نمی‌کند؛ به عبارت دیگر، ناورداست. اگر مقدار این کمیت برای دو شیء موردنظر برابر نباشد، پاسخ منفی است - یعنی نمی‌توانیم یکی از اشیا را از دیگری به دست بیاوریم. مسألهٔ دیگری را بررسی می‌کنیم:

مسألهٔ ۲. دایره‌ای را به ۶ قطاع تقسیم کرده‌ایم (شکل ۸۹ را ببینید) و در هر یک از آنها یک سرباز قرار داده‌ایم. می‌توانیم هر دو تا از سربازها را همزمان به قطاعی که مرز مشترک با قطاعی که روی آن قرار دارند ببریم. آیا با این کار می‌توانیم همهٔ سربازها را در یک قطاع جمع کنیم؟



شکل ۸۹

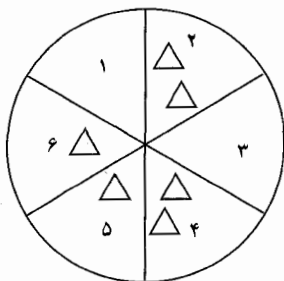
راه‌حل. قطاعها را در جهت ساعتگرد با عددهای از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم (شکل ۹۰ را ببینید) و به‌ازای هر آریشی از سربازها درون دایره، مجموع عددهای قطاعهایی را که در آنها سرباز قرار دارد در نظر می‌گیریم (تکرارها را هم می‌شماریم). این مجموع را  $S$  بنامید.



شکل ۹۰

مثال. در مورد آرایش نشان داده شده در شکل ۹۱،

$$S = 2 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 = 23$$



شکل ۹۱

وقتی که سربازی را به یکی از قطاعهای مجاورش منتقل می‌کنیم، زوجیت جمعوند متناظرش در  $S$  عوض می‌شود (از فرد به زوج، یا از زوج به فرد). بنابراین، اگر دو تا از سربازها را همزمان حرکت دهیم، زوجیت  $S$  هیچ‌گاه عوض نمی‌شود - یعنی ناورداست. در مورد آرایش شکل ۸۹ مقدار  $S$  برابر با ۲۱ است. اگر همه سربازها در قطاعی به شماره  $A$  باشند، آن وقت  $S = 6A$  پس  $S$  عددی زوج است، اما ۲۱ فرد است. بنابراین نمی‌توانید آرایش اولیه را به آرایشی تبدیل کنید که در آن همه سربازها در یک قطاع قرار داشته باشند.

گاهی ممکن است نتوان از ناوردها برای اثبات اینکه نمی‌توان شی‌ای را از دیگری به دست آورد استفاده کرد، اما می‌توان به کمک آنها فهمید که کدام شی را می‌توان از شی‌ای مفروض به دست آورد. این موضوع را در مسأله زیر روشن کرده‌ایم.

مسأله ۳. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۹ و ۲۰ را روی تخته سیاه نوشته‌ایم. می‌توانیم دو عدد دلخواه مانند

$a$  و  $b$  را پاک کنیم و به جای آنها عدد جدید  $a + b - 1$  را روی تخته بنویسیم. پس از ۱۹ بار تکرار این عمل چه عددی روی تخته سیاه می ماند؟

راه حل. به ازای هر گردهای  $n$  از عدد روی تخته سیاه فرض کنید  $X$  برابر با مجموع این عددها منهای  $n$  باشد. فرض کنید عددهای روی تخته سیاه را به طریقی که گفتیم تبدیل کرده ایم. مقدار  $X$  چه تغییری می کند؟ اگر مجموع همه عددها بجز  $a$  و  $b$  برابر با  $S$  باشد، پیش از تبدیل  $X = S + a + b - n$  و پس از تبدیل

$$X = S + (a + b - 1) - (n - 1) = S + a + b - n$$

در نتیجه، مقدار  $X$  همواره یکسان است، یعنی ناورد است. در ابتدا (در مورد عددهای گفته شده در صورت مسأله)،

$$X = (1 + 2 + \dots + 19 + 20) - 20 = 190$$

بنابراین، پس از ۱۹ بار انجام عمل گفته شده، وقتی که فقط یک عدد روی تخته سیاه باقی مانده است،  $X$  برابر با ۱۹۰ است. یعنی عدد آخر، که برابر با  $X + 1$  است، برابر با ۱۹۱ است.

توصیه به معلمان. اگر راه حل این مسأله را یکی از دانش آموزانتان برایتان بگوید، احتمالاً چیزی شبیه به این می شنوید: در هر مرحله مجموع همه عددها یکی کم می شود. ۱۹ مرحله وجود دارد و در ابتدا مجموع برابر با ۲۱۰ است. بنابراین، در انتها، مجموع برابر است با

$$210 - 19 = 191$$

این راه حل درست است؛ با این همه، باید توضیح دهید که این مسأله، مسأله ای از «ناوردا» هاست. موضوع این است که در این حالت، ناوردا آنقدر ساده است که می توان آن را کاملاً بدیهی توصیف کرد. در مسأله بعد، هر چند که شبیه مسأله ۳ است، نمی توان چنین راه حل ساده ای پیدا کرد.

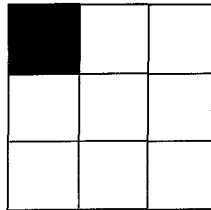
مسأله ۴. عددهای ۱، ۲، ... و ۲۰ روی تخته سیاه نوشته شده اند. می توانیم دو عدد دلخواه مانند  $a$  و  $b$  را پاک کنیم و به جای آنها عدد جدید  $a + b + ab$  را بنویسیم. پس از ۱۹ بار تکرار این عمل کدام عدد روی تخته سیاه می ماند؟

راهنمایی: مقداری که از جمع کردن هر عدد با ۱ و ضرب کردن نتیجه ها به دست می آید ناورد است. در اینجا چند مسأله فوق العاده که در راه حل آنها از روش ناورداها استفاده می شود آورده ایم.

مسأله ۵. شش گنجشک روی شش درخت نشسته‌اند، روی هر درخت یک گنجشک. درختان در یک ردیف قرار گرفته‌اند و فاصله هر دو درخت مجاور ۱۰ متر است. اگر گنجشکی از یکی از درختها به درختی دیگر پرواز کند، همزمان با او گنجشک دیگری از درختی به درختی دیگر که فاصله‌شان به اندازه دوتای قبلی است پرواز می‌کند، البته در جهت مخالف. آیا ممکن است که هر شش گنجشک روی یک درخت جمع شوند؟ اگر هفت درخت و هفت گنجشک داشته باشیم چطور؟

مسأله ۶. در جدولی  $8 \times 8$  یکی از خانه‌ها را سیاه کرده‌ایم، بقیه خانه‌ها را سفید. ثابت کنید نمی‌توان با تغییر رنگ سطرها و ستونها همه خانه‌ها را به رنگ سفید درآورد. («تغییر رنگ» عملی است که رنگ همه خانه‌های سطر یا ستون را عوض می‌کند).

مسأله ۷. مسأله قبل را در مورد جدولی  $3 \times 3$  حل کنید، که در آن در ابتدا یک خانه سیاه در یکی از گوشه‌های جدول وجود دارد (شکل ۹۲ را ببینید).



شکل ۹۲

مسأله ۸. مسأله ۶ را در مورد جدولی  $8 \times 8$  حل کنید، که در آن در ابتدا هر چهار خانه گوشه‌ای سیاه‌اند و بقیه خانه‌ها سفید.

توجه کنید که مسأله ۶ را، برخلاف مسأله‌های ۷ و ۸، فقط با استفاده از زوجیت (تعداد خانه‌های سیاه) هم می‌توان حل کرد.

مسأله ۹. عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۱۹۸۹ را روی تخته سیاه نوشته‌ایم. می‌توانیم هر دو تا از این عددها را که بخواهیم پاک کنیم و به جای آنها تفاضلشان را بنویسیم. آیا می‌توان با تکرار این کار به وضعیتی رسید که همه عددهای روی تخته سیاه صفر باشند؟

مسأله ۱۰. در جزیره ملونها ۱۳ آفتاب‌پرست خاکستری، ۱۵ آفتاب‌پرست قهوه‌ای و ۱۷ آفتاب‌پرست قرمز زندگی می‌کنند. اگر دو آفتاب‌پرست به رنگهای مختلف به هم برسند، رنگشان به رنگ سوم درمی‌آید (مثلاً خاکستری و قهوه‌ای به رنگ قرمز درمی‌آیند). آیا ممکن است پس از گذشت چند وقت همه آفتاب‌پرستهای این جزیره به یک رنگ درآیند؟

راه حل مسأله ۱۰ را بررسی می‌کنیم. چگونه می‌توانیم معنی «عددی» تبدیل مورد نظر را توصیف کنیم. یک راه این است که بگوییم دو آفتاب‌پرست به رنگهای مختلف «ناپدید» می‌شوند و دو آفتاب‌پرست به رنگ سوم «پدیدار» می‌شوند. اگر بخواهیم از نوردایی عددی استفاده کنیم، می‌توانیم به دنبال مقداری برگردیم که فقط به عددهای  $(a, b, c)$  بستگی دارد، که در اینجا  $a$ ،  $b$  و  $c$  به ترتیب تعداد آفتاب‌پرستهای خاکستری، قهوه‌ای و قرمزند. تبدیلی که در صورت مسأله گفته شده یعنی اینکه سه‌تایی  $(a, b, c)$  به سه‌تایی  $(a - 1, b - 1, c + 2)$  یا سه‌تایی  $(a - 1, b + 2, c - 1)$  یا سه‌تایی  $(a + 2, b - 1, c - 1)$ ، بسته به اینکه رنگ اولیه دو آفتاب‌پرستی که به هم می‌رسند چه باشد، تبدیل می‌شود. معلوم است که تفاضل میان عددهای متناظر در سه‌تاییهای قدیم و جدید یا تغییر نمی‌کند یا ۳ تا تغییر می‌کند، یعنی اینکه باقی‌مانده این تفاضلهای در تقسیم بر ۳ ناورداست. در ابتدا،

$$a - b = 13 - 15 = -2$$

و اگر همه آفتاب‌پرستها قرمز باشند، باید

$$a - b = 0 - 0 = 0$$

باقی‌مانده عددهای ۰ و -۲ در تقسیم بر ۳ متفاوت است، یعنی ممکن نیست که همه آفتاب‌پرستها به رنگ قرمز درآیند. حالتهایی که همه آفتاب‌پرستها به رنگ خاکستری یا قهوه‌ای درآیند دقیقاً به همین ترتیب بررسی می‌شوند.

توصیه به معلمان. اگر «زوجیت» را قبلاً مطالعه کرده‌اید و راه‌حلهایی را که در آنها زوجیت ناورداست بررسی کرده‌اید، این موضوع را به دانش‌آموزان گوشزد کنید.

«ناورداها» ماهیت نسبتاً انتزاعی دارند و حتی اساس آنها معمولاً برای دانش‌آموزان مبهم و پیچیده می‌ماند. بنابراین باید توجه خاصی به بررسی منطق استفاده از ناورداها در حل مسأله‌ها مبذول کنیم. با آوردن مثالهای گوناگون، راه‌حلهای را توضیح دهید، و تا جایی که ممکن است توضیحاتتان را واضح و روشن بیان کنید. مطابق معمول، پس از اینکه دانش‌آموزان چند مسأله را با استفاده از ناورداها حل کردند یا دست‌کم چند مسأله ساده را با استفاده از ناورداها بررسی کردند کلمه جدید «ناوردا» و اساس ایده‌های مربوط به آن را مطرح کنید.

معلوم است که مشکل اصلی در حل کردن مسأله‌ها با استفاده از ناورداها یافتن کمیتی ناورداست. هنر واقعی همین است، و فقط وقتی می‌توان در آن تبحر یافت که مسأله‌های مشابه زیادی را حل کرد. تفکراتتان را محدود نکنید. در هر حال، قوانین ساده زیر را فراموش نکنید:

الف) کمیتی که به دست آورده‌ایم در حقیقت باید ناوردا باشد.

ب) مقدار این ناوردا برای دو شی‌ءای که در صورت مسأله داده شده‌اند باید فرق کند.



(ج) در ابتدا باید رده‌ای از اشیاء را مشخص کنیم که این کمیت برای آنها تعریف شده باشد.

مثال مهم دیگری می‌آوریم.

مسئله ۱۱. عددهای  $+1$  و  $-1$  را طوری روی رأسهای ۱۲ ضلعی منتظمی نوشته‌ایم که روی همه رأسها بجز یکی از آنها  $+1$  قرار دارد. می‌توانیم علامت عددهای هر  $k$  رأس متوالی ۱۲ ضلعی را عوض کنیم. اگر

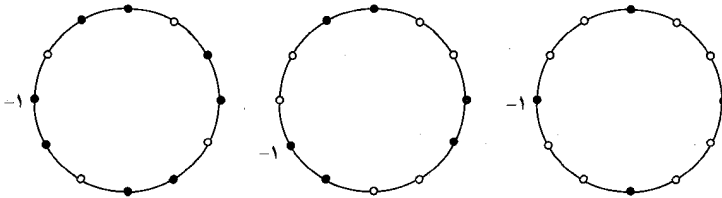
$$k = 3 \text{ (الف)}$$

$$k = 4 \text{ (ب)}$$

$$k = 6 \text{ (ج)}$$

آیا می‌توانیم تنها عدد  $-1$  موجود را به رأس مجاور «منتقل» کنیم؟

خلاصه راه‌حل. در هر سه حالت پاسخ منفی است. اثبات هر سه هم یکجور است: زیرمجموعه‌ای از رأسها را طوری انتخاب می‌کنیم که در میان هر  $k$  رأس متوالی یک تعداد از این رأسها قرار داشته باشد (شکل ۹۳ را ببینید).



شکل ۹۳

تحقیق کنید که زیرمجموعه‌هایی که در شکل بالا نشان داده شده‌اند این ویژگی را دارند.

ناوردا را حاصل ضرب عددهای نوشته شده روی رأسهای انتخاب شده می‌گیریم. در ابتدا، این مقدار برابر با  $-1$  است، اما اگر  $-1$  به رأس مجاور سمت چپ، که در میان رأسهای انتخاب شده نیست، «منتقل» شود، این مقدار برابر با  $1$  است. ناوردا بودن مقدار گفته شده از نحوه انتخاب زیرمجموعه انتخاب شده نتیجه می‌شود.

توصیه به معلمان. در این راه‌حل ایده‌ای متداول در روش استفاده از ناورداها وجود دارد - بخشی از هر شیء را انتخاب کنید که تغییراتی که بر اثر تبدیلهای مجاز در آنها ایجاد می‌شود به سادگی توصیف می‌شوند.

یادداشت. با استفاده از این ایده می‌توانیم مسأله‌های ۷ و ۹ را هم حل کنیم.

راستی، می‌توانید از دانش آموزانتان سؤالی «گول‌زننده» کنید: ثابت کرده‌ایم که  $-1$  را نمی‌توان به رأس مجاور سمت چپ منتقل کرد. آیا می‌توان آن را به رأس مجاور سمت راست منتقل کرد؟

## ۲. رنگ کردن

خیلی از مسأله‌های مربوط به ناورداها را می‌توان با نوع خاصی از ناورداها حل کرد: چیزی که اصطلاحاً به آن «رنگ کردن» می‌گویند. مسأله زیر مثالی متعارف در این باره است.

مسأله ۱۲. مهره خاصی از شطرنج به نام «شتر» در صفحه‌ای  $10 \times 10$  مانند اسب (۱، ۳) حرکت می‌کند. یعنی، به یکی از خانه‌های مجاور می‌رود و سپس در یکی از امتدادهای عمودی سه خانه حرکت می‌کند (اسب معمولی شطرنج را می‌توان از نوع (۱، ۲) حساب کرد). آیا «شتر» می‌تواند از یکی از خانه‌ها به خانه‌ای مجاور برود؟

راه حل. پاسخ منفی است. رنگ‌آمیزی معمولی صفحه شطرنج با سیاه و سفید را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که «شتر» همواره از خانه‌ای به یک رنگ به خانه‌ای به همین رنگ می‌رود؛ به عبارت دیگر، رنگ خانه‌ای که «شتر» در آن قرار می‌گیرد ناورداست. بنابراین، پاسخ سؤال مسأله منفی است، زیرا رنگ هر دو خانه مجاور متفاوت است.

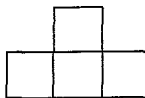
چند مسأله دیگر می‌آوریم که در راه حل آنها از روش «رنگ کردن» استفاده می‌شود.

مسأله ۱۳. الف) ثابت کنید نمی‌توان صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  را با پانزده چندمربعی  $1 \times 4$  و یک چندمربعی که در شکل ۹۴ نشان داده شده است، بدون همپوشانی، پوشاند.



شکل ۹۴

ب) ثابت کنید صفحه  $10 \times 10$  را نمی‌توان با چندمربعیها مانند چندمربعی شکل ۹۵، بدون همپوشانی، پوشاند.



شکل ۹۵

ج) ثابت کنید صفحه  $10 \times 10$  را نمی‌توان با چندمربعیهای  $1 \times 4$ ، بدون همپوشانی، پوشاند.

راهنمایی برای مسأله ۱۳ ب). صفحه مورد نظر را مانند رنگ‌آمیزی معمول صفحه شطرنج رنگ کنید.

مسأله ۱۴. صفحه‌ای مستطیلی را با چند مربعهای  $۱ \times ۴$  و  $۲ \times ۲$ ، بدون همپوشانی، پوشانده‌ایم. بعد چند مربعیها را از روی صفحه برداشته‌ایم و در این بین یکی از  $۲ \times ۲$ ها گم شده است. به جای آن، یک چندمربعی  $۱ \times ۴$  دیگر در اختیار داریم. ثابت کنید دیگر نمی‌توان صفحه را با این چندمربعیها، بدون همپوشانی، پوشاند.

مسأله ۱۵. آیا اسب شطرنج می‌تواند از همه خانه‌های صفحه‌ای  $۴ \times N$  بگذرد، به طوری که به هر خانه دقیقاً یک بار برود و در آخر به خانه اولیه بازگردد؟

راه حل مسأله ۱۵ را بررسی می‌کنیم. خانه‌های صفحه  $۴ \times N$  را مطابق شکل ۹۶ با چهار رنگ، رنگ می‌کنیم. فرض کنید اسب بتواند چنین مسیری را طی کند. رنگ آمیزی نشان داده شده این ویژگی را دارد که اگر اسبی در خانه‌ای به رنگ ۱ (همین‌طور، به رنگ ۲) قرار گرفته باشد، در حرکت بعدی به خانه‌ای به رنگ ۳ (همین‌طور، به رنگ ۴) می‌رود.

	۱	۲	۱	۲	۱	۲
	۳	۴	۳	۴	۳	۴
	۴	۳	۴	۳	۴	۳
	۲	۱	۲	۱	۲	۱

شکل ۹۶

چون تعداد خانه‌های به رنگ ۱ و رنگ ۲ با تعداد خانه‌های به رنگ ۳ و رنگ ۴ برابر است، هنگام جابه‌جایی اسب، این جفتها یکی در میان ظاهر می‌شوند. بنابراین، هرگاه اسب در خانه‌ای به رنگ ۳ باشد، در حرکت بعدی به خانه‌ای به رنگ ۱ یا ۲ می‌رود، و معلوم است که فقط می‌تواند به خانه‌ای به رنگ ۱ برود. بنابراین رنگهای ۱ و ۳ یکی در میان ظاهر می‌شوند، که ممکن نیست، زیرا با این وضعیت اسب هیچ‌گاه به خانه‌های به رنگ ۲ و ۴ نمی‌رود. تناقض به دست آمده اثبات را کامل می‌کند.

توصیه به معلمان. ۱. با کمی فکر کردن می‌توان مسأله‌های «رنگ کردن» جدیدی طرح کرد. مثلاً، در مسأله ۱۳ می‌توانیم انواعی از چندمربعیها و صفحه‌ها را بررسی کنیم. به یاد داشته باشید که معمولاً از روش رنگ کردن برای پاسخ منفی دادن استفاده می‌شود.

۲. درباره روش «رنگ کردن» کمی بیشتر می‌توان گفت: مسأله‌های ریاضی‌ای وجود دارند که می‌توان آنها را با استفاده از رنگ کردن حل کرد، اما نمی‌توان در آنها از ایده نوردها استفاده کرد. علاوه بر این، برخی گونه‌های این روش را می‌توان به عنوان موضوعی جداگانه برای جلسه‌های محافل ریاضی در نظر گرفت.

### ۳. باقی مانده‌هایی که ناوردا هستند

در زیر، هفت مسأله آورده‌ایم که در راه‌حل آنها از ایده ناورداها استفاده می‌شود. نکته مهم این است که در راه‌حل آنها ناوردا باقی مانده به پیمانه عددی طبیعی است. این وضعیت خیلی پیش می‌آید (مسأله‌های ۳، ۷-۹ را ببینید که مربوط به باقی مانده‌ها به پیمانه ۲ اند (یعنی زوجیت)، یا مسأله ۱۱ که مربوط به باقی مانده‌ها به پیمانه ۳ است).

مسأله ۱۶. شاهزاده ایوان دو شمشیر جادویی دارد. با یکی از اینها می‌توان ۲۱ سر از سرهای اژدهای پلید را قطع کرد. با شمشیر دیگر می‌توان ۴ تا از سرها را قطع کرد، اما پس از آن اژدها ۱۹۸۵ سر جدید درمی‌آورد. اگر اژدها در آغاز ۱۰۰ سر داشته باشد، آیا شاهزاده ایوان می‌تواند همه سرهایش را قطع کند؟ (توجه. اگر، مثلاً، اژدها سه سر داشته باشد با هیچ‌یک از شمشیرها نمی‌توان سرهای اژدها را قطع کرد.)

مسأله ۱۷. در کشورهای دلیبا و دالبا واحد پول به ترتیب دیلر و دالر است. در دلیبا ۱ دیلر را با ۱۰ دالر عوض می‌کنند و در دالبا ۱ دالر را با ۱۰ دیلر. تاجری ۱ دیلر دارد و می‌تواند به هر دو کشور سفر کند و پولهایش را بدون اینکه هزینه‌ای بپردازد تبدیل کند. ثابت کنید او هرگز نمی‌تواند یک مقدار مساوی دیلر و دالر داشته باشد، مگر اینکه بخشی از پولش را خرج کند.

مسأله ۱۸. دکتر گیزمو دستگاهی برای خرد کردن سکه‌ها ساخته است که می‌توان از آن در همه کشورهای جهان استفاده کرد. نظام سکه‌زنی هر چه که باشد، این دستگاه هر سکه‌ای را که بگیرد، اگر ممکن باشد، دقیقاً پنج سکه دیگر می‌دهد که کلاً همان مقدار می‌ارزند. ثابت کنید نظام سکه‌زنی در کشور هر چه که باشد، هرگز نمی‌توان با یک سکه کار را شروع کرد و در آخر ۲۶ سکه داشت.

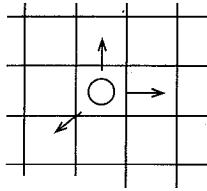
مسأله ۱۹. سه دستگاه چاپ داریم. ماشین اول کارت‌های  $a$  و  $b$  روی آن را قبول می‌کند و کارت‌های  $a+1$  و  $b+1$  را تحویل می‌دهد. ماشین دوم فقط کارت‌های  $a$  و  $b$  روی آن را قبول می‌کند و کارت‌های  $\frac{a}{2}$  و  $\frac{b}{2}$  روی آن تحویل می‌دهد. ماشین سوم دو کارت به ترتیب  $a$  و  $b$ ، و  $b$  و  $c$  روی آنها را قبول می‌کند و کارت‌های  $a$  و  $c$  روی آن تحویل می‌دهد. هر سه این ماشینها کارتهایی را هم که به آنها داده‌ایم پس می‌دهند. اگر در ابتدا کارت‌های  $5$  و  $19$  روی آن داشته باشیم، آیا می‌توانیم کارت‌های  $1$  و  $1988$  روی آن به دست بیاوریم؟

مسأله ۲۰. عدد  $8^n$  روی تخته سیاه نوشته شده است. مجموع رقمهای این عدد را حساب می‌کنیم، بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را حساب می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا عددی یک رقمی به دست بیاوریم. اگر  $n = 1989$ ، این رقم چیست؟

مسأله ۲۱. سه نوع آمیب  $(A, B, C)$  در لوله آزمایش وجود دارند. دو آمیب از دو نوع مختلف را می‌توان در هم ادغام کرد و یک آمیب از نوع سوم به دست آورد. پس از چند بار ادغام فقط یک آمیب

در لوله آزمایش می‌ماند. اگر در ابتدا  $20^\circ$  آمیب از نوع  $A$ ،  $21$  آمیب از نوع  $B$  و  $22$  آمیب از نوع  $C$  وجود داشته باشد، نوع این آمیب چیست؟

مسئله ۲۲. سرباز روی صفحه شطرنجی  $n \times n$  در هر حرکت می‌تواند یا یک خانه به سمت راست برود، یا یک خانه به سمت بالا یا روی قطری یک خانه به سمت پایین و چپ (شکل ۹۷ را ببینید). آیا این سرباز می‌تواند از همه خانه‌های صفحه بگذرد، در هر یک از آنها دقیقاً یک بار قرار بگیرد و در آخر در خانه سمت راست خانه‌ای که در ابتدا در آن بوده به سفرش خاتمه دهد؟



شکل ۹۷

روش حل مسئله ۱۹ را شرح می‌دهیم.

توصیه به معلمان. کاملاً بجاست که راه‌حل را طوری حکایت کنید که در آن اینکه چگونه به آن دست یافته‌اید، چگونه به مقدار ناوردا پی برده‌اید، و چیزهایی از این دست، مشهود باشد.

در ظاهر چه چیزهایی داریم؟ - چند کار مجازیم بکنیم و می‌خواهیم ببینیم می‌توانیم شی‌ای مشخص را از دیگری به دست آوریم یا خیر. با این وضعیت بی‌شک مجبوریم که ناوردایی پیدا کنیم. پس به دنبالش می‌گردیم.

در عمل اول  $(a, b)$  به  $(a + 1, b + 1)$  نگاشته می‌شود. در این عمل چه چیز ناورداست؟ قطعاً، تفاضل عددهای روی کارتها، زیرا

$$(a + 1) - (b + 1) = a - b$$

اما در عمل دوم تفاضل تغییر می‌کند:

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a - b}{2}$$

یعنی تفاضل بر دو تقسیم شده است. در عمل سوم تفاضله‌ها جمع می‌شوند:

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

با این توصیف به نظر می‌رسد که تفاضل عددهای روی کارتها ناوردایی که می‌خواهیم نیست. با این همه، به احتمال زیاد این تفاضل ربطی به این ناوردا (که هنوز نامعلوم است) دارد. پس چه چیزی است؟ دقت بیشتری می‌کنیم و سعی می‌کنیم چند کارت را از کارت داده شده به دست آوریم.

$$(5, 19) \rightarrow (6, 20)$$

$$(6, 20) \rightarrow (3, 10)$$

$$(3, 10) \rightarrow (20, 27)$$

$$(6, 27), (20, 27) \rightarrow (6, 27)$$

کافی است. اکنون می‌توانیم نتیجه کارمان را ببینیم. کارتهای زیر را داریم:

$$(5, 19), (6, 20), (3, 10), (20, 27), (6, 27)$$

تفاضل عددهای روی کارتها برابر است با

$$14, 14, 7, 7, 21$$

بالاخره فهمیدیم که باید چه چیزی را ثابت کنیم! معقول‌ترین حدس این است که تفاضل موردنظر همواره بر ۷ بخش‌پذیر است. این حکم را به سادگی می‌توان ثابت کرد. فقط کافی است که رفتار این تفاضل را تحت عملهای مجاز گفته شده بررسی کنیم. این تفاضل یا اصلاً تغییر نمی‌کند، یا در  $\frac{1}{3}$  ضرب می‌شود یا دو تا از تفاضلهای با هم جمع می‌شوند تا تفاضلی دیگر به دست آید. اما تفاضل موردنظر در مورد کارت‌هایی که می‌خواهیم به دست بیاوریم یعنی  $(1, 1988)$ ، برابر است با

$$1 - 1988 = -1987$$

که بر ۷ بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب راه‌حل کامل شده است و پاسخ منفی است.

\* \* \*

مسئله‌های این مجموعه از بیشتر مسئله‌های ۱-۲۳ دشوارترند، اما تمرینهای خوبی برای کار در منزل و مطالعات بیشترند.

مسئله ۲۳. خانه‌های جدولی  $m \times n$  را با عددها طوری پر کرده‌ایم که مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون برابر با ۱ شده است. ثابت کنید  $m = n$ .

یادداشت. هرچند که ممکن است عجیب به نظر برسد، این مسئله از «ناوردا»هاست.

مسأله ۲۴. ۷ لیوان روی میز وجود دارد و همگی وارونه‌اند. در هر حرکت می‌توانیم هر ۴ تا از آنها را که بخواهیم سرورته کنیم. آیا می‌توانیم به‌وضعیتی برسیم که دهانه همه لیوانها درست رو به بالا قرار گرفته باشد؟

مسأله ۲۵. هفت صفر و یک روی راسهای مکعبی قرار گرفته‌اند. می‌توان به هر یک از عددهای دو سر هر یالی از این مکعب، یک را اضافه کرد. آیا می‌توان کاری کرد که همه عددها برابر شوند؟ آیا می‌توان کاری کرد که همه عددها بر ۳ بخش پذیر شوند؟

مسأله ۲۶. دایره‌ای به شش قطاع تقسیم شده و شش عدد ۱، ۰، ۱، ۰، ۰ در این قطاعها به ترتیب ساعتگرد نوشته شده‌اند (هر عدد در یک قطاع نوشته شده است). می‌توان با عددهای هر دو قطاع مجاور یک را جمع کرد. آیا می‌توان کاری کرد که همه عددها برابر شوند؟

مسأله ۲۷. در وضعیت مسأله ۲۰، مشخص کنید که کدام کارتها را می‌توان از کارت (۵، ۱۹) به دست آورد و کدام کارتها را نمی‌توان.

مسأله ۲۸. کپه‌ای از ۱۰۰ خردسنگ روی میز وجود دارد. می‌توانید کارهای زیر را انجام دهید: یکی از کپه‌ها را که بیش از یک خردسنگ دارد انتخاب می‌کنید، یکی از خردسنگها را دور می‌اندازید و این کپه را به دو کپه کوچکتر (که لزومی ندارد برابر باشند) تقسیم می‌کنید. آیا می‌توان به وضعیتی رسید که همه کپه‌های روی میز ۳ خردسنگ داشته باشند؟

مسأله ۲۹. عددهای ۱، ۲، ۳، ... و  $n$  در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌توانیم جای هر دو عدد مجاور را که بخواهیم عوض کنیم. اگر ۱۹۸۹ بار این کار را تکرار کنیم، آیا ممکن است ترتیب نهایی عددها بر ترتیب اولیه آنها منطبق باشد؟

مسأله ۳۰. یک سه‌تایی از عددها داده شده است. می‌توان کارهای زیر را روی عددهای این سه‌تایی انجام داد: دو تا از آنها، مثلاً  $a$  و  $b$  را با  $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$  و  $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$  عوض می‌کنیم. آیا می‌توان با استفاده از این کارها سه‌تایی  $(1 + \sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$  را از سه‌تایی  $(\frac{1}{\sqrt{4}}, \sqrt{2}, 2)$  به دست آورد؟

توصیه به معلمان. ۱. مسأله‌های «ناورداها» خیلی متداول‌اند؛ مثلاً، در هر المپیاد ریاضی شهر سنت‌پترزبورگ دست‌کم دو یا سه مسأله را می‌توان با ایده ناورداها حل کرد.

۲. استفاده از ایده ناورداها بسیار رایج است و شاخه‌های مختلفی از علوم را در بر گرفته است. اگر دانش‌آموزان با مقدمات فیزیک آشنا هستند، مثلاً می‌توانید برخی نتیجه‌های قانون بقای انرژی یا قضیه گشتاور ماند یا چیزهایی مانند اینها را بررسی کنید.

۳. دانش‌آموزان باید متوجه باشند که اگر مقدار نوردایی (یا حتی نوردایی) برای دوشی  $\otimes$  مفروض برابر باشد، دلیل نمی‌شود که بتوان یکی از آنها را با کارهای مشخص شده از دیگری به دست آورد. این مورد از خطاهای رایجی است که پس از نخستین برخورد با ناورداها بروز می‌کند. مثالهایی ساده برای دانش‌آموزانتان بزنید تا متوجه این خطا بشوند.

۴. یک بار دیگر ساده‌ترین و متداول‌ترین ناورداها را یادآوری می‌کنیم:

الف) باقی‌مانده به پیمانه عددی طبیعی - مسأله‌های ۳، ۷-۱۱، ۱۷-۲۲.

ب) انتخاب بخشی از یک شیء - مسأله‌های ۷، ۹ و ۱۲.

ج) رنگ کردن - مسأله‌های ۱۳-۱۶.

د) برخی عبارتهای جبری شامل متغیرهای داده شده - مسأله‌های ۴، ۲۶ و ۳۰.



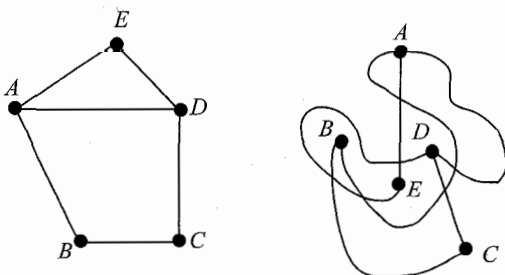
## فصل ۱۳

### گرافها - ۲

در این فصل مطالعه گرافها را که در بخش اول این کتاب شروع کردیم پی می‌گیریم. چرا یک بار دیگر به این موضوع پرداخته‌ایم؟ اول اینکه مطالعه گرافها موضوعی جالب و سودمند است. نکته دوم، و مهمتر، این است که استدلالهای مقدماتی درباره گرافها ما را به ریاضیات جدی‌تر نزدیکتر می‌کند (این مورد بیشتر در قسمت ۱ و قسمت ۳ این فصل پیش می‌آید).

#### ۱. یکریختی

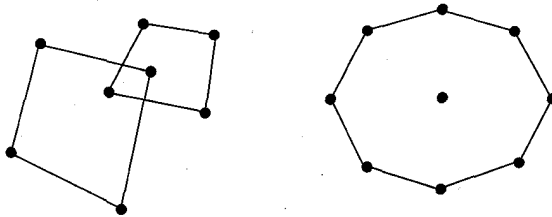
همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، هر گراف را به چندین طریق می‌توان رسم کرد. مثلاً، نقشه راههای هوایی را می‌توان به شکلهایی رسم کرد که حتی شبیه یکدیگر هم نباشند. مثال زیر را در نظر بگیرید: در تورنمنتی که تیمهای A، B، C، D و E در آن شرکت کرده‌اند، تیم A با تیمهای B، D و E بازی کرده است. علاوه بر این، تیم C با تیمهای B و D بازی کرده است و D هم با E بازی کرده است. معلوم است که هر دو نمودار شکل ۹۸ این وضعیت را نشان می‌دهند.



اکنون تعریف دقیق را ذکر می‌کنیم.

تعریف. دوگراف را یکریخت می‌نامند، هرگاه تعداد رأسهایشان برابر باشد (مثلاً برابر با  $n$ ) و بتوان رأسهای هر یک از گرافها را با عددهای از ۱ تا  $n$  طوری شماره‌گذاری کرد که دو رأس در گراف اول وقتی و فقط وقتی با یالی به هم وصل شده باشند که دو رأس با همان شماره‌ها در گراف دوم با یالی به هم وصل شده باشند.

اکنون می‌توانیم دینمان را ادا کنیم و ثابت کنیم که گرافهایی که در شکل ۹۹ نشان داده شده‌اند (و عیناً از گرافهای فصل «گرافها - ۱» کپی شده‌اند) یکریخت نیستند.



شکل ۹۹

نکته این است که تعداد مؤلفه‌های همبندی این گرافها با هم فرق دارد: گراف اول سه‌تا دارد و دومی دو‌تا.

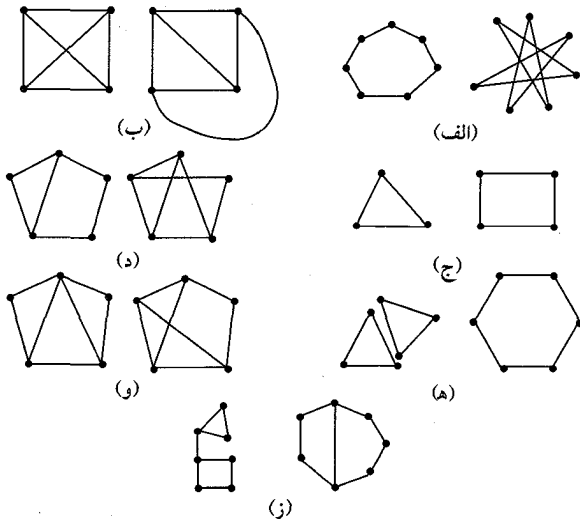
اکنون ثابت می‌کنیم که تعداد مؤلفه‌های همبندی گرافهای یکریخت برابر است. کافی است دقت کنید که اگر دو رأس از گراف اول متعلق به یک مؤلفه همبندی باشند، با مسیری به هم متصل‌اند، در نتیجه رأسهای نظیرشان در گراف دوم هم با مسیری به هم متصل‌اند، پس در یک مؤلفه همبندی قرار دارند.

مسأله ۱. آیا هر جفت از گرافهایی که در شکل ۱۰۰ نشان داده شده‌اند یکریخت‌اند؟

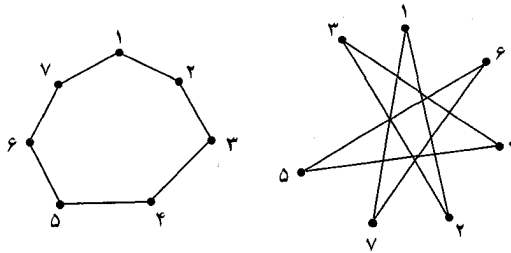
راه‌حل. از شکلهای ۱۰۱ و ۱۰۲ معلوم است که جفت گرافهای (الف) و (ب) یکریخت‌اند. گرافهای بقیه جفتها یکریخت نیستند.

راهنمایی: (ج) تعداد رأسها برابر نیست. (د) تعداد یالها برابر نیست. (ه) تعداد مؤلفه‌های همبندی برابر نیست. (و) گراف اول رأسی دارد که چهار یال از آن خارج شده است، اما در گراف دوم چنین رأسی وجود ندارد. (ز) در گراف اول یالی وجود دارد که پس از حذف آن گراف به دو مؤلفه همبندی تقسیم می‌شود. اما گراف دوم چنین یالی ندارد. یکریخت نبودن این دو گراف را به طریقی دیگر هم می‌توان ثابت کرد: مسیرهای بسته‌ای را در نظر می‌گیریم که از هیچ رأسی دو بار نمی‌گذرند. گراف اول دو تا از این مسیرها دارد، یکی به طول ۳\* و یکی به طول ۴. گراف دوم سه تا از این مسیرها دارد، طول این مسیرها ۴، ۵ و ۷ است.

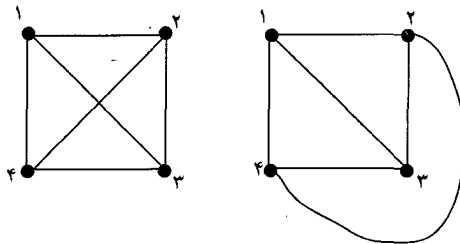
\* طول مسیر، تعداد یالهایی است که آن را تشکیل داده‌اند.



شکل ۱۰۰



شکل ۱۰۱



شکل ۱۰۲

توصیه به معلمان. اگر گرافها «یکسان» باشند، دانش‌آموزان این موضوع را از نظر شهودی خیلی خوب تشخیص می‌دهند. بنابراین خیلی جالب است که به صحبت‌های تک‌تک آنها ضمن تلاششان برای دست یافتن به تعریف دقیق پکریختی گوش کنید. گاهی این تعریفها چیزی شبیه به این‌اند که «دوگراف

یکریخت (یکسان) اند، هرگاه تعداد رأسها و یالهایشان برابر باشد». یافتن راه‌حلهای قسمتهای مختلف مسأله ۱ هم منجر به بحثهای جالبی درباره معیارهای مختلف برای یکریخت نبودن می‌شود.

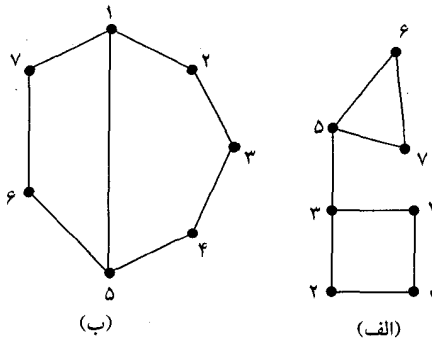
به یکی از مفهوماها به‌طور اتفاقی ضمن راه‌حل مسأله ۱ اشاره شده است. در اینجا تعریف دقیق آن را می‌آوریم.

تعریف. دور مسیری بسته در گراف است که از هیچ رأسی دو بار نمی‌گذرد. ضمن بحث در مورد قسمت (ز) متذکر شدیم که گراف شکل ۱۰۳ (الف) دوتا دور دارد:

$$۱-۲-۳-۴-۱, \quad ۵-۶-۷-۵$$

و در عین حال، گراف شکل ۱۰۳ (ب) سه‌تا دور دارد:

$$۱-۵-۶-۷-۱, \quad ۱-۲-۳-۴-۵-۱, \quad ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۱$$



شکل ۱۰۳

در اینجا چهار مسأله دیگر درباره این مفهوماها و تعریفها آورده‌ایم.

مسأله ۲. ثابت کنید گرافی پنج رأسی وجود ندارد که درجه رأسهایش ۴، ۴، ۴، ۲ و ۲ باشد.

مسأله ۳. ثابت کنید گرافی  $2n$  رأسی وجود دارد که درجه رأسهایش  $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$  است.

مسأله ۴. آیا درست است که دوگرافی که

(الف) هر دو رأس دارند و درجه هر رأسشان برابر با ۹ است،

(ب) هر دو رأس دارند و درجه هر رأسشان برابر با ۳ است،

(ج) هر دو همبندند، دور ندارند و ۶ یال دارند،

باید یکریخت باشند؟

مسأله ۵. درگرافی همبند درجه چهار تا از رأسها برابر با ۳ است و درجه بقیه رأسها برابر با ۴ است.

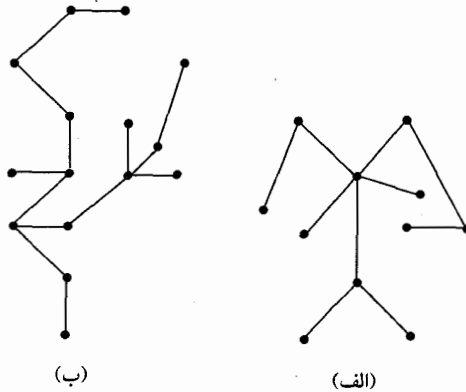
ثابت کنید نمی‌توانیم یالی را حذف کنیم تا این گراف به دو مؤلفه همبندی یکریخت تجزیه شود.

## ۲. درختها

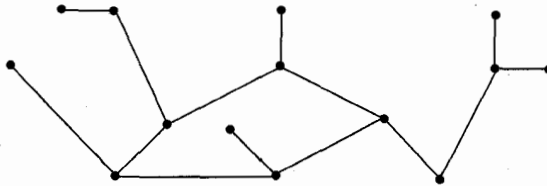
در این بخش نوعی از گرافها را بررسی می‌کنیم که هر چند کاملاً ساده به نظر می‌رسند، اما بخشی مهم از نظریه گرافها هستند.

تعریف. درخت گرافی همبند و بدون دور است.

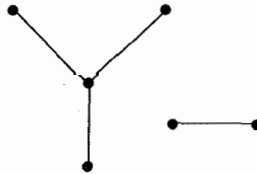
مثلاً، گرافهای شکل ۱۰۴ درخت‌اند، اما گرافهای شکلهای ۱۰۵ و ۱۰۶ درخت نیستند.



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۵



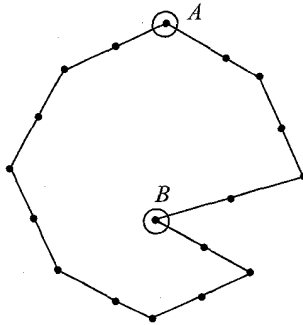
شکل ۱۰۶

وجه تسمیه نامگذاری این نوع گرافها این است که برخی از آنها واقعاً شکل درختان را تداعی می‌کنند (شکل ۱۰۴ (ب) را ببینید).

برای مطالعه ویژگیهای درختها، استفاده از مفهوم مسیر ساده کاملاً مفید است. قبلاً مفهوم مسیر را در فصل «گرافها - ۱» تعریف کرده ایم. مسیری را «ساده» می نامیم که هیچ یک از یالهایش را بیشتر از یک بار در بر نداشته باشد.

مسئله ۶. ثابت کنید گرافی که هر دو رأسش با یک و فقط یک مسیر ساده به هم وصل شده اند درخت است.

راه حل. واضح است که چنین گرافی همبند است. فرض می کنیم که این گراف دور داشته باشد. در این صورت هر دو رأس این دور با دست کم دو مسیر ساده به هم متصل اند (شکل ۱۰۷ را ببینید). رسیدن به این تناقض نشان می دهد که فرضمان غلط بوده است.



شکل ۱۰۷

اکنون حکم برعکس را ثابت می کنیم.

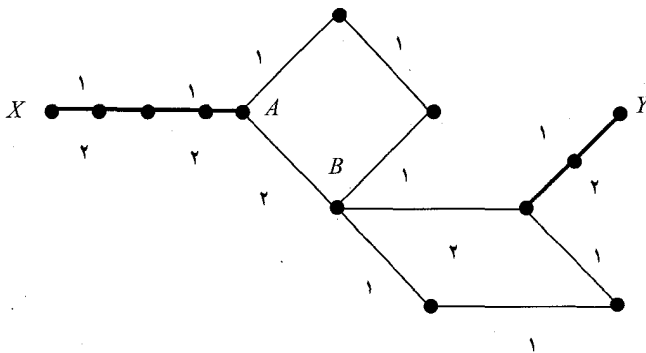
مسئله ۷. ثابت کنید که در هر درخت هر دو رأس با یک و فقط یک مسیر ساده به هم متصل اند.

راه حل. فرض کنید چنین نباشد و دو رأس  $X$  و  $Y$  با دو مسیر ساده مختلف به هم متصل باشند. در ابتدا به نظر می رسد که اگر روی مسیر اول از  $X$  به  $Y$  برویم و سپس روی مسیر دوم برگردیم، یک دور به دست می آوریم. متأسفانه، ممکن است این مطلب درست نباشد. مشکل اینجاست که ممکن است این مسیرهای رأسهای مشترک (بجز دو سر مشترکشان) داشته باشند (شکل ۱۰۸ را ببینید)، و بنابراین تعریف، رأسهای هر دور نباید تکراری باشند. برای اینکه از این دور «نامناسب» دوری واقعی در بیاوریم، باید

الف) از  $X$  شروع به حرکت کنیم و اولین رأسی را انتخاب کنیم که در آن مسیرهایمان منشعب می شوند (در شکل ۱۰۸، این رأس نقطه  $A$  است)،

ب) بعد از اینکه این رأس را انتخاب کردیم، باید روی مسیر شماره ۱ اولین نقطه ای را پیدا کنیم که به مسیر شماره ۲ هم تعلق دارد (رأس  $B$  در شکل ۱۰۸).

اکنون بخشهایی از مسیره که میان  $A$  و  $B$  قرار دارند دور تشکیل می دهند.



شکل ۱۰۸

توصیه به معلمان. دو جمله اول این راه‌حل ایده‌های اساسی راه‌حل را در بر دارند. مطالب تکنیکی دیگر ممکن است برای برخی دانش‌آموزان دشوار باشد.

با استفاده از مسأله‌های ۶ و ۷ می‌توان درخت را جور دیگری تعریف کرد که معادل تعریف اول است.

تعریف. درخت‌گرافی است که در آن هر دو رأس مختلف با یک و فقط یک مسیر ساده به هم متصل‌اند. برای حل کردن مسأله‌های زیر از هر یک از این تعریفها که بخواهیم استفاده می‌کنیم.

مسأله ۸. ثابت کنید در هر درخت که دست‌کم یک یال دارد، رأسی وجود دارد که انتهای فقط یک یال است (چنین رأسی را آویز می‌نامند).

راه‌حل. رأسی دلخواه از درخت را در نظر بگیرید و از روی یکی از یالهایی که از این رأس خارج شده است به رأسی دیگر بروید. اگر درجه این رأس جدید ۱ باشد، در آن می‌مانیم؛ در غیر این صورت، از روی یالی دیگر به رأسی دیگر می‌رویم و این کار را ادامه می‌دهیم. معلوم است که نمی‌توانیم به رأسی که قبلاً رفته‌ایم برسیم - اگر چنین شود، یعنی دور وجود دارد. از طرف دیگر، چون تعداد رأسهای گرافمان متناهی است، جایی باید متوقف شویم. رأسی که در آن متوقف شویم آویز است!

حکم مسأله ۸ را لم رأس آویز می‌نامند. بعداً از این لم در راه‌حل‌های دیگر استفاده می‌کنیم.

توصیه به معلمان. از اینجا به بعد مسأله‌هایمان را به زبان نظریه گراف یا به زبان خودمانی بیان می‌کنیم. تجربه ما نشان می‌دهد که نباید در استفاده از این دو گونه افراط کرد. اول اینکه دانش‌آموزان باید زبان نظریه گراف را بفهمند. دوم اینکه دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که معنی واقعی مسأله را که وراى بیان خودمانی آن نهفته است درک کنند. بنابراین، بهتر است که از هر دو زبان، بی‌آنکه ذهنمان را مشغول یکی از آنها نکنیم، بی‌هیچ محدودیتی استفاده کنیم.

مسئله ۹. درجه همهٔ رأسهای گرافی برابر با ۳ است. ثابت کنید این گراف دور دارد.

مسئله ۱۰. ثابت کنید اگر یالی را (به استثنای دو سرش) از درختی حذف کنیم، گراف حاصل همبند نیست.

مسئله ۱۱. ناکجاآباد  $۱۰۱$  شهر دارد. برخی از این شهرها با جاده به هم وصل‌اند و هر دو شهر با یک و فقط یک مسیر ساده به هم وصل‌اند. ناکجاآباد چند جاده دارد؟

راه‌حل. اگر مسئله را به زبان نظریهٔ گراف ترجمه کنیم می‌توانیم بگوییم که گراف جاده‌های ناکجاآباد درخت است. این درخت باید رأسی آویز داشته باشد. این رأس و یال متناظرش را حذف کنید. گراف حاصل هم درخت است و در نتیجه رأسی آویز دارد، که آن را همراه با یال متناظرش حذف می‌کنیم. اگر این کار را  $۱۰۰$  بار تکرار کنیم سرانجام به درختی می‌رسیم که یک رأس دارد و البته یالی ندارد. چون در هر مرحله یک یال را حذف کرده‌ایم، نتیجه می‌گیریم که  $۱۰۰$  یال وجود داشته است.

دقیقاً به همین روش می‌توانیم حکمی دیگر و کلی‌تر را ثابت کنیم.

قضیه: در هر درخت، تعداد رأسها از تعداد یالها یکی بیشتر است.

قضیهٔ عکس هم درست است.

مسئله ۱۲. ثابت کنید گراف همبندی که تعداد رأسهایش از تعداد یالهایش یکی بیشتر است درخت است.

\* \* \*

مسئله ۱۳. تور والیبالی مستطیلی مشبکه‌ای به ابعاد  $۶۰۰ \times ۵۰$  است. حداکثر چند تا از ریسمانهای به طول واحد را می‌توانید ببرید، به طوری که این تور تکه نشود؟

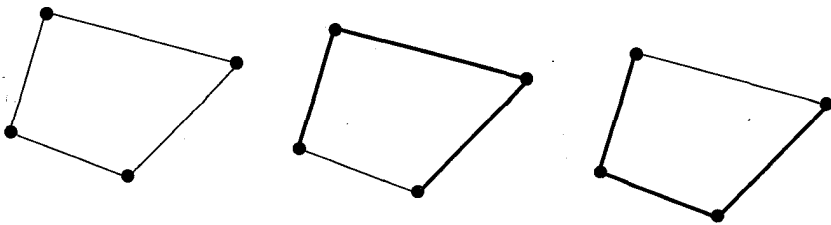
راه‌حل. این تور والیبالی را گرافی در نظر می‌گیریم که گره‌هایش رأسهای گراف و ریسمانهایش یالهای گراف‌اند. هدفمان این است که تا جایی که می‌توانیم یال از این گراف حذف کنیم، به طوری که همبند بماند. تا می‌توانیم یالها را یکی‌یکی حذف می‌کنیم. توجه کنید که اگر گراف دور داشته باشد می‌توانیم همهٔ یالهای این دور را حذف کنیم. اما گراف همبند بدون دور درخت است - بنابراین، وقتی که درختی به دست آوردیم، دیگر نمی‌توانیم یال دیگری از گراف را حذف کنیم!

تعداد یالهای گراف مورد نظر را در این لحظهٔ پایانی حساب می‌کنیم. تعداد رأسها همان است که اول بوده - یعنی برابر است با  $۶۰۱ \times ۵۱$  یا  $۳۰۶۵۱$ . از طرف دیگر، درختی با این تعداد رأس باید  $۱ - ۳۰۶۵۱$  یا  $۳۰۶۵۰$  یال داشته باشد. در ابتدا  $۵۱ \times ۶۰۰ + ۵۰ \times ۶۰۱$  یا  $۶۰۶۵۰$  یال داریم. بنابراین حداکثر می‌توانیم  $۳۰۰۰۰$  یال را حذف کنیم - و به سادگی می‌توان قانع شد که واقعاً می‌توان این کار را کرد.

یادداشت. توجه‌تان را به ایدهٔ اصلی این راه‌حل - یعنی یافتن درخت «ماکسیمال» در گراف مورد نظر -



جلب می‌کنیم. بی‌تردید، این درخت «ماکسیمال» یکتا نیست (شکل ۱۰۹ را ببینید). این روش (یعنی انتخاب درخت «ماکسیمال») به حل سه مسألهٔ زیر هم کمک می‌کند.



شکل ۱۰۹

مسألهٔ ۱۴. کشوری ۳۰ شهر دارد. هر یک از این شهرها به هر یک از دیگر شهرها از طریق (فقط) یک جاده متصل است. حداکثر چند جاده را می‌توان مسدود کرد، به طوری که باز هم بتوان از هر شهر به بقیهٔ شهرها رفت؟

مسألهٔ ۱۵. ثابت کنید در هر گراف همبند می‌توان رأسی را همراه با همهٔ یالهایی که از آن خارج شده‌اند حذف کرد، به طوری که گراف همبند بماند.

مسألهٔ ۱۶.\* کشوری ۱۰۰ شهر دارد که برخی از آنها از طریق خط هوایی به هم متصل‌اند. می‌دانیم که می‌توان از هر شهر به بقیهٔ شهرها دسترسی داشت (هر چند که ممکن است چند جا میان راه توقف کرد). ثابت کنید می‌توان حداکثر

الف) ۱۹۸ بار

ب) ۱۹۶ بار

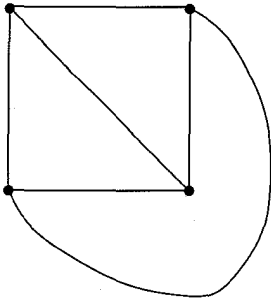
پرواز کرد و از همهٔ شهرها دیدن کرد.

توصیه به معلمان. می‌توان جلسه‌ای جداگانه را به مفهوم درخت و مسأله‌های مربوط به آن اختصاص داد. می‌توان مسأله‌های مربوط به ایدهٔ درخت ماکسیمال را پس از بحث مفصل دربارهٔ این ایده یکی یکی مطرح کرد.

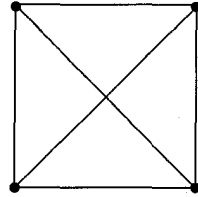
### ۳. قضیهٔ اوپلر

در این بخش قضیه‌ای کلاسیک را که هم نام لئونارد اوپلر، ریاضیدان بزرگ قرن هجدهم، است ثابت می‌کنیم. در این خصوص، ویژگیهای نوع مهمی از گرافها را هم، که تعریف آنها در سطر بعد آمده، بررسی می‌کنیم. تعریف. گرافی را که می‌توان آن را طوری کشید که یالهایش یکدیگر را (بجز در انتهایشان) قطع نکنند مسطح می‌نامند.

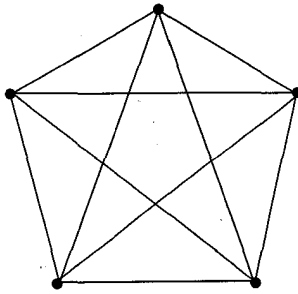
مثلاً گراف شکل ۱۱۰ مسطح است (گرافی یکرخت با آن در شکل ۱۱۱ رسم شده است)، اما گراف شکل ۱۱۲ مسطح نیست (این مطلب را کمی بعد ثابت می‌کنیم).



شکل ۱۱۱



شکل ۱۱۰



شکل ۱۱۲

می‌گوییم گرافی مسطح درست رسم شده است، هرگاه یالهایش (که در شکل رسم شده‌اند) در نقطه‌های درونی‌شان یکدیگر را قطع نکرده باشند.

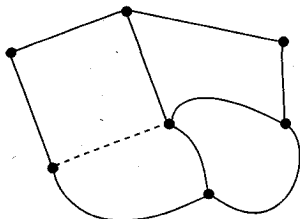
توصیه به معلمان. شاید متوجه شده‌اید که در استفاده از مفهوم گراف خیلی دقیق نبوده‌ایم - زیرا میان دو گراف مختلف، اما یکرخت، فرقی قائل نشده‌ایم. این بی‌دقتی را به‌ویژه می‌توان به‌روشنی در تعریف گراف مسطح دید. مهم است که دانش‌آموز بفهمد که ممکن است گرافی مسطح باشد، هر چند که یالهایش در شکل کشیده شده از آن یکدیگر را قطع کرده باشند (شکل ۱۱۰ را ببینید).

اگر گرافی درست رسم شده باشد، صفحه را به چند ناحیه که وجه نامیده می‌شوند تقسیم می‌کند. تعداد وجه‌ها را با  $F$ ، تعداد رأسها را با  $V$  و تعداد یالهای گراف را با  $E$  نشان می‌دهیم. در مورد گراف

شکل ۱۱۱،  $V = 4$ ،  $E = 6$  و  $F = 4$  (ناحیه بی کران بیرونی گراف را هم وجه به حساب می آوریم).  
در این صورت قضیه زیر درست است.

قضیه اویلر. در هر گراف همبند مسطح درست رسم شده تساوی  $V - E + F = 2$  درست است.

اثبات. یک بار دیگر نحوه استدلالی را که از آن در راه حل مسأله مربوط به تور والیبال استفاده کردیم تکرار می کنیم: یالها را حذف می کنیم تا به درخت برسیم و همبندی گراف حفظ شود. به نحوه تغییرات مقدارهای  $V$ ،  $E$  و  $F$  بر اثر این کار توجه کنید. واضح است که تعداد رأسها تغییر نمی کند، اما تعداد یالها یکی کم می شود. تعداد وجهها هم یکی کم می شود: در شکل ۱۱۳ نشان داده شده است که چگونه دو وجه مجاور به یال حذف شده در هم ادغام می شوند تا یک وجه جدید پدید بیاید. بنابراین مقدار  $V - E + F$  بر اثر این کار تغییر نمی کند (می توانیم بگوییم که مقدار  $V - E + F$  بر اثر این کار ناورداست - فصل «ناورداها» را ببینید!).



شکل ۱۱۳

چون (بنابر قضیه بخش قبل) در درخت حاصل  $V - E = 1$  و  $F = 1$ ، در این درخت  $V - E + F = 2$ ، و در نتیجه این تساوی در مورد گراف اصلی هم درست است.  
تساوی  $V - E + F = 2$  را دستور اویلر می نامند.

قضیه اویلر حکمی بسیار قوی است و می توانیم نتیجه های زیبا و جالب زیادی را از آن به دست آوریم.

مسأله ۱۷. در سرزمین دریاچه ها ۷ دریاچه وجود دارد. این دریاچه ها از طریق  $10$  نهر به هم مرتبط اند، به طوری که می توان از طریق این نهرها از هر دریاچه به بقیه دریاچه ها شنا کرد. سرزمین دریاچه ها چند جزیره دارد؟

مسأله بعدی دشوارتر است.

مسأله ۱۸.  $20$  نقطه درون مربعی قرار دارند. این نقطه ها را با استفاده از پاره خطهایی غیرمتقاطع به یکدیگر و رأسهای مربع وصل کرده ایم، به طوری که مربع به چند مثلث افزاز شده است. تعداد این مثلثها چندانست؟

راه حل. نقطه‌ها و رأسهای مربع را رأسها و پاره‌خطها و ضلعهای مربع را یالهای گرافی مسطح در نظر می‌گیریم. تعداد یالهای دور هر ناحیه را (که گراف، صفحه را به آنها تقسیم کرده است) می‌شماریم. سپس همه این عددها را جمع می‌کنیم. چون هر یال دقیقاً دو وجه مختلف را از هم جدا می‌کند، عدد حاصل دقیقاً دو برابر تعداد یالهاست. چون بجز ناحیه بیرونی، که به چهار یال محدود شده بقیه وجه‌ها مثلث‌اند، پس

$$3(F - 1) + 4 = 2E$$

یعنی،

$$E = \frac{3(F - 1)}{2} + 2$$

چون تعداد رأسها برابر با ۲۴ است، بنابر دستور اوایلر،

$$24 - \left( \frac{3(F - 1)}{2} + 2 \right) + F = 2$$

بنابراین  $F = 43$  (که در اینجا وجه بیرونی را هم شمرده‌ایم). بنابراین تعداد مثلثهایی که مربع به آنها تقسیم شده برابر با ۴۲ است.

مسئله ۱۹. ثابت کنید در هر گراف مسطح،  $2E \geq 3F$ .

بحث را با چند نتیجه کلاسیک قضیه اوایلر پی می‌گیریم. ابتدا یک نابرابری به دست می‌آوریم.

مسئله ۲۰. ثابت کنید در هر گراف همبند مسطح،  $E \leq 3V - 6$ .

راه حل. از مسئله قبل نتیجه می‌شود  $2E \geq 3F$ . در نتیجه، بنابر دستور اوایلر،

$$V - E + \frac{2E}{3} \geq 2$$

بنابراین،  $E \leq 3V - 6$ ، همان چیزی که می‌خواهیم.

مسئله ۲۱. ثابت کنید در هر گراف مسطح (حتی اگر همبند نباشد)،  $E \leq 3V - 6$ .

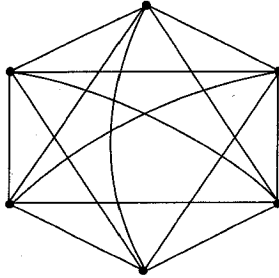
راهنمایی: نابرابری مورد نظر نتیجه نابرابریهای متناظر برای هر یک از مؤلفه‌های همبندی است.

جالب اینجاست که به کمک نابرابری آخری می‌توانیم حکمی را که در ابتدای این بخش ادعا کردیم

ثابت کنیم.

مسأله ۲۲. گرافی پنج رأسی که هر یک از رأسهایش با یالی به بقیه رأسها متصل است مسطح نیست. راهنمایی: ثابت کنید در مورد این گراف نابرابری  $E \leq 3V - 6$  درست نیست.

گرافی را که در آن هر رأس با یالی به بقیه رأسها متصل است گراف کامل می نامند. در شکل ۱۱۴ گراف کامل ۶ رأسی را می بینید.



شکل ۱۱۴

حکم مسأله ۲۲ یعنی اینکه گراف کاملی که بیش از ۴ رأس دارد مسطح نیست.

مسأله ۲۳. آیا می توان سه خانه و سه چاه ساخت و بعد همه خانه ها را از طریق نه مسیر به چاهها طوری وصل کرد که مسیرها بجز در دو سرشان جای دیگری یکدیگر را قطع نکنند؟

راهنمایی: در گراف مربوط به این مسأله می توان نابرابری  $2E \geq 3F$  را قویتر کرد. در حقیقت، طول هر دور در این گراف باید عددی زوج باشد، زیرا خانه ها و چاهها در این دور یکی در میان ظاهر می شوند. اگر این گراف مسطح و درست رسم شده باشد، نتیجه می گیریم که هر وجه این نمایش (از قرار معلوم) مسطح دست کم باید ۴ یال در مرزهایش داشته باشد. بنابراین از محاسباتی شبیه به محاسبات راه حل مسأله ۱۹ نابرابری  $E \geq 2F$  به دست می آید. اما این نابرابری درست نیست، و در نتیجه پاسخ سؤال مسأله خیر است.

مسأله ۲۴. ثابت کنید اگر درجه هر یک از ۱۰ رأس گرافی برابر با ۵ باشد، این گراف مسطح نیست.

می توان از نابرابری  $E \leq 3V - 6$  برای اثبات سه حکم زیبای زیر استفاده کرد.

مسأله ۲۵. ثابت کنید در هر گراف مسطح رأسی وجود دارد که درجه اش از ۵ بیشتر نیست.

مسأله ۲۶. هر یال گرافی کامل و ۱۱ رأسی را با قرمز یا آبی رنگ می کنیم. سپس گرافی را که از همه یالهای قرمز تشکیل شده و گرافی را که از همه یالهای آبی تشکیل شده در نظر می گیریم. ثابت کنید دست کم یکی از این دو گراف مسطح نیست.

مسئله ۲۷\*. هفت ضلعی‌ای را به پنج ضلعیها و شش ضلعیهای محدب طوری تقسیم کرده‌ایم که هر یک از رأسهایش به دستکم دو تا از چند ضلعیهای کوچکتر تعلق دارد. ثابت کنید که تعداد چند ضلعیها در این فرش کردن از ۱۳ کمتر نیست.

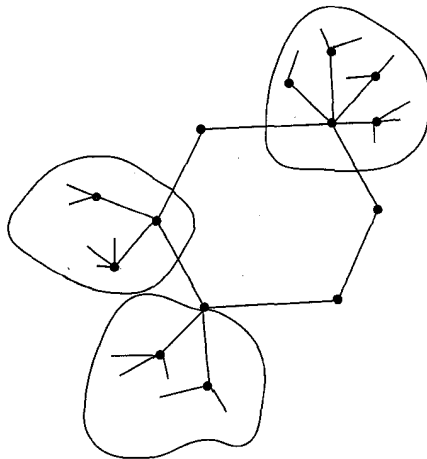
توصیه به معلمان. تجربه ما نشان می‌دهد که مطالبی که در این بخش مطرح شدند در نظریه گراف کاملاً مهم‌اند. احتمالاً می‌توان جلسه‌ای جداگانه را برای پرداختن به این موضوع اختصاص داد.

#### ۴. مسأله‌های گوناگون

در این بخش مسأله‌هایی را از بخشهای مختلف نظریه گراف جمع‌آوری کرده‌ایم. برای حل کردن این مسأله‌ها باید روشهای مطرح شده در این فصل و فصل «گرافها - ۱» را با ایده‌های بکر دیگری ادغام کرد. در نتیجه، این مسأله‌ها بسیار دشوارند.

مسئله ۲۸. ثابت کنید که می‌توان هر گراف همبند را که بیش از دو رأس «فرد» (فصل «گرافها - ۱» را ببینید) ندارد بدون برداشتن قلم از کاغذ طوری رسم کرد که هر یال دقیقاً یک بار رسم شود.

خلاصه راه حل. فرض کنید که گراف مورد نظر هیچ رأس «فرد»ی نداشته باشد. حکم را به استقرا روی تعداد یالها ثابت می‌کنیم. پایه استقرا (گرافی بدون یال) معلوم است. برای اثبات گام استقرایی، گراف همبند دلخواهی در نظر می‌گیریم که همه رأسهایش «زوج»‌اند. چون این گراف اصلاً رأس آویز ندارد، پس درخت نیست و در نتیجه باید دور داشته باشد. اکنون می‌توانیم به طور موقت همه یالهای این دور را حذف کنیم. پس از این کار، گراف مورد نظر به چند مؤلفه همبندی تجزیه می‌شود که با دور «موقتاً حذف شده» رأسهایی مشترک دارند و در شرایط قضیه صدق می‌کنند (شکل ۱۱۵ را ببینید). بنابر



شکل ۱۱۵

فرض استقرا هر یک از این مؤلفه‌ها را می‌توان به طریق خواسته شده رسم کرد. اکنون معلوم است که گراف اصلی را چگونه باید رسم کرد: روی دور گفته شده حرکت می‌کنیم و اگر به رأسی رسیدیم که به یکی از مؤلفه‌های همبندی تعلق دارد، رسم این مؤلفه را از این رأس شروع می‌کنیم (و مسلماً مهم است که کار را در همین رأس تمام کنیم!)، بعد حرکت روی دور را ادامه می‌دهیم.

اثبات حالتی که گرافمان دو رأس با درجه فرد دارد کاملاً مشابه است - مسیری که این دو رأس را به هم وصل می‌کند موقتاً حذف می‌کنیم و از همان روش استفاده می‌کنیم.

گرافی را که می‌توان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ طوری رسم کرد که هر یالش دقیقاً یک بار کشیده شود، گراف اویلری می‌نامند.

قبلاً در فصل «گرافها - ۱» ثابت کرده‌ایم که ممکن نیست گراف اویلری بیش از دو رأس «فرد» داشته باشد. به کمک مسأله قبل می‌توانیم همه نتیجه‌های به دست آمده را در یک قضیه بگنجانیم.

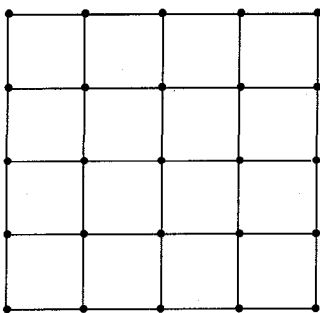
قضیه: وقتی و فقط وقتی گرافی اویلری است که همبند باشد و بیش از دو رأس «فرد» نداشته باشد. توجه کنید که قسمت «وقتی» این قضیه را قبلاً ثابت کرده‌ایم.

در اینجا سه مسأله دیگر می‌آوریم.

مسأله ۲۹. آیا می‌توانیم شبکه شکل ۱۱۶ را

(الف) از ۵ خط شکسته هر کدام به طول ۸ به دست آوریم؟

(ب) از ۸ خط شکسته هر کدام به طول ۵ به دست آوریم؟



شکل ۱۱۶

مسأله ۳۰. ۱۰۰ دایره شکلی همبند در صفحه ایجاد کرده‌اند. ثابت کنید می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ یا دو بار کشیدن قسمتی از دایره‌ها رسم کرد.

مسأله ۳۱. ثابت کنید هر گراف همبند با  $2n$  رأس «فرد» را می‌توان بی‌آنکه یالی را بیش از یک بار بکشیم طوری رسم کرد که قلم دقیقاً  $n - 1$  بار از روی کاغذ برداشته شود.

\* \* \*

مسأله ۳۲. ۵۰ دانشمند در کنفرانسی حضور دارند و هر یک از آنها دست‌کم با ۲۵ نفر دیگر آشناست. ثابت کنید چهار نفر از این دانشمندان وجود دارند که می‌توانند دور میزی گرد طوری بنشینند که هر یک از آنها با دو نفری که کنارش نشسته‌اند آشنا باشد.

مسأله ۳۳. هر یک از ۱۰۲ دانش‌آموز مدرسه‌ای با دست‌کم ۶۸ دانش‌آموز دیگر دوست است. ثابت کنید چهار دانش‌آموز وجود دارند که تعداد دوستانشان برابر است.

مسأله ۳۴. طول هر مسیر ساده را که دو رأس درختی را به هم وصل می‌کنند فاصلهٔ میان این دو رأس می‌نامیم. مجموع فاصله‌های میان هر رأس با بقیهٔ رأسهای گراف را دوری این رأس می‌نامیم. ثابت کنید تعداد رأسهای درختی که دو رأس دارد که اختلاف دوری آنها برابر با ۱ است عددی فرد است.

مسأله ۳۵. آلیس ۷ درخت روی تخته‌سیاه رسم کرده است که هر کدام شش رأس دارند. ثابت کنید دوتا از این درختها یکرخت‌اند.

مسأله ۳۶. در کشوری هر دو شهر از طریق خط هوایی یا راه‌آهن به هم متصل‌اند. ثابت کنید الف) می‌توانید یکی از راههای حمل و نقل را طوری انتخاب کنید که از هر شهر به هر شهر دیگر فقط از طریق این نوع روش حمل و نقل بروید.

ب) یک شهر و یک نوع روش حمل و نقل وجود دارد که می‌توانید از این شهر به هر شهر دیگری، فقط از طریق این نوع روش حمل و نقل، با حداکثر یک بار پیاده و سوار شدن بروید.

ج) هر شهری ویژگی اشاره شده در قسمت (ب) را دارد.

د) می‌توانید نوعی از دو روش حمل و نقل را طوری انتخاب کنید که از هر شهری بتوانید به بقیهٔ شهرها فقط از طریق این روش حمل و نقل و حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن بروید.

مسأله ۳۷. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۶ رأسی را یا آبی کرده‌ایم یا سفید. ثابت کنید سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.

مسأله ۳۸. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۱۷ رأسی را یا قرمز کرده‌ایم یا آبی یا سبز. ثابت کنید سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.

مسأله ۳۹. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۹ رأسی را یا آبی کرده‌ایم یا قرمز. ثابت کنید یا چهار رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند آبی‌اند، یا سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند قرمزند.

مسأله ۴۰. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۱۰ رأسی را یا سیاه کرده‌ایم یا سفید. ثابت کنید چهار رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.



توصیه به معلمان. قضیهٔ اولیله مهمترین و اصلیترین موضوع این بخش است. باید آن را خیلی مفصل و با آوردن اثبات دقیق بررسی کرد. از بقیهٔ مسأله‌ها به راههای مختلف می‌توان استفاده کرد. طبیعتاً دشوارترین آنها (که با ستاره مشخص شده‌اند) برای کار در منزل اختصاص دارند.

## ۵. گرافهای جهتدار

موضوع اصلی این بخش گراف جهتدار است؛ یعنی، گرافی که روی یالهایش پیکان قرار دارد. هیچ قضیهٔ مهمی را دربارهٔ این گرافها ثابت نمی‌کنیم؛ با وجود این، مفهوم گراف جهتدار قسمت مهمی از فرهنگ عمومی ریاضی است و این گرافها در مسأله‌های ریاضی خیلی ظاهر می‌شوند.

مسألهٔ ۴۱. دمیتری پس از بازگشت از ناکجآباد به دوستانش گفت که در آنجا چندین دریاچه وجود دارد که میانشان رودخانه‌ای در جریان است. علاوه بر این، او گفت که در ناکجآباد از هر دریاچه آب سه رودخانه خارج می‌شود و به هر دریاچه آب چهار رودخانه می‌ریزد. ثابت کنید که او اشتباه می‌کرده است.

راه‌حل. هر رودخانه دو سر دارد که دریاچه‌اند، و آب از یکی از دریاچه‌ها به رودخانه وارد می‌شود و به دریاچهٔ دیگر می‌ریزد. بنابراین، تعداد رودخانه‌هایی که آب از آنها به دریاچه‌ای می‌ریزد برابر با تعداد رودخانه‌هایی است که آب دریاچه‌ای به آنها وارد می‌شود. اما اگر در ناکجآباد  $n$  دریاچه وجود داشته باشد، تعداد رودخانه‌هایی که به دریاچه‌ای می‌ریزند برابر است با  $4n$  و تعداد رودخانه‌هایی که آب دریاچه‌ای به آنها وارد می‌شود برابر است با  $3n$ . این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

مسألهٔ ۴۲. کشوری یک پایتخت و ۱۰۰ شهر دارد. برخی از شهرها (که پایتخت جزء آنهاست) با جاده‌های یک‌طرفه به هم متصل‌اند. از هر شهر بجز پایتخت دقیقاً ۲۰ جاده خارج شده و دقیقاً ۲۱ جاده به هر شهر بجز پایتخت وارد شده است. ثابت کنید نمی‌توان با اتومبیل از هر شهری به پایتخت رفت و قوانین رانندگی را هم رعایت کرد.

\* \* \*

در هر دو مسألهٔ زیر از خواننده خواسته شده که روی یالهای گرافی که جهتدار نیست پیکانها را طوری قرار دهد که شرطهای موردنظر را داشته باشند.

مسألهٔ ۴۳. در کشوری هر شهر به بقیهٔ شهرها از طریق جاده‌ای متصل است. پادشاه ابله تصمیم گرفته که جاده‌ها را طوری یک‌طرفه اعلام کند که اگر از شهری خارج شدید دیگر نتوانید به آن برگردید. آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسأله ۴۴. ثابت کنید می‌توان روی یالهای هر گراف همبند که جهت‌دار نیست پیکانها را طوری قرار داد و یک رأس را طوری انتخاب کرد که بتوان از این رأس به هر رأس دیگر رفت.

\* \* \*

در مسأله‌های ۴۵ و ۴۶ از مفهوم گراف اویلری و ویژگیهای اصلی آن استفاده می‌شود.

مسأله ۴۵. درجه همه رأسهای گرافی همبند زوج است. ثابت کنید می‌توان پیکانها را روی یالهای این گراف طوری قرار داد که

(الف) از هر رأس بتوان در جهت پیکانها به بقیه رأسها رفت.

(ب) در هر رأس تعداد یالهایی که وارد می‌شوند با تعداد یالهایی که خارج می‌شوند برابر باشد.

مسأله ۴۶. روی یالهای گرافی همبند پیکانها را طوری قرار داده‌ایم که در هر رأس تعداد یالهایی که وارد می‌شوند با تعداد یالهایی که خارج می‌شوند برابر است. ثابت کنید در جهت پیکانها از هر رأسی به بقیه رأسها می‌توان رفت.

\* \* \*

اگر با روش استقرای ریاضی آشنا باشید، می‌توانید در حل مسأله‌های مجموعه زیر از آن استفاده کنید.

مسأله ۴۷. در کشوری هر شهر به بقیه شهرها با جاده‌ای یک طرفه متصل است. ثابت کنید شهری وجود دارد که می‌توانید با ماشین از آن به بقیه شهرها بروید.

راه حل. از استقرا روی تعداد شهرها استفاده می‌کنیم. پایه استقرا معلوم است. برای برداشتن گام استقرایی یکی از شهرها را حذف می‌کنیم. در مورد بقیه شهرها، بنابر فرض استقرا، می‌توانیم شهری مانند  $A$  پیدا کنیم که ویژگی مورد نظر را داشته باشد. اکنون شهر حذف شده را، که آن را  $B$  می‌نامیم، به جایش برمی‌گردانیم. اگر دست کم یک راه وجود داشته باشد که به  $B$  برود،  $A$  برای مسأله اصلی هم شهری است که به دنبالش می‌گردیم. اگر همه جاده‌ها از  $B$  خارج شوند،  $B$  شهری است که می‌خواهیم.

مسأله ۴۸. چند تیم در تورنمنتی شرکت کرده‌اند، به طوری که هر تیم با بقیه تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند. می‌گوییم تیم  $A$  از تیم  $B$  قویتر است، هرگاه  $A, B$  را برده باشد یا تیمی وجود داشته باشد که  $A, C$  را برده باشد و  $C, B$  را.

(الف) ثابت کنید تیمی وجود دارد که از بقیه تیمها قویتر است.

(ب) ثابت کنید تیمی که تورنمنت را فتح کرده باشد از بقیه قویتر است.

مسأله ۴۹. کشوری ۱۰۰ شهر دارد. هر یک از این شهرها از طریق جاده‌ای یک طرفه به بقیه شهرها متصل است. ثابت کنید می‌توان جهت حرکت روی یکی از جاده‌ها را عوض کرد، به طوری که پس از آن باز هم بتوان از هر شهری به بقیه رفت.

مسأله ۵۰. بیست تیم در تورنمنت والیبالی شرکت کرده‌اند که در آن هر تیم با بقیه تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند. ثابت کنید که می‌توان تیمها را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ طوری شماره‌گذاری کرد که تیم ۱ تیم ۲ را برده باشد، تیم ۲ تیم ۳ را برده باشد، ... و تیم ۱۹ تیم ۲۰ را برده باشد.

\* \* \*

این هم سه مسأله آخر این بخش.

مسأله ۵۱. در تورنمنت والیبالی که در آن هر تیم با بقیه تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند، امتیاز دو تیم برابر شده است. ثابت کنید تیمهایی مانند A، B و C وجود دارند که A، B را برده است، B، C را برده است و A، C را برده است.

مسأله ۵۲. کشوری ۱۰۱ شهر دارد.

الف) هر شهر به بقیه شهرها با جاده‌ای یک‌طرفه متصل است و در هر شهر ۵۰ جاده وارد شده و ۵۰ جاده خارج شده وجود دارد. ثابت کنید می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به طوری که حداکثر از دو تا از جاده‌ها عبور کرده باشید.

ب) برخی از شهرها از طریق جاده‌ای یک‌طرفه به هم متصل‌اند و در هر شهر ۴۰ جاده وارد شده و ۴۰ جاده خارج شده وجود دارد. ثابت کنید می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به طوری که حداکثر از سه تا از جاده‌ها عبور کرده باشید.

مسأله ۵۳.\* در کشوری همه جاده‌ها یک‌طرفه‌اند و می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به طوری که حداکثر از دو تا از جاده‌ها عبور کنید. یکی از جاده‌ها برای تعمیرات مسدود شده است، اما باز هم می‌توان از هر شهر به بقیه شهرها رفت. ثابت کنید در این وضعیت می‌توان این کار را طوری انجام داد که حداکثر از سه جاده عبور کرد.

## فصل ۱۴

### هندسه

اغلب می‌شنویم که «هندسه، این‌طور که در مدارس می‌خوانند، به کار چه کسی می‌آید؟ این علم فقط به کار خودش می‌آید - در ریاضیات عالی واقعاً هیچ خبری از آن نیست و گاهی بیش از حد پیچیده و دشوار می‌شود.»

یکی از جوابها (که البته کامل نیست) این است که «هندسه مدرسه‌ای» زمینه مناسبی برای پرورش تفکر منطقی و اصولی است. این علمی «که فقط به کار خودش می‌آید» بازی با اصول موضوعی است که یونانیان باستان وضع کرده‌اند. اقلیدس و اسلافش (و نیز پیروانش) عمیقاً اعتقاد داشتند که این اصول به اندازه کافی قوانین دنیای حقیقی پیرامونشان را منعکس می‌کردند.

با این همه، اگر هندسه را بازی در نظر بگیریم، در پیچیدگی و زیبایی شاید فقط بتوان آن را با شطرنج مقایسه کرد. امروزه احتمالاً کسی نمی‌تواند به دانستن تمامی رموز هر یک از این دو بازی بزرگ بشر بنازد. این مطلب (و محدودیت حجم این فصل) معلوم می‌کند که چرا در اینجا فقط چند حرکت اول این بازی را بررسی کرده‌ایم.

البته، باید یادآوری کنیم که هندسه جزئی جدانشدنی از ریاضیات است و با بقیه شاخه‌های «ملکه علوم» پیوندهای گوناگونی دارد: معلم خوب در اینجا فرصت مغتنمی دارد که یکپارچگی ریاضیات را نشان دهد.

\* \* \*

نمی‌خواهیم توضیحاتمان را به هیچ‌یک از کتابهای درسی موجود ارجاع دهیم - ترجیح می‌دهیم که معلمان مطالب هر جلسه را بر حسب میزان توانایی دانش‌آموزانشان انتخاب کنند. به معلمان توصیه می‌کنیم که به برنامه مدرسه توجه داشته باشند، اما کورکورانه از آن تبعیت نکنند.

دلخور نباشید که بیشتر مسأله‌ها تقریباً شبیه مسأله‌های کتابهای درسی‌اند. در حقیقت، نامعقول است که در «هندسه مدرسه‌ای» انتظار سؤالیهای «المیادی» داشته باشیم - کلمه «المیاد» حال و

هوایی فراتر از نظام آموزشی معمول را تداعی می‌کند، فراتر رفتن از حدود این نظام را. در حقیقت، هندسه در کتابهای درسی متعددی مفصل شرح داده شده است.

### ۱. دو نابرابری

هندسهٔ دبیرستانی معمولاً دربارهٔ حکمهای دقیقی مانند حکمهای زیر است:

«نقطه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط راست قرار دارند.»

«ارتفاعهای مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند.»

«مجموع زاویه‌های مثلث  $180^\circ$  درجه است.»

اما در بحثهای اولیه ابزارهای اصلی بی‌شک دو نابرابری زیرند:

نابرابری شمارهٔ ۱. به‌ازای هر سه نقطه روی صفحه مانند  $A$ ،  $B$  و  $C$ ،

$$AB + BC \geq AC$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که  $B$  روی پاره‌خط  $AC$  باشد.

نابرابری شمارهٔ ۲. در هر مثلث، در میان هر دو ضلع، ضلع بزرگتر روبه‌روی زاویه‌ای بزرگتر است. یعنی اگر در مثلث  $ABC$ ،  $AB > AC$ ، آن وقت  $\angle C > \angle B$ ، و برعکس.

در این فصل این نابرابریها را یک بار دیگر یادآوری کردیم و چند کاربرد از آنها را می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید اگر

$$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c$$

که در آنها  $a$ ،  $b$  و  $c$  عددهایی مثبت‌اند، آن وقت مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش  $a$ ،  $b$  و  $c$ ‌اند.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید طول میانهٔ  $AM$  در مثلث  $ABC$  از

$$\frac{1}{2} (AB + AC - BC)$$

بزرگتر است.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی می‌توانید با پاره‌خطهایی به طولهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  مثلثی تشکیل

دهید که عددهایی مثبت مانند  $x$ ،  $y$  و  $z$  وجود داشته باشند که

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x$$

مسئله ۴. با استفاده از نابرابری شماره ۲ ثابت کنید که اگر  $AB = AC$ ، آن وقت زاویه‌های  $ABC$  و  $ACB$  برابرند.

مسئله ۵. در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  از نصف  $BC$  بلندتر است. ثابت کنید زاویه  $BAC$  حاده است.

توصیه به معلمان. ممکن است مسئله‌های ۵-۱ برای برخی دانش‌آموزان خیلی ساده باشند، به ویژه اگر با همین مبحث در برنامه مدرسه برخورد کرده باشند. پس از بحث درباره راه‌حلهای این مسئله‌های ساده، این دانش‌آموزان می‌توانند به سراغ مسئله‌های دشوارتر زیر بروند.

مسئله ۶. ثابت کنید اگر بتوانید با پاره‌خطهایی به طولهای  $a, b, c$  مثلثی تشکیل دهید، می‌توانید همین کار را با پاره‌خطهایی به طولهای  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  هم انجام دهید.

مسئله ۷. چهارضلعی  $ABCD$  محدب است و

$$AB + BD < AC + CD$$

ثابت کنید  $AB < AC$ .

مسئله ۸. مرکزهای سه دایره غیرمقاطع روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید اگر دایره چهارمی بر هر سه این دایره‌ها مماس باشد، شعاعش از شعاع دست‌کم یکی از سه دایره مفروض بزرگتر است.

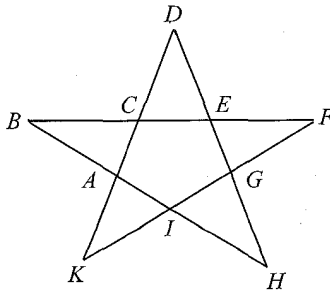
مسئله ۹. فرض کنید  $ABCD$  و  $A_1B_1C_1D_1$  دو چهارضلعی محدب باشند که ضلعهای نظیرشان برابرند. ثابت کنید اگر  $\angle A > \angle A_1$ ، آن وقت

$$\angle B < \angle B_1, \quad \angle C > \angle C_1, \quad \angle D < \angle D_1$$

مسئله ۱۰. ثابت کنید میانه مثلث که میان دو ضلع نابرابرش قرار دارد با ضلع کوچکتر زاویه بزرگتر می‌سازد.

مسئله ۱۱. آیا ستاره پنج‌رأسی‌ای مانند  $ABCDEFGHIK$  (شکل ۱۱۷ را ببینید) وجود دارد که در آن  $IK > KA$  و  $GH > HI, EF > FG, CD > DE, AB > BC$ ؟

یادداشت. این چند مسئله از مسئله‌های ۵-۱ دشوارترند، اما حل کردنشان خیلی هم سخت نیست. مسئله‌های دیگری با این موضوع را می‌توانید در فصل «نابرابری مثلث» پیدا کنید.



شکل ۱۱۷

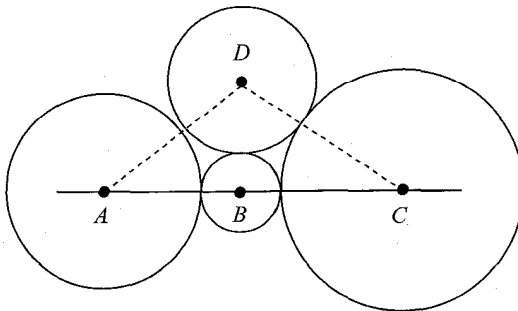
توصیه به معلمان. توصیه می‌کنیم که یک جلسه کامل را به این بخش اختصاص ندهید، و معتقدیم که بهتر است در چندین جلسه ۲-۳ تا از این مسأله‌ها را به دانش‌آموزانتان بدهید. هدف این است که نابرابریهای مثلث ملکه ذهن دانش‌آموزان شود، آن هم نه به عنوان «الگوی مسأله حل کردن» دیگری، بلکه به عنوان چیزی که اساسی است و اغلب ناخودآگاه از آن استفاده می‌شود.

مسأله ۸ را حل می‌کنیم. این مسأله از این نظر قابل توجه است که می‌توان آن را هم با نابرابری شماره ۱ حل کرد هم با نابرابری شماره ۲.

راه حل (با نابرابری شماره ۱). می‌توانیم فرض کنیم که دایره چهارم بر بقیه دایره‌ها مماس خارج است (شکل ۱۱۸ را ببینید) (در غیر این صورت شعاع دایره چهارم از شعاع دایره‌ای که بر آن مماس داخل است بزرگتر است). بنابراین، اگر مرکز دایره‌ها را با  $A, B, C, D$  و شعاعهای متناظرشان را با  $r_1, r_2, r_3, R$  و  $R$  نشان دهیم، آن وقت بنابر نابرابری مثلث،  $AD + DC > AC$ ؛ یعنی،

$$R + r_1 + R + r_3 > AC > r_1 + r_3 + 2r_2.$$

و در نتیجه  $R > r_2$ .



شکل ۱۱۸

راه حل (با نابرابری شماره ۲). یکی از زاویه‌های  $DBA$  و  $DBC$  حاده نیست و در نتیجه، بزرگترین زاویه در مثلث  $DBA$  یا  $DBC$  است. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که این زاویه  $DBA$  است. در این صورت از نابرابری شماره ۲ نتیجه می‌شود که  $DA > AB$ ؛ یعنی،

$$R + r_1 > AB > r_1 + r_2$$

$$\text{یا } R > r_2$$

\* \* \*

در انتهای این بخش چند مسأله می‌آوریم که برای حل کردن آنها به نابرابریهای مثلث و ایده‌ای دیگر احتیاج است.

مسأله ۱۲. مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  که زاویه رأس آن،  $B$ ، برابر با  $20^\circ$  درجه است مفروض است. ثابت کنید

$$\text{الف) } AB < 3AC$$

$$\text{ب) } AB > 2AC$$

مسأله ۱۳. محیط ستاره پنج‌رأسی‌ای که رأسهای پنج‌ضلعی  $F$  منطبق‌اند، محیط خود  $F$  و محیط پنج‌ضلعی درونی ستاره عددی‌ای اول‌اند. ثابت کنید مجموع این محیطها از  $20^\circ$  کمتر نیست. یادداشت. تعجب نکنید که این مسأله، مسأله‌ای هندسی است.

مسأله ۱۴. روی هر یک از ضلعهای مربعی نقطه‌ای انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید محیط چهارضلعی پدید آمده با این نقطه‌ها از دو برابر طول قطر مربع کمتر نیست.

## ۲. حرکت‌های صلب صفحه و همنهشتی

این موضوع مملو از مطالب جالب و ارتباطی با ریاضیات عالی است. دانش‌آموزان باید به درک نقش تقارن در ریاضیات و مفهوم گروه، که اساس بیشتر ریاضیات عالی است، رهنمون شوند. گروه‌های بلورشناختی، ویژگیهای جبری گروه حرکت‌های صلب صفحه و هندسه لیاچفسکی به این موضوع مهم ربط دارند.

توصیه به معلمان. ۱. فرض کرده‌ایم که دانش‌آموزان با قضیه‌های اصلی همنهشتی آشنا هستند (کتاب درسی هندسه را ببینید).



۲. در شروع مطالعه حرکت‌های صلب صفحه، از دانش‌آموزان بخواهید که هرگونه حرکت صلبی را که می‌شناسند فهرست کنند. تعریف طولپایی (یا حرکت صلب) بسیار ساده است: طولپایی تبدیلی از صفحه است که طول را حفظ می‌کند. به نظر می‌رسد که فقط چند تا از این نوع تبدیلهای وجود دارد: انتقال، دوران، تقارن نسبت به خط و تقارن لغزه‌ای (ترکیب تقارن نسبت به خط و انتقال).

باید راه‌حل مسأله‌های زیر را با دقت توضیح داد، زیرا بعداً به‌کار می‌آیند.

مسأله ۱۵. ثابت کنید دو مثلث مفروض، هر یک با طول ضلعهای  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، را می‌توان با حرکت دادن یکی از آنها در صفحه (یا شاید تقارن نسبت به یک خط) بر هم منطبق کرد. به عبارت دیگر، این دو هم‌نهشت‌اند.

مسأله ۱۶. الف) اگر حرکت صلب  $T$  همه رأسهای مثلث  $ABC$  را در جایشان نگه دارد، آن وقت  $T$  تبدیل همانی است.

ب) اگر دو حرکت صلب  $T$  و  $T'$  رأسهای مثلث  $ABC$  را به نقطه‌های  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  ببرند، آن وقت  $T$  و  $T'$  یک تبدیل‌اند (یعنی، تصویر هر نقطه تحت اثر  $T$  و تحت اثر  $T'$  یکی است).

مسأله ۱۷. الف) ترکیب دو انتقال چیست؟

ب) \* ثابت کنید هر انتقال را می‌توان به شکل ترکیب دو تقارن نسبت به دو نقطه مانند  $M$  و  $N$  نوشت.

ج) \* حرکت صلبی را در نظر بگیرید که ترکیب تقارن نسبت به خط  $m$  و انتقال به طول واحد در جهتی موازی با خط  $m$  است. ثابت کنید این حرکت صلب نه دوران است، نه انتقال، نه تقارن نسبت به خط.

توصیه به معلمان. درباره راه‌حل هندسی مسأله آخر باید کاملاً بحث کرد تا مطمئن شد که دانش‌آموزان مفهوم ترکیب را یاد گرفته‌اند. احتمالاً این مسأله برای تکلیف منزل مناسبتر است تا مسأله‌ای حل کردنی در سر کلاس.

مسأله ۱۸. دو دایره برابر مفروض‌اند. آیا همواره می‌توان یکی از آنها را با دوران بر دیگری تصویر کرد؟

مسأله ۱۹. آیا ممکن است دورانی نیم‌صفحه را بر خودش تصویر کند؟ تقارن نسبت به خط چگونه؟

مسأله ۲۰. معلوم شده است که شکلی در صفحه پس از دورانی به اندازه  $48^\circ$  درجه حول نقطه  $O$  بر خودش منطبق می‌شود. آیا لزوماً درست است که پس از دورانی به اندازه  $72^\circ$  درجه حول همان نقطه بر خودش منطبق می‌شود؟

توصیه به معلمان. ۱. بررسی حرکت‌های صلب و ترکیب‌های آنها فرصتی مغتنم برای بحث کلی درباره نگاشتها و ترکیب‌های آنها، با مثالهایی هم از جبر هم از هندسه، است.

۲. ممکن است زمانی دانش‌آموزان سؤال کنند که آیا می‌دانند که چگونه می‌توان (فقط با خط‌کش و پرگار) حرکت‌های صلب صفحه را «رسم» کنند. مثلاً آیا می‌توانند تصویر دایره‌ای را در تقارن نسبت به خطی مفروض رسم کنند؟

مبحث بعدی نحوه استفاده از حرکت‌های صلب برای حل کردن مسأله‌های هندسی است. این موضوع، کتابی (خیلی حجیم) مختص به خودش می‌خواهد. سعی می‌کنیم با آوردن چند مثال ایده‌های اصلی را معرفی کنیم.

مسأله ۲۱. نقطه  $A$  درون مثلثی مفروض است. پاره‌خطی رسم کنید که دو سرش روی مثلث باشد و نقطه  $A$  این پاره‌خط را به دو نیم تقسیم کند.

مسأله ۲۲. برکه‌ای کاغذی و دو خط داده شده‌اند. خطها موازی نیستند، اما یکدیگر را در بیرون برکه کاغذی قطع کرده‌اند. زاویه‌ای رسم کنید که اندازه‌اش دو برابر زاویه میان این دو خط باشد.

مسأله ۲۳. در دایره‌ای مفروض پنج ضلعی‌ای محاط کنید که ضلع‌هایش با پنج خط راست داده شده موازی باشند.

مسأله ۲۴. در دوزنقه  $ABCD$  (که در آن  $AD \parallel BC$ ) نقطه‌های  $M$  و  $N$  وسط قاعده‌ها هستند و خط  $MN$  با خط‌های  $AB$  و  $CD$  زاویه‌های برابر می‌سازد. ثابت کنید این دوزنقه متساوی‌الساقین است.

مسأله ۲۵. نقطه‌های  $P, Q, R, S$  به ترتیب روی ضلع‌های  $AB, BC, CD, DA$  از مربع  $ABCD$  طوری انتخاب شده‌اند که

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA}$$

ثابت کنید  $PQRS$  مربع است.

مسأله ۲۶. نقطه  $P$  و دو خط موازی در صفحه مفروض‌اند. مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنید که یکی از رأس‌هایش نقطه  $P$  باشد و دو رأس دیگرش روی خط‌های مفروض قرار داشته باشند.

مسأله ۲۷. روی خطی مفروض نقطه‌ای مانند  $M$  پیدا کنید که

(الف) مجموع فاصله‌های  $M$  تا دو نقطه مفروض کمترین مقدار ممکن باشد.

(ب) تفاضل این فاصله‌ها بیشترین مقدار ممکن باشد.

باز هم تکرار می‌کنیم که تقریباً غیرممکن است دربارهٔ این بخش زیبای هندسه همه‌چیز را دانست. در زیر چند مثال دیگر آورده‌ایم که مربوط به ویژگیهای حرکت‌های صلب و تقارن شکلها در صفحه‌اند.

مسئلهٔ ۲۸. ثابت کنید اگر مثلثی دو محور تقارن داشته باشد، دست‌کم سه محور تقارن دارد.

مسئلهٔ ۲۹. کدام حروف الفبای انگلیسی محور تقارن دارند؟ کدام حروف مرکز تقارن دارند؟

مسئلهٔ ۳۰. آیا پنج ضلعی‌ای وجود دارد که دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد؟

مسئلهٔ ۳۱. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه مانند  $X$  روی صفحه را پیدا کنید که دورانی مفروض  $X$  را به  $X'$  ببرد و خط راست  $XX'$  از نقطهٔ مفروض  $S$  بگذرد.

\* \* \*

راه‌حل مسئلهٔ نسبتاً دشوار ۲۳ را بررسی می‌کنیم.

به‌جای پنج خط مفروض  $L_1, L_2, \dots, L_5$  و خطهای  $K_1, K_2, \dots, K_5$  را در نظر بگیرید که بر این خطها عمودند و از مرکز دایره می‌گذرند. در این صورت معلوم است که خطهای  $L_i$  و  $AB$  (که در اینجا  $A$  و  $B$  دو نقطه روی دایره‌اند) وقتی و فقط وقتی موازی‌اند که  $A$  و  $B$  نسبت به خط  $K_i$  قرینهٔ هم باشند. می‌ماند اینکه روی دایره نقطه‌ای مانند  $M$  پیدا کنیم که اگر پی‌درپی خودش و تصویرهایش را نسبت به خطهای  $K_1, K_2, \dots, K_5$  قرینه کردیم تصویر آخر بر  $M$  منطبق شود. چون ترکیب پنج تقارن نسبت به خط باز هم تقارن نسبت به خط است (که محورش از مرکز دایره می‌گذرد)، چنین نقطه‌ای باید وجود داشته باشد و یکی از نقطه‌هایی است که این محور تقارن و دایره یکدیگر را قطع می‌کنند.

سؤال. راه‌حل بالا اشکال کوچکی دارد. آن را پیدا و برطرف کنید.

### ۳. محاسبهٔ زاویه‌ها

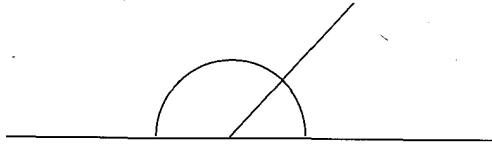
برای محاسبهٔ زاویه‌های شکل‌های هندسی باید چه چیزی را بدانید؟ در اینجا فقط به اصلی‌ترینها اشاره می‌کنیم:

۱. مجموع زاویه‌های مثلث  $180^\circ$  درجه است.

۲. دو زاویهٔ متقابل به رأس برابرند.

۳. مجموع زاویه‌هایی که روی یک خط راست قرار دارند برابر با  $180^\circ$  درجه است (شکل ۱۱۹ را

بینید).



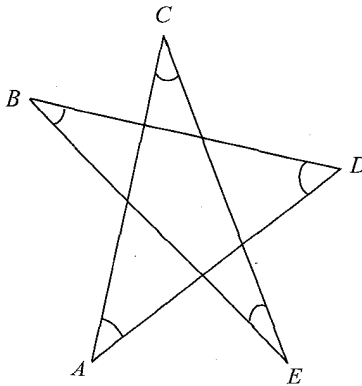
شکل ۱۱۹

۴. هر زاویه محاطی برابر با نصف زاویه مرکزی روبه‌رو به همان کمان است، و در نتیجه  
 ۵. دو زاویه محاطی روبه‌رو به یک کمان برابرند.  
 ۶. حرکت‌های صلب صفحه اندازه زاویه را تغییر نمی‌دهند.

\* \* \*

مسئله ۳۲. نیمساز  $BK$  در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، که در آن زاویه  $A$  برابر با  $۳۶^\circ$  درجه است، رسم شده است. ثابت کنید  $BK = BC$ .

مسئله ۳۳. ثابت کنید مجموع زاویه‌های رأس‌های ستاره‌ای پنج‌رأسی (شکل  $۱۲^\circ$  را ببینید) برابر با  $۱۸۰^\circ$  است.

شکل  $۱۲^\circ$ 

مسئله ۳۴. آیا ممکن است دو نیمساز مثلثی بر هم عمود باشند؟  
 راه‌حل مسئله ۳۲. چون  $\angle C = ۷۲^\circ$  و  $\angle B = ۷۲^\circ$ ، پس  $\angle KBC = ۳۶^\circ$  و در نتیجه،  
 $\angle CKB = ۷۲^\circ$ . بنابراین مثلث  $KBC$  متساوی‌الساقین است و  $BK = BC$ .

راه حل مسأله ۳۳. معلوم است که

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle EBD + \angle BED + \angle BDE \\ &= \angle E + \angle B + \angle D + \angle FED + \angle FDE \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \angle FED + \angle FDE &= 180^\circ - \angle EFD \\ &= 180^\circ - \angle CFA \\ &= \angle A + \angle C \end{aligned}$$

پس

$$180^\circ = \angle E + \angle B + \angle D + \angle A + \angle C$$

به این ترتیب، معلوم می‌شود که روش کار به شکل زیر است: برخی زاویه‌ها را با  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  نشان می‌دهیم، بعد بقیه زاویه‌ها را برحسب این زاویه‌ها می‌نویسیم. آخر سر، با استفاده از حکمهای (۱) - (۶) نتیجه مورد نظر را به دست می‌آوریم.

یادداشت. در اینجا دو جور وضعیت پیش می‌آید. از یک طرف، اگر فقط یکی یا دو تا از زاویه‌ها را با حروف نشان دهیم، ممکن است نتوانیم زاویه‌های باقی مانده و پارامترهای مسأله را برحسب متغیرهای معرفی شده بنویسیم. از طرف دیگر، اگر تعداد زیادی از زاویه‌ها را به عنوان متغیرهای نامعلوم در نظر بگیریم، نقشه‌مان درهم برهم می‌شود و به هدفمان نمی‌رسیم (زیرا ممکن است رابطه‌های احتمالی میان زاویه‌های مفروض مشخص نشود).

توصیه به معلمان. معمولاً انتخاب زاویه‌های «آغازین» (و تعدادشان) یکی از بخشهای مهم راه حل است. آموختن اینکه چگونه متغیرهای آغازین (در این مورد، زاویه‌ها) را انتخاب کنیم از اجزای اصلی فرهنگ ریاضی در سطح «المپیاد» است. فقط تجربه زیاد یا نحوه تفکر درست پرورش یافته ممکن است به دانش‌آموزان برای انتخاب درست کمک کند.

در اینجا پنج مسأله دیگر می‌آوریم.

مسأله ۳۵. وترهای  $AB$  و  $CD$  در دایره  $S$  موازی‌اند. ثابت کنید  $AC = BD$ .

مسأله ۳۶. نسبت سه زاویه متوالی در چهارضلعی‌ای محاطی برابر با  $4 : 3 : 2$  است. اندازه این زاویه‌ها را پیدا کنید.

مسئله ۳۷. در مثلث  $ABC$ ،  $\angle A = 90^\circ$ . میانه  $AM$ ، نیمساز  $AK$  و ارتفاع  $AH$  رسم شده‌اند. ثابت کنید  $\angle MAK = \angle KAH$ .

مسئله ۳۸. مربع  $ABCD$  مفروض است. دایره‌ای به شعاع  $AB$  و مرکز  $A$  رسم کرده‌ایم. این دایره عمودمنصف  $BC$  را در دو نقطه قطع می‌کند، که یکی از آنها  $O$  است و به  $C$  نزدیکتر است. اندازه زاویه  $AOC$  را پیدا کنید.

مسئله ۳۹. دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های  $A$  و  $B$  قطع کرده‌اند.  $AC$  قطری از دایره اول و  $AD$  قطری از دایره دوم است. ثابت کنید نقطه‌های  $B$ ،  $C$  و  $D$  روی یک خط راست قرار دارند.

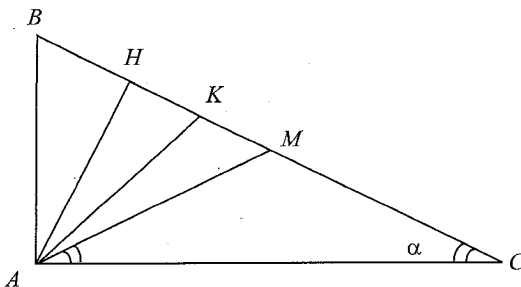
راه حل مسئله ۳۷ تقریباً سر راست است.

زاویه  $BCA$  را  $\alpha$  می‌نامیم (شکل ۱۲۱ را ببینید). در این صورت، چون  $AM = MC$ ،  $\angle MAC = \alpha$  و در نتیجه،  $\angle MAK = 45^\circ - \alpha$  (پس معلوم می‌شود که  $\alpha$  زاویه‌ای است که از  $45^\circ$  درجه بیشتر نیست). علاوه بر این،

$$\angle ABC = 90^\circ - \alpha$$

و در نتیجه  $\angle BAH = \alpha$ . بنابراین،

$$\angle KAH = 45^\circ - \alpha = \angle MAK$$



شکل ۱۲۱

توصیه به معلمان. ۱. مسأله‌های دشوارتری درباره محاسبه زاویه‌ها وجود دارد. درحقیقت، بیشتر مسأله‌های هندسه مدرسه‌ای در مورد محاسبه زاویه‌ها هستند، در نتیجه خوب است عادت کنیم اندازه زاویه‌ها را روی شکلها مرتب و منظم بنویسیم.

۲. اعتقاد ما بر این است که موضوع محاسبه زاویه‌ها برای یک جلسه زیاد است. اگر چند سری مسأله تهیه کنید و راه حل آنها را در چند جلسه مختلف بخواهید کافی است.

#### ۴. مساحت

این مبحث همان قدر گسترده است که بقیه مباحث هندسی، در نتیجه بیشتر به روشها می‌پردازیم. ایده‌های اصلی حل مسأله‌های مربوط به مساحت کدام‌اند؟

اصلی‌ترین مطالب را مشخص می‌کنیم:

الف) اصلی‌ترین ویژگی مساحت این است که تحت حرکت‌های صلب صفحه ناورداست و اگر شکلی به دو شکل مجزا تجزیه شود، مساحتش برابر است با مجموع این مساحت‌های کوچکتر.

ب) دستورهای اصلی:  $S = \frac{ah}{4}$  (که در آن  $S$  مساحت مثلث،  $a$  طول ضلعی از آن و  $h$  طول ارتفاع وارد بر این ضلع است)؛  $S = rp$  (که در آن  $S$  مساحت مثلث،  $p$  نصف محیط و  $r$  شعاع دایره محاطی مثلث است).

ج) نابرابری  $S \leq \frac{ab}{4}$  درست است (که در آن  $S$  مساحت مثلث است و  $a$  و  $b$  طول دو ضلع مثلث‌اند)؛ مسأله ۴۰ را ببینید.

د) اگر در صورت مسأله‌ای هندسی عبارتهایی نظیر  $ab$  یا  $a^2 + b^2$  (یعنی، عبارتهایی درجه دوم) وجود داشته باشند، خوب است حل کردن مسأله با استفاده از مساحت را هم امتحان کنید.

ه) اگر در صورت مسأله عبارتهایی وجود داشته باشد که به‌طور طبیعی با دستوری برای مساحت به هم مربوط باشند، این دستور را بنویسید و این راه را امتحان کنید - این کار اصلاً ضرر ندارد.

از اینجا به بعد مساحت شکل  $F$  را با  $|F|$  نشان می‌دهیم.

توصیه به معلمان. موارد (الف)، (ب) و (ج) آگاهی دانش‌آموزانتان را درباره مساحت گسترش می‌دهند.

توصیه می‌کنیم که جلسه‌ای کامل را به بحث درباره این موضوع اختصاص ندهید، البته مفاهیم اساسی این موضوع را باید کاملاً درست آموزش داد. با چند جلسه نمی‌توان این کار را کرد. فقط پس از اینکه یک سال سمینارهای موفق برگزار کردید می‌توانید به بخشهای نظری این شاخه از هندسه (مانند اصول موضوع هندسه) بپردازید.

مسئله ۴۰. طول ضلعهای چهارضلعی ای محدب (به ترتیب ساعتگرد) برابر است با  $a, b, c$  و  $d$ . ثابت کنید مساحت این چهارضلعی از  
 الف)  $\frac{ab+cd}{4}$  بیشتر نیست.  
 ب)  $\frac{(a+b)(c+d)}{4}$  بیشتر نیست.

مسئله ۴۱. آیا ممکن است نسبت سه ارتفاع مثلثی  $3 : 2 : 1$  باشد؟

مسئله ۴۲. طول ضلعهای مثلثی به مساحت ۱ برابر است با  $a, b$  و  $c$ ، که در اینجا  $a \geq b \geq c$ . ثابت کنید  $b \geq \sqrt{2}$ .

مسئله ۴۳. اگر طول همه ضلعهای مثلثی از  $1000$  اینچ بیشتر باشد، آیا ممکن است مساحتش از ۱ اینچ مربع کمتر باشد؟

راه حل مسئله ۴۱. فرض کنید  $S$  مساحت مثلثی باشد که طول ضلعهایش  $a, b$  و  $c$  است. در این صورت ارتفاعها برابرند با  $\frac{2S}{a}, \frac{2S}{b}$  و  $\frac{2S}{c}$  و  $1 : \frac{1}{c} : \frac{1}{b} = a : b : c$ ، که با نابرابری مثلث تناقض دارد. چگونه به فکرمان رسید که مساحت و ضلعهای مثلث را در نظر بگیریم؟ مورد (ه) در ابتدای این بخش را ببینید.

سه مسئله قبل نمونه‌های خوبی از موضوع «مساحت و نابرابریها» هستند. در زیر چند مسئله آورده‌ایم که درباره محاسبات «دقیق» ترند.

مسئله ۴۴. نقطه‌های  $K, L, M$  و  $N$  وسط ضلعهای چهارضلعی  $ABCD$  اند. ثابت کنید

$$2|KLMN| = |ABCD|$$

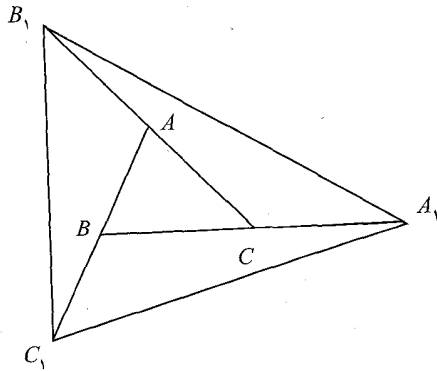
مسئله ۴۵. مساحت چهارضلعی محدب  $ABCD$  را پیدا کنید، که در آن خط  $AC$  بر خط  $BD$  عمود است،  $BD = 8$  و  $AC = 3$ .

مسئله ۴۶. مثلث  $ABC$  مفروض است. نقطه  $A_1$  روی امتداد  $BC$  از سمت  $C$  قرار دارد و  $BC = CA_1$ . نقطه‌های  $B_1$  و  $C_1$  را هم به همین ترتیب انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۲۲ را ببینید). اگر  $|ABC| = 1$ ،  $|A_1B_1C_1|$  را پیدا کنید.

مسئله ۴۷. نقطه  $M$  درون مثلث  $ABC$  قرار دارد. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی مساحت مثلثهای  $ABM$  و  $BCM$  برابر است که  $M$  روی میانه  $BK$  قرار داشته باشد. سرانجام، مسئله‌هایی که راه حلشان هم محاسبه می‌خواهد هم اثبات.

مسئله ۴۸. ثابت کنید اگر وسطهای همه ضلعهای دو چهارضلعی یکی باشد، مساحت‌هایشان برابر است.





شکل ۱۲۲

مسئله ۴۹. قطرهای دوزنقه  $ABCD$  (که در آن  $BC \parallel AD$ ) در نقطه  $O$  به هم رسیده‌اند. ثابت کنید مساحت مثلثهای  $AOB$  و  $COD$  برابر است.

مسئله ۵۰. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا ضلعهای آن به جای این نقطه بستگی ندارد.

توصیه به معلمان. اگر مسأله‌های ۴۴-۴۷ را حل کنیم معلوم می‌شود که اگر مسأله‌ای مربوط به مساحت باشد، می‌توان از ایده‌های هندسی معمولی هم استفاده کرد: همنهشتی مثلثها، تشابه و قضیه تالس.<sup>۱</sup> چنین چیزی کاملاً طبیعی است. با چنین مثالهایی می‌توانید به دانش‌آموزانتان نشان دهید که معمولاً راه حل مسأله‌ها از چندین ایده به دست می‌آیند. به ندرت پیش می‌آید که مسأله‌ای «المپیادی» را بتوان در یک حرکت حل کرد. این موضوع از اصول کلی مسأله حل کردن است، و در مورد ریاضیات عالی همان قدر پیش می‌آید که در المپیادها و دیگر مسابقه‌ها.

## ۵. گوناگون

این بخش از سه مجموعه مسأله تشکیل شده که درباره موضوعاتی‌اند که در این فصل نیامده‌اند. این مسأله‌ها بیشتر برای تکلیف منزل‌اند و می‌توان آنها را تمرینهایی برای مطالعه عمیقتر دانست.

### مجموعه ۱. ترسیمات

مسئله ۵۱. مثلثی را با معلومات زیر رسم کنید:

۱. قضیه تالس، یکی از قدیمیترین نتیجه‌های هندسی به یادگار مانده، این است که هر خط موازی یکی از ضلعهای مثلث، دو ضلع دیگر را به یک نسبت تقسیم می‌کند.

الف) قاعده، ارتفاع و یکی از زاویه‌های مجاور به قاعده.

ب) وسط سه ضلع.

ج) طول دو تا از ضلعها و میانهٔ نظیر ضلع سوم.

د) دو خط راست که دو تا از نیمسازها روی آنها قرار دارند و رأس سوم.

مسئلهٔ ۵۲\*. وسط پاره‌خطی را با استفاده از

الف) فقط پرگار،

ب) خطکش دو لبه (با لبه‌های موازی) که پهنایش از طول پاره‌خط کمتر است،

ج) خطکش دو لبه (با لبه‌های موازی) که پهنایش از طول پاره‌خط بیشتر است،

پیدا کنید.

مسئلهٔ ۵۳. پاره‌خط  $AB$  در صفحه مفروض است. نقطه‌ای دلخواه مانند  $M$  روی این پاره‌خط انتخاب کرده‌ایم و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین  $AMC$  و  $BMD$  را طوری روی پاره‌خطهای  $AM$  و  $MB$  (به‌عنوان وترها) رسم کرده‌ایم که نقطه‌های  $C$  و  $D$  در یک طرف  $AB$  قرار دارند. مجموعهٔ نقطه‌های وسط پاره‌خطهایی مانند  $CD$  را پیدا کنید.

مسئلهٔ ۵۴. می‌توان از وسیله‌ای برای رسم کردن

الف) خطی که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد،

ب) عمودی بر خطی مفروض در نقطه‌ای روی این خط، استفاده کرد.

نشان دهید که چگونه می‌توان از این وسیله برای رسم کردن عمودی بر خطی از هر نقطه روی آن

استفاده کرد.

مسئلهٔ ۵۵. بپتیر ادعا می‌کند که مجموعهٔ نقطه‌های روی صفحه که از خطی مفروض و نقطه‌ای مفروض

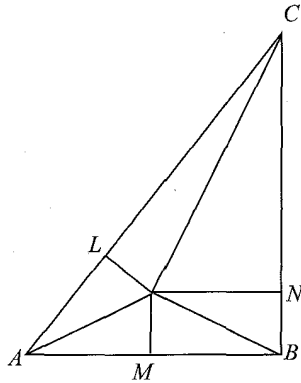
به یک فاصله‌اند دایره است. آیا درست می‌گوید؟

## مجموعهٔ ۲. محاسبات

مسئلهٔ ۵۶. اشکال «اثبات» غلط زیر را برای اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه طول وتر با طول یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمه برابر است پیدا کنید (شکل ۱۲۳ را ببینید). نقطهٔ  $M$  محل تلاقی نیمساز زاویهٔ  $C$  و عمود منصف پاره‌خط  $AB$  است. نقطه‌های  $L$ ،  $K$  و  $N$  پای عمودهای وارد از  $M$  بر ضلعهای مثلث‌اند. مثلثهای  $AMK$  و  $MKB$  همنهشت‌اند، زیرا وترها و ضلعهای زاویهٔ قائمه‌شان برابر است. بنابراین  $AM = MB$ ، و مثلثهای  $ALM$  و  $MNB$  به‌همین دلیل همنهشت‌اند. به این ترتیب،

$$AL = NB$$

$$AC = AL + LC = NB + CN = BC$$



شکل ۱۲۳

مسئله ۵۷.  $ABCD$  چهارضلعی است،  $BC = AD$  و  $M$  و  $N$  به ترتیب وسط  $AD$  و  $BC$  اند. عمودمنصفهای پاره‌خطهای  $AB$  و  $CD$  در نقطه  $P$  به هم رسیده‌اند. ثابت کنید  $P$  روی عمودمنصف پاره‌خط  $MN$  هم قرار دارد.

مسئله ۵۸. مثلثی قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های حاده‌اش  $30^\circ$  است مفروض است. ثابت کنید طول قسمتی از عمودمنصف وتر این مثلث که درون مثلث قرار دارد برابر است با یک سوم طول ضلع زاویه قائمه بلندتر مثلث.

مسئله ۵۹. ارتفاعهای  $AA_1$ ،  $BB_1$ ،  $CC_1$  و میانه‌های  $AA_2$ ،  $BB_2$  و  $CC_2$  در مثلث  $ABC$  رسم شده‌اند. ثابت کنید طول خط شکسته  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$  برابر است با محیط مثلث  $ABC$ .

### مجموعه ۳. تشابه

مسئله ۶۰. یکی از قطرهای چهارضلعی‌ای محاطی قطر دایره محیطی این چهارضلعی است. ثابت کنید تصویرهای هر دو ضلع روبه‌رو در این چهارضلعی بر قطر دیگرش با هم برابرند.

مسئله ۶۱. کمان  $AB$ ، به اندازه  $60^\circ$ ، روی دایره‌ای به مرکز  $O$  مفروض است و نقطه  $M$  روی این کمان اختیار شده است. ثابت کنید خط راستی که از وسط پاره‌خطهای  $MA$  و  $OB$  می‌گذرد بر خط راستی که از وسط پاره‌خطهای  $MB$  و  $OA$  می‌گذرد عمود است.

مسئله ۶۲. نیمساز  $AD$  در مثلث  $ABC$  رسم شده است. ثابت کنید  $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$ .

مسئله ۶۳. در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  عمود  $HE$  از نقطه  $H$ ، وسط  $BC$ ، بر ضلع  $AC$  رسم شده است. ثابت کنید اگر  $O$  وسط  $HE$  باشد، خطهای  $AO$  و  $BE$  بر هم عمودند.

## کلام آخر

۱. مبحث «نابریه‌های هندسی» را که در بخش ۱ به‌طور گذرا به آن اشاره کردیم می‌توان بیشتر مطالعه کرد. برخی گوهرهای زیبای هندسه، نظیر نابریه‌های برابر محیطی، از نابریی ساده مثلث به‌دست می‌آیند.
۲. فراموش نکنید که در این فصل هم برخی مباحث و مسأله‌ها را مطرح کردیم هم راههایی را برای برگزاری جلسات نشان دادیم. امیدواریم که روشهای آموزشی مطرح شده در این فصل برایتان مفید باشد.
۳. «محاسبه زاویه‌ها» فقط یکی از مباحث «هندسه محاسباتی» است، که می‌توان به این موضوع هم پرداخت.
۴. در بخش «مساحت» مسأله‌ها، برخلاف مباحث دیگر این فصل، از همان ابتدا کمی دشوارتر بودند. می‌توانید مسأله‌های ساده‌تری را در کتابهای درسی پیدا کنید.
۵. توصیه به معلمان. اگر نتوان مسأله‌ای را با حمله‌ای برق‌آسا «به دام انداخت»، احتمالاً باید کار را به محاصره‌ای همه‌جانبه و درازمدت (که ممکن است روزها یا هفته‌ها به‌طول انجامد) کشاند. چنین محاصره‌ای را می‌توان از ترکیب روشهای مختلف و ایده‌های گوناگون، استفاده از محاسبات یا انباشتن تدریجی نتیجه‌ها ترتیب داد.
۶. برخی مباحث زیبای هندسه مسطحه، که کاملاً برای دانش‌آموزان قابل فهم‌اند، در این فصل نیامده‌اند. تشابه و کاربردهای آن، چندضلعیهای محاطی و محیطی، نقاط جالب مثلث، رابطه‌های عددی و چیزهایی از این قبیل از این جمله‌اند. اینها را هم باید خواند، اما نمی‌توانستیم همه آنها را در این فصل بیاوریم، زیرا تبدیل به فصلی حجیم و کسل‌کننده می‌شد. در عوض کوشیده‌ایم جنبه‌های اصلی این بازی و علم خاص را با آوردن نمونه‌هایی از مباحث مهمتر به اجمال مطرح کنیم. با وجود اینکه مطالب این فصل متنوع‌اند، معتقدیم که بسیار مهم است که به دانش‌آموزان یکپارچگی مطالب و راههایی را که این حوزه‌های مختلف را به هم و دیگر شاخه‌های ریاضیات و علوم پیوند می‌دهند نشان دهیم.

# فصل ۱۵

## مبناهای عددی

### ۱. مبناها چه هستند؟

هر دانش‌آموزی می‌داند که «۲۶۵۳» یعنی عدد «دو هزار و شش صد و پنجاه و سه». از کجا می‌دانند؟ همه عادت داریم که عددها را به شکل زیر بنویسیم: رقم آخر تعداد یکانها در عدد مفروض است، یکی مانده به آخر تعداد دهگانهاست، دو تا مانده به آخر تعداد صدگانهاست، و همین‌طور تا آخر (هر چند که چنین چیزی تا حدی مبهم است، زیرا تعداد یکانها در ۲۶۵۳ است!). این دستگاه عددنویسی (و تعبیر رشته رقمها) را به اختصار مبناهای عددی می‌نامند. بنابراین، وقتی می‌نویسیم «۲۶۵۳» منظورمان

$$۲ \times ۱۰۰۰ + ۶ \times ۱۰۰ + ۵ \times ۱۰ + ۳ \times ۱$$

یا به اختصار

$$۲ \times ۱۰^۳ + ۶ \times ۱۰^۲ + ۵ \times ۱۰^۱ + ۳ \times ۱۰^۰$$

است. رقمهای این عدد را برای این سیاه نوشته‌ایم که تشخیص آنها از بقیه عددها ساده‌تر باشد. به سادگی معلوم می‌شود که عدد ده نقش ویژه‌ای در این نمایش دارد: هر عددی را می‌توان به شکل مجموع توانهایی از ده با ضریبهایی از میان عددهای ۰ تا ۹ نوشت. به همین دلیل است که این دستگاه را «اعشاری» می‌نامند. برای نوشتن عددها از ده نماد ویژه، یعنی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، به نام رقم، استفاده می‌کنیم. این رقمها عددهای از صفر تا ۹ را نشان می‌دهند. عدد بعدی، یعنی ده، یکان سطح بعدی است و با دو رقم نوشته می‌شود: ۱۰، که با تسامح، یعنی «یک ضرب در ده را با صفر ضرب در یک جمع کنید».

خب، اگر از عددی دیگر، مثلاً شش، استفاده کنیم، چه؟ مانند قبل، به شش نماد برای رقمها احتیاج داریم. می‌توانیم از شش نماد آشنای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ استفاده کنیم، که عددهای از صفر تا

پنج را نمایش می‌دهند. عدد شش یکان سطح بعدی است، و در نتیجه با  $۱^\circ$  نمایش داده می‌شود. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم هر عدد طبیعی را به شکل مجموع توانهای مختلف شش با ضریبهایی از  $0$  تا  $5$  نمایش دهیم. مثلاً (همهٔ عددها در دستگاه اعشاری نوشته شده‌اند):

$$7 = 1 \times 6^1 + 1 \times 6^0$$

$$12 = 2 \times 6^1 + 0 \times 6^0$$

$$35 = 5 \times 6^1 + 5 \times 6^0$$

$$45 = 1 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 3 \times 6^0$$

بنابراین، در دستگاه عددی جدید (که «مبنای شش» نامیده می‌شود) عدد ۷ را به شکل «۱۱»، عدد ۱۲ را به شکل «۲۰»، ۳۵ را به شکل «۵۵» و ۴۵ را به شکل «۱۱۳» می‌نویسیم.

به سادگی معلوم می‌شود که هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای شش نوشت. روش نوشتن  $45^\circ$  را نشان می‌دهیم (در این مثال، مانند مثالهای قبل، همهٔ عددها، بجز آنهایی که در علامت نقل قول آمده‌اند، در دستگاه اعشاری‌اند).

بزرگترین توان شش که از  $45^\circ$  بیشتر نیست ۲۱۶ است. اگر  $45^\circ$  را بر ۲۱۶ تقسیم کنید خارج قسمت ۲ است (و باقی مانده ۱۸). بنابراین اولین رقم عدد  $45^\circ$  در مبنای ۶ برابر با ۲ است. اکنون باقی مانده، یعنی ۱۸، را بر کوچکترین توان شش بعدی تقسیم می‌کنیم - در مرحلهٔ قبل بر  $6^3$ ، یعنی ۲۱۶، تقسیم کردیم، اکنون بر  $6^2$ ، یعنی ۳۶، تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت  $0$  است، پس رقم دوم  $0$  است. باقی ماندهٔ این تقسیم ۱۸ است و این باقی مانده را بر کوچکترین توان بعدی شش، یعنی بر  $6^1$ ، یا ۶، تقسیم می‌کنیم. معلوم می‌شود که رقم بعدی ۳ است (باقی مانده  $0$  است). بنابراین، آخرین رقم (خارج قسمت پس از تقسیم بر  $6^0$ ، یا ۱، برابر با  $0$  است. در نهایت، نمایش  $45^\circ$  در مبنای شش «۲۰۳۰» است.

ضمن ساخت این دستگاه جدید، از هیچ ویژگی خاص ۶ استفاده نکردیم. به طور مشابه، می‌توانیم عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند  $n$  انتخاب کنیم و دستگاهی عدد نویسی در مبنای  $n$  بسازیم، که در آن رقمهای هر عدد به نمایش آن به عنوان مجموع توانهای  $n$  مربوط‌اند. در این دستگاه، عدد  $n$  را مبنا می‌نامند. برای اینکه ابهام پیش نیاید، مبنای دستگاه را به عنوان زیرنویس (در نمایش اعشاری) در انتهای عدد می‌نویسیم. با استفاده از این نمادگذاری، می‌توانیم تساویهای قبلی را به شکل زیر بنویسیم:

$$7_{10} = 11_6, \quad 12_{10} = 20_6, \quad 35_{10} = 55_6, \quad 45_{10} = 113_6$$

تمرین ۱. برای نوشتن عددها در

(الف) دستگاه دودویی (یعنی مبنای ۲)،

(ب) دستگاه عددنویسی در مبنای  $n$ ،

به چند رقم احتیاج داریم؟

برای نوشتن عددی در مبناى  $n$  باید آن را به شکل

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

نمایش دهیم، که در آن  $a_i$  مقداری از ۰ تا  $n - 1$  است و  $a_k$  برابر با صفر نیست (هر چند که محدودیت آخری لازم نیست).

تمرین ۲. نمایش اعشاری عددهای  $۱۰۱۰۱۲$ ،  $۱۰۱۰۱۳$ ،  $۲۱۱۴$ ،  $۱۲۶۷$  و  $۱۵۸۱۱$  را بنویسید.

تمرین ۳. عدد  $۱۰۰۱۰$  را در دستگاه‌های با مبناى ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ بنویسید.

تمرین ۴. در دستگاه‌هایی با مبناى بزرگتر از  $۱۰$  به بیش از ده رقم احتیاج داریم، بنابراین باید رقمهایی را بسازیم. مثلاً در دستگاه با مبناى ۱۱، می‌توانیم از «A» برای نمایش رقم «۱۰» استفاده کنیم. بنابراین، مثلاً  $۲۱۱۰$  را می‌توان به شکل ۱A نوشت. با این قرارداد، عدد  $۱۱۱۱۰$  را در مبناى یازده بنویسید.

اکنون جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهی دلخواه را یاد می‌دهیم. می‌توانیم این کار را دقیقاً به همان روش دستگاه اعشاری انجام دهیم، اما باید به یاد داشته باشیم که هر بار مجموع رقمهای ستونی بیشتر از یا برابر با مبناى دستگاه مفروض شد، «انتقالی» داریم.

در زیر روش جمع کردن عددهای  $۱۲۴۱۰$  و  $۴۱۷۱۰$  را در مبناى ۳ آورده‌ایم. ابتدا این عددها را در مبناى ۳ می‌نویسیم:  $۱۱۱۲۱۳ = ۱۲۴۱۰$  و  $۱۲۰۱۱۰۳ = ۴۱۷۱۰$ . سپس آنها را زیر هم طوری می‌نویسیم که آخرین رقم سمت راستشان زیر هم باشد. «انتقالیها» را در سطر بالا کوچکتر نوشته‌ایم.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & & & (1) & (1) & (1) \\
 & & & 1 & 1 & 2 & 1 \\
 + & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

برای اینکه این عملیات را با موفقیت انجام دهیم باید جدولهای جمع و ضرب عددهای کمتر از مبناى دستگاه، یعنی عددهای یک رقمی، را بدانیم. در مورد دستگاه اعشاری، این کار را زود و خوب یاد گرفته‌ایم.

تمرین ۵. این جدولها را برای دستگاه‌های با مبناى ۲، ۳، ۴ و ۵ بنویسید.

تمرین ۶. حساب کنید:

(الف)  $۱۱۰۱۲ + ۱۱۰۰۲$

(ب)  $۲۰۱۳ \times ۱۰۲۳$

توصیه به معلمان. در اینجا جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهها را به اختصار توضیح داده‌ایم. در جلسه‌ای واقعی این کار بیش از اینها طول می‌کشد. البته، هدف اصلی این کار سریع و دقیق

نوشتن محاسبات در دستگاهی دیگر نیست. بررسی چند نمونه و انجام چند تمرین درباره الگوریتمهای جمع کردن و ضرب کردن در دستگاهی غیر از مبنای  $۱۰$  منجر به فهم دقیقتر این الگوریتمها می شود. اکنون الگوریتمی کارآمد برای تبدیل عددها از یک دستگاه عددی به دستگاهی دیگر را شرح می دهیم. این الگوریتمها با الگوریتمی که قبلاً می شناختیم فرق دارد، زیرا در اینجا نمایش عددها رقم بر رقم از راست به چپ است، نه از چپ به راست. رقم آخر باقی مانده تقسیم عدد مورد نظر در تقسیم بر مبنای دستگاه جدید است. رقم دوم را می توان این طور پیدا کرد: خارج قسمت در محاسبه قبلی را در نظر می گیریم و باقی مانده تقسیم آن را در تقسیم بر مبنای دستگاه جدید پیدا می کنیم. سپس دقیقاً همین کار را تکرار می کنیم تا نمایش را کامل کنیم.

مثال. عدد  $۲۵۰۱۰$  را در دستگاه با مبنای  $۸$  («هشت تایی») می نویسیم:

$$۲۵۰ = ۳۱ \times ۸ + ۲$$

$$۳۱ = ۳ \times ۸ + ۷$$

$$۳ = ۰ \times ۸ + ۳$$

بنابراین،  $۲۵۰۱۰ = ۳۷۲۸$ .

تمرین ۷. عددهای

(الف)  $۱۰۰۰۱۰$

(ب)  $۵۳۲۸$

را در دستگاه به مبنای  $۷$  بنویسید.

در انتها چند مسأله جالب می آوریم.

مسأله ۱. معلم روی تخته می بیند که  $۱۰ = ۴ \times ۳$ . هنگام پاک کردن تخته با خودش گفت که شاید این تساوی در دستگاه دیگری نوشته شده باشد. آیا ممکن است چنین چیزی درست باشد؟

مسأله ۲. آیا دستگاهی وجود دارد که تساویهای زیر همزمان درست باشند؟

$$(الف) \quad ۱۰ = ۴ + ۳ \quad و \quad ۱۵ = ۴ \times ۳$$

$$(ب) \quad ۵ = ۳ + ۲ \quad و \quad ۱۱ = ۳ \times ۲$$

مسأله ۳. شرایطی را (در مورد نمایش عددها) پیدا کنید که

(الف) در دستگاه با مبنای  $۳$

(ب) در دستگاه با مبنای  $n$

بتوان تشخیص داد عددی زوج است یا فرد.



مسألهٔ ۴. روی تخته سیاه نوشته شده:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad ? \quad 5 \quad ? \\ + \quad 1 \quad ? \quad 6 \quad 4 \quad 2 \\ \hline 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

دستگاهی را که این محاسبات در آن انجام شده و نیز جمعوندها را پیدا کنید.

مسألهٔ ۵. مربی ای می‌گوید که تیمش ۱۰۰ عضو دارد که ۲۴ نفر کلاس اولی‌اند و ۳۲ نفر کلاس دومی. مربی در گفته‌اش از چه دستگاهی استفاده کرده است؟

توصیه به معلمان. مطالب این بخش را می‌توان در دو یا سه جلسهٔ متوالی خواند. دانش‌آموزان باید

- مفهوم دستگاه عددی،
- تبدیل عددها از دستگاهی به دستگاهی دیگر،
- جمع کردن و ضرب کردن در دستگاهی دلخواه،

را یاد بگیرند. توصیه می‌کنیم برای اینکه این مطالب نسبتاً غامض را جذاب‌تر کنید از مسأله‌هایی شبیه مسألهٔ ۱-۵ در بالا استفاده کنید.

## ۲. قاعده‌های بخش‌پذیری

در بخش قبل جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهی دلخواه را یاد گرفتیم. عملیات معکوس - یعنی تفریق و تقسیم، به همان روش دستگاه اعشاری انجام می‌شوند. البته، این عملیات (مثلاً، مانند «تقسیم معمولی»)، حتی در دستگاه اعشاری، کمی دشوارترند.

بنابراین، بهتر است از آزمون‌هایی برای تشخیص اینکه آیا عددی بر عددی دیگر بخش‌پذیر است، بی‌آنکه تقسیم کنیم، استفاده کنیم. در مورد دستگاه اعشاری، این آزمون‌ها را در فصل «بخش‌پذیری - ۲» بررسی کردیم. در مورد دستگاه‌های غیراعشاری وضعیت دشوارتر است - مثلاً سعی کنید مشخص کنید که آیا  $1723456654321$  بر ۶ بخش‌پذیر است یا خیر.

کار را شروع می‌کنیم. چگونه فهمیدیم عددی که رقم آخرش برابر با صفر است بر  $10$  بخش‌پذیر است؟ موضوع این است که در نمایش اعشاری هر عدد مانند

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

همهٔ جمعوندها، بجز احتمالاً آخری، بر  $10^0$  بخش پذیرند. البته، در حالت مورد نظر ما، جمعوند آخر صفر است و در نتیجه کل مجموع بر  $10^0$  بخش پذیر است. حکم عکس را هم به همین روش می‌توانیم ثابت کنیم: اگر عددی طبیعی بر  $10^0$  بخش پذیر باشد، رقم آخرش صفر است. اکنون دستگاهی دلخواه را در نظر بگیرید. به همین روش می‌توانیم آزمون بخش پذیری زیر را ثابت کنیم: در دستگاه با مبنای  $n$  وقتی و فقط وقتی نمایش عددی به صفر ختم می‌شود که این عدد بر  $n$  بخش پذیر باشد.

### مسألهٔ ۶. آزمون بخش پذیری بر

(الف) توانی از مبنای دستگاه (مانند آزمونهای بخش پذیری بر  $10^0$ ،  $10^{100}$ ، ... در دستگاه اعشاری)،

(ب) مقسوم‌علیهی از مبنای دستگاه (مانند آزمونهای بخش پذیری بر ۲ و ۵)،

(ج) توانی از مقسوم‌علیهی از مبنای دستگاه،

را بیان و آن را ثابت کنید.

یادداشت. می‌خواهیم بار دیگر تأکید کنیم که دستگاههای مختلف فقط راههای مختلف نوشتن عددها هستند. بنابراین، بخش پذیری عددی بر عددی دیگر به دستگاه خاصی که در آن نوشته شده‌اند بستگی ندارد.

در عین حال، در هر دستگاه شگردهایی برای تعیین بخش پذیری بر برخی عددها وجود دارند. این شگردها همان آزمونهای بخش پذیری‌اند.

اکنون آزمونهای بخش پذیری دیگری را بررسی می‌کنیم. شاید معروفترین اینها آزمونهای بخش پذیری بر ۳ و ۹ باشند. سعی می‌کنیم که این آزمونها را به دستگاههای عددی دیگر تعمیم دهیم. ابتدا، باید اثبات این آزمون در دستگاه اعشاری را خوب بفهمیم (فصل «بخش پذیری و باقی مانده‌ها» را ببینید). تنها مطلب مهم این است که  $10^0 - 1 = 9$  و در نتیجه (به پیمانهٔ ۹)  $10^0 \equiv 1$ .

آزمونی مشابه را برای بخش پذیری بر  $n - 1$  در دستگاه با مبنای  $n$  بیان و ثابت می‌کنیم. در حقیقت، (به پیمانهٔ  $n - 1$ )  $n \equiv 1$ . بنابراین، به ازای هر عدد طبیعی مانند  $s$ ،

$$n^s \equiv 1 \pmod{n-1}$$

به این ترتیب

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n^1 + a_0 n^0 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{n-1}$$

بنابراین وقتی و فقط وقتی مجموع رقمهای عددی در مبنای  $n$  بر  $n - 1$  بخش پذیر است که خود این عدد بر  $n - 1$  بخش پذیر باشد.

سؤالی را که در ابتدای این بخش مطرح کردیم به یاد بیاورید: آیا  $۱۲۳۴۵۶۶۵۴۳۲۱۷$  بر  $۶$  بخش پذیر است؟ اکنون می‌توانیم به سادگی به این سؤال پاسخ دهیم: چون مجموع رقمها (که برابر با  $۴۲۱۰$  است) بر  $۶$  بخش پذیر است، خود این عدد هم بر  $۶$  بخش پذیر است.

مسأله ۷. آزمون بخش پذیری بر

الف) مقسوم‌علیهی از عدد  $n - ۱$  در دستگاه با مبنا  $n$  (مانند آزمون بخش پذیری بر  $۳$  در دستگاه اعشاری)،

ب) عدد  $n + ۱$  در دستگاه با مبنا  $n$  (مانند آزمون بخش پذیری بر  $۱۱$ )،

ج) مقسوم‌علیهی از عدد  $n + ۱$  در دستگاه با مبنا  $n$  (آزمون مشابهی در مبنا  $۱۰$  وجود ندارد)،

را بیان و آن را ثابت کنید.

توصیه به معلم. توصیه می‌کنیم که جلسه‌ای کامل را به موضوع این بخش اختصاص دهید. اگر در خلال این جلسه دانش‌آموزان (با راهنماییهای معلم) بتوانند آزمونهای بخش پذیری جدیدی را بیان و ثابت کنند خیلی عالی است.

### ۳. مسأله‌های گوناگون

تا اینجا به خود دستگاههای عددی علاقه‌مند بودیم. اکنون چند مسأله را بررسی می‌کنیم که به نظر می‌رسد ربطی به دستگاههای عددی ندارند. البته، ضمن حل کردن این مسأله‌ها دستگاههای غیراعشاری به‌طور کاملاً طبیعی ظاهر می‌شوند.

مسأله ۸. کمترین تعداد وزنه‌ها که با آنها بتوانیم هر مقداری از طلا را که وزنش بر حسب گرم عددی طبیعی از  $۱$  تا  $۱۰۰$  است با ترازوی دوکفه‌ای معمولی وزن کنیم چندتاست؟ وزنه‌ها را فقط می‌توان در کفه سمت چپ ترازو قرار داد.

راه‌حل. هر عدد طبیعی را می‌توان در دستگاه دودویی نوشت. بنابراین، برای اینکه هر مقداری از طلا را که وزنش بر حسب گرم عددی طبیعی از  $۱$  تا  $۱۰۰$  گرم است وزن کنیم، کافی است هفت وزنه داشته باشیم:  $۱$ ،  $۲$ ،  $۴$ ،  $۸$ ،  $۱۶$ ،  $۳۲$  و  $۶۴$  گرمی. از طرف دیگر، شش وزنه کافی نیست، زیرا با آنها حداکثر  $۱ - ۲۶$  یا  $۶۳$  وزن مختلف را می‌توانیم به‌دست بیاوریم (هر وزنه را یا روی کفه سمت چپ می‌گذاریم یا نمی‌گذاریم).

توجه. توجه کنید که فرض نکرده‌ایم وزن وزنه‌ها باید عددی طبیعی باشد. این فرض راه‌حل را ساده‌تر نمی‌کند.

مسأله ۹\*. به همان سؤال مسأله قبل پاسخ دهید، منتها این بار می‌توانیم وزنه‌ها را روی هر یک از کفه‌های ترازو قرار دهیم.

راه‌حل. برای توضیح راه‌حل این مسأله به‌ویژگی جالب دستگاه با مبنای ۳ احتیاج داریم: هر عدد طبیعی را می‌توان به شکل تفاضل دو عدد نوشت که در نمایش آنها در مبنای ۳ فقط ۰ و ۱ وجود دارد.

می‌توانیم این ویژگی را با نوشتن عدد اصلی در مبنای ۳ و ساختن عددهای موردنظر، رقم به رقم از راست به چپ، ثابت کنیم. این کار تمرین خوبی است و آن را برعهده خواننده می‌گذاریم. اکنون معلوم است که کافی است پنج وزنه داشته باشیم که وزنه‌های ۱، ۳، ۹، ۲۷ و ۸۱ گرمی‌اند (می‌دانید که چرا به وزنه ۲۴۳ گرمی احتیاج نداریم؟).

چهار وزنه هم کافی نیست، زیرا نمی‌توانیم با آنها بیش از  $1 - 3^4$  یا  $8^0$  وزن مختلف را وزن کنیم (هر وزنه را یا روی کفه سمت چپ می‌گذاریم یا روی کفه سمت راست یا اصلاً آن را روی ترازو نمی‌گذاریم).

مسأله ۱۰. پادشاه فاسد سه عدد دو رقمی سری  $a$ ،  $b$  و  $c$  را انتخاب کرده است. شاهزاده باید سه عدد مانند  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  را نام ببرد، که پس از آن پادشاه مجموع  $aX + bY + cZ$  را به او می‌گوید. سپس شاهزاده باید هر سه عدد پادشاه را بگوید، در غیر این صورت اعدام می‌شود. به او کمک کنید که از این وضعیت خطرناک رهایی یابد.

راه‌حل. شاهزاده می‌تواند عددهای ۱،  $10^0$  و  $10^2$  را بگوید. در این صورت عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  همان رقمهای مجموع  $aX + bY + cZ$  در دستگاه با مبنای  $10^0$ ‌اند.

مسأله ۱۱\*. ثابت کنید می‌توان از مجموعه  $0$ ،  $1$ ،  $2$ ،  $\dots$  و  $3^{k-1}$ ،  $2^k$  عدد طوری انتخاب کرد که هیچ‌یک از آنها میانگین هیچ دوتایی از عددهای انتخاب شده نباشد.

راه‌حل. از دستگاه با مبنای ۳ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نمایش هر یک از عددهای مفروض در مبنای ۳،  $k$  رقم داشته باشد. اگر کمتر از  $k$  رقم وجود داشت بقیه جاها را با صفر پر می‌کنیم. اکنون عددهایی را انتخاب می‌کنیم که در نمایش آنها در مبنای ۳ فقط ۰ و ۱ وجود دارد. دقیقاً  $2^k$  عدد با این ویژگی وجود دارد. ثابت می‌کنیم که می‌توان این عددها را زیرمجموعه موردنظر به حساب آورد. فرض کنید سه عدد در این زیرمجموعه مانند  $x$ ،  $y$  و  $z$  وجود داشته باشند که  $x + y = 2z$ . چون عددهای  $x$  و  $y$  باید دست‌کم در یک رقم فرق داشته باشند، می‌توانیم رقمی با این ویژگی پیدا کنیم که سمت راست بقیه باشد. در این صورت، رقم متناظر در مجموع  $x + y$  باید ۱ باشد. اما در نمایش  $2z$  در مبنای ۳ فقط ۰ و ۲ وجود دارد. این هم تناقض است.

مسأله ۱۲. ثابت کنید می‌توان  $2^k$  عدد با همین ویژگی از میان عددهای  $0$ ،  $1$ ،  $2$ ،  $\dots$  و  $\frac{3^k - 1}{2}$  انتخاب کرد.

توصیه به معلمان. مسأله‌های این بخش را می‌توان در جلسات یا مسابقه‌های ریاضی گوناگون داد.

#### ۴. بازی نیم

در اینجا درباره یکی از گونه‌های بازی معروف نیم صحبت می‌کنیم. قوانین این بازی ساده‌اند. سه کپه خرده‌سنگ داریم (ممکن است در ابتدا تعداد خرده‌سنگهای کپه‌ها فرق داشته باشد). دو بازیکن به نوبت در هر حرکت چند خرده‌سنگ از کپه‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت می‌توان هر تعداد دلخواهی خرده‌سنگ برداشت منتها باید فقط از یک کپه خرده‌سنگ برداشت. بازیکنی که آخرین خرده‌سنگ را بردارد بازی را می‌برد.

خیلی جالب است که می‌توان استراتژی برد در این بازی را با استفاده از دستگاه دودویی طراحی کرد. این استراتژی را در حالت کلیتری، یعنی وقتی که تعداد کپه‌ها دلخواه است، بررسی می‌کنیم. همچنین، خاطرنشان می‌کنیم که در حالتی که دو کپه داریم، این بازی همان بازی با رخ (شطرنج) روی صفحه‌ای مستطیلی است (مسأله‌های ۱۰، ۱۶ و ۲۲ در فصل «بازیها» را ببینید).

چون همیشه، برای «تحلیل» کردن بازی کافی است که مجموعه موقعیتهای برد را مشخص کنیم (بخش ۳ فصل «بازیها» را ببینید). نمایش دودویی تعداد خرده‌سنگهای کپه‌ها را یکی یکی زیر هم طوری می‌نویسیم که رقمهای یکان زیر هم باشند، رقمهای دهگان زیر هم باشند، و همین‌طور تا آخر. بعد زوجیت تعداد ۱ها را در هر ستون مشخص می‌کنیم («زوج» و «فرد» یعنی «فرد»). مثلاً، فرض کنید سه کپه با ۱۰۱، ۶۰ و ۴۷ خرده‌سنگ داریم. در این صورت، می‌نویسیم

$$n_1 = 101 = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$n_2 = 60 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$n_3 = 47 = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

---


$$\begin{matrix} \text{ز} & \text{ف} & \text{ز} & \text{ف} & \text{ز} & \text{ف} & \text{ز} \end{matrix}$$

ادعا می‌کنیم که موقعیت برد وقتی و فقط وقتی است که تعداد ۱ها در هر ستون عددی زوج باشد؛ یعنی، همه حروف در سطر پایین ز باشند (در نتیجه، موقعیت بالا، قاعدتاً، موقعیت باخت است). چنین موقعیتی را «زوج» و موقعیت دیگر را «فرد» می‌نامیم.

برای اینکه ثابت کنیم موقعیت برد وقتی و فقط وقتی است که موقعیت زوج باشد، باید ثابت کنیم ۱. موقعیت آخر بازی زوج است.

۲. هر حرکت از موقعیتی زوج منجر به موقعیتی فرد می‌شود.

۳. از هر موقعیت فرد می‌توان با یک حرکت به موقعیتی زوج رسید.

قسمت (۱) ساده است. بازی وقتی به پایان می‌رسد که هیچ خرده‌سنگی در هیچ کپه‌ای نمانده باشد، و صفر زوج است.

برای اثبات قسمت (۲) توجه کنید که پس از هر حرکت تعداد خرده‌سنگها در کپه‌ای تغییر می‌کند و در نتیجه، رقمی در نمایش دودویی آن عوض می‌شود. یعنی اینکه تعداد ۱های ستون متناظرش یکی تغییر می‌کند. چون هیچ ستون دیگری تغییر نمی‌کند (هر بار خرده‌سنگها فقط از یک کپه برداشته می‌شوند)، زوجیت این ستون هم تغییر می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه از موقعیتی فرد به موقعیتی زوج برویم. باید چند خرده‌سنگ از یک کپه طوری برداریم که زوجیت تعداد ۱ها در ستونها در همه ستونهایی که تعداد فردی ۱ دارند (و فقط در همین ستونها!) تغییر کند. آخرین ستون سمت چپ را که تعداد فردی ۱ دارد در نظر بگیرید و کپه‌ای را انتخاب کنید که رقمش در این ستون ۱ است (چرا چنین کپه‌ای وجود دارد؟). این کپه همانی است که باید خرده‌سنگها را از آن برداریم.

به سادگی می‌توان فهمید که چند تا خرده‌سنگ باید از این کپه برداشت - نمایش دودویی تعداد خرده‌سنگهای این کپه باید در رقمهایی تغییر کند که نظیر ستونهایی اند که تعداد ۱ها در آنها عددی فرد است. باید آنقدر خرده‌سنگ برداریم تا این وضع پیش بیاید. چون آخرین رقم از سمت چپ در میان این رقمها از ۱ به ۰ تغییر می‌کند، تعداد خرده‌سنگها در این کپه، در حقیقت، کم می‌شود.

مسأله ۱۳. بازیهای زیر را تحلیل کنید.

الف) در سطر اول صفحه شطرنجی هشت سرباز سفید و در سطر هشتم این صفحه هشت سرباز سیاه قرار دارد. هر یک از دو بازیکن، در نوبتش، می‌تواند یکی از سربازهایش را هر تعداد خانه که بخواهد به سمت انتهای دیگر صفحه و در جهت عمودی حرکت دهد. نمی‌توان از روی سربازی به رنگ دیگر پرید. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

ب) همین بازی، منتها سربازها هم می‌توانند به جلو بروند هم می‌توانند به عقب برگردند.

توصیه به معلمان. بهتر است که بازی نیم را فقط با دانش‌آموزانی که مهارت ریاضی کافی دارند بررسی کنید. دانش‌آموزان باید با هم بازی کنند و حدسها و استراتژیهایشان را مطرح کنند. یافتن استراتژی برد نسبتاً دشوار است؛ البته، راهنماییهای درست و به موقع، رسیدن به این استراتژی را ساده‌تر می‌کنند و دانش‌آموزان فرصت می‌یابند که خودشان تا جایی که می‌توانند قسمتهای بیشتری از این مسأله را حل کنند.

## فصل ۱۶

### نابرابریها

#### ۱. کدام بزرگتر است؟

احتمالاً، این سؤال از سؤالهای تقریباً همیشگی کودکان است. کودکان بسیار کنجکاوند و معمولاً سؤالهایی از این قبیل می‌پرسند:

- چه کسی قویتر است: بابام یا قهرمان کشتی؟
- کدام بلندتر است: خانه ما یا برج میلاد؟
- جمعیت تهران بیشتر از اصفهان است؟

در ریاضیات، این سؤالهای «بچه‌گانه» خیلی معقول نیست، اما این سؤالها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند که چگونه بهتر و دقیقتر محاسبه کنند و با عددهای «واقعاً بزرگ» کار کنند. البته، درباره استفاده از ماشین حساب، که اگر بخواهیم در اثباتها خیلی سختگیری کنیم کمکی نمی‌کنند، صحبت نمی‌کنیم.

توصیه به معلمان. محاسبه و تخمین از ارزشمندترین جنبه‌های فرهنگ ریاضی است. دانش‌آموزان نباید فقط «کورکورانه» از روشهای مختلف محاسبه و تخمین استفاده کنند؛ باید ماهیت آنها را درک کنند. نمی‌توان تمام شگردهای تکنیکی ریاضیات را به خاطر سپرد. اما می‌توان و باید به دانش‌آموزان یاد داد چگونه «با دست خالی» از پس کارها برآیند. مهارت یافتن در سریع و دقیق تخمین زدن با حل کردن مسأله‌هایی عددی، مانند آنهایی که در این فصل آورده‌ایم، مقدور می‌شود.

مسأله‌ای از این دست مسأله زیر است.

مسأله ۱. کدام عدد بزرگتر است:  $3111$  یا  $1714$ ؟

قطعاً، می‌توانید این عددها را «با دست» حساب کنید - این عددها بیشتر از  $2^0$  رقم ندارند. با این حال، این روش برخورد با این مسأله وقتگیر است و در مورد مسأله‌های دشوارتر به درد نمی‌خورد. از راهی دیگر می‌رویم:

$$31^{11} < 32^{11} = (25)^{11} = 255 < 256 = (24)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$$

از این نابرابری‌های زنجیری معلوم می‌شود که  $31^{11}$  از  $17^{14}$  کوچکتر است. تنها چیزی که برای یافتن راه‌حل احتیاج داشتیم این بود که توجه کنیم  $31$  و  $17$  از توانهای  $2$  دور نیستند.

مسأله ۲. کدام عدد بزرگتر است:

الف)  $33^{200}$  یا  $32^{200}$ ؟

ب)  $24^0$  یا  $32^8$ ؟

ج)  $54^4$  یا  $45^3$ ؟

مسأله ۳. ثابت کنید  $31^{100} + 21^{100} < 41^{100}$ .

راه‌حل. معلوم است که  $31^{100} < 21^{100}$ . بنابراین کافی است ثابت کنیم  $2 \times 31^{100} < 41^{100}$ ، یا معادل

آن،  $2 < \left(\frac{4}{3}\right)^{100}$ ، اما

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

پس حتی  $\left(\frac{4}{3}\right)^3$  هم از  $2$  بزرگتر است.

مسأله ۴. کدام عدد بزرگتر است:  $79^2$  یا  $81^1$ ؟

برای بررسی بیشتر وضعیت مسأله ۳، سعی می‌کنیم عددی طبیعی مانند  $n$  پیدا کنیم که  $4^{2n} < 21^{100} + 31^{100} < 4^{2n+1}$ . در مسیر یافتن راه‌حل این مسأله به مسأله زیر می‌رسیم.

مسأله ۵.\* ثابت کنید  $48^0 < 21^{100} + 31^{100} < 47^9$ .

راه‌حل. چون  $21^{100} + 31^{100} > 2 \times 31^{100}$ ، کافی است ثابت کنیم  $48^0 > 2 \times 31^{100}$ ، یعنی،

$$\left(\frac{44}{35}\right)^{20} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} > 2$$

نابرابری برنولی را به‌یاد آورید: اگر  $x \geq -1$  و  $x \neq 0$  و  $n \geq 1$ ،  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (مسأله ۵۵) یا فصل «استقرا» را ببینید). با این وضع این سؤال پیش می‌آید: آیا درست است که  $1 + \frac{1}{4} > \frac{256}{243}$ ؟



جواب مثبت است (خودتان این موضوع را تحقیق کنید!). بنابراین

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{2^{\circ}} > \left(1 + \frac{1}{2^{\circ}}\right)^{2^{\circ}} \geq 2$$

اکنون ثابت می‌کنیم  $479 > 3100 + 2100$ . ثابت می‌کنیم  $479 > 3100$ ، یا  $\frac{480}{3100} < 4$ . در حقیقت،

$$\begin{aligned} \frac{480}{3100} &= \left(\frac{256}{243}\right)^{2^{\circ}} < \left(\frac{19}{18}\right)^{2^{\circ}} = \left(\frac{361}{324}\right)^{1^{\circ}} \\ &< \left(\frac{9}{8}\right)^{1^{\circ}} = \left(\frac{81}{64}\right)^{5^{\circ}} < \left(\frac{9}{7}\right)^{5^{\circ}} = \frac{59049}{16807} < 4 \end{aligned}$$

توضیح. همین‌طور که می‌بینید، روش راه‌حل، ساده کردن تدریجی عبارت بدترکیب و پیچیده  $\frac{480}{3100}$  است.

توصیه به معلمان. برای اینکه این روش را خوب آموزش دهید، لازم است دانش‌آموزان توانهای کوچک عددهای طبیعی مختلفی را از حفظ بدانند. همچنین، دانش‌آموزان نباید از محاسبات (هرچند طولانی)، تا حدی که می‌دانند چه می‌کنند، ابایی داشته باشند. حل کردن مسأله‌هایی شبیه به مسأله بعد به این امر کمک می‌کند.

مسأله ۶. همه توانهای عددهای طبیعی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱ و ۱۲ را که از ۱۰۰۰۰ بزرگتر نیستند پیدا کنید و آنها را به ترتیب صعودی مرتب کنید. همه زوج‌هایی از این توانها را پیدا کنید که اختلافشان از ۱۰ بیشتر نیست. توضیح. این مسأله برای تمرین در منزل، با استفاده از ماشین حساب عالی است.

ایده راه‌حل سه مسأله بعد کاملاً متفاوت است. تا اینجا نابرابریهایی در مورد عددهایی طبیعی را با تبدیل کردن (ساده کردن) آنها و محاسبه تبدیلهای ثابت کرده‌ایم. ایده جدید تبدیل برخی عددها به متغیر است.

مسأله ۷. کدام عدد بزرگتر است:  $1234569 \times 1234567$  یا  $1234568^2$ ؟

راه‌حل. عدد  $1234568$  را با  $x$  نشان می‌دهیم. در این صورت عبارت سمت چپ برابر است با

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$$

بنابراین لازم نیست عددهای هفت‌رقمی را در هم ضرب کنیم یا آنها را به‌توان برسانیم.

مسئله ۸. دو کسر

$$\frac{۱۰۰۰۰۰۱}{۱۰۰۰۰۰۰۱} \quad \frac{۱۰۰۰۰۰۱}{۱۰۰۰۰۰۰۱}$$

در دست‌اند. در هر کسر عدد مخرج یک صفر از عدد صورت بیشتر دارد. اگر صورت کسر سمت چپ ۱۹۸۴ صفر و صورت کسر سمت راست ۱۹۸۵ صفر داشته باشد، کدام یک از آنها بزرگتر است؟

مسئله ۹. کدام عدد بزرگتر است:  $\frac{۱۲۳۴۵۶۷}{۷۶۵۴۳۲۱}$  یا  $\frac{۱۲۳۴۵۶۸}{۷۶۵۴۳۲۲}$ ؟

در اینجا چند مسئله دیگر با استفاده از تخمین و تقریب می‌آوریم.

مسئله ۱۰. کدام عدد بزرگتر است:  $۱۰۰۰^{۱۰۰}$  یا  $۱۵۰۰^{۵۰} \times ۵۰۰^{۵۰}$ ؟

مسئله ۱۱. کدام عدد بزرگتر است:  $۱۰۰^{۱۰۰}$  یا  $(۱۰۰/۱)^{۱۰۰}$ ؟

مسئله ۱۲. ثابت کنید

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$$

مسئله ۱۳. (این مسئله تقریباً مسخره است.) اگر تابع فاکتوریل را ۹۹ بار بر عدد ۱۰۰ اثر دهید به عدد  $A$  می‌رسید. اگر تابع فاکتوریل را ۱۰۰ بار بر عدد ۹۹ اثر دهید به عدد  $B$  می‌رسید. کدام یک از این عددها بزرگتر است؟

راه حل مسئله ۱۲ را بررسی می‌کنیم. جمعوندها را دوتا دوتا دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \frac{1}{100}$$

اکنون مجموعی از عددهای مثبت داریم که این‌طور شروع می‌شود:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \dots$$

چون  $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} > \frac{1}{5}$ ، بلافاصله نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

## گوناگون

۱۴. عدد  $۲^{۱۰۰}$  چند رقم دارد؟

۱۵. بزرگترین عدد در میان عددهای  $۵^{۱۰۰}$ ،  $۶^{۹۱}$ ،  $۷^{۹۰}$  و  $۸^{۸۵}$  را پیدا کنید.

۱۶\*. ثابت کنید عدد

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100}$$

الف) از  $\frac{1}{۱}$  کوچکتر است.

ب) از  $\frac{1}{۱۳}$  کوچکتر است.

ج) از  $\frac{1}{۱۵}$  بزرگتر است.

توصیه به معلمان. می‌توانیم سؤالهای زیادی شبیه مسأله‌های  $۱^۰ - ۱$  طرح کنیم. مثلاً دو عدد طبیعی کوچک - مثلاً ۵ و ۷ - را در نظر می‌گیریم. سپس توانی بزرگ از ۵ - مثلاً  $۵^{۷۳}$  - را در نظر می‌گیریم. اکنون دو توان نسبتاً کوچک ۵ و ۷ را در نظر بگیرید که تفاضلشان «خیلی زیاد نیست» (این کار بستگی به برداشت شما از مفهوم اندازه دارد). مثلاً،  $۵^۴$  و  $۷^۳$  خوب‌اند، زیرا  $۵^۴ = ۶۲۵$  و  $۷^۳ = ۳۴۳$  (نماها باید متفاوت باشند!) چون  $۷^۳ > ۵^۴$ ، پس  $۷^{۵۴} > ۵^{۷۲}$ . بنابراین  $۷^{۵۴} > ۵^{۷۲}$ . سپس، می‌توانیم ۵۴ در نما را کمی «درست کنیم» و تمرین دیگری به دست آوریم: ثابت کنید:  $۷^{۵۳} > ۵^{۷۳}$ .

توضیح. این رده از نابرابریها، که نتیجه ترکیب چند نابرابری ساده و «سردستی» اند، در فرهنگ المپیاد روسیه نامی خاص دارند. اینها را «نابرابریهای لنینگرادی» می‌نامند.

توصیه به معلمان. حل کردن نابرابریهای عددی به گسترش مهارتهای محاسباتی و روشهای تقریب زدن کمک شایانی می‌کند. البته ممکن است که برخی دانش‌آموزان، که در ریاضیات منطقی و ترکیبیات مستعدند، به مسأله‌های محاسباتی نظیر اینها «حساسیت» داشته باشند.

## ۲. نابرابری اصلی

نابرابری اصلی (و به تعبیری تنها نابرابری) در حوزه عددهای حقیقی نابرابری  $x^۲ \geq ۰$  است - که در درستی‌اش شکی نیست. بقیه نابرابریهای معروف و به درد بخور از این نابرابری به دست می‌آیند. در میان آنها، نابرابری میانگینها (یا نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی)، قطعاً، اولین است: اگر  $a, b \geq ۰$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

عددهای  $\frac{a+b}{۲}$  و  $\sqrt{ab}$  را به ترتیب میانگین حسابی و میانگین هندسی عددهای  $a$  و  $b$  می‌نامند. به سادگی می‌توان این نابرابری را ثابت کرد:

$$\frac{a+b}{۲} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-۲\sqrt{ab}}{۲} = \frac{1}{۲}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq ۰$$

که هم درستی نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی را نتیجه می‌دهد، هم اینکه در این نابرابری وقتی فقط وقتی تساوی پیش می‌آید که  $a = b$ .

مسئله ۱۷. ثابت کنید، اگر  $x \geq 0$ ،  $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ .

مسئله ۱۸. ثابت کنید، اگر  $x > 0$ ،  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

مسئله ۱۹. ثابت کنید به ازای هر  $x$  و  $y$ ،  $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ .

مسئله ۲۰. ثابت کنید به ازای هر  $x$  و  $y$ ،  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ .

مسئله ۲۱. ثابت کنید اگر  $x > 0$  و  $y > 0$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ .

راه حل مسئله ۱۸.  $(x + \frac{1}{x}) - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}})^2 \geq 0$ .

یادداشت. به طور کلی، راه حل هر یک از این مسأله‌ها را می‌توان یا با استفاده مناسب از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی یا تبدیلهای «مناسبی» که منجر به استفاده از نابرابری اصلی،  $x^2 \geq 0$  می‌شود، به دست آورد.

البته، نابرابریهای پیچیده‌تر معمولاً با چند بار استفاده از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی یا ترکیب چند ایده مختلف حل می‌شوند. نمونه‌ای از این دست مثال زیر است:

مسئله ۲۲. ثابت کنید به ازای هر  $x$ ،  $y$  و  $z$ ،

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

برای اثبات این حکم از مسئله ۱۹ استفاده می‌کنیم و سه نابرابری

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy, \quad \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \geq xz, \quad \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \geq yz$$

را می‌نویسیم. اگر این نابرابریها را جمع کنیم به نتیجه می‌رسیم.

مسئله ۲۳. اگر  $a, b, c \geq 0$ ، ثابت کنید

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

مسئله ۲۴. اگر  $a, b, c \geq 0$ ، ثابت کنید

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

مسئله ۲۵. ثابت کنید به ازای هر  $x$  و  $y$ ،

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

مسئله ۲۶. ثابت کنید به ازای هر  $a, b, c$  نابرابری

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

درست است.

راه حل. از نابرابری مسئله ۲۲ استفاده می‌کنیم - دو بار!

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \\ &\geq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &\geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) \\ &= abc(a + b + c) \end{aligned}$$

نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی از دو منظر قابل توجه است. اول اینکه می‌توانیم با آن مجموع دو عدد مثبت را برحسب حاصل ضربشان برآورد کنیم. دوم اینکه می‌توانیم آن را به بیش از دو عدد تعمیم دهیم. مثلاً نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی برای چهار عدد چنین است: به ازای هر  $a, b, c, d$  غیرمنفی،

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

در اینجا هم، مانند قبل، سمت چپ و سمت راست این نابرابری را به ترتیب میانگین حسابی و میانگین هندسی چهار عدد مفروض می‌نامند.

این نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی را می‌توان به شکل زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \frac{a + b + c + d}{4} &= \frac{1}{2} \left( \frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} \end{aligned}$$

که در اینجا از نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی دو بار استفاده کرده‌ایم.

مسئله ۲۷. ثابت کنید به ازای هر  $x$  و  $y$ ,

$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$$

مسئله ۲۸. اگر  $a, b, c, d$  عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$(a + b + c + d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$$

البته، اثبات نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی برای سه عدد غیرمنفی به این سادگی نیست: به‌ازای هر  $a, b, c$  و  $c$  غیرمنفی،

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

چهار عدد در نظر می‌گیریم:  $a, b, c, m$  که  $m = \sqrt[3]{abc}$ . در این صورت

$$\frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abc m} = \sqrt[4]{m^3 m} = m$$

بنابراین  $\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{3m}{4}$  و در نتیجه  $a+b+c \geq 3m$  یا

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

مسئله ۲۹. اگر  $a, b, c$  عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

مسئله ۳۰. ثابت کنید اگر  $x \geq 0$ ، آن وقت  $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$ .

راه‌حل. ثابت می‌کنیم  $3x^3 + 4 \geq 6x^2$ . چون  $3x^3 + 4 = 2x^3 + x^3 + 4$ ، می‌توانیم از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کنیم و به‌دست بیاوریم

$$2x^3 + x^3 + 4 \geq 3\sqrt[3]{2x^3 \times x^3 \times 4} = 3 \times 2x^2 = 6x^2$$

### گوناگون (تمرین منزل)

۳۱. ثابت کنید اگر  $a, b, c > 0$ ، آن وقت

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

۳۲. ثابت کنید اگر  $a, b, c > 0$ ، آن وقت

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a+b+c$$

۳۳. ثابت کنید اگر  $a, b, c \geq 0$ ، آن وقت

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+bc+ca}{3}$$

۳۴. ثابت کنید اگر  $a, b, c \geq 0$ ، آن وقت

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

۳۵. مجموع سه مثبت برابر با ۶ است. ثابت کنید مجموع مربعاتشان از ۱۲ کمتر نیست.

۳۶. مجموع دو عدد غیرمنفی برابر با ۱۰ است. بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن مجموع مربعاتشان چقدر است؟

۳۷\*. نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی را برای پنج عدد غیرمنفی ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید اگر  $a, b, c, d, e$  غیرمنفی باشند، آن وقت

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

راهنمایی: ابتدا نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی را برای هشت عدد ثابت کنید و سپس از ایده اثبات نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی برای سه عدد استفاده کنید.

### ۳. تبدیلیها

گاهی ممکن است با خوش اقبالی تبدیلی پیدا کنیم که برای حل مسأله‌ای کمک کند یا نابرابری به کمک آن بلافاصله ثابت شود. مثالی از این دست می‌آوریم:

نابرابری

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

را دوباره بررسی می‌کنیم. می‌توان این نابرابری را به شکل زیر ثابت کرد. تفاضل دو طرف نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \left( (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right) \geq 0$$

در حقیقت، این شگرد همان روش «کامل کردن مربعات» است، که معمولاً برای حل کردن معادله‌های درجه دوم ساده به‌کار می‌رود. مثالی دیگر مسأله بعد است.

مسأله ۳۸. معادله

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0$$

را حل کنید.

ممکن است بگویید «اینکه نابرابری نیست!» درست است، اما اولاً می‌توانیم از همین روش استفاده کنیم و ثانیاً می‌توان نابرابری به دست آورد:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} \\ = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3d}{4}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2 \end{aligned}$$

و راه حل به دست می‌آید. در حقیقت، مجموع مربعات وقتی و فقط وقتی صفر است که همه جمعوندها صفر باشند. بنابراین پاسخ چنین است:

$$d = \frac{4}{5}, \quad c = \frac{3d}{4} = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{2c}{3} = \frac{2}{5}, \quad a = \frac{b}{2} = \frac{1}{5}$$

مسئله ۳۹. فرض کنید  $a + b = 1$ . بیشترین مقدار ممکن حاصل ضرب  $ab$  چقدر است؟

$$\text{راهنمایی: } a(1-a) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$$

مسئله ۴۰. ثابت کنید به ازای هر  $a, b, c$

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$

مسئله ۴۱. فرض کنید  $k, l, m$  عددهایی طبیعی باشند. ثابت کنید

$$2^{k+l} + 2^{k+m} + 2^{l+m} \leq 2^{k+l+m+1} + 1$$

مسئله ۴۲. اگر  $a + b + c = 0$ ، ثابت کنید  $ab + bc + ca \leq 0$ .

مسئله ۴۰ را حل می‌کنیم. همه چیز را به سمت چپ می‌آوریم و می‌نویسیم

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc = \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0$$

که بنابر نابرابری «اصلی» درست است.

\*\*\*

اکنون از ایده درخشان دیگری بحث می‌کنیم که معلوم شده است در مورد نابرابریهایی که نوعی تقارن دارند (و نیز به تجزیه ربطی دارند) کاملاً کارساز است.

لم. اگر  $a \geq b$  و  $x \geq y$ ، آن وقت  $ax + by \geq ay + bx$ .



برهان. در حقیقت،

$$ax + by - ay - bx = (a - b)(x - y) \geq 0$$

توضیح. اگر مثلاً  $f$  تابعی صعودی باشد، آن وقت به ازای هر دو عدد مانند  $a$  و  $b$ ،

$$(a - b)(f(a) - f(b)) \geq 0$$

که در حقیقت تعبیر دیگری از تعریف تابع صعودی است.

از این ایده می‌توان به شکل زیر استفاده کرد:

مسئله ۴۳. ثابت کنید به ازای هر  $x$  و  $y$ ،

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \geq x^4 + y^4$$

راه‌حل.  $x^2$  را با  $a$  و  $y^2$  را با  $b$  نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 &= \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} - a^2 - b^2 \\ &= \frac{(a-b)a^2}{b} + \frac{(b-a)b^2}{a} \\ &= (a-b) \left( \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} \right) = \frac{(a-b)(a^3 - b^3)}{ab} \geq 0 \end{aligned}$$

بار دیگر تأکید می‌کنیم که عددهای  $a - b$  و  $a^3 - b^3$  هم علامت‌اند.

مسئله ۴۴. اگر  $x, y > 0$ ، ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

مسئله ۴۵. اگر  $a, b, c \geq 0$ ، ثابت کنید

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$$

راه‌حل. همهٔ جمله‌ها را به یک طرف بیاورید و آنها را چهارتا چهارتا دسته‌بندی کنید:

$$(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2) + (b^3 + c^3 - b^2c - bc^2) + (a^3 + c^3 - a^2c - ac^2)$$

عبارت درون هر یک از پرانتزها را می‌توان به شکل زیر تجزیه کرد:

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0.$$

و راه حل کامل می‌شود.

مسئله ۴۶.\* اگر  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  و  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  ثابت کنید

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n$$

که در آن  $c_1, c_2, \dots, c_n$  جایگشتی دلخواه از عددهای  $b_1, b_2, \dots, b_n$  باشد.

### گوناگون

۴۷. ثابت کنید به ازای هر  $x$ ,

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$$

۴۸. ثابت کنید به ازای هر  $x, y$  و  $z$ ,

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$$

۴۹.\* ثابت کنید

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

۵۰. اگر  $x, y \geq 0$  ثابت کنید  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 \geq 64xy(x+y)^2$ .

توصیه به معلمان. با استفاده از ایده مطرح شده در لم بالا و نیز نابرابری مسئله ۴۶ می‌توان نابرابریهای دشوارتری را طرح کرد. توصیه می‌کنیم که اگر مسأله‌هایی در این سطح برای کلاسهایتان مناسب نیست فقط ایده کلی را مطرح کنید و آن را با دو یا سه مثال توضیح دهید.

### ۴. استقرا و نابرابریها

گاهی نابرابریها متغیری دارند که مقدارهایش عددهایی طبیعی اند یا یکی از عددها نقش این متغیر را در پوشش مبدل دارد (مثلاً مسئله ۷ را ببینید). در ضمن، توانایی یافتن چنین متغیری را، نه فقط در مورد نابرابریها، باید تقویت کرد. چنین نابرابریهایی را معمولاً می‌توان به استقرا ثابت کرد.

مسأله ۵۱. ثابت کنید اگر  $n \geq 3$  آن وقت

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

راه حل. پایه استقرا:  $n = 3$ . می توان نوشت

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}$$

گام استقرایی، از  $n = k$  به  $n = k + 1$  را ثابت می کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{3}{5} \end{aligned}$$

یکی از روشهای رایج اثبات استقرایی نابرابریها را در زیر توضیح داده ایم. فرض کنید دو دسته از عددها مانند  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  و  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  مفروض اند و می دانیم که

(الف)  $a_n \geq b_n$  (پایه استقرا)

(ب) اگر  $k \leq n$   $a_k - a_{k-1} \geq b_k - b_{k-1}$  (گام استقرا)

در این صورت  $a_n \geq b_n$ .

مسأله ۵۲. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

مسأله ۵۳. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

مسأله ۵۴. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

مسأله ۵۴ را نمی توان به روش پیش گفته ثابت کرد. دنباله  $(a_n)$ ، که

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

صعودی اکید است، اما دنباله  $(b_n)$ ، که  $b_n = 1$ ، ثابت است. بنابراین قسمت (ب) درست نیست و نمی‌توانیم از این روش استفاده کنیم.

پس چه کار کنیم؟ در اینجا یکی از ویژگیهای شگفت‌آور استقرای ریاضی آشکار می‌شود. به نظر می‌رسد که گاهی راحت‌تر است که حکمی قویتر، یا مانند این مورد، نابرابری دقیقتر، را ثابت کنیم. بنابراین،

راه‌حل. دنباله  $(b_n)$  را به‌گونه‌ای دیگر انتخاب می‌کنیم، یعنی  $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ . پایه استقرا. اگر  $n = 2$ ، معلوم می‌شود که  $1 - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ . گام استقرایی (مطابق روش بالا!):

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k^2}, \quad b_k - b_{k-1} = \frac{1}{k(k-1)}$$

یعنی،  $a_k - a_{k-1} < b_k - b_{k-1}$ . بنابراین، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ،

$$a_n < b_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

\* \* \*

مسئله ۵۵. (نابرابری برنولی) اگر  $x \geq 0$  و  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . راهنمایی: این مسئله راه‌حلی غیراستقرایی دارد که برای کسانی که با قضیه دوجمله‌ای نیوتن آشنا هستند (فصل «ترکیبیات-۲» را ببینید)، واضح به نظر می‌رسد. در حقیقت،

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

و همه جمعوندها پس از دو تای اول غیرمنفی‌اند، بنابراین

$$(1+x)^n \geq 1 + \binom{n}{1}x = 1 + nx$$

از طرف دیگر، روش کلی دیگری وجود دارد که درباره مسئله‌هایی از این نوع است. این روش را در زیر توضیح داده‌ایم (با همان نمادگذاری روش قبل): اگر

الف.  $a_1 \geq b_1$  (پایه استقرا)

ب. اگر  $k \leq n$ ،  $\frac{a_k}{a_{k-1}} \geq \frac{b_k}{b_{k-1}}$  (گام استقرایی)

آنوقت  $a_n \geq b_n$ . این هم نتیجه‌ای دیگر از روش استقرای ریاضی است.

مسئله ۵۶. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید  $n^n > (n+1)^{n-1}$ .

مسئله ۵۷. اگر  $n$  عددی طبیعی و بزرگتر از یا برابر با ۴ باشد، ثابت کنید  $n! \geq 2^n$ .

مسئله ۵۸. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید  $2^n \geq 2n$ .

مسئله ۵۹. همهٔ عددهای طبیعی مانند  $n$  را طوری پیدا کنید که  $2^n \geq n^3$ .

راه حل مسئله ۵۶ را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $a_n = n^n$  و  $b_n = (n+1)^{n-1}$ . حکم به ازای  $n=1$  و  $n=2$  درست است، پس پایهٔ استقرا ثابت شده است. برای اثبات گام استقرایی، کافی است ثابت کنیم

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \geq \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^{k-2}}$$

یا، معادل آن،  $(k^2)^{k-1} \geq (k^2-1)^{k-1}$ ، یعنی،  $k^{2k-2} \geq (k^2-1)^{k-1}$ .

### گوناگون

۶۰. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  نابرابری  $3^n > n \times 2^n$  درست است.

۶۱. کدام یک از دو عدد

$$2^{2^{\dots^2}} \quad (\text{ده تا } 2), \quad 3^{3^{\dots^3}} \quad (\text{نه تا } 3)$$

بزرگتر است؟ اگر هشت تا ۳ باشد چطور؟

۶۲. حاصل ضرب عددهای مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  برابر با ۱ است. ثابت کنید

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

یادداشت. این مسئله راه حل غیراستقرایی دیگر هم دارد.

۶۳. اگر  $x \geq -1$  و  $n \geq 1$ ، نابرابری برنولی،  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ، را ثابت کنید.

۶۴. مجموع عددهای مثبت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر با  $\frac{1}{p}$  است. ثابت کنید

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \times \frac{1-x_2}{1+x_2} \times \dots \times \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}$$

توصیه به معلمان. در این بخش دو مبحث در هم ادغام شده‌اند، و آنقدر مهم هستند که چندین جلسه به هر یک از آنها اختصاص یابد. این دو مبحث «استقرا» و «نابرابریها» هستند. باید توجه کرد دانش‌آموزان در مبحث «استقرا» معمولاً موضوع «استفاده از استقرا در نابرابریها» را راحت‌تر از بقیه (که

انتزاعی‌ترند) می‌فهمند. گرچه می‌توانیم مسأله‌های زیادی شبیه به مسأله‌های ۵۱-۶۰ مطرح کنیم، اما نباید در این باره افراط کنیم.

مهم است که به دانش‌آموزانتان سؤالهایی بدهید که حل کردن آنها تفکری نامتعارف می‌خواهد. همچنین، باید دستشان را در یافتن راه‌حلهای غیراستقرایی برای مسأله باز بگذارید.

## ۵. نابرابریهایی برای همه

مسأله‌های این بخش بر حسب روشهای راه‌حیشان مرتب نشده‌اند. البته، سعی کرده‌ایم آنها را از ساده به دشوار مرتب کنیم.

۶۵. طنابی را در امتداد استوا طوری کشیده‌ایم که هیچ حفره‌ای باقی نمانده است. سپس آن را کشیده‌ایم تا یک سانتی‌متر بلندتر شود و بعد باز هم در امتداد استوا کشیده‌ایم تا در جایی از زمین فاصله بگیرد. آیا کسی می‌تواند از حفره‌ایجاد شده رد شود؟

۶۶. فرض کنید زمین از خمیر ساخته شده باشد و آن را به شکل «سوسیس» نازکی لوله می‌کنیم تا به خورشید برسد. ضخامت این «سوسیس» چقدر است؟ جوابی به دست بیاورید که حداکثر ۱۰۰٪ با جواب واقعی اختلاف داشته باشد.

۶۷. آیا می‌توان خلاق روی کره زمین و همه ساخته‌های نوع بشر را در مکعبی با یالی به طول ۲ مایل جا داد؟

۶۸. ثابت کنید  $50^{100} < 100!$ .

۶۹. اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، ثابت کنید  $\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ .

۷۰. اگر  $0 < y < x < 1$ ، ثابت کنید  $\frac{x-y}{1-xy} < 1$ .

۷۱. اگر  $a, b, c, d \geq 0$  و  $c+d \leq a$  و  $c+d \leq b$ ، ثابت کنید  $ad+bc \leq ab$ .

۷۲. آیا مجموعه‌ای از عددها وجود دارد که مجموعشان ۱ باشد و مجموع مربهایشان از  $1/10$  کمتر باشد؟

۷۳. فرض کنید  $a, b, c > 0$  و  $abc = 1$ . می‌دانیم  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c$ . ثابت کنید دقیقاً یکی از عددهای  $a, b$  و  $c$  از ۱ بزرگتر است.

۷۴. عددهای  $x$  و  $y$  متعلق به بازه  $[0, 1]$  اند. ثابت کنید

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$$

۷۵. فرض کنید  $a, b, c$  عددهایی طبیعی‌اند که  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$ . ثابت کنید

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$$

۷۶. اگر  $x, y, z$  عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leq 2$$

۷۷. ثابت کنید

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

۷۸. ثابت کنید به ازای هر  $x$ ، نابرابری  $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \geq 0$  درست است.

۷۹. عددهای  $a, b, c, d$  متعلق به بازه  $[0, 1]$  اند. ثابت کنید

$$(a+b+c+d+1)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

۸۰. فرض کنید  $x$  و  $y$  بزرگتر از صفر باشند. کوچکترین عدد در میان عددهای  $x, \frac{1}{y}$  و  $y + \frac{1}{x}$  را با  $S$  نشان می‌دهیم. بیشترین مقدار ممکن  $S$  چقدر است؟

۸۱\*. فرض کنید  $a, b, c, d$  عددهایی مثبت باشند. ثابت کنید دست‌کم یکی از نابرابریهای

$$(1) \quad a+b < c+d$$

$$(2) \quad (a+b)cd < ab(c+d)$$

$$(3) \quad (a+b)(c+d) < ab+cd$$

درست نیست.

۸۲\*. ثابت کنید اگر عددهای  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  مثبت باشند، نابرابریهای

$$\frac{a_1 b_2}{a_1 + b_2} < \frac{a_2 b_1}{a_2 + b_1}, \quad \frac{a_2 b_3}{a_2 + b_3} < \frac{a_3 b_2}{a_3 + b_2}, \quad \frac{a_3 b_1}{a_3 + b_1} < \frac{a_1 b_3}{a_1 + b_3}$$

همزمان درست نیستند.

۸۳\*. ثابت کنید اگر  $x+y+z \geq xyz$ ، آن وقت  $x^2+y^2+z^2 \geq xyz$ .

## فصل ۱۷

### مسأله‌هایی برای سال دوم

احتمالاً متوجه شده‌اید که برخی مباحث سال اول را در بخش دوم کتاب گسترش داده‌ایم - برخی را هم (نظیر «زوجیت»، «اصل لانه‌کبوتری» و «بازیها») خیر. البته، برخی مسأله‌های مربوط به این مباحث را در فصلهای مربوطشان در بخش اول کتاب نیاورده‌ایم، زیرا دشوارترند. در ابتدای این فصل، این نقیصه را جبران می‌کنیم.

#### ۱. زوجیت

۱. ثابت کنید معادله

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$$

در مجموعه عددهای فرد جواب ندارد.

۲. هشت رخ روی صفحه شطرنج طوری قرار گرفته‌اند که هیچ‌یک از آنها دیگری را تهدید نمی‌کند.

ثابت کنید تعداد رخیایی که روی خانه‌های سیاه قرار گرفته‌اند زوج است.

۳. آیا می‌توان ۲۰ سرباز قرمز و آبی را دور دایره طوری چید که هر سرباز آبی روبه‌روی سربازی قرمز

قرار داشته باشد و هیچ دو سرباز آبی‌ای کنار هم نباشند.

۴. نقطه‌های  $A$  و  $B$  روی خطی راست انتخاب شده‌اند. سپس ۱۰۰۱ نقطه دیگر بیرون پاره‌خط

$AB$  انتخاب و با رنگ قرمز یا آبی رنگ شده‌اند. ثابت کنید مجموع فاصله‌های  $A$  تا نقطه‌های قرمز

و فاصله‌های  $B$  تا نقطه‌های آبی با مجموع فاصله‌های  $B$  تا نقطه‌های قرمز و فاصله‌های  $A$  تا

نقطه‌های آبی برابر نیست.

۵. ده جفت کارت داریم که روی آنها عددهای ۰، ۰، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ نوشته شده است.

ثابت کنید نمی‌توان این کارتها را در یک ردیف طوری چید که بین هر دو کارت که روی آنها عدد  $n$

نوشته شده است دقیقاً  $n$  کارت قرار گرفته باشد ( $n = 0, 1, \dots, 9$ ).



۶. بیست نقطه که  $20$  ضلعی‌ای منتظم تشکیل داده‌اند روی دایره‌ای انتخاب شده‌اند. سپس این نقطه‌ها به ده جفت تقسیم شده‌اند و نقطه‌های هر جفت با وتری به هم وصل شده‌اند. ثابت کنید طول برخی از این وترها با هم برابر است.
۷. مربعی  $6 \times 6$  با دومینوهای  $2 \times 1$  بدون همپوشانی پوشانده شده است. ثابت کنید می‌توان مربع را در امتداد خطی راست که موازی ضلعهایش است طوری برید که هیچ‌یک از دومینوها بریده نشود.
۸. حلزونی از نقطه  $O$  با سرعتی ثابت شروع به خزیدن می‌کند و هر نیم ساعت یک بار  $60^\circ$  می‌چرخد. ثابت کنید فقط وقتی ممکن است این حلزون به نقطه  $O$  بازگردد که تعداد ساعت‌های گذشته عددی طبیعی باشد.
- ۹\* یک دستگاه ضبط صوت و  $n$  حلقه نوار داریم که خط ابتدایشان در روی نوارها قرمز و در پشت نوارها سبز است. همه  $n$  هایی را پیدا کنید که فقط به کمک یک حلقه خالی، وقتی همه نوارها به ابتدای حلقه برگردانده می‌شوند، خط ابتدای سبز در طرف رویشان باشد.

## ۲. اصل لانه کبوتری

۱۰. نقطه‌های خطی را با ۱۱ رنگ، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان دو نقطه هم‌رنگ پیدا کرد که فاصله‌شان برحسب متر عددی طبیعی باشد.
۱۱. هفت خط در صفحه قرار دارند. ثابت کنید زاویه میان دو تا از آنها از  $26^\circ$  کمتر است.
۱۲. هر خانه جدولی  $41 \times 5$  یا سفید شده است یا سیاه. ثابت کنید می‌توانیم سه ستون و سه سطر طوری انتخاب کنیم که هر نه خانه‌ای که از اشتراکشان ایجاد می‌شود هم‌رنگ باشند.
- ۱۳\* هر نقطه صفحه با یکی از الف (۲؛ ب)؛ ج (۳؛ ج)  $100^\circ$  رنگی که در اختیار داریم رنگ می‌شود. ثابت کنید می‌توانیم مستطیلی پیدا کنیم که همه رأسهایش به یک رنگ باشند.
۱۴. شش دوست قرار می‌گذارند که در روز جمعه به دیدن هفت نمایش بروند. نمایشها در ساعت‌های ۹ صبح، ۱۰ صبح، ۱۱ صبح، ... و ۷ بعد از ظهر شروع می‌شوند. رأس هر ساعت دو نفر از آنها به دیدن یک نمایش می‌روند و بقیه به دیدن نمایشی دیگر می‌روند. در انتهای روز همه آنها هر هفت نمایش را دیده‌اند. ثابت کنید در مورد هر نمایش، زمان اجرایی وجود دارد که هیچ‌یک از این دوستان برای دیدن آن نرفته است.
۱۵. حداکثر چند عنکبوت می‌توانند به‌طور مسالمت‌آمیز روی یالهای مکعبی که هر یالشان ۱ متر است زندگی کنند؟ هر عنکبوت می‌تواند همسایگانش را تا حداکثر به فاصله الف (۱ متری؛ ب)  $1/1$  متری (از روی یالها) تحمل کند.
۱۶. از هر دو  $16$  ضلعی منتظم همنهشت هفت رأس انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید این چندضلعیها را

می‌توانیم طوری روی هم قرار دهیم که دست‌کم چهار رأس انتخاب شده یکی از چندضلعیها بر چهار رأس انتخاب شده چندضلعی دیگر منطبق شود.

۱۷. مجموعه‌ای از ده عدد دورقمی داده شده است. ثابت کنید می‌توان دو زیرمجموعه جدا از هم از این عددها طوری انتخاب کرد که مجموعشان برابر باشد.

۱۸. بیست و پنج نقطه روی صفحه مفروض‌اند. می‌دانیم که از هر سه تا از آنها می‌توان دوتا را انتخاب کرد که فاصله‌شان از هم ۱ سانتی‌متر باشد. ثابت کنید ۱۳ تا از این نقطه‌ها وجود دارند که درون دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند.

۱۹. شش نقطه درون مستطیلی  $4 \times 3$  مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان دو تا از آنها را طوری انتخاب کرد که فاصله‌شان حداکثر  $\sqrt{5}$  باشد.

۲۰. مجموعه  $A$  از عددهای طبیعی تشکیل شده است و می‌دانیم که در میان هر  $100$  عدد طبیعی متوالی عضوی از  $A$  وجود دارد. ثابت کنید می‌توان چهار عدد مختلف مانند  $a, b, c, d$  در مجموعه  $A$  پیدا کرد که  $a + b = c + d$ .

۲۱. نود و نه مربع  $2 \times 2$  را از صفحه کاغذی شطرنجی به ابعاد  $29 \times 29$  بریده‌ایم. ثابت کنید باز هم می‌توان مربع  $2 \times 2$  دیگری را برید.

۲۲. جدولی  $10 \times 10$  را با پنجاه و پنج مربع  $2 \times 2$  پوشانده‌ایم. ثابت کنید می‌توان یکی از آنها را طوری برداشت که بقیه باز هم جدول را بپوشانند.

۲۳\*. یک استاد بزرگ شطرنج هر روز دست‌کم یک بار شطرنج بازی می‌کند، اما هر هفته (از شنبه تا جمعه) بیش از ۱۲ بار شطرنج بازی نمی‌کند. ثابت کنید می‌توان چند روز متوالی در سال پیدا کرد که این استاد در طی این مدت دقیقاً ۲۰ بار شطرنج بازی کرده است.

۲۴. ده پاره‌خط جدا از هم به رنگ قرمز روی پاره‌خطی به طول  $10$  سانتی‌متر مفروض‌اند. معلوم شده است که فاصله هیچ دو نقطه قرمزی دقیقاً ۱ سانتی‌متر نیست. ثابت کنید مجموع طولهای پاره‌خطهای قرمز از ۵ سانتی‌متر بیشتر نیست.

۲۵.  $101$  نقطه درون مربعی  $1 \times 1$  مفروض‌اند. ثابت کنید سه تا از این نقطه‌ها مثلثی می‌سازند که مساحتش از  $1/100$  بیشتر نیست.

۲۶. چند دایره که مجموع شعاعهایشان  $\frac{3}{5}$  است درون مربعی  $1 \times 1$  قرار گرفته‌اند. ثابت کنید خطی موازی ضلعی از این مربع وجود دارد که دست‌کم دو تا از این دایره‌ها را قطع می‌کند.

۲۷. درون دایره‌ای به شعاع ۱ چند وتر طوری رسم کرده‌ایم که هر قطر دایره حداکثر چهارتا از آنها را قطع کرده است. ثابت کنید مجموع طولهای این وترها از ۱۳ بیشتر نیست.

۲۸\*.  $100$  ساعت قدیمی (غیردیجیتال) در مغازه عتیقه فروشی وجود دارد که همگی کار می‌کنند اما لزوماً زمان درست را نشان نمی‌دهند. ثابت کنید زمانی وجود دارد که در آن مجموع فاصله‌های

مرکز مغازه تا مرکز ساعتها از مجموع فاصله‌های مرکز مغازه تا نوک عقربه‌های ساعت شمار ساعتها کمتر است. اگر برخی از ساعتها سریعتر یا کندتر حرکت کنند، حکم چیست؟

### ۳. بازیها

در همهٔ مسأله‌های این بخش فرض می‌کنیم که دو بازیکن داریم که به نوبت، یکی پس از دیگری، حرکت می‌کنند. مگر در مواردی که ذکر می‌کنیم، باید مشخص کنید که کدامشان می‌برد (بازیکنی که اول حرکت می‌کند، یا دیگری).

۲۹. در هر کدام از سه خانهٔ آخر سمت چپ جدولی  $20 \times 1$  سربازی قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان یک سرباز را به یکی از خانه‌های خالی سمت راست برد، به شرطی که لازم نباشد از روی هیچ سرباز دیگری رد شود. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

۳۰. در هر کدام از سه خانهٔ آخر سمت چپ جدولی  $20 \times 1$  سربازی قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از سربازها را به خانهٔ سمت راست مجاورش، به شرطی که خالی باشد، برد. اگر این خانهٔ مجاور خالی نبود اما خانهٔ سمت راست بعدی‌اش خالی بود، می‌توان سرباز را به این خانهٔ خالی منتقل کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

۳۱. عدد ۱۲۳۴ روی تخته‌سیاه نوشته شده است. در هر حرکت می‌توان رقمی غیر صفر از عدد نوشته شده را از این عدد کم کرد (این تفاضل را به جای عدد قبلی روی تخته‌سیاه می‌نویسیم). بازیکنی که عدد صفر را بنویسد می‌برد.

۳۲. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را در یک سطر نوشته‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از علامتهای «+»، «-» یا «×» را در جایی خالی میان دو عدد مجاور قرار داد. اگر نتیجهٔ نهایی عددی فرد باشد، بازیکن اول می‌برد در غیر این صورت می‌بازد.

۳۳. عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۲۱ را در یک سطر روی تخته‌سیاه نوشته‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از عددهای خط‌نخورده را خط زد. وقتی که فقط دو عدد روی تخته‌سیاه مانده باشد بازی خاتمه می‌یابد. اگر مجموع این عددها بر ۵ بخش پذیر باشد، بازیکن اول می‌برد، در غیر این صورت بازیکن اول می‌بازد.

۳۴. جدولی با ابعاد الف)  $10 \times 10$ ؛ ب)  $9 \times 9$  مفروض است. در هر حرکت می‌توان در یکی از خانه‌های خالی یک علامت مثبت یا منفی نوشت (هر بازیکن در نوبتش می‌تواند یکی از این علامتها را انتخاب کند). بازیکنی که حرکتش سه علامت یکسان پشت سر هم روی یک خط راست (عمودی، افقی یا قطری) ایجاد کند بازی را می‌برد.

۳۵. دو کپه شکلات روی میز وجود دارد: یکی ۲۲ شکلات دارد و دیگری ۲۳ شکلات. در هر حرکت می‌توان دو شکلات از یکی از کپه‌ها را خورد یا یک شکلات را از یک کپه به دیگری منتقل کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند بازی را می‌برد.

۳۶. بازیکن اول یکی از رقمهای ۶، ۷، ۸ و ۹ را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. در هر حرکت بعدی می‌توان یکی از همین رقمها را در سمت راست عدد روی تخته‌سیاه نوشت. بازی پس از الف)  $10^6$ ؛ ب) ۱۲ حرکت خاتمه می‌یابد (توجه کنید که مثلاً دهمین حرکت، حرکت پنجم بازیکن دوم است). اگر عدد حاصل بر ۹ بخش‌پذیر نبود بازیکن اول می‌برد و در غیر این صورت می‌بازد.

۳۷. دو بازیکن روی صفحه شطرنجی نامتناهی بازی می‌کنند. بازیکن اول در یکی از خانه یک علامت بعلاوه می‌گذارد. او در هر حرکت بعدی باید در یکی از خانه‌های خالی‌ای که ضلعی مشترک با یکی از خانه‌هایی که قبلاً در آن علامت بعلاوه گذاشته شده، علامت بعلاوه بگذارد. ثابت کنید صرف‌نظر از اینکه بازیکن اول چگونه بازی کند، بازیکن دوم می‌تواند او را «پات کند» - یعنی می‌تواند وضعی را پیش بیاورد که بازیکن اول نتواند حرکت دیگری کند.

۳۸.  $10^6$  چوب کبریت روی هم کپه شده است. در هر حرکت می‌توان  $p^n$  چوب کبریت را از این کپه برداشت، که در اینجا  $p$  عددی اول است و  $n$  عددی صحیح و غیرمنفی است. بازیکنی که آخرین چوب کبریت را برمی‌دارد بازی را می‌برد.

۳۹.  $1991$  میخ روی تخته‌ای کوبیده شده است. در هر حرکت می‌توان دو تا از میخها را که به هم وصل نیستند با سیمی به هم وصل کرد. اگر پس از حرکتی مسیری بسته تشکیل شد، بازیکنی که این حرکت را کرده است بازی را الف) می‌برد؛ ب) می‌بازد.

۴۰. در هر حرکت می‌توان یکی از خانه‌های جدولی با ابعاد الف)  $19 \times 91$ ؛ ب)  $19 \times 92$  یا تعدادی از خانه‌ها را که مربعی را تشکیل می‌دهند سیاه کرد. نمی‌توان خانه‌ای را دو بار رنگ کرد. بازیکنی که آخرین خانه را رنگ کند بازی را می‌برد.

۴۱\*. کاغذی شطرنجی به ابعاد  $30 \times 45$  مفروض است. در هر حرکت می‌توان از روی پاره‌خطی که دو تا از نقطه‌های شبکه‌ای مجاور را به هم وصل می‌کند کاغذ را برید. بازیکن اول بازی را با برش از لبه کاغذ شروع می‌کند. هر برش باید از جایی که برش قبلی تمام شده شروع شود. بازیکنی که پس از حرکت او کاغذ دو تکه شود برنده است.

۴۲\*. پادشاه، در نوبتش، می‌تواند دو ضربدر در هر دو خانه خالی دلخواهش روی صفحه شطرنجی نامتناهی بگذارد. پیشکارش، در نوبتش، می‌تواند یک شیرینی در هر خانه خالی‌ای که بخوهد بگذارد. آیا پادشاه می‌تواند  $10^6$  ضربدر پشت سر هم در یک ردیف (عمودی یا افقی) بگذارد؟

#### ۴. مسأله‌های ساختنی

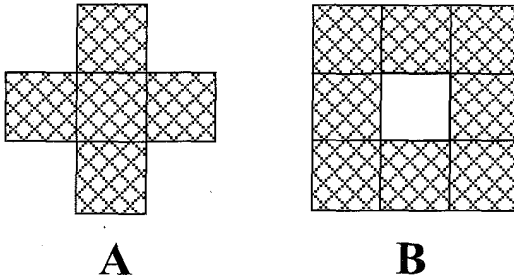
۴۳. مسافری زنجیری طلا دارد که ۷ قطعه دارد و می‌خواهد در هتلی اتاق بگیرد. مسافر باید هر قطعه از زنجیر را برای کرایه هر روز بدهد. کمترین تعداد قطعه‌هایی که مسافر باید باز کند تا کرایه هر روز را دقیقاً بدهد چقدر است؟

۴۴. آیا می‌توان ۱۰ عدد را در یک سطر طوری نوشت که مجموع هر پنج عدد متوالی از آنها مثبت و مجموع هر هفت عدد متوالی از آنها منفی باشد؟

۴۵. عددی ده‌رقمی پیدا کنید که رقم اولش برابر با تعداد صفرهای نمایش اعشاری آن باشد، رقم دومش برابر با تعداد یکها در این نمایش باشد، ... و رقم دهمش برابر با تعداد نه‌ها در این نمایش باشد.

۴۶. علی بابا می‌خواهد به درون غار برود. در دهانه غار بشکه‌ای وجود دارد. این بشکه چهار حفره دارد که درون هر یک از آنها سبویی وجود دارد و درون هر سبوی یک شاه‌ماهی. هر شاه‌ماهی می‌تواند در سبوی سر پایین یا سر بالا بنشیند. علی بابا می‌تواند دستش را در دو تا از سوراخها کند و پس از اینکه وضعیت نشستن شاه‌ماهیها را تشخیص داد، آنها را هر طور که خواست تغییر دهد. پس از این کار بشکه می‌چرخد و پس از اینکه باز ایستاد نمی‌تواند حفره‌ها را از هم تشخیص دهد. دهانه غار وقتی و فقط وقتی باز می‌شود که همه شاه‌ماهیها به یک طریق نشسته باشند. علی بابا چگونه می‌تواند داخل غار شود؟

۴۷. راهی برای رنگ کردن کاغذی شطرنجی با ۵ رنگ طوری پیدا کنید که رنگ خانه‌های هر شکلی از نوع A (شکل ۱۲۴ را ببینید) مختلف باشد، اما در مورد هیچ شکلی مانند B چنین نباشد.



شکل ۱۲۴

\*\*\*

۴۸. شکلی رسم کنید که نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ را نپوشاند، اما بتوان با دو نسخه از آن دایره‌ای به شعاع ۱ را پوشاند.

۴۹. شش نقطه در صفحه طوری پیدا کنید که هر سه تا از آنها رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع باشند.

۵۰. ۱۱ مربع جدا از هم (یعنی، مربعهایی که هیچ نقطه درونی مشترکی ندارند) طوری در صفحه رسم کنید که توان آنها را با ۳ رنگ به طور مناسب رنگ کرد. رنگ آمیزی مجموعه‌ای از شکلهای مناسب را می‌نامیم، هرگاه هر دو شکل که بیش از یک نقطه مشترک مرزی دارند رنگشان فرق داشته باشد.

۵۱. صفحه را با مربعهای ناهمپوشان طوری بپوشانید که فقط دو تا از آنها به یک اندازه باشند.

۵۲. یک چندضلعی و نقطه‌ای در صفحه طوری رسم کنید که هیچ‌یک از ضلعهای چندضلعی از این

نقطه کاملاً قابل رؤیت نباشد (یعنی، اگر چشم بیننده در این نقطه قرار گیرد، هر ضلع چندضلعی را که در نظر بگیریم، ضلعی دیگر جلوی دیدن آن را گرفته باشد). دو حالت وجود دارد: الف) نقطه مورد نظر درون چندضلعی باشد؛ ب) نقطه مورد نظر بیرون چندضلعی باشد.

\*۵۳. هفت نقطه روی صفحه طوری پیدا کنید که در میان هر سه تا از آنها دو نقطه به فاصله ۱ سانتی‌متر وجود داشته باشد.

## ۵. هندسه

### مجموعه ۱. نابرابریهای هندسی

در فصل «هندسه» چند نابرابری هندسی و مسأله‌های مربوط به آنها را بررسی کردیم. در این مجموعه، چند مسأله از این موضوع گرد آورده‌ایم که دشوارتر و نامتعارف‌ترند.

۵۴. ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر ضلعهای مثلث رسم می‌شوند کل مثلث را می‌پوشانند.

۵۵. ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر ضلعهای چهارضلعی رسم می‌شوند کل چهارضلعی را می‌پوشانند.

۵۶. ثابت کنید چندضلعی محدب بیشتر از سه زاویه حاده ندارد.

۵۷. ثابت کنید در چندضلعی محدب، مجموع هر دو زاویه از تفاضل هر دو زاویه دیگر بیشتر است.

۵۸. دایره‌ای به شعاع ۱ و پنج خط راست که این دایره را قطع کرده‌اند در صفحه مفروض‌اند. می‌دانیم

که فاصله نقطه  $X$  از مرکز دایره  $\frac{1}{11}$  است. ثابت کنید اگر قرینه نقطه  $X$  را به طور متوالی نسبت

به پنج خط پیدا کنیم، نقطه حاصل درون دایره نمی‌افتد.

۵۹. ستاره‌شناس ۵۰ ستاره را رصد کرده است که فاصله میان هر دو تا از آنها برابر با  $S$  است. ابری

۲۵ تا از ستاره‌ها را پوشانده است. ثابت کنید مجموع فاصله‌های دو به دو ستاره‌های قابل رؤیت

از  $\frac{S}{4}$  کمتر است.

۶۰. مربعی  $1 \times 1$  را به چند مستطیل تقسیم کرده‌ایم. در مورد هر یک از آنها نسبت عرض به طول را

حساب کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع این نسبتها از ۱ بیشتر نیست.

۶۱. رأسهای مثلث  $ABC$  در نقطه‌های شبکه‌ای صفحه‌ای شطرنجی (که طول ضلع خانه‌هایش برابر

با واحد است) قرار دارند. می‌دانیم  $|AB| > |AC|$ . ثابت کنید  $\frac{1}{p} |AB| - |AC| > \frac{1}{p}$ ، که در

اینجا  $p$  نصف محیط مثلث  $ABC$  است.

### مجموعه ۲. هندسه ترکیبیاتی

در این بخش مسأله‌هایی از «هندسه ترکیبیاتی» آورده‌ایم. در این شاخه از هندسه ویژگیهای ترکیبیاتی

مختلف آرایشهای شکلهای هندسی، نظیر نقطه‌ها، خطها، چندضلعیها، و از این قبیل، در صفحه (و در

فضا) بررسی می‌شوند. تحذب نیز معمولاً در این بحث گنجانده می‌شود.

۶۲. ۲۰۰ نقطه روی پاره خط  $AB$  طوری انتخاب شده‌اند که این مجموعه نسبت به وسط پاره خط  $AB$  متقارن است. صدتا از نقطه‌ها قرمز و بقیه آبی شده‌اند. ثابت کنید مجموع فاصله‌های  $A$  تا نقطه‌های قرمز برابر است با مجموع فاصله‌های  $B$  تا نقطه‌های آبی.
۶۳. پنج نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید چهارتا از این نقطه‌ها رأسهای چهارضلعی‌ای محدب‌اند.
۶۴. مربعی  $۲ \times ۲$  به چند مستطیل تقسیم شده است. ثابت کنید می‌توانیم برخی از این مستطیلهای را طوری با سیاه رنگ کنیم که طول تصویر شکلهای رنگ شده بر یکی از ضلعهای مربع از ۱ بیشتر نباشد در حالی که طول همین تصویر بر ضلع دیگر از ۱ کمتر نباشد.
۶۵. شش سکه ده‌تومانی روی میز، زنجیری بسته تشکیل داده‌اند. سکه ده‌تومانی هفتمی بی‌آنکه «بلغزد» طوری می‌چرخد که بر هر شش سکه مماس می‌شود. پیش از اینکه این سکه به جای اولش بازگردد چند دور کامل می‌زند؟
۶۶. خط شکسته بسته ۸-تکه‌ای که رأسهای مکعبی منطبق‌اند در فضا مفروض است. ثابت کنید یکی از این تکه‌ها بر یکی از یالهای مکعب منطبق است.
- ۶۷\*. چند پاره‌خط روی خطی راست مفروض‌اند و می‌دانیم که هر دوتا از آنها یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید نقطه‌ای از خط به همه این پاره‌خطها تعلق دارد.
۶۸. چند پاره‌خط بازه  $[۱, ۰]$  را پوشانده‌اند. ثابت کنید می‌توانید چندتا از این پاره‌خطها را طوری انتخاب کنید که جدا از هم باشند و مجموع طولهایشان دست‌کم  $\frac{1}{3}$  باشد.
- ۶۹\*. چند پاره‌خط روی بازه  $[۱, ۰]$  قرار دارند و آن را پوشانده‌اند. ثابت کنید نیمه چپ آنها دست‌کم نیمی از بازه  $[۱, ۰]$  را می‌پوشانند.

## ۶. عددهای صحیح

۷۰. همه عددهای طبیعی را پیدا کنید که برابر با مجموع فاکتوریل‌های رقمهایشان هستند.
۷۱. عدد  $\overline{abc}$  اول است. ثابت کنید ممکن نیست  $b^2 - 4ac$  مربع کامل باشد.
۷۲. توان چهارم عددی طبیعی با رقمهای ۰، ۱، ۴، ۶، ۷ و ۹ نوشته شده است. این عدد را پیدا کنید.
۷۳. کوچکترین عدد طبیعی به شکل  $۱۱۱\dots ۱۱$  که بر  $۳۳۳\dots ۳۳$  (صدتا ۳) بخش‌پذیر است، کدام است؟
۷۴. ثابت کنید می‌توان از میان هر ۳۹ عدد طبیعی متوالی عددی را پیدا کرد که مجموع رقمهایش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.
۷۵. آیا دو عدد هفت رقمی مختلف وجود دارد که هر کدام با رقمهای ۱، ۲، ... و ۷، بدون تکرار، نوشته شده باشد و یکی از آنها بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۷۶. تفاضل دو عدد  $\overline{abcdef}$  و  $\overline{fdebca}$  بر ۲۷۱ بخش پذیر است. ثابت کنید  $b = d$  و  $c = e$ .
۷۷. آیا عددی دو رقمی وجود دارد که مربعمش هم به همین دو رقم، منتها به ترتیب عکس، ختم شود؟
۷۸. عددهای صحیح  $a, b, c$  مفروض‌اند و می‌دانیم که به ازای هر عدد صحیح مانند  $x$ ،  $ax^2 + bx + c$  بر ۵ بخش پذیر است. ثابت کنید  $a, b$  و  $c$  خودشان هم بر ۵ بخش پذیرند.
۷۹. همهٔ عددهای طبیعی مانند  $n$  را طوری پیدا کنید که عدد  $1 + n^n$  اول باشد و حداکثر ۱۹ رقم داشته باشد.
- ۸۰\*. عدد  $y$  با تجدید آرایش رقمهای عدد  $x$  به دست آمده است. می‌دانیم  $x + y = 10^{20}$ . ثابت کنید  $x$  بر ۵۰ بخش پذیر است.
- ۸۱\*. ثابت کنید ممکن نیست عدد  $\overline{a^{99} \dots 0^{99} b}$  مربع کامل باشد.

## ۷. مسأله‌های بهینه‌سازی

### مجموعهٔ ۱. اصل اکستریم

ایدهٔ اصلی برای حل کردن مسأله‌های این مجموعه در نظر گرفتن چیزی (به هر تعبیری) «اکستریم» است: بزرگترین عدد، دو نقطه که بیشترین فاصله را از هم دارند، کوچکترین زاویه، و چیزهایی از این قبیل.

۸۲. الف) روی رأسهای  $10^9$  ضلعی عددهایی نوشته‌ایم، به طوری که هر یک از آنها میانگین حسابی همسایگانش است. ثابت کنید همهٔ این عددها برابرند.

ب) همین حکم را ثابت کنید، به شرطی که این بار عددها درون خانه‌های صفحهٔ شطرنجی نوشته شده‌اند و می‌دانیم هیچ‌یک از آنها از میانگین حسابی همسایگانش بیشتر نیست.

راه حل مسألهٔ ۸۲ الف) نسبتاً ساده است. کوچکترین عدد را در نظر بگیرید. معلوم است که همسایگانش باید با خودش برابر باشند. در غیر این صورت، میانگین حسابی آنها باید از کوچکترین عدد مورد نظر بیشتر باشد. به همین ترتیب، همسایگان این دو عدد هم باید با خودشان برابر باشند، و همین‌طور تا آخر. یعنی همهٔ عددها باید برابر باشند.

۸۳. ده نقطه روی صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان پنج پاره خط جدا از هم پیدا کرد که دو سرشان از این نقطه‌ها باشند.

۸۴. آیا می‌توان چند پاره خط در صفحه طوری رسم کرد، که دو سر هر یک از آنها نقطهٔ درونی یکی دیگر از پاره‌خطهای رسم شده باشد؟

۸۵. چند سکه روی پیشخوان صرافی قرار دارد، به طوری که سکه‌ها با هم تماس ندارند. دزد بی‌دستی می‌خواهد یکی از این سکه‌ها را با بینی‌اش تا لبهٔ میز هل دهد، تا در آنجا آن را به چنگ آورد.



سکه‌ای که حرکت می‌کند نباید به سکه دیگری بخورد (مبادا که صراف صدایش را بشنود). آیا همواره چنین کاری ممکن است؟

۸۶. الف) چند سکه یکجور روی میز قرار دارد. ثابت کنید یکی از این سکه‌ها حداکثر با سه‌تای دیگر تماس دارد.

ب) چند سکه با اندازه‌های مختلف روی میز قرار دارد. ثابت کنید یکی از این سکه‌ها حداکثر با پنج‌تای دیگر تماس دارد.

۸۷. کشوری چندین فرودگاه دارد و می‌دانیم که فاصله‌های میان آنها متمایز است. از هر فرودگاه هوایی بلندی می‌شود و در نزدیکترین فرودگاه به آن می‌نشیند. ثابت کنید پس از اینکه همه هوایی‌ها نشستند، در هر فرودگاه حداکثر پنج تا از این هوایی‌ها ممکن است وجود داشته باشد.

۸۸. در فضاها دور ۱۹۹۱ سیارک وجود دارد و در هر یک از آنها ستاره‌شناسی زندگی می‌کند. فاصله‌های میان همه سیارکها متمایز است. هر ستاره‌شناس نزدیکترین سیارک به خودش را می‌بیند. ثابت کنید سیارکی وجود دارد که قابل رؤیت نیست.

## مجموعه ۲. نیم-ناورداها

ایده «نیم-ناوردا» تعمیم طبیعی ایده ناورداهاست. کمیتی را «نیم-ناوردا» می‌نامیم که ضمن فرایند تبدیل به‌طور یکنوا تغییر کند. نمونه بارز نیم-ناوردا، عمر انسانهاست، که متأسفانه با گذشت زمان فقط کم می‌شود.

۸۹. کشوری چندین شهر دارد. بزه‌کاری از شهر  $A$  به شهر  $B$ ، که دورترین شهر کشور به  $A$  است، تبعید می‌شود. پس از مدتی او دوباره از شهر  $B$  به دورترین شهر به  $B$ ، که  $A$  نیست، تبعید می‌شود. ثابت کنید اگر به همین ترتیب پی‌درپی تبعید شود، هیچ‌گاه به شهر  $A$  باز نمی‌گردد.

۹۰. صد سکه در یک ردیف به این ترتیب چیده شده‌اند: رو، پشت، رو، پشت، ... در هر حرکت می‌توان چند سکه متوالی را پشت و رو کرد. کمترین تعداد حرکتهای لازم برای اینکه به وضعیتی برسیم که همه سکه‌ها به رو باشند چقدر است؟

۹۱. در نیمه‌شب یک ویروس در اجتماع ۱۹۸۴ باکتری قرار داده می‌شود. هر ویروس در هر ثانیه یک باکتری را از بین می‌برد، و پس از آن باکتریها و ویروسها به دو نیم می‌شوند. ثابت کنید سرانجام همه باکتریها از بین می‌روند و زمان دقیق این رخداد را تعیین کنید.

۹۲. در هر خانه جدولی مستطیلی یک عدد حقیقی نوشته‌ایم. می‌توانیم علامت همه عددهای هر یک از سطرها یا هر یک از ستونها را عوض کنیم. ثابت کنید با این کارها می‌توانیم ترتیبی دهیم که مجموع عددهای نوشته در جدول غیرمنفی شود.

- ۹۳\* در گرافی  $n$  رأسی درجهٔ هیچ رأسی از پنج بیشتر نیست. ثابت کنید می‌توان رأسهای این گراف را با سه رنگ طوری رنگ کرد که تعداد یالهایی که دو سرشان هم‌رنگ‌اند حداکثر  $\frac{2n}{3}$  باشد.
- ۹۴\* روی دایره‌ای عددهایی حقیقی نوشته‌ایم. اگر چهار عدد پشت سرهم  $a, b, c$  و  $d$  در نابرابری  $(a-d)(b-c) > 0$  صدق کنند، می‌توانیم جای عددهای  $b$  و  $c$  را عوض کنیم. ثابت کنید نمی‌توان بی‌نهایت بار چنین جایگشت‌هایی انجام داد.

## ۸. پیوستگی گسسته

در اینجا مسأله‌هایی را گرد آورده‌ایم که راه‌حلشان بر اساس ایده‌ای بسیار ساده است که آن را با مثال زیر توضیح می‌دهیم. ککی روی خط حقیقی روی عددهای صحیح می‌پرد. می‌دانیم که کک در هر پرش حداکثر به یکی از عددهای مجاورش می‌رود. اگر این کک ابتدا روی عددی منفی نشسته باشد و در انتها روی عددی مثبت، در لحظه‌ای روی صفر نشسته بوده است.

۹۵. ۱۰۰ نقطه روی صفحه انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید خطی وجود دارد که دقیقاً پنجاه تا از این نقطه‌ها در یک طرف آن قرار دارند.

راه‌حل مسألهٔ ۹۵ را بررسی می‌کنیم. ابتدا همهٔ خطهای راستی را رسم می‌کنیم که از هر جفت از این ۱۰۰ نقطه می‌گذرند. بعد خطی را پیدا می‌کنیم که با هیچ‌یک از این خطها موازی نیست و همهٔ نقطه‌های موردنظر در یک طرف آن قرار دارند. اکنون این خط را به سمت نقطه‌ها طوری حرکت می‌دهیم که همواره موازی وضعیت اولیه‌اش باشد و توجه می‌کنیم که تعداد نقطه‌هایی که این خط از آنها رد می‌شود چگونه تغییر می‌کند. کاملاً واضح است که امکان ندارد همزمان از دو نقطه رد شویم. بنابراین با همان «پیوستگی گسسته» مواجهیم که در مثال مربوط به کک بودیم. چون در ابتدا هیچ‌یک از نقطه‌های انتخاب شده در یک طرف خط موردنظر نیست و در انتها هر ۱۰۰ نقطه در همین طرف خط قرار دارند، پس معلوم است که در لحظه‌ای تعداد نقطه‌هایی که خط از آنها رد شده برابر با ۵۰ است، و نتیجه‌ای که می‌خواهیم به دست می‌آید.

۹۶. صد توپ سیاه و صد توپ قرمز در یک ردیف طوری چیده شده‌اند که توپهای واقع در انتهای سمت چپ و انتهای سمت راست سیاه‌اند. ثابت کنید می‌توان چند توپ متوالی (البته نه همهٔ توپها را!) از سمت چپ این ردیف طوری انتخاب کرد که تعداد توپهای سیاه و قرمز در میان آنها برابر باشد.
۹۷. بازی فوتبال میان تیمهای پیروزی و استقلال با نتیجهٔ ۸ بر ۵ خاتمه یافته است. ثابت کنید هنگام بازی زمانی بوده است که پیروزی به امتیازی که استقلال در این لحظه داشته، رسیده بوده است.
۹۸. ثابت کنید می‌توانید رقمهای عددی شش رقمی را طوری از نو مرتب کنید که تفاضل میان مجموع سه رقم اولش و سه رقم آخرش عددی بین ۰ و ۹ باشد.

۹۹. در خانه‌های جدولی  $8 \times 8$  عددهای  $+1$  و  $-1$  را به‌گونه‌ای نوشته‌ایم که مجموع همهٔ عددها برابر با صفر شده است. ثابت کنید می‌توان این جدول را به دو بخش طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای هر بخش برابر با صفر باشد.

۱۰۰. وجه‌های هشت مکعب واحد را با رنگهای سیاه و سفید طوری رنگ کرده‌ایم که تعداد وجه‌های سیاه و وجه‌های سفید برابر شده است. ثابت کنید می‌توان با این مکعبهای واحد، مکعبی  $2 \times 2 \times 2$  طوری درست کرد که تعداد مکعبهای سفید و مکعبهای سیاه روی سطح آن برابر باشد.

۱۰۱. در برخی خانه‌های جدولی  $50 \times 50$  عددهای  $+1$  و  $-1$  را قرار داده‌ایم و می‌دانیم که قدرمطلق مجموعشان از  $100$  بیشتر نیست. ثابت کنید جدولی  $25 \times 25$  وجود دارد که قدرمطلق مجموع عددهای نوشته شده روی آن از  $25$  بیشتر نیست.

۱۰۲\*. دربارهٔ دنبالهٔ  $(a_n)$  می‌دانیم  $a_1 = 1$  و همواره  $a_{n+1} - a_n$  یا  $0$  است یا  $1$ . همچنین، می‌دانیم که به ازای عددی طبیعی مانند  $n$ ،  $a_n = \frac{n}{1000}$ . ثابت کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند  $m$ ،  $a_m = \frac{m}{500}$ .

## ۹. سؤالات قدرتی

این بخش به «سؤالات قدرتی» اختصاص دارد. هر یک از این سؤالات در حقیقت زنجیره‌ای از مطالب ساده‌تر (لمها) است که در کل به حل مسأله‌ای دشوارتر منجر می‌شوند. ابتدا نتیجهٔ موردنظر و سپس لمهایی را که باید ثابت کنید تا مسأله را حل کنید می‌آوریم. برخی از این مسأله‌ها برای تمرین در منزل خیلی مفیدند و برخی را می‌توان در جلسات ویژه‌ای بررسی کرد.

۱۰۳. مثلثهای متساوی‌الاضلاع روی کاغذهای شطرنجی. ثابت کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحهٔ شطرنجی قرار داشته باشند وجود ندارد. الف) ثابت کنید دو برابر مساحت هر مثلثی که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحهٔ شطرنجی قرار دارند عددی طبیعی است.

ب) طول ارتفاع مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع  $a$  را پیدا کنید و مساحتش را حساب کنید. ج) ثابت کنید مربع طول هر پاره‌خطی که دو سرش در دو نقطهٔ شبکه‌ای قرار دارند عددی طبیعی است.

د) ثابت کنید اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود داشته باشد که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای قرار دارند، آن وقت می‌توان  $\sqrt{3}$  را به شکل نسبت دو عدد طبیعی نوشت.

ه) ثابت کنید اگر مربع کسری که صورت و مخرجش نسبت به هم اول‌اند عددی طبیعی باشد، آن وقت مخرجش برابر با  $1$  است.

و) اکنون حکم مسأله را ثابت کنید.

۱۰۴. دستور پیک. ثابت کنید مساحت چندضلعی‌ای که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحه شطرنجی قرار دارند برابر است با  $a + \frac{b}{4} - 1$ ، که در آن  $a$  تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درون چندضلعی و  $b$  تعداد نقطه‌های شبکه‌ای روی محیط چندضلعی است.

الف) دستور پیک را در مورد مستطیلی که ضلعهایش روی خطهای کاغذ شطرنجی قرار دارند ثابت کنید.

ب) دستور پیک را در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهایش روی خطهای کاغذ شطرنجی قرار دارند ثابت کنید.

ج) دستور پیک را در مورد چندضلعی‌ای که می‌توان آن را به چندضلعیهایی که دستور پیک در مورد آنها درست است ثابت کنید.

د) فرض کنید چندضلعی‌ای داریم که دستور پیک در مورد آن درست است و این چندضلعی را به دو چندضلعی کوچکتر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید اگر دستور پیک در مورد یکی از این چندضلعیهای کوچکتر درست باشد، در مورد دیگری هم درست است.

ه) ثابت کنید دستور پیک در مورد هر مثلی که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای کاغذ شطرنجی قرار دارند درست است.

و) \* ثابت کنید هر چندضلعی را می‌توان با ترسیم قطرهایی جدا از هم از آن به مثلثهایی تقسیم کرد (مسأله ۳۱ فصل «استقرا» را ببینید).

ز) دستور پیک را در حالت کلی ثابت کنید.

۱۰۵. قضیه بویایی - گروین. دو چندضلعی با مساحت برابر مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان چندضلعی اول را به چند بخش طوری تقسیم کرد و آنها را از نو طوری چید تا چندضلعی دوم را به دست آورد. دو شکل که می‌توان آنها را به هم تبدیل کرد «یکجور» می‌نامیم.

الف) ثابت کنید دو متوازی‌الاضلاع که قاعده‌ای مشترک و ارتفاعی برابر دارند یکجورند.

ب) ثابت کنید اگر چندضلعیهای  $P_1$  و  $P_2$  یکجور باشند و نیز بدانیم  $P_2$  و  $P_3$  یکجورند، آن وقت  $P_1$  و  $P_3$  هم یکجورند.

ج) ثابت کنید هر دو متوازی‌الاضلاع که مساحتشان برابر است یکجورند.

د) ثابت کنید هر مثلث با متوازی‌الاضلاعی یکجور است.

ه) ثابت کنید هر مثلث با مستطیلی که طول یکی از ضلعهایش ۱ است یکجور است.

و) قضیه بویایی - گروین را ثابت کنید.

۱۰۶. بخش‌پذیری عددهای فیبوناتچی. ثابت کنید اگر  $F_n$  ( $n$ امین عدد فیبوناتچی) اول باشد، آن وقت  $n = 4$  یا  $n$  اول است.

الف) ثابت کنید (به استقرا) که به ازای هر دو عدد طبیعی مانند  $m$  و  $n$ ,

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$$

- (ب) ثابت کنید  $F_{km}$  بر  $F_m$  بخش پذیر است (از استقرا روی  $k$  استفاده کنید).
- (ج) ثابت کنید اگر  $n$  بر عددی بزرگتر از ۲ بخش پذیر باشد، آن وقت  $F_n$  مرکب است.
- (د) ثابت کنید هر عدد مرکب غیر ۴ مقسوم علیه‌ی سره و بزرگتر از ۲ دارد، و راه حل مسأله را کامل کنید.

۱۰۷. قضیه هلی. روی صفحه چند مجموعه محدب وجود دارد و می‌دانیم که هر سه تا از آنها نقطه‌ای مشترک دارند. ثابت کنید همه این مجموعه‌ها نقطه‌ای مشترک دارند.

(الف) چهار نقطه که با مجموعه عددهای  $\{1, 2, 3\}$ ،  $\{1, 2, 4\}$ ،  $\{2, 3, 4\}$  و  $\{1, 3, 4\}$  برچسب خورده‌اند در صفحه مفروض‌اند. می‌توان هر دو تا از این نقطه‌ها را با پاره‌خطی به هم وصل کرد و همه نقطه‌های این پاره‌خط را با عددی که میان مجموعه‌های برچسب‌های دو سر آن مشترک‌اند برچسب زد. ثابت کنید با این کار می‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد که با هر چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ برچسب خورده باشد.

(ب) ثابت کنید اشتراک مجموعه‌های محدب، محدب است.

(ج) قضیه هلی را در مورد چهار مجموعه محدب ثابت کنید؛ به یاد داشته باشید که باید فرض کنید که هر سه تا از آنها نقطه‌ای مشترک دارند.

(د) حالت کلی قضیه هلی را به استقرا روی تعداد مجموعه‌های محدب ثابت کنید.

## ۱۰. گوناگون

۱۰۸. خانه‌های جدولی  $9 \times 9$  با دو رنگ، رنگ شده‌اند. می‌توان هر مستطیل  $1 \times 3$  ای را انتخاب کرد و همه خانه‌هایش را با رنگی که بیشتر روی این مستطیل به چشم می‌آید رنگ کرد. ثابت کنید با این کارها می‌توان به جایی رسید که همه خانه‌ها به یک رنگ باشند.

۱۰۹. آیا ممکن است شش تفاضل میان عددهای مجموعه‌ای چهارعضوی برابر با ۲، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشند؟

۱۱۰. در روستایی ۱۹۷۰ نفر زندگی می‌کنند. هر روز برخی از آنها یک سکه ده‌تومانی را با دو سکه پنج‌تومانی افراد دیگری عوض می‌کنند. آیا ممکن است در طول یک هفته هر یک از افراد این روستا دقیقاً ۱۰ سکه دست به دست کرده باشد؟

۱۱۱. بیت، پال و ماری مسأله‌های کتابی را حل می‌کنند. هر یک از آنها دقیقاً ۶۰ مسأله را حل می‌کند، اما روی هم فقط ۱۰۰ مسأله را حل کرده‌اند. مسأله «ساده» مسأله‌ای است که هر سه آنها حلش کرده‌اند و مسأله «دشوار» مسأله‌ای است که فقط یکی از آنها حلش کرده است. ثابت کنید تعداد مسأله‌های دشوار از تعداد مسأله‌های ساده ۲۰ تا بیشتر است.

۱۱۲. می‌دانیم که نمایش اعشاری مربع عدد  $x$  به شکل  $0.999\dots 99\dots$  (صدتا ۹ پس از ممیز)

است. ثابت کنید نمایش اعشاری خود عدد  $x$  نیز به همین شکل است (البته، ممکن است تعداد ۹ها در آن فرق کند).

۱۱۳. چهل و نه رخ روی صفحه شطرنجی  $۱۰۰ \times ۱۰۰$  قرار دارند و یک مهره شاه در گوشه پایین، سمت چپ گذاشته‌ایم. شاه به سمت گوشه بالا، سمت راست حرکت می‌کند و پس از هر حرکتش یکی از رخها هم حرکت می‌کند. ثابت کنید لحظه‌ای وجود دارد که یکی از رخها شاه را تهدید می‌کند.

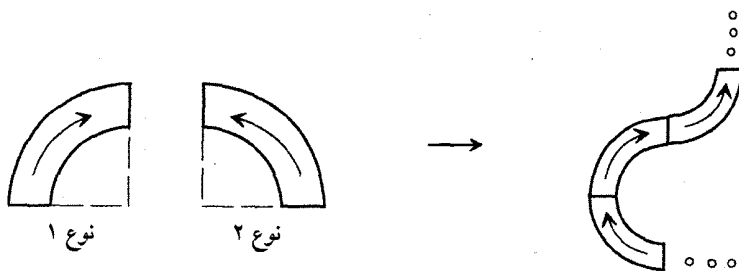
۱۱۴. در عدد  $۰,۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱\dots$  همهٔ عددهای طبیعی پشت سر هم بعد از ممیز نوشته شده‌اند. آیا این کسر متناوب است؟

۱۱۵. سه بازیکن، تنیس بازی می‌کنند و کسی که در بازی‌ای شرکت ندارد با برندهٔ این بازی در بازی بعد بازی می‌کند. در انتهای روز بازیکن اول  $۱۰$  بار بازی کرده است و بازیکن دوم  $۲۱$  بار. بازیکن سوم چند بار بازی کرده است؟

۱۱۶. دربارهٔ عددهای  $x$  و  $y$  می‌دانیم  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = ۱۰$ . ثابت کنید  $x - ۲y < ۲۰۰$ .

۱۱۷. همهٔ خانه‌های نیمهٔ چپ جدولی  $۱۰ \times ۱۰$  با سیاه و بقیهٔ خانه‌ها با سفید رنگ شده‌اند. می‌توان رنگ همهٔ خانه‌های هر سطری یا هر ستون را عوض کرد. آیا می‌توان فقط با این کارها به رنگ‌آمیزی معمول صفحهٔ شطرنج دست یافت؟

۱۱۸. یکی از اسباب‌بازیهای کودکان از چند ریل قطار از دو نوع مختلف (شکل ۱۲۵ را ببینید) تشکیل شده که دوری بسته را تشکیل داده‌اند و جهت حرکت قطار با جهت فلشها یکی است. یکی از قطعه‌های از نوع ۱ جدا می‌شود و قطعهٔ دیگری از نوع ۲ به جای آن گذاشته می‌شود. ثابت کنید که دیگر نمی‌توان همهٔ قطعه‌ها را طوری چید که دور بسته ایجاد شود.



شکل ۱۲۵

۱۱۹. شهری به شکل چندضلعی‌ای محدب است که قطره‌های خیابانهای شهرند. نقطه‌های برخورد قطرها و رأسهای چندضلعی تقاطعها هستند. خطهای تراموایی از برخی خیابانها می‌گذرند و می‌دانیم که از هر تقاطع دست‌کم یک خط می‌گذرد. ثابت کنید می‌توان با حداکثر دو بار عوض کردن خطها، از هر تقاطع به هر تقاطع دیگر رفت.

۱۲۰. سه شهر به ترتیب ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ دانش‌آموز دارند. مدرسه را باید کجا ساخت تا مجموع مسافت‌هایی که دانش‌آموزان در روز طی می‌کنند کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱۲۱. آیا می‌توان ۱۷ ضلعی منتظمی را به ۱۴ مثلث تقسیم کرد؟

۱۲۲. سه گره در سه رأس مربعی نشسته‌اند. این گره‌ها از روی هم می‌پزند، یکی از روی دیگری. اگر گره  $A$  از روی گره  $B$  بپرد، روی نقطه‌ای مانند  $A'$  فرود می‌آید که  $B$  وسط پاره خط  $AA'$  باشد. آیا ممکن است که یکی از آنها به رأس چهارم مربع بپرد؟

۱۲۳. بیست و پنج فیل در یک ردیف در یک سیرک ایستاده‌اند و وزن هریک بر حسب کیلوگرم عددی طبیعی است. می‌دانیم که اگر وزن هریک از آنها را (بجز فیلی که انتهای ردیف در سمت راست ایستاده) با نصف وزن فیل سمت راستش جمع کنیم، حاصل برابر با ۶ تن می‌شود. وزن فیلهای را پیدا کنید.

۱۲۴. میز بیلیاردی به ابعاد  $۲۰۰ \times ۱۰۱$  فقط چهار سوراخ در چهار گوشه‌اش دارد. تویی از گوشه میز در امتداد نیمساز آن زده می‌شود و حرکت می‌کند و از ضلعهای میز منعکس می‌شود. آیا ممکن است به یکی از سوراخها بیفتد؟

۱۲۵. قطرهای ۱۳ ضلعی‌ای محدب آن را به چند ناحیه تقسیم کرده‌اند. تعداد ضلعهای این ناحیه‌ها حداکثر چقدر است؟

۱۲۶. ثابت کنید اگر  $n$  عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد، آن وقت عدد

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

عددی صحیح نیست.

۱۲۷. شعاع دایره‌ای روی صفحه شطرنج که هیچ خانه سفید را (بجز در رأسهایش) قطع نمی‌کند حداکثر چقدر است؟

۱۲۸. پریز گردی در دور تا دورش ۶ سوراخ دارد که به فاصله‌های برابر از هم قرار گرفته‌اند. همچنین، فیش ۶ شاخه مشابهش را هم داریم. سوراخهای پریز با عددهای از ۱ تا ۶، به ترتیبی، شماره‌گذاری شده‌اند؛ همین کار را با شاخه‌های فیش کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان فیش را طوری در پریز کرد که هیچ‌یک از شاخه‌هایش به سوراخی با همان عدد نرود. اگر ۷ سوراخ و ۷ شاخه داشته باشیم، آیا باز هم همین حکم درست است؟

۱۲۹. مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$  به ترتیب عددهای  $a_1, \dots, a_p, \dots, b_1, \dots, b_q$  اند و می‌دانیم

$$a_1 + \dots + a_p = b_1 + \dots + b_q$$

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_p} = \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_q}$$

ثابت کنید  $m = n$ .

۱۳۰. در کشوری سکه‌های زیر رایج‌اند: ۱ سنتی، ۲ سنتی، ۵ سنتی، ۱۰ سنتی، ۲۰ سنتی، ۵۰ سنتی و ۱ دلاری. می‌دانیم  $A$  سنت را می‌توانیم با پرداخت  $B$  سکه بپردازیم. ثابت کنید می‌توانیم  $B$  دلار را با پرداخت  $A$  سکه بپردازیم.

۱۳۱. آیا می‌توان صد عدد طبیعی متمایز را روی دایره‌ای طوری چید که حاصل ضرب هر دو عدد کنار هم مربع کامل باشد؟

۱۳۲.  $n$  فیزیکدان و  $n$  شیمیدان دور میز گردی نشسته‌اند. می‌دانیم که برخی از آنها همواره دروغ می‌گویند و بقیه همواره راست. همچنین، می‌دانیم که تعداد فیزیکدانان دروغگو با تعداد شیمیدانان دروغگو برابر است. هر یک از این افراد می‌گوید: «کنار من در سمت راست یک شیمیدان نشسته است.» ثابت کنید  $n$  عددی زوج است.

۱۳۳. دربارهٔ عددهای طبیعی  $a$  و  $b$  می‌دانیم  $1 + ab + a^2$  بر  $1 + ba + b^2$  بخش پذیر است. ثابت کنید  $a = b$ .

۱۳۴. هر یک از دو ریاضیدان نابغه از عدد محرمانهٔ خودش مطلع است و این دو می‌دانند که عددهایشان یکی اختلاف دارند. این دو یکی در میان از هم سؤال می‌کنند: «آیا تا الان عدد من را شناخته‌ای؟» ثابت کنید سرانجام یکی از آنها به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهد.

۱۳۵. صد عدد صحیح روی یک دایره نوشته شده‌اند و می‌دانیم که مجموعشان برابر با ۱ است. هر مجموعه از چند عدد پشت سر هم را «زنجیره» می‌نامیم. تعداد زنجیره‌هایی را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها مثبت باشد.

۱۳۶. در یک دوره مسابقات شطرنج هر بازیکن دقیقاً نصف امتیازات ممکن در بازی مقابل سه بازیکن آخر را به دست آورده است. چند بازیکن در این مسابقات شرکت کرده‌اند؟

۱۳۷. دربارهٔ عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  می‌دانیم

$$a + b + c = 7, \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$$

مقدار عبارت

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

را پیدا کنید.

\*۱۳۸. یکصد و نوزده نفر در ساختمانی که ۱۲۰ آپارتمان دارد زندگی می‌کنند. آپارتمانی را که بیش از ۱۵ نفر در آن زندگی می‌کنند «پرازدحام» می‌نامیم. هر روز ساکنان آپارتمانی پرازدحام مشاجره می‌کنند و همگی به آپارتمانهای مختلفی در همین ساختمان می‌روند. آیا درست است که دیر یا زود هیچ‌یک از آپارتمانها پرازدحام نخواهد بود؟



- \*۱۳۹. چند اتومبیل روی پیستی دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند و در مخزن سوخت هر یک از آنها آنقدر سوخت وجود دارد که با همه این سوختها اتومبیلی می‌تواند دور پیست را بزند. ثابت کنید دست‌کم یکی از این اتومبیلها می‌تواند با گرفتن سوخت از دیگر اتومبیلها دور پیست را طی کند.
- \*۱۴۰. دنباله عددی ۱، ۹، ۸، ۲، ... این ویژگی را دارد که هر یک از جمله‌هایش، از جمله پنجم، برابر است با آخرین رقم مجموع چهار جمله قبل از آن. آیا ممکن است در این دنباله به چهار جمله پشت سرهم ۳، ۰، ۴، ۴ برخورد کنیم.
- \*۱۴۱. ۲۵ خرده‌سنگ یک جا کپه شده‌اند. این کپه را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. بعد یکی از این بخشها را هم به دو بخش تقسیم می‌کنیم، و این کار را ادامه می‌دهیم تا به ۲۵ خرده‌سنگ جدا از بقیه برسیم. پس از اینکه یکی از کپه‌ها را به دو بخش تقسیم کردیم حاصل ضرب تعداد خرده‌سنگهای این دو بخش را روی تخته سیاه می‌نویسیم. ثابت کنید در انتها مجموع همه عددهای نوشته شده روی تخته سیاه برابر با ۳۰۰ است.
- \*۱۴۲. در روستایی همه دخترهایی که با پسری آشنا هستند با یکدیگر نیز آشنا هستند. همچنین، در میان آشنایان هر دختر، تعداد پسران بیشتر از تعداد دختران است. ثابت کنید در این روستا تعداد پسران از تعداد دختران بیشتر یا با آن برابر است.
- \*۱۴۳. حلزونی در امتداد خطی راست به مدت ۶ دقیقه می‌خزد و چند نفر به آن نگاه می‌کنند. هر یک از این افراد ۱ دقیقه به حلزون نگاه می‌کند و حلزون در این یک دقیقه دقیقاً یک فوت به جلو می‌رود. همچنین می‌دانیم که همیشه دست‌کم یک نفر به حلزون نگاه می‌کند. این حلزون در مدت این ۶ دقیقه حداکثر چقدر ممکن است به جلو برود؟

## مسابقه‌های ریاضی

### ۱. مقدمه

ابوالهول ... قوز کرده برفراز صخره، نظر هر مسافری را که از آن راه می‌گذرد جلب می‌کند و به آنها معمایی می‌دهد، به این شرط که هر کس آن را حل کرد، به سلامت می‌گذرد اما هر کس موفق نشد کشته می‌شود. هنوز کسی موفق به حل آن نشده و همگی هلاک شده‌اند.

ادیپ از این بابت هراسی به دل راه نداد و متهورانه پا پیش گذاشت. ابوالهول از او پرسید: «کدام حیوان است که صبحگاه روی چهار پا راه می‌رود، هنگام ظهر روی دو پا و هنگام غروب روی سه پا؟»

نقل از کتاب «اسطوره‌شناسی»، توماس بالفینچ

به احتمال زیاد این معمای ابوالهول نخستین مسأله‌المیادی به معنای واقعی کلمه است. همان‌طور که می‌دانید، ادیپ در آن مسابقه باستانی کاملاً موفق شد.

مسابقه‌های ریاضی امروزی قربانی ندارند و دانش‌آموزان می‌توانند در نهایت آسودگی خیال در مسابقه‌های مختلفی شرکت کنند. در این گونه‌یکتا از مسابقه ریاضیات، سرگرمی و آزمون سنجش میزان تداوم فعالیت‌های ذهنی در هم آمیخته می‌شود. برخی شرکت‌کنندگان آنقدر درگیر می‌شوند که المیادی «حرف‌های» می‌شوند (و این امر در یادگیری ریاضی آنها تأثیر بسزایی دارد). به هر حال، امیدواریم خوانندگان مسابقه‌هایی را که در این فصل از آنها صحبت کرده‌ایم جالب، مفید و سازنده بدانند.

\* \* \*

توصیه به معلمان. ۱. به یاد داشته باشید که دانش‌آموزان، به‌ویژه آنهایی که سن و سال کمتری دارند، دوست دارند هر موضوع جدی‌ای را تبدیل به بازی، سرگرمی یا تفریح کنند. چنین چیزی در ابتدای کار

قابل قبول است و می‌توان از آن به‌عنوان راهی برای آشنا کردن دانش‌آموزان با حوزه‌های جدید ریاضیات استفاده کرد. البته، بهتر است که در فعالیتهای اصلی جلسه‌ها حال و هوایی جدی حاکم باشد.

۲. در هر فصلی از این کتاب و کتابهایی دیگر می‌توانید مسأله‌هایی برای مسابقه‌های ریاضی پیدا کنید.

## ۲. پیکار ریاضی

این مسابقه یکی از رایجترین مسابقه‌های ریاضی در لنینگراد (و روسیه) است. این مسابقه را یوزف وربیچیک، که بعدها معلم ریاضی یکی از مدارس لنینگراد شد، در اواسط دههٔ ۱۹۶۰ راه‌اندازی کرد. این مسابقهٔ تیمی به طرز شگفت‌آوری ریاضیات، سرگرمی، روحیهٔ کارگروهی و جذابیت را با هم دارد. در اینجا قوانین این مسابقه را به اختصار شرح می‌دهیم. هر یک از دو تیم فهرستی از مسأله‌هایی را که هیأت داوران تهیه کرده است دریافت می‌کند (مسأله‌های هر دو تیم یکی است). آنها مدت زمانی مشخص (که ممکن است از ۳۰ دقیقه تا یک هفته تغییر کند) برای حل این مسأله‌ها فرصت دارند. پس از اینکه این مدت تمام شد اعضای تیمها و هیأت داوران در تالاری (که در آن تخته‌سیاهی بزرگ و مقدار زیادی گچ تعبیه شده) گرد هم می‌آیند و پیکار شروع می‌شود.

ابتدا، هیأت داوران با برگزاری «مسابقهٔ سرگروهها» مشخص می‌کند که کدام تیم اول شروع می‌کند. به سرگروهها سؤالی ساده داده می‌شود که باید در پای تخته‌سیاه فوری و بدون کمک دیگر اعضای تیم به آن پاسخ دهند. مثلاً، آیا ۷۹۹۹ اول است؟ یا، هفت حلقهٔ لاستیکی در فضا قرار دارند؛ آیا ممکن است هر یک از این حلقه‌ها از دقیقهٔ سه حلقهٔ دیگر رد شده باشد؟

به محض اینکه یکی از سرگروهها پاسخ را بگوید مسابقهٔ سرگروهها تمام می‌شود. اگر جواب درست باشد، تیمی که سرگروهش جواب درست داده برنده است. در غیر این صورت تیم دیگر می‌برد.

تیم برندهٔ تصمیم می‌گیرد که کدام تیم - مثلاً، A - «مبارزطلبی» را شروع کند و پس از آن «مبارزطلبی» شروع می‌شود، یعنی تیم A اعلام می‌کند که راه‌حل یکی از مسأله‌های فهرست را از تیم B می‌خواهد. تیم B می‌تواند مبارزطلبی را با فرستادن یکی از اعضایش به پای تخته‌سیاه به‌عنوان «راوی» (برای توضیح دادن راه‌حل) قبول کند. همچنین، تیم B می‌تواند مبارزطلبی را قبول نکند.

در حالت اول، تیم A یکی از اعضایش را به‌عنوان حریف راوی می‌فرستد. وظیفهٔ او تحقیق درستی راه‌حل، برطرف کردن اشکالات آن یا حتی اثبات نادرستی آن است.

در حالت دوم، تیم A باید ثابت کند که مبارزطلبی آنها صادقانه بوده، یعنی آنها باید کسی را به‌عنوان «راوی» مأمور کنند تا راه‌حل درست را بگوید. مانند قبل، تیم B حریفی را می‌فرستد که سعی می‌کند ثابت کند راه‌حل غلط است یا دست‌کم اشتباهی جزئی یا مطلبی ثابت نشده در آن پیدا کند.

در همهٔ این حالتها، بجز در یک مورد، مبارزطلبی بعدی را تیم دیگر انجام می‌دهد. مورد استثنا وقتی پیش می‌آید که پس از تحقیق در صادقانه بودن مبارزطلبی (بند قبل را ببینید)، هیأت داوران

تشخیص بدهد تیم A راه حلش غلط است (هیأت داوران حق دارد که درستی راه حل را بررسی کند، هر وقت خواست سؤالهایی را بپرسد و چیزهایی از این قبیل). در این حالت، تیم A جریمه می‌شود و آنها باید دوباره مبارزطلبی کنند (البته برای مسأله‌ای دیگر).

پس از اینکه بررسی راه‌حلی تمام شد، هیأت داوران امتیازها را تقسیم می‌کند (هر مسأله ۱۲ امتیاز دارد). حتی اگر راه حل راوی درست باشد ممکن است امتیازهایی نصیب حریف شود؛ مثلاً، وقتی که چند اشتباه جزئی در راه حل باشد که حریف به آنها اشاره کند و راوی آنها را برطرف کند. هیأت داوران همچنین می‌تواند به خودش امتیاز بدهد.

اگر راوی نتواند اشتباه عمده‌ای را که حریف (یا هیأت داوران) پیدا می‌کند ظرف مدت معقولی (که معمولاً ۱ دقیقه است) برطرف کند، مباحثه تمام می‌شود و هیأت داوران می‌تواند نظر طرف دیگر را جویا شود. پس از اینکه این مباحثه هم تمام شد، هیأت داوران امتیازها را تقسیم می‌کند. اگر یکی از تیمها مسأله‌های حل شده‌اش تمام شد و علاقه‌ای به آزمودن بخش در مبارزطلبی از تیم دیگر برای مسأله‌ای حل نشده نداشت می‌تواند از حشش در مبارزطلبی بگذرد. در این حالت، می‌تواند بقیه راه‌حلهایی را که در آن لحظه دارند مطرح کند. این مباحثات هم مانند قبل برگزار می‌شوند.

چند قانون جزئی دیگر هم در طول ۳۰ سال برگزاری پیکارهای ریاضی به آیین‌نامه اولیه اضافه شده‌اند، از جمله

۱. جریمه «غیرصادقانه بودن مبارزطلبی» ۶ امتیاز منفی است.
۲. هیچ‌یک از مسابقه‌دهندگان نمی‌تواند بیش از  $x$  بار در پای تخته‌سیاه حاضر شود (مسابقه سرگروهها لحاظ نمی‌شود)، که در اینجا  $x$  عددی طبیعی است که مقدار آن هنگام ارائه فهرست مسأله‌ها اعلام می‌شود. معمولاً  $x = 2$  یا  $x = 3$ .
۳. فقط سرگروه یا (در حالتی که سرگروه راوی، حریف یا غایب است) معاونش می‌تواند با هیأت داوران صحبت کند.

\* \* \*

آخرین و معتبرترین قانون پیکارهای ریاضی این است که در موارد بلا تکلیف حکم حکم هیأت داوران است.

\* \* \*

برگزاری پیکار، توانایی و تجربه می‌خواهد: مثلاً، رایجترین راه شروع (مانند حرکت  $e^4 - e^2$  در شطرنج) این است که از رقیبتان راه حل دشوارترین مسأله‌ای را که تیمتان حل کرده است بخواهید. همچنین، توصیه می‌کنیم که چند پیکار ریاضی تمرینی ساده در محفل ریاضی خود یا در مدرسه‌تان برگزار کنید.

در اینجا باید خاطر نشان کنیم که علاقه‌مندی به پیکارهای ریاضی در لنینگراد گاهی آنقدر زیاد

است که مدارس، ویژه مسابقه‌های قهرمانی (فقط برای دانش‌آموزان سالهای آخر) برگزار می‌کنند. همچنین پیکار ریاضی «سه جانبه» ای (میان سه تیم) وجود دارد که برگزار کردن آن دشوارتر است. در اینجا نمونه‌ای از یکی از پیکارهای ریاضی را می‌آوریم. در زیر فهرست مسأله‌های پیکاری را که در سال ۱۹۸۶ میان دو محفل ریاضی برجستهٔ لنینگراد برای سال ششم (دانش‌آموزان ۱۲-۱۳ ساله) وابسته به کاخ پیشاهنگان لنینگراد و مدرسهٔ ریاضی جوانان برگزار شده می‌آوریم.

\* \* \*

۱. «کروکودیل» مهره‌ای است که می‌تواند روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی به طریق زیر حرکت کند: در هر خانه‌ای که قرار گرفته باشد، ابتدا به یکی از خانه‌های همسایه (افقی یا عمودی) می‌رود و بعد  $n$  خانه در جهت عمود بر امتداد حرکت اول می‌رود. مثلاً، اگر  $n = 2$ ، «کروکودیل» همان اسب شطرنج است. همهٔ  $n$ هایی را پیدا کنید که «کروکودیل» بتواند از هر خانه‌ای به هر خانهٔ دیگر برود.
۲. عددهای  $p$  و  $p^2 + 2^p$  اول‌اند.  $p$  را پیدا کنید.
۳. آیا ممکن است مکعب عددی طبیعی به ۱۹۸۵ یک ختم شود؟
۴. ثابت کنید همواره می‌توان سه قطر از قطرهای پنج‌ضلعی محدب طوری پیدا کرد که با آنها بتوان مثلث تشکیل داد.
۵. خانه‌های جدولی  $(n+1) \times n$  را با عددهایی صحیح پر کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان چند تا از ستونهای این جدول (البته نه همهٔ آنها) را طوری حذف کرد که پس از آن مجموع عددهای هر سطر عددی زوج باشد.
۶. به چند طریق می‌توان عدد ۱۵ را به شکل مجموع چند عدد طبیعی نوشت؛ نمایشهایی را که ترتیب جمعه‌ندهایشان فرق دارد متمایز می‌گیریم.
۷. نقطهٔ  $A$  را «شبه‌مرکز تقارن» مجموعهٔ  $M$  (که بیش از یک نقطه از صفحه را در بر دارد) می‌نامیم، هرگاه بتوان نقطه‌ای را از  $M$  طوری حذف کرد که  $A$  مرکز تقارن مجموعهٔ به‌دست آمده باشد. مجموعه‌ای متناهی چند شبه‌مرکز تقارن ممکن است داشته باشد؟
۸. سی عدد روی دایره‌ای طوری چیده‌ایم که هر یک از آنها برابر است با تفاضل دو عدد بعدی‌اش در جهت ساعتگرد. اگر بدانیم مجموع این عددها برابر با ۱ است، آنها را پیدا کنید.

### ۳. نبرد ریاضی

این مسابقه، برخلاف پیکار ریاضی، مسابقه‌ای انفرادی است. بنابراین، در محافلی از آن استفاده کنید که توانایی ریاضی اعضا در یک حد باشد.

چند مسأله برای حل کردن داده می‌شود و برای حل هر یک از آنها امتیازی در نظر گرفته می‌شود. همین که کسی خواست راه‌حلش را بگوید، به پای تخته‌سیاه می‌آید و راه‌حلش را توضیح می‌دهد. اگر راه‌حل درست بود، راوی امتیاز را می‌گیرد. در غیر این صورت، امتیاز مسأله کمی افزایش می‌یابد - مقدار این افزایش را معلم مشخص می‌کند - و همین مقدار را از امتیازهای راوی کم می‌کنند. این مسابقه بی‌اشکال هم نیست، زیرا ممکن است برخی مسأله‌ها بیش از حد دشوار باشند و کار به درازا بکشد. معلم باید چاره‌ای برای این کار بیندیشد.

این مسابقه به دانش‌آموزان هنر خویشتن‌داری را می‌آموزد، زیرا باید راه‌حلشان را دقیق وارسی کنند. اگر چنین نکنند، ممکن است نبرد را با نمره منفی ترک کنند. این بخش را با آوردن نمونه‌ای از یکی از نبردهای ریاضی به پایان می‌بریم.

۹. «امپراتور» مهره‌ای است که می‌تواند در امتداد قطرها هر تعداد خانه‌ای که بخواهد جلو و عقب برود و قطعه‌ای را با گذاشتن از روی آن اسیر کند (البته نمی‌تواند از روی دو تا یا تعداد بیشتری خانه قطری مجاور بگذرد). بیشترین تعداد «امپراتورهایی» که می‌توان روی صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  قرار داد که هر یک از آنها در معرض تهدید مهره‌ای دیگر باشد چقدر است؟ (۵ امتیاز)

۱۰. از وسط ضلعهای مثلثی حاده بر ضلعهای آن عمودهایی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مساحت شش ضلعی‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید نصف مساحت مثلث است. (۶ امتیاز)

۱۱. دو عدد سه‌رقمی مانند  $x$  و  $y$  طوری پیدا کنید که مجموع بقیه عددهای سه‌رقمی برابر با  $600x$  باشد. (۶ امتیاز)

۱۲. با گونیا می‌توان خطی رسم کرد که از دو نقطه مفروض بگذرد و بر خطی مفروض در نقطه‌ای مفروض از آن عمودی رسم کرد. با گونیا از نقطه‌ای مفروض خطی عمود بر خطی مفروض رسم کنید. (۱۰ امتیاز)

۱۳.  $10 \leq k \leq n$  و به ازای هر  $k$  نفر دانش‌آموز کلاس اول و  $10$  دانش‌آموز کلاس دوم به اردو رفته‌اند. می‌دانیم به ازای هر  $k$  که با دست‌کم یکی از این دانش‌آموزان دوست است از  $k$  کمتر نیست. ثابت کنید می‌توان این دانش‌آموزان را به  $10$  گروه دو نفره طوری تقسیم کرد که هر گروه از یک دانش‌آموز کلاس اول و یک دانش‌آموز کلاس دومی تشکیل شده باشد که با هم دوست‌اند. (۲۰ امتیاز)

#### ۴. ماراتن ریاضی

این مسابقه المپیادی شفاهی است (که می‌توان آن را به شکل نوشتنی هم برگزار کرد). معلم باید برای برگزاری آن از چند نفر دیگر کمک بگیرد و فهرست نسبتاً بلندبالایی از مسأله‌های به قدر کافی ساده تهیه کند. پیش از اینکه جزئیات را توضیح دهیم باید کمی از نحوه برگزاری المپیادهای شفاهی بگوئیم، که در سنت پترزبورگ بسیار رایج‌اند اما در خارج از بلوک شرق ناشناخته‌اند.

همه راه‌حلها را باید شفاهی به یکی از اعضای هیأت داوران توضیح داد، و البته نباید قبلاً آنها را نوشت. نتیجه ارائه راه‌حل یادداشت می‌شود (+ برای راه‌حل قانع‌کننده و - برای غیر از آن). به هر شرکت‌کننده سه بار برای هر مسأله فرصت داده می‌شود. بنابراین فهرست امتیازات ممکن است شامل «دو منفی» باشد (=) یا «یک مثبت و دو منفی» (+). فهرست دوم را معمولاً معادل + می‌دانند.

المپیادهای شفاهی را معمولاً به دو مرحله تقسیم می‌کنند: مرحله «مقدماتی» و مرحله «نهایی» (همان چیزی که در المپیاد سنت پترزبورگ، که شفاهی است، اتفاق می‌افتد). در مرحله اول به همه شرکت‌کنندگان ۴ مسأله داده می‌شود که حل کنند و فقط کسانی که دست‌کم سه تا (یا در بعضی مواقع دوتا) از آنها را درست حل کنند به تالار دیگری منتقل می‌شوند که در آنجا به آنها شش یا هفت مسأله (که از قبل با چهارتای اول آنها آشنا هستند) داده می‌شود.

ماراتن ریاضی عالیترین نوع نظامهای حذفی است. معلم باید ۱۰ تا ۲۰ مسأله را که از قبل با دقت طرح و آماده کرده است داشته باشد. ۵ تا ۱۰ تای اول آنها باید بسیار ساده و کاملاً معمولی باشند. میزان دشواری مسأله‌ها باید کم‌کم با بزرگ شدن شماره مسأله‌ها بیشتر شود.

در ابتدای ماراتن همه دانش‌آموزان مسأله‌های ۱ و ۲ را می‌گیرند. پس از آن شروع به حل آنها یا توضیح دادن راه‌حلشان به معلم یا همکارانش می‌کنند. اگر مسأله‌ای درست حل شود، اعضای هیأت داوران یک علامت مثبت برای شرکت‌کننده می‌گذارند و به او مسأله بعدی در فهرست مسأله‌ها را می‌دهند. مثلاً، اگر کسی مسأله‌های ۳ و ۷ را بگیرد، پس از حل هر یک از آنها مسأله ۸ را می‌گیرد.

بنابراین، در هر لحظه از المپیاد، هر شرکت‌کننده دو مسأله حل نشده پیش رو دارد.

به تجربه معلوم شده که دانش‌آموزان در مدتی که ماراتن برگزار می‌شود از مدت زمان مشابه در جاهای دیگر بیشتر مسأله حل می‌کنند، شاید به این دلیل که تمرکز بیشتری دارند. همچنین، به تجربه معلوم شده است که دانش‌آموزان ماراتن را جالبتر و جذابتر از بقیه المپیادهای شناخته‌شده‌تر می‌دانند.

توصیه به معلمان. با استفاده از مسأله‌های این کتاب می‌توان چندین ماراتن بسیار ساده یا دشوار برگزار کرد. توصیه می‌کنیم چند تا از ساده‌ترین تمرینهای فصلهای موردعلاقه‌تان را انتخاب کنید و آنها را به ترتیبی دلخواه مرتب کنید تا مسأله‌های نیمه اول ماراتن باشند. نیمه دوم را هم می‌توان به همین روش با استفاده از مسأله‌هایی که کمی دشوارترند تهیه کرد. میزان دشواری باید به تدریج که دانش‌آموزان از روی فهرست به جلو می‌روند افزایش پیدا کند.

توجه. خطرناکترین اشتباهی که ممکن است در آماده کردن مسأله‌های ماراتن پیش بیاید این است که میزان دشواری مسأله‌های اول فهرست اشتباه برآورد شود. اگر یکی از پنج-شش مسأله اول را اغلب دانش‌آموزان حل نکرده باشند، ماراتن ناکام بوده است.

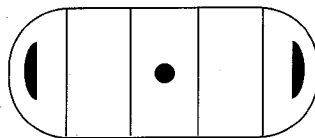
## ۵. هاکی ریاضی

این مسابقهٔ ریاضی جالب و ویژهٔ دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۲ ساله یا بیشتر است. بازی میان دو تیم است که هر یک از ۵ بازیکن تشکیل شده است: یک «دروازه‌بان»، دو «مدافع» و دو «مهاجم».

معلم باید فهرست نسبتاً بلندبالایی از مسأله‌های فوق‌العاده ساده، ترجیحاً محاسباتی، داشته باشد که هر یک از آنها را بتوان در پنج دقیقه حل کرد.

در ابتدای بازی دیسک (که البته فرضی است؛ هر چند که می‌توانید زمین هاکی و دیسک را روی تخته‌سیاه بکشید) در وسط زمین است. دیسک زده می‌شود - یعنی به هر یک از بازیکنان داخل زمین هر دو تیم مسألهٔ اول فهرست داده می‌شود. اگر تیم A زودتر راه حل را پیدا کرد، دیسک به زمین تیم شکست‌خوردهٔ B می‌رود، که در آنجا مهاجمان تیم A در مقابل مدافعان تیم B بازی می‌کند. مبارزهٔ آنها بر سر مسألهٔ بعدی در فهرست مسأله‌هاست. برحسب اینکه نتیجهٔ این مبارزه چه باشد، دیسک به وسط زمین برگردانده می‌شود یا به محوطهٔ دروازهٔ تیم B می‌رود. در حالت اخیر، دروازه‌بان تیم B به‌تنهایی با مهاجمان تیم A بر سر مسألهٔ بعدی در فهرست مبارزه می‌کند. اگر مهاجمان ببرند یک امتیاز می‌گیرند و مسألهٔ بعدی در وسط زمین «کاشته» می‌شود.

می‌توانید فرض کنید که زمین بازی از پنج منطقه مانند آنچه در شکل ۱۲۶ نشان داده شده تشکیل شده است. در هر لحظه از بازی، دیسک در یکی از این منطقه‌هاست. برحسب اینکه نتیجهٔ هر مبارزه چه باشد، دیسک به منطقهٔ مجاور در سمت چپ یا سمت راست می‌رود.



شکل ۱۲۶

توصیه‌ها. ۱. برای اینکه جنب و جوش بازی را بیشتر کنید بخش مرکزی زمین را حذف کنید. در این حالت ضربهٔ اول را می‌توان با پرتاب سکه تعیین کرد.

۲. اگر تعداد دانش‌آموزان در محفلتان زیاد است، می‌توانید سه یا تعداد بیشتری تیم تشکیل دهید. این تیمها می‌توانند به گونه‌ای بازی کنند که هر تیم با بقیهٔ تیمها دقیقاً یک بار بازی کند یا مسابقات حذفی برگزار کنند. هر تیمی که در بازی حضور ندارد نقش تماشاگر را دارد.

۳. باید تیمها را بسیار با احتیاط انتخاب کنید. سعی کنید کاری کنید که قدرت متوسط تیمها نزدیک به هم باشد (این موضوع را باید در دیگر مسابقه‌های ریاضی هم رعایت کرد).

## ۶. مزایدهٔ ریاضی

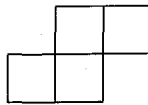
این مسابقه بسیار شبیه قماربازی است، هرچند که اصلاً چنین نیست. به تجربه بر ما معلوم شده که



دانش‌آموزان با اشتیاق فراوان در چنین مسابقه‌هایی شرکت می‌کنند. چیزی که مهم است این است که مزایده ریاضی را هم به صورت انفرادی می‌توان برگزار کرد هم به صورت تیمی.

قوانین این مسابقه به صورت زیر است. معلم به دانش‌آموزان مسأله‌ای از نوعی خاص می‌دهد (که آن را «مسأله تحقیقاتی» می‌نامیم)، که ممکن است خود معلم هم راه حل کامل آن را نداند (هر چند که توصیه می‌کنیم چنین نباشد). به بیان دقیقتر، مسأله تحقیقاتی باید به گونه‌ای باشد که با پاسخهای حین کار کم کم به نتیجه نهایی رهنمون شد. برای اینکه مسابقه جالبتر شود دست‌کم باید ۵ یا ۶ تا از این مسأله‌ها داشت.

۱۴. حداکثر چند فیل می‌توان روی صفحه شطرنجی  $8 \times 8$  گذاشت، به طوری که هیچ دو تایی از آنها یکدیگر را تهدید نکنند (یا همین مسأله در مورد اسب، رخ؛ صفحه  $10 \times 10$  و چیزهایی از این قبیل)؟  
 ۱۵. حداکثر چند تا از شکلهای نشان داده شده در شکل ۱۲۷ را می‌توان بدون همپوشانی درون جدولی  $10 \times 10$  قرار داد؟



شکل ۱۲۷

۱۶. هر چقدر که می‌توانید برای معمای حرفی-عددی

$$\text{BACK} + \text{BOA} = \text{SCAM}$$

جواب پیدا کنید.

۱۷. با استفاده از رقمهای ۱، ۹، ۸ و ۴، به همین ترتیب، و چهار عمل اصلی تا جایی که می‌توانید عددهای طبیعی متوالی که با ۱ شروع می‌شوند بنویسید. مثلاً

$$5 = \frac{1+9}{\frac{8}{4}}$$

۱۸. عدد ۱۹۹۱ را فقط با استفاده از رقمهای ۴ بنویسید. سعی کنید تا جایی که می‌توانید از تعداد کمتری رقم استفاده کنید. هر چقدر که بخواهید می‌توانید از عملهای حساب استفاده کنید.

۱۹. ۷ خط (یا ۸، ۹ یا ۱۰ خط) در صفحه طوری رسم کنید که در میان ناحیه‌هایی که صفحه را به آنها تقسیم می‌کنند، تعداد مثلثها بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۰. بیشترین تعداد «مهاراجه‌ها» را روی صفحه‌ای  $10 \times 10$  بچینید، به طوری که هر خانه صفحه را دست‌کم یکی از مهاراجه‌ها تهدید کند (مهاراجه «ابر مهره‌ای» است که هم شبیه وزیر می‌تواند حرکت کند هم شبیه اسب).

یادداشت مهم. می‌توان صورت مسأله‌های بالا را، مثلاً با تغییر دادن عددها، شکلهای و چیزهایی از این قبیل، عوض کرد و مسأله‌های دیگری به دست آورد.

\* \* \*

پس از اینکه مسأله‌ای به دانش‌آموزان داده شد، مدت زمانی برای حل آن وقت دارند (اگر در یک زمان چند مسأله داده شود مزایده بهتر برگزار می‌شود). سپس به همه تیمها مقداری یکسان از واحد پولی خیالی، مثلاً دینار، داده می‌شود. مثلاً ممکن است سرمایه اولیه تیمها ۱۰۰۰ دینار باشد. سرانجام، مزایده شروع می‌شود. مسئول حراج (که معمولاً معلم است) مسأله‌ها را به حراج می‌گذارد. مسئول حراج شروع آن را اعلام می‌کند و قیمت پایه مسأله اول را می‌گوید. فرض کنید مسأله ۱۷ (در بالا) به حراج گذاشته می‌شود و قیمتش ۱۸۰ دینار است. در این صورت تیمی که این مسأله را حل می‌کند برای راه‌حل آن ۱۸۰ دینار می‌گیرد. اما، همان‌طور که خواهیم دید، ممکن است رد و بدل کردن پول مستقیم نباشد.

\* \* \*

مثال. تیم A، ۱۳۲ دینار برای حق ارائه نتایجش در مورد مسأله می‌پردازد. آنها توضیح می‌دهند که چگونه می‌توان همه عددهای طبیعی از ۱ تا ۶۲ را به طریق موردنظر نوشت. البته، در حین کار معلوم می‌شود که طریقه نمایش عدد ۵۱ غلط است. بنابراین، فقط برای نمایش عددهای از ۱ تا ۵۰ اعتبار می‌گیرند.

\* \* \*

بعد باز بار دیگر مسأله به حراج گذاشته می‌شود، منتها این بار تیمی که آن را می‌خرد فقط مجاز است که نتایج قوی‌تر از نتایج تیم قبلی ارائه کند.

\* \* \*

(ادامه) مثال. فرض کنید تیم B، ۲۵ دینار برای حق ارائه نتایجی بهتر از نتایج تیم A می‌پردازد. آنها توضیح می‌دهند که چگونه می‌توان عددهای از ۵۱ تا ۶۸ را به طریق موردنظر نوشت (البته احتیاجی نیست که طریق نمایش عددهای از ۱ تا ۵۰ را هم بار دیگر بگویند).

\* \* \*

مسأله را بارها و بارها به حراج می‌گذارند تا هیچ تیمی دیگر حاضر به خرید آن نشود. وقتی که این حالت پیش بیاید، تیمی که بهترین نتیجه را داشته، ارزش مسأله را کسب می‌کند. در حالتی که برنده بتواند راه‌حل کامل را بگوید (یعنی ثابت کند که نتیجه آنها را نمی‌توان بهتر کرد)، واجد دریافت جایزه پولی ویژه‌ای (مثلاً ۵۰ دینار اضافه‌تر) می‌شوند.

\* \* \*

(ادامه) مثال. مثلاً تیم C، ۶ دینار برای حق اراثة راه‌حلی بهتر از راه‌حل تیم B می‌پردازد. اما معلوم می‌شود که طریقه نمایش آنها برای عدد ۶۹ غلط است. ۶ دینار آنها بر باد می‌رود و حراج مسأله ۱۷ خاتمه می‌یابد.

نتیجه حراج به قرار زیر است:

تیم A، ۱۳۲ دینار از دست می‌دهد.

تیم B، ۱۵۵ دینار می‌گیرد ( $155 = 180 - 25$ ).

تیم C، ۶ دینار از دست می‌دهد.

\* \* \*

اکنون مسأله بعدی به حراج گذاشته می‌شود، و کار همین‌طور تا آخر ادامه پیدا می‌کند.

در زیر پنج مسأله تحقیقاتی دیگر را آورده‌ایم که می‌توانید از آنها در حراجها استفاده کنید.

۲۱. نشانه‌هایی را روی تکه‌ای چوب طوری قرار دهید که تعدادشان کمترین مقدار ممکن باشد و بتوان هر طولی را که برحسب این پنج عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ (یا از ۱ تا ۲۰، ۳۰ یا عددهای دیگر) است با استفاده از این نشانه‌ها اندازه گرفت؛ یعنی، این طول را بتوان با فاصله میان دو تا از این نشانه‌ها نشان داد.

۲۲. دست‌کم چند برش لازم است که بتوان مکعبی  $5 \times 5 \times 5$  را به ۱۲۵ مکعب واحد تقسیم کرد، به شرطی که بدانیم می‌توان بیش از برشها، قطعه‌ها را به دلخواه روی هم چید.

۲۳. ۱۰ آجر داریم که طول هر کدام ۱۰ اینچ است. باید آنها را روی هم طوری بچینیم که نریزند، اما لازم نیست که دقیقاً روی هم قرار بگیرند. فاصله افقی طرفهای راست آجرهای بالایی و پایینی حداکثر چقدر ممکن است باشد؟

۲۴. مربعی را به مثلثهایی حاده تقسیم کنید، به طوری که تعداد مثلثها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲۵. تا جایی که می‌توانید جوابهایی برای معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  در مجموعه عددهای طبیعی کمتر از ۵۰ (یا کمتر از ۴۰ یا کمتر از ۱۰۰) پیدا کنید.

## پاسخ، راهنمایی، راه حل

### ۰. فصل صفر

۱. پاسخ: بعد از ۵۹ ثانیه. اگر از آخر به اول بیاییم، معلوم می‌شود که چون ظرف شیشه‌ای بعد از گذشت ۶۰ ثانیه پر شده است، پس باید یک ثانیه قبل از آن تا نیمه پر شده باشد.
۲. باز هم از آخر به اول می‌رویم. یکی از آنها، مثلاً الکس، می‌تواند یک سکه معادل ۱۵ بلیت برای هر سه تایشان بپردازد. در این صورت هر یک از دو نفر دیگر ۵ بلیت به الکس بدهکار می‌شود. اما آنها به آسانی می‌توانند این بدهی را بپردازند؛ مثلاً، می‌توانند به الکس سکه‌ای معادل ۲۰ بلیت بدهند و در ازایش سکه‌ای معادل ۱۵ بلیت از او بگیرند.
۳. ایده اصلی حل مسأله این است که زوجیت شماره آخرین صفحه‌کننده شده، عکس زوجیت شماره اولین صفحه‌کننده شده است. فهمیدن این مطلب چندان دشوار نیست؛ فقط کافی است ببینیم که وقتی جک ۱ برگ، بعد ۲ برگ و بعد از آن چند برگ را می‌کند چطور می‌شود. از میان عددهای سه‌رقمی که با رقمهای ۱، ۳ و ۸ نوشته می‌شوند، فقط عدد ۳۱۸ از ۱۸۳ بزرگتر و زوجیتش عکس آن است. اکنون توجه کنید که  $۱۳۶ = ۱۸۳ - ۳۱۸ + ۱$ ، که این عدد پاسخ مسأله است.
۴. تحت شرطهای مسأله فقط می‌توانیم هر مقدار میخ را که به ما بدهند به دو کپه هموزن تقسیم کنیم. بنابراین مثلاً می‌توانیم کپه اولیه را پشت سر هم نصف کنیم و کپه‌هایی ۱۲، ۶ و ۳ کیلوگرمی به دست آوریم. در این صورت از سه کپه ۳ کیلوگرمی ۹ کیلوگرم میخ به دست می‌آید.
۵. پاسخ: این هزارپا اولین بار در پایان روز ۱۷۱ام (یعنی پیش از اینکه شب ۱۷۱ام آغاز شود) به بالای تیرک می‌رسد. اکثراً این‌طور استدلال می‌کنند که ماحصل حرکت این هزارپا در هر شبانه‌روز ۱ سانتیمتر است و در نتیجه ۷۵ شبانه‌روز طول می‌کشد تا به بالای تیرک برسد. در هر صورت، در پایان ۱۷۰امین شبانه‌روز هزارپا ۷۰ سانتیمتر بالا رفته است و با تلاش روز بعدش ۵ سانتیمتری هم که «مانده بود» طی می‌شود.

۶. اولین، هشتمین، پانزدهمین، بیست و دومین و بیست و نهمین روز هر ماه یک روز از هفته‌اند. چون ژانویه ۳۱ روزه است، اگر این ماه با روز معینی آغاز شود پنج تا از آن روز و پنج تا هم از دو روز بعدی هفته در آن وجود خواهد داشت. به این دلیل ژانویه سال مورد نظر ممکن نیست با شنبه، یکشنبه یا دوشنبه شروع شده باشد (زیرا در غیر این صورت در آن ماه ژانویه پنج تا دوشنبه وجود می‌داشت) و به همین ترتیب آن ماه با چهارشنبه، پنج‌شنبه یا جمعه هم شروع نشده است (وگرنه در آن ماه پنج تا جمعه وجود می‌داشت). بنابراین اول ژانویه آن سال سه‌شنبه بوده است؛ اکنون فهمیدن اینکه بیستم ژانویه یکشنبه بوده است چندان دشوار نیست.

۷. بی‌آنکه از کلی بودن راه حل‌مان چیزی کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که قطر داده شده قطری است که گوشه بالا سمت چپ را به گوشه پایین سمت راست وصل می‌کند. اکنون همه خانه‌هایی را که این قطر از آنها می‌گذرد سیاه می‌کنیم. در هر سطر جدول خانه سیاهی را که از همه خانه‌های سیاه دیگر به ضلع (قائم) سمت چپی نزدیکتر است با حرف R علامتگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب در هر ستون خانه سیاهی را که از همه خانه‌های سیاه دیگر به ضلع (افقی) بالایی جدول نزدیکتر است با حرف C علامتگذاری می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که هر یک از خانه‌های سیاه دست‌کم یک بار علامتگذاری می‌شود و فقط خانه واقع در گوشه بالا سمت چپ بیش از یک بار علامتگذاری می‌شود. بنابراین تعداد خانه‌های سیاه برابر با مجموع تعداد خانه‌های با علامت R و تعداد خانه‌های با علامت C منهای یک است:  $1189 = 991 + 199 - 1$ . بنابراین پاسخ مسأله برابر با ۱۱۸۹ است.

اکنون سعی می‌کنیم که ادعاهای قبلیمان را ثابت کنیم. اولاً، چرا هر یک از خانه‌های سیاه دست‌کم یک بار علامتگذاری می‌شوند؟ اگر یکی از این خانه‌ها، مثلاً A، با هیچ‌یک از حروف علامتگذاری نشود، آن وقت خانه‌های همسایه سمت چپی و بالایی هم باید سیاه باشند؛ یعنی قطر باید از آنها هم بگذرد که این ممکن نیست. ثانیاً، اگر خانه سیاهی با هر دو حرف R و C علامتگذاری شود، آن وقت باید هیچ خانه سیاهی سمت چپش در همان سطر و بالایش در همان ستون وجود نداشته باشد. یعنی این قطر باید از گوشه بالا سمت چپ این خانه بگذرد که این هم ممکن نیست، گرچه استدلالش پیچیده‌تر است (علتش این است که عددهای ۱۹۹ و ۹۹۱ نسبت به هم اول‌اند، اما تصور نمی‌کنیم هنگام تشریح مسأله‌های این فصل وارد شدن به جزئیاتی فنی از این دست چندان مناسب باشد).

۸. می‌خواهیم تا آنجا که ممکن است رقم‌های ۵ بیشتری در سمت چپ عدد مورد نظر بیایند. این کار را می‌توان این طور انجام داد که ابتدا نخستین دنباله ۱۲۳۴ را خط می‌زنیم و ۵ را می‌گذاریم بماند، بعد دنباله ۱۲۳۴ دیگر را خط می‌زنیم. روشن است که اگر هر رقم دیگری بجز ۵ را در سمت چپ عددمان می‌گذاشتیم بماند عدد حاصل کوچکتر می‌شد. با وجود این، رقم ۵ دیگری را نمی‌توانیم پهلوی دو تا ۵ قبلی بیاوریم چون اکنون فقط می‌توانیم دو رقم دیگر را خط بزنیم.

بنابراین دو رقم کوچک بعدی یعنی ۱ و ۲ را خط می‌زنیم. اکنون فهمیدن اینکه عدد حاصل، یعنی ۵۵۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵، بزرگترین عدد ممکن است چندان دشوار نیست.

۹. می‌خواهیم هر قدر مدت زمان بیشتری که ممکن است، میان گفتن این جمله و روز تولد پیترو وجود داشته باشد. به این مدت زمان حداکثر، می‌توان این‌طور دست یافت که او این حرف را در اولین روز ژانویه گفته و روز تولدش ۳۱ دسامبر باشد. بنابراین پیترو در پایان سال بعد (میلادی) ۱۳ ساله می‌شود.

۱۰. خیر، حق با او نیست. در حقیقت، اینکه پیشامد A (بارندگی) همیشه باعث پیشامد B (عطسه گریه) می‌شود به این معنی نیست که پیشامد B هم باعث پیشامد A شود. این مثالی از یک جور اشتباه منطقی بسیار رایج، یعنی قاتی کردن یک حکم با عکسش، است.

۱۱. پاسخ: ۱۲ دایره کشیده شده است: پنج تا از آنها روی یک طرف آن برگ کاغذند و هفت‌تای دیگر روی طرف دیگرش. تنها توجیه ممکن برای آنچه در کلاس اتفاق افتاده است همین است.

۱۲. پاسخ: بله ممکن است؛ در صورتی که آن استاد زن باشد.

۱۳. لاک‌پشت سوم دروغ گفته است.

۱۴. او این‌طور استدلال کرده است: «اگر صورتم تمیز بود، آن وقت یکی از همکارانم که می‌بیند شخص سوم به چیزی می‌خندد، می‌فهمد که صورت خودش هم با دوده سیاه شده است. چون او هنوز می‌خندد، پس صورت من هم باید سیاه باشد.»

۱۵. قطعاً درصد شیر در چای برابر با درصد چای در شیر است، چون مقدار کل شیر (یا چای) در هر دو لیوان تغییر نمی‌کند.

۱۶. شکل ۱۲۸ را ببینید. این پاسخ با لحاظ کردن آن جدولهایی که از دورانها و بازتابهایش به دست می‌آید یکتاست.

۴	۳	۸
۹	۵	۱
۲	۷	۶

شکل ۱۲۸

۱۷. بیشترین مقدار ممکن کلمه THERE برابر با ۹۵۳۴۳ است.

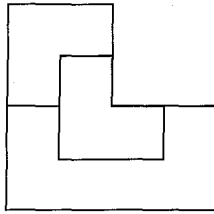
۱۸. این معما فقط یک جواب دارد:  $۵۲۸۶۸ = ۱۵۸۲ + ۵۱۲۸۶$ .

راهنمایی:  $L + L < 10$ ;  $S + S \geq 10$ ; در غیر این صورت، رقمهای صدگان و یکان در عدد BASES با هم برابر نمی‌شوند ( $B \neq E$ ).

۱۹. اسکناسهای یک دلاری را می‌توان این‌طور توی کیف پولها تقسیم کرد:

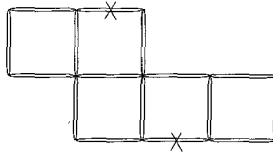
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

۲۰. شکل ۱۲۹ را ببینید.



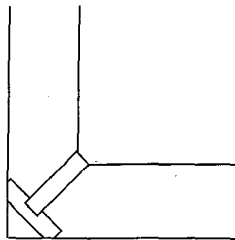
شکل ۱۲۹

۲۱. شکل ۱۳۰ را ببینید.



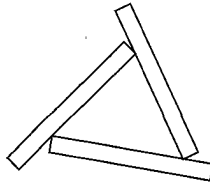
شکل ۱۳۰

۲۲. شکل ۱۳۱ را ببینید.



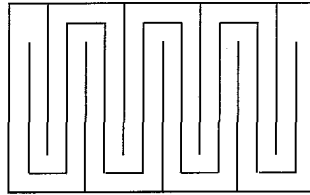
شکل ۱۳۱

۲۳. سه تا از مدادها را بردارید و آنها را آن‌طور که در شکل ۱۳۲ نشان داده شده است بچینید. سه مداد دیگر را هم همین‌طور بچینید منتها «چرخش» آنها در جهت مخالف باشد و بعد آنها را روی سه‌تای اول بگذارید.



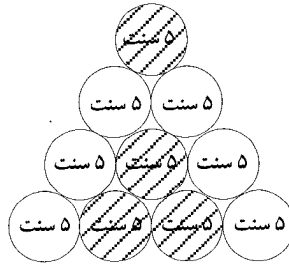
شکل ۱۳۲

۲۴. شکل ۱۳۳ را ببینید.



شکل ۱۳۳

۲۵. چهار سکه‌ای را که در شکل ۱۳۴ نشان داده شده‌اند بردارید.



شکل ۱۳۴

### ۱. زوجیت

۲. اسب همیشه از خانه‌ای به یک رنگ به خانه‌ای به رنگ دیگر می‌رود. بنابراین رنگ خانه‌هایی که اسب در آنها می‌نشیند یکی در میان از سفید به سیاه و برعکس تغییر می‌کند. برای بازگشتن به خانه‌ای هم‌رنگ خانه‌ای که از آنجا به راه افتاده بود (به‌ویژه، همان خانه) باید تعداد حرکاتش عددی زوج باشد.

۴. پاسخ: خیر، ممکن نیست. فرض کنید چنین خطی وجود داشته باشد. اگر مسیر مورد نظر را دنبال



کنیم، هر بار که از این خط می‌گذریم از نیمصفحه یک طرف خط به نیمصفحه طرف دیگرش می‌رویم (هر خط صفحه را به دو نیمصفحه تقسیم می‌کند). چون این مسیر بسته است، آخر سر به همان طرف خط می‌رسیم که از آنجا به راه افتاده بودیم. اما در این فرایند طرفهای خط یکی در میان عوض می‌شوند و از این رو، تعداد رأسهای این چندضلعی باید عددی زوج باشد.

۵. پاسخ: خیر، نمی‌تواند. موقعیت سه دیسک موردنظر را در صورتی «درست» می‌نامیم که در ترسیم مثلث  $ABC$  از  $A$  به  $B$  به  $C$  (و بازگشت به  $A$ ) حرکت ساعتگرد باشد و در غیر این صورت آن را «نادرست» می‌نامیم. به سادگی معلوم می‌شود که بعد از هر حرکت «درست» موقعیت دیسکها عوض می‌شود. از این رو، موقعیت اولیه ممکن نیست دوباره به دست بیاید.

۶. پاسخ: پنج تا. اگر هر یک از دوستان کاتیا پهلوی بچه‌ای همجنس خود ایستاده باشد، آن وقت روشن است که همه این بچه‌ها همجنس‌اند. یعنی اینکه این پسرها و دخترها باید یکی در میان ایستاده باشند و در نتیجه تعداد دخترها با تعداد پسرها برابر است.

۸. پاسخ: خیر. روی صفحه موردنظر ۲۵ خانه وجود دارد. چون هر دومینو دو خانه را می‌پوشاند، با این دومینوها می‌توان فقط تعدادی زوج از خانه‌ها را پوشاند.

۹. اگر این محور تقارن از هیچ رأسی نگذرد، آن وقت ۱۰۱ رأس را می‌توان به جفت رأسهای قرینه هم افزاز کرد. اما چنین چیزی ممکن نیست، چون ۱۰۱ عددی فرد است. با وجود این، ده ضلعی منتظم مثالی از ده ضلعی‌ای است که یک محور تقارن دارد و این محور تقارن از هیچ یک از رأسهایش نمی‌گذرد.

۱۰. درون زنجیره دومینوها هر تعداد خال به شکل یک جفت می‌آید (که پشت سرهم گذاشته می‌شوند). چون در یک دست دومینوها ۵ تا ۵ هست، روی آخرین خانه هم باید پنج تا خال وجود داشته باشد.

۱۱. پاسخ: خیر. درستی این پاسخ را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر چنین زنجیره‌ای وجود داشته باشد، آن وقت یکی از عددهای ۱، ۲ یا ۳ در هیچ یک از دو سر زنجیره موردنظر نمی‌آیند. فرض کنید عدد ۳ چنین عددی باشد. اکنون درون زنجیره ۳ها دوتا دوتا می‌آیند و از این رو عدد ۳ به تعداد دفعات زوج می‌آید. با وجود این، چون «صفرها» را کنار گذاشته‌ایم، در این دست دومینو روی هم هفت تا ۳ هست. بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۱۲. پاسخ منفی است. فرض کنید بتوانیم ۱۳ ضلعی محدب‌ی را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کنیم. یک ضلع از این ۱۳ ضلعی را انتخاب می‌کنیم و متوازی‌الاضلاعی را که شامل آن است در نظر می‌گیریم (روشن است که دو متوازی‌الاضلاع از این دست وجود ندارند). ضلع روبه‌روی این متوازی‌الاضلاع هم ضلع متوازی‌الاضلاع دیگری است. این متوازی‌الاضلاع دوم خودش ضلع دیگری موازی با اولی دارد و می‌توانیم همین‌طور این «زنجیره» متوازی‌الاضلاعی را ادامه دهیم تا وقتی که به ضلعی از ۱۳ ضلعی برسیم. از این رو، این ضلع موازی با ضلعی است که استدلال را از آنجا آغاز کرده بودیم و چون ممکن نیست چندضلعی‌ای محدب سه ضلع دوه‌دو موازی داشته باشد، این ضلع با هیچ ضلع دیگر ۱۳ ضلعی محدب موردنظر موازی نیست.

با این استدلال ثابت می‌شود که اگر بتوانیم ۱۳ ضلعی مفروض را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کنیم، آن وقت می‌توان همه ضلعها را به جفت ضلعهای موازی تقسیم کرد. چون ۱۳ عددی فرد است، این کار ممکن نیست.

۱۴. فرض کنید هیچ مهره‌ای در خانه مرکزی صفحه قرار نگرفته باشد. همه جفتهایی از مهره‌ها را که نسبت به یکی از قطرها قرینه هم‌اند با یک نخ به هم وصل می‌کنیم. در این صورت همه مهره‌ها به چند «گردنبند» تقسیم می‌شوند؛ گردنبند گروهی از مهره‌هاست که با نخ به هم وصل شده‌اند. اما آن وقت در هر «گردنبند» یا دوتا مهره وجود دارد یا چهارتا؛ یعنی، تعداد کل مهره‌ها عددی زوج است که این تناقض است.

۱۵. فهمیدن اینکه پانزده ۱ در جدول موردنظر وجود دارد چندان دشوار نیست؛ مثلاً یک راهش این است که توجه کنید که در هر ستون یک ۱ وجود دارد. اکنون اگر از حکم مسأله ۱۳ در مورد خانه‌هایی که شامل ۱ اند استفاده کنیم معلوم می‌شود که دست‌کم یک ۱ باید روی قطر اصلی باشد. اگر همین‌طور استدلال کنیم نتیجه می‌شود که قطر اصلی باید شامل یک ۲، یک ۳ و ... باشد. نمونه‌ای از چنین جدولی در زیر نشان داده شده است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴

۱۷. پاسخ: خیر. مجموع دو عدد روی هر برگ عددی فرد است و مجموع ۲۵ عدد فرد هم عددی فرد می‌شود، اما ۱۹۹۰ عددی زوج است.

۱۸. روشن است که هر یک از این عددهای صحیح یا  $+1$  است و یا  $-1$  و تعداد  $(-1)$ ها عددی زوج است (چون حاصل ضربشان مثبت شده است). اگر مجموعشان صفر باشد، آن وقت باید ۱۱ عدد  $-1$  داشته باشیم که تناقض است.

۱۹. پاسخ: خیر. در میان عددهای مورد نظر فقط یکی زوج است (عدد ۲) و بقیه شان فردند. بنابراین مجموع عددهای سطر شامل ۲ فرد است، در حالی که مجموع عددهای هر سطر دیگر عددی زوج است.

۲۰. پاسخ: خیر. مجموع عددهای از ۱ تا  $10^6$  برابر با ۵۵ است و با تغییر علامت هر یک از آنها مقدار این مجموع به اندازه عددی زوج تغییر می کند. در نتیجه مقدار این مجموع باز هم عددی فرد می ماند.

۲۱. راه حل این مسأله عین راه حل مسأله ۲۰ است، چون مجموع  $1985 + 3 + 2 + 1$  عددی فرد است.

۲۲. پاسخ: خیر. به سادگی می توان فهمید که عمل مورد نظر زوجیت مجموع عددهای روی تخته سیاه را تغییر نمی دهد. چون زوجیت این مجموع در ابتدا فرد است، هیچ وقت ممکن نیست مقدارش برابر با ۰ شود.

۲۳. پاسخ: خیر. هر دومینویک خانه سیاه و یک خانه سفید را می پوشاند، اما اگر خانه های  $a_1$  و  $h_8$  را حذف کنیم، آن وقت تعداد خانه های سفید دوتا بیشتر از خانه های سیاه می شود.

۲۴. فرض کنید عدد صحیحی ۱۷ رقمی وجود داشته باشد که «مجموع آن با مقلوبش» شامل هیچ رقم زوجی نیست. برای راحتی کار، ستونهای رقمها را از راست به چپ شماره گذاری می کنیم و الگوریتم جمع معمولی را در نظر می گیریم. رقم نهم عددمان با خودش جمع می شود. به این ترتیب در حاصل جمع یک رقم زوج ایجاد می شود مگر آنکه «ده بر یکی» از ستون هشتم وجود داشته باشد. اما اگر چنین ده بر یکی وجود داشته باشد، آن وقت یک ده بر یک هم از ستون دهم به ستون یازدهم وجود دارد (از ترتیب رقمها که بگذریم، ستون دهم عین ستون هشتم است). بنابراین زوجیت رقمهای ستون هفتم یکی است و در نتیجه ده بر یکی از ستون ششم لازم است.

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم در می یابیم که باید روی هر ستون شماره فرد ده بر یکی وجود داشته باشد. اما ممکن نیست که روی ستون اول ده بر یک داشته باشیم و در نتیجه به تناقض می رسیم.

۲۵. پاسخ: خیر. چون هر سرباز هر دوره مأموریتش را با دو نفر دیگر بوده است، اگر او با هر سرباز دیگر دقیقاً یک بار مأموریت بوده باشد، آن وقت ۹۹ سرباز باقی مانده را می توان به جفت هایی که دوره های مأموریتش را با آنها بوده است افراز کرد. پس به تناقض می رسیم، چون ۹۹ عددی فرد است.

۲۶. به ازای هر نقطه مانند  $X$  که بیرون پاره خط  $AB$  قرار دارد،  $AX - BX = \pm AB$ . اکنون اگر فرض کنیم که مجموع فاصله های نقاط مورد نظر از نقطه  $A$  با مجموع فاصله هایشان از نقطه  $B$  برابر باشد، آن وقت مقدار عبارت  $AB \pm AB \pm \dots \pm AB$ ، که در آن ۴۵ جمعوند وجود دارد، صفر است که چنین چیزی نیست.

۲۷. می‌توانیم از آخر مسأله شروع کنیم و این وضعیت را تحلیل کنیم. اگر نه‌تا ۱ دور دایره وجود داشته باشد، آن وقت قبل از اینکه آخرین عمل اجرا شود باید یا نه‌تا ۱ دور دایره باشد یا نه‌تا ۰. چون در ابتدا نه‌تا ۱ وجود ندارد، این نه‌تا ۱ آخری را از این راه نمی‌توان به‌دست آورد. اگر نه‌تا ۰ دور دایره باشد، آن وقت اصلاً وضعیت مطلوب در مرحله قبلی به‌دست می‌آید. اما آیا چنین حالتی ممکن است پیش بیاید؟ اگر نه‌تا ۰ دور دایره باشد، آن وقت در مرحله قبل از آن عددهای ۰ و ۱ باید یکی در میان قرار گرفته باشند. اما چنین چیزی ممکن نیست، چون تعداد کل عددها عددی فرد است.

۲۸. از یکی از افراد شروع و آنها را شماره‌گذاری می‌کنیم. از روش اثبات غیرمستقیم استفاده و فرض می‌کنیم دو بغل دستی هیچ کسی دانش‌آموز نباشند. فرض کنید در مکان  $k$ ام دانش‌آموز باشد. در این صورت یا در مکان  $(k-1)$ ام معلمی هست یا در مکان  $(k+1)$ ام. اگر در مکان  $(k+1)$ ام معلمی نشسته باشد، آن وقت در مکان  $(k+2)$ ام دانش‌آموز نیست (وگرنه هر دو بغل دستی این معلم دانش‌آموزند). اگر در مکان  $(k+1)$ ام دانش‌آموز باشد، آن وقت در مکان  $(k+2)$ ام باید معلمی نشسته باشد (وگرنه هر دو بغل دستی این دانش‌آموز دانش‌آموزند). با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که در مکان  $(k-2)$ ام هم باید معلمی نشسته باشد.

اگر به همین ترتیب استدلال کنیم و شماره‌ها را «به‌پیمانه ۵» در نظر بگیریم، می‌توانیم ثابت کنیم که اگر در مکان  $k$ ام معلم باشد، آن وقت در هر دو مکان  $(k-2)$ ام و  $(k+2)$ ام دانش‌آموز نشسته است. اکنون، اگر فقط آن ۲۵ نفری را که در مکانهای زوج واقع‌اند در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که دانش‌آموزان و معلمان در این مکانها یکی در میان دور میز نشسته‌اند. اما ۲۵ عددی فرد است و از این رو چنین چیزی غیرممکن است.

دانش‌آموزان را باید ترغیب کرد تا آن بخش از راه‌حل مسأله را که گفتیم «اگر به‌همین ترتیب به استدلال کردن ادامه دهیم» خودشان به انجام رسانند و این‌طور نباشد که بدون در‌دسر فقط به تقارن وضعیت موجود میان دانش‌آموزان و معلمان تکیه کنند.

۲۹. فرض کنید این حلزون بعد از پیمودن  $N$  پاره‌خط قائم به «خانه‌اش» بازگشته باشد. در این صورت به آسانی می‌توان دریافت که این حلزون  $N$  پاره‌خط افقی را هم پیموده است. بنابراین، این جانور روی هم  $2N$  پاره‌خط را پیموده و  $30N$  دقیقه ( $30N = 15(2N)$ ) وقت صرف کرده است. چون حلزون به خانه‌اش بازگشته است،  $N$  عددی زوج است (مثلاً یک دلیل این است که تعداد پاره‌خطهای روبه‌بالای پیموده شده باید با تعداد پاره‌خطهای رو به پایین پیموده شده برابر باشد و مجموع این عددها  $N$  است). از این رو  $2N$  مضربی از ۴ و (۱۵ دقیقه) ( $2N$ ) چند ساعت کامل است.

۳۰. پاسخ: خیر. این ملخها را A، B و C می‌نامیم. وضعیتهای ABC، BCA، CAB (از چپ به راست) را درست به حساب می‌آوریم و وضعیتهای ACB، BAC و CBA را نادرست. به آسانی

می توان فهمید که بعد از هر پرش، وضعیت درست به وضعیت نادرست تبدیل می شود و برعکس، وضعیت نادرست به وضعیت درست.

۳۱. پیتز باید سکه انتخاب شده را کنار بگذارد، سکه های باقی مانده را به دو کفه  $50^\circ$  سکه های تقسیم کند و با وسیله اندازه گیری که دارد اختلاف وزن این کپه ها را پیدا کند. ثابت می کنیم که اگر سکه انتخاب شده اصل باشد، این اختلاف وزن عددی زوج است و اگر سکه مورد نظر تقلبی باشد، اختلاف وزن کپه ها عددی فرد است.

ابتدا فرض کنید که سکه انتخاب شده اصل باشد. اگر وزن کل سکه های اصل باقی مانده را می دانستیم، می توانستیم با افزودن پنجاه عدد  $+1$  یا  $-1$  به آن، وزن کل سکه های تقلبی را حساب کنیم. یعنی اینکه اگر  $50^\circ$  سکه اصل باقی مانده را در یک کفه ترازو و  $50^\circ$  تا سکه تقلبی را در کفه دیگرش بریزیم، اختلاف وزنشان عددی زوج می شود. به آسانی می توان فهمید که در این شرایط اگر یک سکه را از یک طرف ترازو با سکه ای از طرف دیگرش عوض کنیم، آن وقت اختلاف وزن سکه های دو کفه به اندازه  $\pm 2$  تغییر می کند. می توانیم به همین ترتیب سکه ها را میان کفه های ترازو با هم عوض کنیم. در هر معاوضه چنانچه سکه ها یکجور باشند اختلاف وزن دو کفه تغییر نمی کند. اگر یکی از سکه ها اصل و دیگری تقلبی باشد، اختلاف وزن دو کفه به اندازه  $\pm 2$  تغییر می کند. در معاوضه بعدی اگر یک کفه سنگینتر شد و کفه دیگر سبکتر، اختلاف وزن در کل دو معاوضه به اندازه  $\pm 4$  تغییر کرده است. در هر صورت با عمل معاوضه سکه ها زوجیت اختلاف وزن دو کفه همان که بود می ماند. از طرف دیگر، می توان هر آرایش از سکه ها را روی دو کفه ترازو با معاوضه سکه های آرایشهای اولیه به دست آورد. چون اختلاف وزن دو کفه در ابتدا صفر است هر اختلاف وزنی هم که بعداً به دست می آید باید عددی زوج باشد.

به همین ترتیب می توانیم ثابت کنیم که اگر سکه مورد نظر تقلبی باشد، آن وقت اختلاف وزن دو کفه عددی فرد است؛ زیرا اگر همه سکه های تقلبی باقی مانده را در یک کفه ترازو (و سکه های اصل را هم در کفه دیگرش) بریزیم، اختلاف وزن دو کفه عددی فرد می شود (مجموع  $49$  تا تفاضل که همگی یا  $+1$  اند یا  $-1$ ). باز وقتی دو سکه با هم معاوضه می شوند زوجیت این اختلاف وزن تغییر نمی کند. از این رو، اگر سکه مورد نظر تقلبی باشد، اختلاف وزن دو کفه عددی فرد می شود.

۳۲. پاسخ: خیر. فرض کنید این عددها همان طور که خواسته شده است چیده شده باشند. بعد مکانهای این عددها را از  $1$  تا  $9$  (مثلاً از چپ به راست) شماره گذاری کنید. اگر عدد  $1$  در مکان شماره  $N$  باشد، آن وقت به سادگی معلوم می شود که تفاضل شماره مکان عدد  $2$  و  $N$  عددی زوج است و در نتیجه این دو عدد یا هر دو زوج اند و یا هر دو فرد. همین مطلب در مورد عددهای  $2$  و  $3$ ،  $3$  و  $4$ ، ... درست است. یعنی اینکه شماره های مکانهای این عددها یا همگی زوج اند و یا همگی فرد. چون در اینجا نه عدد داریم و زوجیت شماره های حداکثر  $5$  مکان عین هم است (آن هم در

صورتی که شماره‌های این مکانها فرد باشند)، پس به تناقض می‌رسیم.

## ۲. ترکیبیات - ۱

۲۸. چون هر یک از پنج پاکت نامه را می‌توان به‌طور مستقل با هر یک از چهار تمبر تکمیل کرد، پس باید تعداد انتخابها را در هم ضرب کنیم:  $5 \times 4 = 20$ .

۲۹. دو حرف صدادار مختلف و سه حرف بی‌صدای متفاوت وجود دارند که می‌توان آنها را به‌طور مستقل انتخاب کرد. بنابراین پاسخ مسأله  $3 \times 2 \times 6$  یا ۶ است.

۳۰. چون هیچ انتخابی باعث ایجاد محدودیت برای دیگر انتخابها نمی‌شود، تعداد انتخابها را در هم ضرب می‌کنیم.

پاسخ:  $2 \times 5 \times 7$  یا ۷۰.

۳۱. چون هر دو تمبر را می‌توان معاوضه کرد، پس  $20 \times 20$  راه برای معاوضه تمبرها و به همین ترتیب  $10 \times 10$  راه برای معاوضه کارت پستالها وجود دارد. بنابراین پاسخ مسأله  $10 \times 10 + 20 \times 20$  یا ۵۰۰ است.

۳۲. دو حالت در نظر می‌گیریم: یا همه رقمهای عددی مورد نظر فردند و یا همگی زوج. در حالت نخست  $5^6$  عدد به‌دست می‌آوریم، چون هر یک از این شش رقم را می‌توان به‌طور مستقل از مجموعه  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$  انتخاب کرد. البته، حالت دوم اندکی متفاوت است، زیرا در این حالت نخستین رقم نباید صفر باشد و به این ترتیب در این حالت  $4 \times 5^5$  عدد به‌دست می‌آید. بنابراین پاسخ مسأله  $5^6 + 4 \times 5^5$  یا ۲۸۱۲۵ است.

۳۳. هر یک از این نامه‌ها را می‌توان به سه راه مختلف و مستقل ارسال کرد. بنابراین برای به‌دست آوردن پاسخ باید شش تا عدد ۳ را در هم ضرب کنیم و در نتیجه پاسخ مسأله  $3^6$  یا ۷۲۹ است.

۳۴. باید از هر رنگ یک کارت داشته باشیم و کارت قرمز را می‌توان به ۱۳ راه انتخاب کرد. شماره کارت سبز نباید با شماره کارت قرمز یکی باشد و بنابراین فقط ۱۲ راه برای انتخاب آن وجود دارد. تعداد انتخابها برای کارت زرد ۱۱ و برای کارت آبی ۱۰ است. ترتیبی که رنگها در اینجا آمده‌اند در این تحلیل تأثیر ندارد.

پاسخ:  $10 \times 11 \times 12 \times 13$ .

۳۵. برحسب اینکه در قفسه چند کتاب گذاشته شود پنج حالت در نظر می‌گیریم. اگر در قفسه فقط یک کتاب باشد، آن وقت می‌توان آن را به ۵ طریق انتخاب کرد. به  $5 \times 4$  طریق می‌توان دو کتاب در قفسه گذاشت، چون تعداد راههای انتخاب کتاب دوم قفسه برابر با ۴ است. به همین ترتیب می‌توان تعداد راههای گذاشتن ۳، ۴ و ۵ کتاب را در قفسه حساب کرد. بنابراین پاسخ مسأله برابر با

$$5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

یا ۳۲۵ است.

۳۶. دقیقاً یکی از این رخها باید در هر سطر باشد. اینکه تعدادی از رخها یکدیگر را تهدید کنند یا نه فقط به انتخاب ستونهایی که رخها در آنها هستند بستگی دارد. چون شماره ستونها متعلق به مجموعه عددهای طبیعی از ۱ تا ۸ هستند و دو رخ وقتی و فقط وقتی ممکن است یکدیگر را تهدید کنند که در یک ستون باشند، مسأله مان تبدیل به همان مسأله آشنایی تعداد راههای چیدن هشت شیء در یک ردیف می شود. بنابراین پاسخ مسأله برابر با  $8!$  یا  $40320$  است.

۳۷. این مسأله کاملاً شبیه مسأله قبلی است. می توانیم در مسأله قبلی به جای سطرها راست دستها را در نظر بگیریم و به جای ستونها چپ دستها را. در این صورت هر خانه عین یک زوج راست دست چپ دست است و هر آرایش رخها که در آن یکدیگر را تهدید نکنند یک زوجسازی راست دستها و چپ دستها برای انجام کار گروهی در کلاس به دست می دهد.

پاسخ:  $n!$

۳۸. راه حل مسأله ۲۳ را ببینید. در اینجا شطرنج بازان عین رأسهای  $n$  ضلعی اند و قطرهای عین مسابقات برگزار شده.

$$\text{پاسخ: } \frac{18 \times 17}{2} \text{ یا } 153.$$

۳۹. پاسخهای مسأله عبارت اند از

$$\text{(الف) } \frac{28 \times 56 + 20 \times 54 + 12 \times 52 + 4 \times 50}{2} \text{ یا } 1736;$$

$$\text{(ب) } \frac{4 \times 61 + 8 \times 60 + 20 \times 59 + 16 \times 57 + 16 \times 55}{2} \text{ یا } 1848;$$

$$\text{(ج) } \frac{28 \times 42 + 20 \times 40 + 12 \times 38 + 4 \times 36}{2} \text{ یا } 1288.$$

برای تشریح روش کار، قسمت (الف) را ثابت می کنیم. در کناره های صفحه شطرنج ۲۸ خانه وجود دارد که از هر یک از اینها نخستین فیل ۸ خانه را (از جمله خانه ای که در آن قرار دارد) تهدید می کند. بنابراین، برای دومین فیل ۵۶ خانه باقی می ماند. در ضمن، ۲۰ خانه هم وجود دارند که مجاور خانه های کناره های صفحه اند. وقتی که نخستین فیل در این خانه قرار گیرد ۱۰ خانه را تهدید می کند و در نتیجه ۵۴ خانه می ماند که دومین فیل را می توان در آنها گذاشت. به همین ترتیب ۱۲ خانه هستند که از آنها نخستین فیل ۱۲ خانه را تهدید می کند و آخر سر به ۴ خانه مرکزی صفحه می رسیم (که اگر نخستین فیل در این خانه ها قرار گیرد ۱۴ خانه را تهدید می کند). بعد از جمع کردن همه مقادیر حاصل باید مجموع به دست آمده را بر دو تقسیم کنیم، چون هر یک از آرایشها را دقیقاً دوبار شمرده ایم (میان فیلهای تمایز قائل نمی شویم).

۴۰. این مسأله را می توان به شکل این پرسش بیان کرد: به چند طریق می توان دو سیب، سه گلابی و چهار پرتقال را در یک ردیف چید؟ راه حل این مسأله درست عین راه حل مسأله های ۱۷ تا ۲۱ است.

$$\text{پاسخ: } \frac{9!}{21314!}$$

۴۱. پخش کردن دانشجویان در اتاقها معادل چیدنشان در یک ردیف است، چون بعد از این کار نخستین دانشجو را می‌توان فرستاد تا در اتاق یک نفره زندگی کند، دوتای بعدی را می‌توان به اتاق دو نفره فرستاد و چهار نفر باقی‌مانده را هم به اتاق چهار نفره. البته، هر یک از این توزیعها را می‌توان از چند آرایش به دست آورد. در واقع می‌توانیم دو دانشجویی را که درون اتاق دوفره‌اند با هم و چهار دانشجویی را هم که درون اتاق چهارنفره‌اند با هم جابه‌جا کنیم (می‌توانیم این کار را در مورد نخستین دانشجو در اتاق یک نفره هم انجام دهیم، گرچه هیچ کس متوجه این کارمان نمی‌شود). چون به ترتیب  $2!$  و  $4!$  جایگشت از دو نفر و چهار نفر امکان‌پذیر است، باید تعداد این آرایشها را (که برابر با  $7!$  است) بر حاصل ضرب  $2!$  و  $4!$  تقسیم کنیم. بنابراین پاسخ مسأله  $\frac{7!}{1!2!4!}$  است.

۴۲. با استفاده از همان روش راه‌حل مسأله قبلی پاسخ  $\frac{8!}{2!2!2!}$  را به دست می‌آوریم.

۴۳. پاسخ مسأله را می‌توان به شکل مجموع چهار عدد نوشت که هر یک از آنها برابر با تعداد کلمه‌هایی است که شامل پنج حرف A و به ترتیب ۰، ۱، ۲، ۳ حرف B اند:  $\frac{8!}{5!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{6!}{5!1!} + 1$  یا  $84$ .

۴۴. راهنمایی: تعداد عددهایی ده‌رقمی را حساب کنید که ویژگی موردنظر را ندارند.

$$\text{پاسخ: } 9! \times 10^9 - 9 \times 10^9.$$

۴۵. چون تعداد عددهایی هفت‌رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ اصلاً وجود ندارد برابر با  $8 \times 9^6$  است و  $8 \times 9^6 < 9 \times 10^6 - 8 \times 9^6$ ، نتیجه می‌گیریم که عددهایی هفت‌رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ وجود دارد بیشترند.

۴۶. تعداد برآمدهایی که در آنها شش اصلاً نیامده است برابر با  $5^3$  است. بنابراین پاسخ مسأله  $6^3 - 5^3$  یا ۹۱ است.

۴۷. نخستین گروه دوفره را می‌توان به  $\binom{14}{2}$  طریق انتخاب کرد، دومین گروه دوفره را هم به  $\binom{12}{2}$  طریق و همین‌طور تا آخر. در نتیجه حاصل ضرب  $\binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}$  به دست می‌آید. اما در اینجا هر دسته‌بندی افراد  $7!$  بار شمرده شده است، چون هر مجموعه از ۷ گروه دوفره‌ای را به  $7!$  طریق (بسته به نوع شمارش این گروههای دو نفری در مجموعه موردنظر) می‌توان به دست آورد. بنابراین

پاسخ مسأله عدد

$$\frac{\binom{14}{2} \binom{12}{2} \dots \binom{2}{2}}{7!}$$

است که برابر است با

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13$$

۴۸. هشت رقم نخست را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. این کار را به  $9 \times 10^7$  طریق می‌توان انجام داد. آنوقت، آخرین رقم را همیشه می‌توان دقیقاً به ۵ طریق انتخاب کرد (اگر مجموع هشت رقم



قبلی عددی فرد باشد، آن وقت باید رقمی فرد انتخاب کنیم، در غیر این صورت آخرین رقم باید عددی زوج باشد). از این رو پاسخ مسأله  $5 \times 10^7 \times 9$  یا  $450000000$  است.

### ۳. بخش پذیری و باقی مانده‌ها

۱. پاسخ: (الف؛ ۴؛ ب؛ ۶؛ ج؛ ۹؛ د)  $(n+1)(m+1)$ . آخرین قسمت مسأله را ثابت می‌کنیم چون تعمیمی از قسمتهای قبلی است. هر مقسوم‌علیه عدد  $p^n q^m$  به‌ازای عددهایی مانند  $i$  و  $j$  که  $n \geq i \geq 0$  و  $m \geq j \geq 0$ ، به‌شکل  $p^i q^j$  است. بنابراین انتخاب یک مقسوم‌علیه معادل انتخاب دو عدد صحیح است که در نابرابریهای بالا صدق می‌کنند. نخستین آنها،  $i$ ، را می‌توان به  $n+1$  راه و دومی،  $j$ ، را هم می‌توان به  $m+1$  راه انتخاب کرد. با ضرب کردن تعداد انتخابها پاسخ مسأله را به‌دست می‌آوریم.

۳. از قسمت (ب) قسمت (الف) نتیجه می‌شود؛ بنابراین فقط قسمت (ب) را بررسی می‌کنیم. در میان پنج عدد داده شده باید یکی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد. به همین ترتیب یکی از آنها هم باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد و دست‌کم دوتایشان عددهایی زوج‌اند که یکی از آن دو مضربی از ۴ است. اکنون اگر عددهای ۳، ۵، ۲ و ۴ را در هم ضرب کنیم عدد  $120$  را به‌دست می‌آوریم و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۴. پاسخ: (الف؛ ۱؛ ب)  $p^2 - p$ . حل قسمت (الف) دشوار نیست: همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از  $p$  نسبت به  $p$  اول‌اند. پاسخ قسمت دوم هم از توجه به این نکته به‌دست می‌آید که تنها عددهایی که نسبت به  $p$  اول نیستند مضربهای  $p$ ‌اند و  $p$  تا از این عددها وجود دارند که از  $p^2$  کوچکتر یا با آن برابرند.

۵. چون  $11 \times 5 \times 3^2 \times 2 = 990$ ،  $n!$  باید شامل یک عامل ۱۱ باشد. چون ۱۱ عددی اول است، باید خودش در این حاصل‌ضرب بیاید؛ از این رو، اگر فرض کنیم  $n = 11$ ، آن وقت این عدد کوچکترین مقدار ممکن با ویژگی موردنظر است.

۶. اگر عددی به  $m$  تا صفر ختم شود، آن وقت بر  $10^m$  بخش‌پذیر است. بنابراین باید ببینیم که چند عامل ۱۰ در  $100!$  وجود دارد. اما چون  $10 = 2 \times 5$ ، باید ببینیم که چند عامل ۵ و ۲ در  $100!$  وجود دارد. چون ۲ از ۵ کوچکتر است، به‌ازای هر عامل ۵ به‌اندازهٔ کافی عامل ۲ وجود دارد که با آن عامل ۱۰ بسازد. در نتیجه فقط لازم است که عاملهای ۵ را بشماریم.

چون  $20 \times 5 = 100$ ، ۲۰ مضرب ۵ در حاصل‌ضرب  $100 \times 99 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  وجود دارد. اما تعداد عاملهای ۵ بیشتر از این است، چون هر یک از عددهای ۲۵، ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ دوتا عامل پنج دارند که اینها چهارتا عامل ۵ «اضافی» ایجاد می‌کنند. بنابراین ۲۴ عامل ۵ و در نتیجه ۲۴ عامل ۱۰ وجود دارد و در نتیجه حاصل‌ضرب  $100!$  به ۲۴ صفر ختم می‌شود.

سؤال. نمایش اعشاری عدد  $1000!$  به چند صفر ختم می‌شود؟

۷. به آسانی می‌توان دریافت که عدد  $24!$  به چهارتا صفر ختم می‌شود و عدد  $25!$  به شش تا صفر.

فهمیدن اینکه وقتی مقدار  $n$  افزایش می‌یابد تعداد صفرهای سمت راست عدد  $n!$  ممکن نیست کاهش یابد چندان دشوار نیست. از این رو پاسخ مسأله‌مان خیر است.

۸. کل مقسوم‌علیه‌های عدد  $n$  را به زوجهایی به شکل  $(d, \frac{n}{d})$  تقسیم می‌کنیم. تنها مشکل در اینجا

این است که عضوهای یکی از زوجها ممکن است یکی باشند. به هر حال این حالت وقتی و فقط وقتی ممکن است پیش آید که  $n$  مربع کامل باشد؛ به این ترتیب اثبات مسأله کامل می‌شود.

۹. تام باید جایی اشتباه کرده باشد: عدد طرف راست تساوی مضربی از  $11$  است، اما هیچ‌یک از عددهای طرف چپ تساوی این‌طور نیست. چون  $11$  عددی اول است، چنین چیزی غیرممکن است.

توجه کنید که قرار گرفتن این مسأله در مجموعه‌ای از تمرینهای دربارهٔ بخش‌پذیری نوعی راهنمایی برای حل آن است. اگر این مسأله خارج از این بخش مطرح می‌شد حل کردن آن دشوارتر بود.

۱۱. ابتدا ملاحظه کنید که

$$65(a+b) = 65a + 65b = 65a + 56a = 121a$$

چون عددهای  $65$  و  $121$  نسبت به هم اول‌اند، پس  $a+b$  بر  $121$  که عددی مرکب است بخش‌پذیر است. بنابراین  $a+b$  هم عددی مرکب است.

۱۲. پاسخ: الف)  $x = 16$  و  $y = 15$ ؛ ب)  $x = 152$  و  $x = 151$  یا  $x = 52$  و  $y = 49$ ؛ برای

اثبات قسمت الف) معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:  $31 = (x-y)(x+y)$ . چون

$31$  عددی اول است، عامل کوچکتر باید  $1$  باشد و عامل بزرگتر  $31$ . بنابراین دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 31 \end{cases}$$

به دست می‌آید که از حل آن پاسخ بالا نتیجه می‌شود.

۱۳. می‌توان نوشت  $x(x^2 + x + 1) = 3$ . در نتیجه یا  $x = \pm 1$  یا  $x = \pm 3$ . بعد از تحلیل همهٔ

حالتها می‌فهمیم که  $x = 1$ .

۱۴. راهنمایی: بررسی کنید که هر دو طرف این تساوی بر توانهای عین هم هر عدد اول مانند  $p$

بخش‌پذیرند.

۱۵. پاسخ: الف)  $0$  (باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای  $1989$ ،  $1990$ ،  $1991$  و  $1992^3$  بر  $7$  به ترتیب

$1$ ،  $2$ ،  $3$  و  $1$ ‌اند)؛ ب)  $1$ ، چون باقی‌ماندهٔ تقسیم  $9$  بر  $8$  برابر با  $1$  است.

۱۷. راهنمایی: باقی مانده‌های تقسیم عددها بر ۵ را تحلیل کنید.  
 ۱۸. راهنمایی: باقی مانده‌های تقسیم عددها بر ۳ را تحلیل کنید.  
 ۱۹. راهنمایی: باقی مانده‌های تقسیم عددها بر ۹ را تحلیل کنید.  
 ۲۱. الف) ثابت می‌کنیم که عددهای داده شده بر ۳ و ۸ بخش پذیرند. می‌توان نوشت

$$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$$

اگر  $p$  عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آن وقت  $p$  عددی فرد است. از این رو عددهای  $p - 1$  و  $p + 1$  هر دو زوج اند و یکی از آنها مضربی از ۴ است. پس نتیجه می‌شود که  $p^2 - 1$  بر ۸ بخش پذیر است. علاوه بر این، چون  $p - 1$ ،  $p$  و  $p + 1$  سه عدد صحیح متوالی اند، یکی از آنها بر ۳ بخش پذیر است. اما این عدد، عدد اول  $p$  نیست و در نتیجه باید یا  $p - 1$  باشد یا  $p + 1$ . بنابراین  $p^2 - 1$  بر عددهای ۳ و ۸ و در نتیجه بر ۲۴ بخش پذیر است.

ب) می‌توان نوشت  $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ . اگر عین قسمت قبلی استدلال کنیم درمی‌یابیم که هر دو عامل طرف راست تساوی عددهایی زوج اند. برای اثبات اینکه یکی از آنها مضربی از ۴ است، خلاف آن را فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم که باقی مانده‌های تقسیم این عددها بر ۴، ۲ باشد. در این صورت مجموعشان باید بر ۴ بخش پذیر باشد. از طرف دیگر، مجموعشان  $2p$  می‌شود که مضربی از ۴ نیست، چون  $p$  عددی فرد است. علاوه بر این، باقی مانده‌های عددهای  $p$  و  $q$  به پیمانه ۳ یا برابرند یا متمایز. در حالت نخست تفاضلشان بر ۳ بخش پذیر است و در حالت دوم مجموعشان. به این ترتیب ثابت می‌شود که  $(p - q)(p + q)$  بر ۳ و ۸ بخش پذیر است.

۲۲. اگر هیچ یک از عددهای  $x$  و  $y$  بر ۳ بخش پذیر نباشد، آن وقت باقی مانده‌های تقسیم  $x^2$  و  $y^2$  بر ۳ برابر با ۱ است. بنابراین باقی مانده تقسیم مجموعشان بر ۳ برابر با ۲ می‌شود که در مورد مربعهای کامل چنین چیزی ممکن نیست.

۲۳. راهنمایی: بررسی کنید که عددهای  $a$  و  $b$  هر دو بر ۳ و ۷ بخش پذیرند.

۲۴. راهنمایی: بررسی کنید که باقی مانده‌های تقسیم عددهای  $x^3$  و  $x$  بر ۶ با هم برابرند.

۲۵. اگر  $d$  عددی فرد باشد، آن وقت از عددهای  $p$  و  $q$  یکی زوج است که چنین چیزی ممکن نیست. اگر  $d$  بر ۳ بخش پذیر نباشد، آن وقت از عددهای  $p$ ،  $q$  و  $r$  یکی بر ۳ بخش پذیر است که این هم باز تناقض است.

۲۶. راهنمایی: همه باقی مانده‌های ممکن تقسیم مربعهای کامل بر ۸ را پیدا کنید.

۲۷. باقی مانده‌های ممکن تقسیم مربعهای کامل بر ۹ اینها هستند: ۰، ۱، ۴ و ۷. بررسی کنید که اگر مجموع یک سه تایی از این باقی مانده‌ها بر ۹ بخش پذیر باشد، آن وقت دو تایشان با هم برابرند.

۳۰. با استفاده از روش مسأله ۲۸ می‌فهمیم که پاسخ مسأله عدد ۷ است.

۳۱. پاسخ: ۱.

۳۲. پاسخ: ۶.

۳۴. پاسخ: ۳.

راهنمایی: رقمهای یکان عددهای  $7^n$  دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند. باید تعیین کنیم که  $7^7$  چه وقت در این دور می‌آید؛ یعنی باید باقی‌مانده تقسیم  $7^7$  بر ۴ را پیدا کنیم.

۳۵. راهنمایی: از این عددها یکی همیشه بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: الف)  $p = 3$ ؛ ب)  $p = 3$ .

۳۶. پاسخ:  $p = 3$ . روش حل مسأله قبلی در اینجا هم به کار می‌آید.

۳۷. راهنمایی: با استفاده از همان شگرد مسأله‌های قبلی ثابت کنید که  $p = 3$ .

۳۸. راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۳ را تحلیل کنید.

۳۹ و ۴۰. راهنمایی: بررسی کنید که باقی‌مانده تقسیم مربع عددی فرد بر ۴ همیشه ۱ می‌شود و باقی‌مانده تقسیم مربع عددی زوج بر ۴ همیشه ۰.

پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر.

۴۱. پاسخ:  $p = 5$ . باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۵ را تحلیل کنید.

۴۲. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۹ برابر با ۷ می‌شود و چنین چیزی در مورد مکعبهای کامل درست نیست.

۴۳. راهنمایی: همه باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم عدد  $a^3 + b^3 + 4$  بر ۹ را پیدا کنید.

۴۴. راهنمایی: همه باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم عدد  $6n^3 + 3$  بر ۷ را پیدا کنید.

۴۵. اگر هیچ‌یک از عددهای  $x$  یا  $y$  بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن وقت باقی‌مانده تقسیم عدد  $z^2$  بر ۳ برابر

با ۲ می‌شود که ممکن نیست. اکنون توجه کنید که باقی‌مانده تقسیم مربع عددی فرد بر ۸ همیشه

۱ است؛ باقی‌مانده تقسیم مربع عددی زوج، که بر ۴ بخش‌پذیر نیست، بر ۸، همیشه ۴ می‌شود و

آخر سر باقی‌مانده تقسیم مربع مضربی از ۴ بر ۸ همیشه ۰ است. با استفاده از اینها می‌توانیم

ثابت کنیم که یا عددهای  $x$  و  $y$  هر دو زوج‌اند یا از آنها یکی بر ۴ بخش‌پذیر است.

۴۶. راهنمایی: الف)  $4(a+1) + 3a = 4 + 7a$ ؛ ب)  $33 = (35 - b) + (2 + a) + b$ .

۴۷. پاسخ: ۰. ابتدا رقم یکان عدد  $9^2 + 2^2 + 1^2 + \dots + 2^2 + 1^2$  را حساب کنید. بعد توجه کنید که

به‌ازای هر مجموعه از ده عدد طبیعی متوالی رقم یکان همیشه همان عددی که حساب کردید

می‌شود.

۴۸. ثابت کنید باقی‌مانده‌های تقسیم هر دو عدد از هفت عدد موردنظر، مثلاً  $x$  و  $y$ ، بر ۵ با هم برابرند.

برای این کار دو تا شش‌تایی از این عددها را در نظر بگیرید؛ اولی شامل همه این عددها بجز  $x$

باشد و دومی شامل همه این عددها بجز  $y$ .

۴۹. اولین عدد از این عددها را با  $a$  نشان می‌دهیم؛ در این صورت

$$\begin{aligned} a + (a+2) + (a+4) + \dots + (a+2(n-1)) &= na + 2(1+2+3+\dots+(n-1)) \\ &= na + n(n-1) \\ &= n(a+n-1) \end{aligned}$$

۵۰. توجه کنید که اگر به عدد موردنظر ۱ را اضافه کنیم، آن وقت عدد حاصل بر عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین پاسخ مسأله کوچکترین مضرب مشترک این عددها منهای یک است، که می‌شود ۵۹.

۵۱. اگر  $n$  عددی مرکب و بزرگتر از ۴ باشد، آن وقت عدد  $(n-1)!$  بر  $n$  بخش‌پذیر است. در حقیقت،  $n = kl$  که در آن عددهای  $k$  و  $l$  از  $n$  کوچکترند. اگر  $k \neq l$ ، آن وقت در حاصل ضرب  $(n-1)!$  این عددها هر دو به‌عنوان عامل می‌آیند و آنچه می‌خواستیم ثابت می‌شود. اگر هم  $k = l$ ، یعنی  $n = k^2$  که در آن  $k > 2$ ، آن وقت حاصل ضرب  $(n-1)!$  شامل عاملهای  $k$  و  $2k$  است و کار تمام است.

۵۵. با استفاده از الگوریتم اقلیدسی به دست می‌آوریم

$$(30n + 2, 12n + 1) = (12n + 1, 6n) = (6n, 1) = 1$$

۵۶ و ۵۷. راهنمایی: از الگوریتم اقلیدسی استفاده کنید.

پاسخ: به ترتیب  $1 - 2^20$  و  $111 \dots 111$  (بیست تا ۱ در این عدد آمده است).

#### ۴. اصل لانه‌کبوتری

۳. در اینجا لانه‌ها باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۱۱ اند و کبوترها هم عددهای موردنظر (راه‌حل مسأله ۲۱ را هم ببینید). اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد بر ۱۱ یکی باشند، آن وقت تفاضلشان بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۴. در اینجا لانه‌ها تعداد موهای سراسر شخص است (از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰). کبوترها هم شهروندان لنین‌گرادند.

۶. فوتبالیستها را بعد از ترک کردن هواپیماهایشان در تیمهای خود دسته‌بندی می‌کنیم. در آن موقع  $M + 1$  بازیکن را باید دسته‌بندی کنیم. بنابر اصل لانه‌کبوتری تعمیم‌یافته اطمینان می‌یابیم که یک تیم وجود دارد که ۱۱ بازیکن دارد و این تیم کامل است.

۸. تعداد دوستان هر کس در این گروه یکی از پنج عدد ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ است. از این رو، به نظر می‌رسد که تعداد دوستان این پنج نفر ممکن است همگی عددی متمایز باشند. با وجود این، اگر شخصی از این گروه چهار تا دوست داشته باشد آن وقت هیچ‌کسی نیست که هیچ دوستی نداشته باشد. بنابراین تعداد دوستان دو نفر از اینها یکی است.

۹. اگر در این مسابقات  $k$  تیم شرکت کرده باشند، آن وقت تعداد مسابقاتی که هر تیم تا آن لحظه برگزار کرده است یکی از عددهای  $0$  تا  $k - 1$  است. با وجود این، اگر یکی از تیمها  $1 - k$  مسابقه برگزار کرده باشد، آن وقت این تیم با همه تیمهای دیگر بازی کرده است و از این رو هیچ تیمی نیست که اصلاً بازی نکرده باشد. بنابراین  $k$  تیم را در  $1 - k$  لانه‌ای جا می‌دهیم که شماره‌هایشان یا عددهای  $0$  تا  $k - 2$  اند یا عددهای  $1$  تا  $k - 1$ .

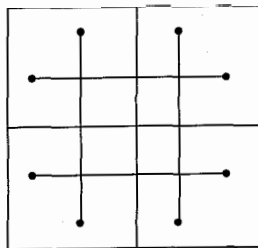
۱۰. الف) پاسخ: ۳۲. در حقیقت فرض کنید ۳۳ یا تعدادی بیشتر خانه را سبز کرده باشیم. در این صورت بعد از اینکه صفحه شطرنج را به شانزده مربع  $2 \times 2$  تقسیم می‌کنیم، بنابر اصل لانه‌کبوتری اطمینان می‌یابیم که دست‌کم یکی از این مربعها شامل ۳ یا تعدادی بیشتر خانه سبز است. این ۳ خانه سبز در وضعیتی سه‌مربعی («غیر مجاز») تشکیل می‌دهند و به این ترتیب به تناقض می‌رسیم. از طرف دیگر، می‌توانیم همه خانه‌های سیاه (در رنگ آمیزی عادی صفحه شطرنج) را سبز کنیم و ۳۲ خانه سبز با ویژگی خواسته شده به دست بیاوریم.

ب) پاسخ: باز هم ۳۲! در واقع اگر ۳۱ یا تعدادی کمتر خانه را سبز کنیم، آن وقت یکی از آن شانزده مربع  $2 \times 2$  (راه حل قسمت الف)) یا شامل یک خانه سبز است یا اصلاً شامل هیچ خانه سبزی نیست. در این صورت ۳ خانه دیگر آن یا هیچ‌یک از ۴ خانه‌اش سبز نیستند و سه‌مربعی فاقد خانه سبز تشکیل می‌دهند. با این تناقض (و همان رنگ‌آمیزی خانه‌های سیاه در راه حل قسمت الف)) اثبات کامل می‌شود.

۱۱. ابتدا توجه کنید که  $3 + 2 + 1$  یا ۶ تا از مسأله‌ها را سه دانش‌آموزی حل کرده‌اند که در صورت مسأله به آنها اشاره شده است. بنابراین ۲۹ مسأله می‌ماند که ۷ دانش‌آموز دیگر باید آنها را حل کرده باشند. اگر هر یک از این دانش‌آموزان فقط ۴ مسأله را حل کرده باشد، آن وقت باید فقط ۲۸ مسأله حل می‌شد. بنابراین یکی از آنها باید دست‌کم ۵ مسأله را حل کرده باشد.

۱۲. پاسخ: ۱۶ شاه. راهنمایی مسأله ۱۰ الف) را ببینید.

۱۳. تار عنکبوت را همان‌طور که در شکل ۱۳۵ نشان داده شده است به ۴ قطعه تقسیم کنید؛ روی هریک از این قطعه‌ها بیش از یک عنکبوت نمی‌تواند زندگی کند.



شکل ۱۳۵

۱۴. با هر یک از مثلثهای کوچکتر فقط یک رأس مثلث بزرگتر را می‌توان پوشاند.
۱۸. همه نقاط خشکی را قرمز و هر نقطه متقاطع آنها را سبز می‌کنیم. در این صورت نقطه‌ای وجود دارد که هم قرمز است و هم سبز. حفر تونل را از این نقطه آغاز کنید. آیا متوجه می‌شوید که این راه حل هم به تعبیری اصل لانه‌کبوتری است؟
۱۹. در تقسیم عددها بر ۱۹۸۷ فقط یکی از ۱۹۸۷ باقی‌مانده ممکن به دست می‌آید. اکنون اگر مثلاً ۱۹۸۸ توان نخست ۲ را بررسی کنیم در می‌یابیم که باقی‌مانده تقسیم دو تا از آنها بر ۱۹۸۷ یکی است. در این صورت تفاضل این دو توان مضر بی از ۱۹۸۷ است.
۲۰. چون باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای  $x^2$  و  $(x - 100)^2$  بر ۱۰۰ یکی است، در تقسیم مربعهای کامل بر ۱۰۰ فقط ۵۱ باقی‌مانده متمایز وجود دارد. از این رو، از ۵۲ عدد صحیح، باقی‌مانده‌های تقسیم مربعهای دوتایشان بر ۱۰۰ یکی است.
۲۲. اگر  $3^m$  و  $3^n$  (که در آن  $m > n$ ) دو توانی از ۳ باشند که باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۱۰۰۰ یکی است، آن وقت تفاضلشان بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است. اکنون توجه کنید که  $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$  و عاملهای اول ۱۰۰۰ عددهای ۲ و ۵ اند که هیچ‌کدامشان  $3^n$  را نمی‌شمارد. بنابراین نتیجه می‌شود که ۱۰۰۰ باید  $3^{m-n} - 1$  را بشمارد، یعنی  $3^{m-n}$  توانی از ۳ است که به رقمهای ۰۰۱ ختم می‌شود.
۲۳. مقدار هر یک از این مجموعه‌ها یکی از هفت عدد از ۳- تا ۳ است.
۲۴. کل این افراد را به ۵۰ جفت که دو سر یک قطر میز روبه‌روی هم نشسته‌اند تقسیم کنید. این جفتها را لانه‌ها در نظر بگیرید. چون بیش از ۵۰ نفرشان مردند، یکی از این جفتها باید شامل بیش از یک مرد باشد.
۲۵. روشن است که اگر حکم مسأله درست نباشد، آن وقت این پسرها دست کم  $0 + 1 + 2 + \dots + 14$  یا ۱۰۵ گردو جمع‌آوری می‌کردند که تناقض است.
۲۶. حاصل ضرب عددهای همه این گروهها برابر با ۹! یا ۳۶۲۸۸۰ است. اگر حاصل ضرب عددهای هیچ‌یک از گروهها از ۷۱ بیشتر نباشد، آن وقت حاصل ضرب همه این عددها حداکثر برابر با  $71^3$  یا ۳۵۷۹۱۱ می‌شود. در اینجا باید توجه کرد که این روش اثبات از جهتی از شکل ساده اصل لانه‌کبوتری کلیتر است.
۲۷. از هر خانه این جدول می‌توان با عبور از خانه‌های مجاور به هر خانه دیگری رفت و برای این کار همیشه مسیری را انتخاب می‌کنیم که در آن تعداد خانه‌هایی که از آنها می‌گذریم از ۱۹ کمتر باشد. یعنی اینکه اگر  $a$  کوچکترین عدد جدول باشد، همه عددها میان  $a$  و  $a + 95$  هستند. بنابراین در میان ۱۰۰ عدد جدول بیش از ۹۶ عدد متمایز وجود ندارد و دوتایشان باید با هم برابر باشند.
۲۸. از این گروه یک نفر دلخواه را انتخاب می‌کنیم و او را باب می‌نامیم. افراد دیگر را در دو لانه دسته‌بندی

می‌کنیم: آنهایی که باب را می‌شناسند و آنهایی که او را نمی‌شناسند. از پنج نفر باقی‌مانده دست‌کم سه نفرشان در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرند. فرض کنید باب سه نفر آشنا داشته باشد. اگر از اینها دوتایشان یکدیگر را بشناسند، آن وقت آنها به همراه باب سه نفر موردنظرند. اگر هیچ‌یک از آنها یکدیگر را نشناسند، آن وقت خود آنها سه نفر موردنظرند. در صورتی که سه نفر باشند که باب آنها را نشناسد، می‌توان استدلالی مشابه را به‌کار برد.

۲۹. زوجیت (باقی‌مانده تقسیم بر ۲) مختصات این نقطه‌ها را در نظر بگیرید. چهار امکان وجود دارد: (فرد و فرد)؛ (زوج و فرد)؛ (فرد و زوج)؛ (زوج و زوج). چون پنج نقطه داریم، می‌توانیم دوتایشان را انتخاب کنیم که زوجیت هر دو مختصشان یکی باشد. اکنون به سادگی می‌توان فهمید که مختصات وسط پاره‌خط میان آنها هم عددی صحیح‌اند.

۳۰. این سه شماره لنگه پوتین را می‌توانیم در دو دسته جا دهیم: آن شماره‌هایی که از لنگه‌های راستشان بیشتر از لنگه‌های چپشان داریم، و دیگری آن شماره‌هایی که از لنگه‌های چپشان بیشتر از لنگه‌های راستشان داریم (اگر هم که تعداد لنگه‌های راست و چپ شماره‌ای با هم برابر باشند آن شماره پوتینها را در دسته دوم قرار می‌دهیم). در این صورت نتیجه می‌شود که دو شماره لنگه پوتین در یک دسته‌اند. فرض می‌کنیم، مثلاً، شماره‌های ۴۱ و ۴۲ لنگه‌های راستشان بیشتر از لنگه‌های چپشان باشد (در صورتی که لنگه‌های چپ این دو شماره بیشتر از لنگه‌های راستشان باشند، می‌توان استدلالی مشابه را به‌کار برد).

اکنون در کل ۳۰۰ لنگه چپ و از هر شماره حداکثر ۲۰۰ لنگه چپ داریم. بنابراین مجموع تعداد لنگه‌های چپ هر دو شماره دست‌کم ۱۰۰ است. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که (روی هم) دست‌کم ۱۰۰ لنگه چپ از شماره‌های ۴۱ و ۴۲ داریم و لنگه‌های راست هر یک از این شماره‌ها بیشتر از لنگه‌های چپشان است. از این‌رو، برای هر یک از لنگه‌های چپ یک لنگه راست وجود دارد و در نتیجه در این انبار دست‌کم ۱۰۰ جفت پوتین کامل می‌توان پیدا کرد.

۳۱. در این الفبا حروف بی‌صدا یازده تا بیشتر از حروف صدادارند. بنابراین اگر تفاضلهای تعداد حروف بی‌صدا و تعداد حروف صدادار هر یک از این شش زیرمجموعه را با هم جمع کنیم، مجموعشان ۱۱ می‌شود. پس نتیجه می‌شود که این تفاضل در دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها از ۲ کمتر است و بنابراین با حروف این زیرمجموعه می‌توان کلمه‌ای از این زبان را ساخت.

۳۲. ده مجموع

$$x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{10}.$$

را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌های تقسیم دوتا از اینها بر ۱۰ با هم برابرند. تفاضل این دو مجموع مجموعه‌ای به‌دست می‌دهد که مجموع عضوهایش بر ۱۰ بخش‌پذیر است.



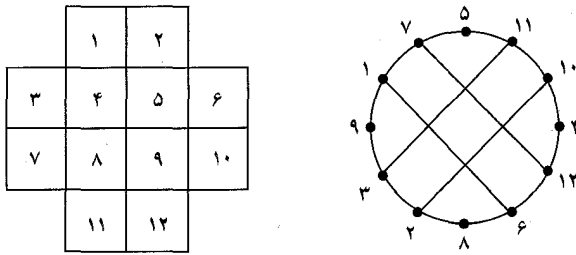
۳۳. عددهای از ۱ تا ۲۰ را به ده مجموعه جدا از هم طوری تقسیم می‌کنیم که اگر دو عدد دلخواه از یکی از این مجموعه‌ها انتخاب شوند، یکی از آنها دیگری را بشمارد:  $\{۱۱\}$ ،  $\{۱۳\}$ ،  $\{۱۵\}$ ،  $\{۱۷\}$ ،  $\{۱۹\}$ ،  $\{۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶\}$ ،  $\{۳، ۶، ۱۲\}$ ،  $\{۵، ۱۰، ۲۰\}$ ،  $\{۷، ۱۴\}$ ،  $\{۹، ۱۸\}$ . در این صورت از هر یازده عددی که از ۲۰ بزرگتر نباشند، دوتایشان در یکی از این لانه‌ها قرار می‌گیرند و در نتیجه یکی از آن دو دیگری را می‌شمارد.

۳۴. گروههای پژوهش موردنظر را با عددهای از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت به جای در نظر گرفتن خود هر دانش‌آموز می‌توانیم مجموعه شماره‌های گروههای پژوهشی را در نظر بگیریم که عضوشان است. هر یک از اینها زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $\{۱، ۲، ۳، ۴، ۵\}$  است. اکنون مسأله این طور حل می‌شود که کل ۳۲ زیرمجموعه این مجموعه را به ۱۰ گردایه طوری تقسیم می‌کنیم که اگر دو تا از این زیرمجموعه‌ها از یکی از این گردایه‌ها انتخاب شوند، یکی از آنها شامل دیگری باشد (این راه حل را با راه حل مسأله ۳۳ مقایسه کنید). در زیر، گردایه‌هایی از این دست را آورده‌ایم. زیرمجموعه‌ها در هر گردایه مانند عددها نوشته شده‌اند:

$$\begin{aligned} & \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}, \\ & \{\{2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}, \\ & \{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}\}, \\ & \{\{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}, \\ & \{\{5\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 5\}\}, \\ & \{\{2, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}, \\ & \{\{3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}, \\ & \{\{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}, \\ & \{\{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}, \\ & \{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

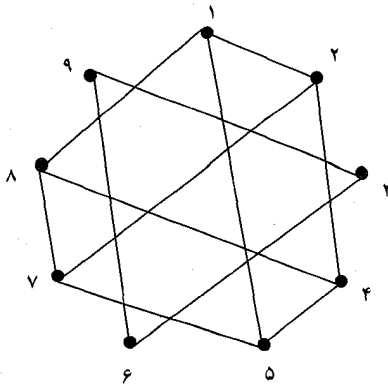
## ۵. گرافها - ۱

۳. بله، ممکن است. مثلاً شکل ۱۳۶ را ببینید که در آن گرافی شبیه گراف راه حل مسأله ۲ رسم شده است. با توجه به این شکل به راحتی می‌توان مثالی از مسیری را که در شرطهای مسأله صدق کند ساخت.



شکل ۱۳۶

۴. اگر عدد  $AB$  بر ۳ بخش پذیر باشد، آن وقت عدد  $BA$  هم چنین است. یعنی اینکه اگر مسافری بتواند به طور مستقیم از شهر  $A$  به شهر  $B$  برود، آن وقت می تواند از شهر  $B$  هم به طور مستقیم به شهر  $A$  برود. با این ملاحظه می توانیم گراف خطوط هوایی موجود را مانند شکل ۱۳۷ رسم کنیم. همان طور که از این شکل پیداست، این طور نیست که مسافری بتواند از هر شهر به هر شهر دیگری که دلش خواست برود. مثلاً او نمی تواند از شهر ۱ به شهر ۹ برود.



شکل ۱۳۷

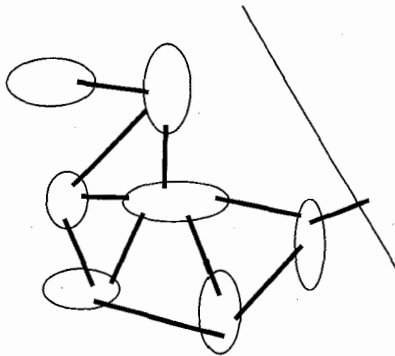
۷. گرافی بکشید که در آن شهرها رأسهای گراف باشند و جاده ها یالهایش. در این صورت می توانیم یالهای این گراف را با استفاده از روشی که در مسئله ۶ شرح داده شد بشماریم. در مسأله بیان شده است که درجه هر رأس ۴ است و از این رو تعداد کل جاده ها برابر با  $\frac{100 \times 4}{2}$  یا ۲۰۰ است.

۹. هر طوری که سیم کشی کنیم ممکن نیست هیچ یک از وضعیتهای (الف) و (ب) به دست آید. در هر یک از این حالتها می توانیم گرافی شبیه گرافهای مسأله ۵ را مجسم کنیم و رأسهای فردش را بشماریم. در این صورت متوجه می شویم که تعداد رأسهای فرد در اینجا عددی زوج نیست و در نتیجه چنین گرافی را نمی توان رسم کرد.

۱۰. پاسخ: خیر. در اینجا می‌توانیم گرافی را مجسم کنیم که رأسهای کشورهای تحت سلطه پادشاه باشند و از میان آنها کشورهای همسایه با یال به هم وصل شده باشند. با شمارش رأسهای فرد معلوم می‌شود که تعدادشان زوج نیست و در نتیجه چنین گرافی را نمی‌توان رسم کرد.

۱۱. پاسخ: خیر. اگر این کشور  $k$  شهر داشته باشد، آن وقت در آن  $\frac{3k}{4}$  جاده وجود دارد. اما اگر  $k$  عددی صحیح باشد، آن وقت این عدد برابر با  $100$  نمی‌شود.

۱۲. پاسخ: بله، درست است. فرض کنید این طور نباشد. گرافی رسم کنید که رأسهای جزیره‌های مورد نظر باشند و یالهای میان این جزیره‌ها. بنابر آنچه که در مسأله آمده است، هر یک از این هفت جزیره رأسی فرد است و بنابراین در اینجا تعداد رأسهای فرد عددی فرد است. چون چنین چیزی ممکن نیست، باید دست کم یک یال این گراف به ساحل دریاچه منتهی شود. در شکل ۱۳۸ گرافی نشان داده شده است که وضعیتی ممکن از آن چیزی است که جان توصیف کرده بود.



شکل ۱۳۸

۱۳. گرافی بسیار بزرگ را مجسم کنید که رأسهای انسانهای از ابتدای خلقت تا کنون و یالهای دست‌دادهای افرادند. اکنون رأسهای فرد این گراف را می‌شماریم و بنابر قضیه مان اطمینان می‌یابیم که تعدادشان عددی زوج است.

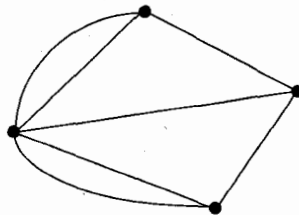
۱۴. پاسخ: خیر. دشواری این مسأله اینجاست که تعیین کنیم چطور گراف مورد نظر را بکشیم. اینکه خود این پاره‌خطها را یالهای گراف در نظر بگیریم احتمالاً مؤثر واقع نخواهد شد (این ایده ممکن است در ابتدا بعضی از دانش‌آموزان را سردرگم کند). در عوض می‌توانیم گرافی را در نظر بگیریم که رأسهای این پاره‌خطها باشند (!) و میان هر دو رأس وقتی و فقط وقتی یالی وجود دارد که پاره‌خطهای متناظر این دو رأس یکدیگر را قطع کنند. در این صورت این گراف کلاً نه رأس درجه ۳ دارد که ممکن نیست.

۱۶. در اینجا می‌توانیم راه حل مسأله ۱۵ را تعمیم دهیم. فرض کنید چنین گرافی همبند نباشد. بی‌شک این گراف از کمتر از دو شهر تشکیل نشده است (چطور ممکن است یک شهر تکی همبند نباشد؟). دو شهری را انتخاب کنید که ظاهراً نمی‌توان آنها را با مسیری به هم وصل کرد. همه شهرهایی را در نظر بگیرید که از این دو شهر جاده‌هایی مستقیم به آنها وجود دارد. تعداد این شهرها دست کم  $\frac{2(n-1)}{2}$  یا  $n-1$  است. مانند مسأله قبلی این شهرهای جدید باید همگی متمایز باشند؛ اگر دو تا از این شهرهای جدید یکی باشند، دو شهر انتخاب شده را می‌توان با مسیری که از این شهر جدید می‌گذرد به هم وصل کرد. از این رو گراف مورد نظر  $2 + n - 1$  یا  $n + 1$  شهر دارد که تناقض است. در نتیجه، این گراف همبند است.

در اینجا باز روشن است که دانش‌آموزان باید بکوشند که گراف مورد نظر را رسم کنند. آنها فوراً متوجه می‌شوند که این گراف «آن قدر یالهایش زیاد است» که ممکن نیست همبند نباشد. این شهود را می‌توان نقطه آغازی برای بحثی جدی درباره این نتیجه دانست.

۱۸. اگر جاده  $AB$  بسته باشد، آن وقت کافی است ثابت کنیم که باز هم می‌توانیم از شهر  $A$  به شهر  $B$  برویم. اگر این طور نباشد، آن وقت در مؤلفه همبند شامل  $A$  همه رأسها بجز  $A$  زوج‌اند. این وضعیت یعنی وجود دقیقاً یک رأس فرد در مؤلفه‌ای همبند، که با قضیه مان در مورد تعداد رأسهای فرد گراف تناقض دارد.

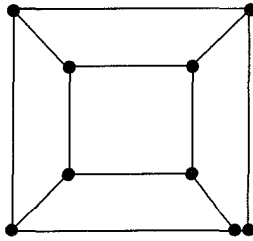
۲۰. پاسخ: خیر، چنین گردشی ممکن نیست. جزیره‌ها و کناره‌ها را رأسهای گراف در نظر می‌گیریم و پلها را یالهایش. همان‌طور که از شکل ۱۳۹ پیداست، این گراف ۴ رأس فرد دارد که بیش از اندازه زیاد است.



شکل ۱۳۹

۲۱. پاسخ: الف) شش پل؛ ب) پنج پل؛ ج) چهار پل. دانش‌آموزان فقط باید تعداد پلهایی را که در هر مورد برای رفتن به جزیره سه دفعه استفاده می‌شوند بشمارند.

۲۲. الف) این کار شدنی نیست. ابتدا توجه کنید که چون مجموع طولهای همه یالها  $10 \times 12$  یا  $120$  سانتیمتر است، این سیم را نمی‌توان در جایی روی خودش دولا کرد (حتی اگر از همه طول سیم استفاده کرد). گراف اسکلت مکعب را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۰)، اگر بتوان



شکل ۱۴۰

اسکلت سیمی موردنظر را ساخت، آن وقت می‌توان روی این سیم پیش رفت و گراف را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد. اما این گراف هشت رأس فرد دارد که این تعداد بیش از آن است که رسم گراف به این شکل ممکن باشد. بنابراین تکه سیم را نمی‌توان آن‌طور که خواسته شده خم کرد.

ب) چون گراف اسکلت مکعب ۸ رأس فرد دارد، باید دست‌کم چهارتا از این تکه سیمها داشته باشیم.

### ۶. نابرابری مثلث

۱. فرض کنید  $AB \geq BC$ . اگر نقطه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  مثلثی تشکیل دهند، آن وقت بنابر نابرابری مثلث،  $AC + BC > AB$ ، که از این نابرابری نتیجه موردنظر به دست می‌آید. اگر  $AB \leq BC$ ، آن وقت می‌توانیم از نابرابری  $AB + AC > BC$  (که این هم بنابر نابرابری مثلث درست است) به همان نتیجه برسیم.

حالت تساوی هم وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که نقطه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط راست باشند و  $B$  میان  $A$  و  $C$  نباشد.

۲. طول ضلع  $BC$  باید از  $AC + AB$  یا  $4/4$  کمتر باشد. از طرف دیگر، طول  $BC$  باید از  $|AB - AC|$  یا  $3/2$  بزرگتر باشد (مسئله ۱ را ببینید). تنها عدد صحیح در این محدوده ۴ است.

۳. اگر طول ضلعهای مثلث عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  باشند، آن وقت بنابر نابرابری مثلث،  $b + c > a$ . اکنون  $a$  را به هر دو طرف این نابرابری اضافه می‌کنیم و به دست می‌آوریم  $a + b + c > 2a$ ؛ این نابرابری معادل همان چیزی است که می‌خواهیم. /

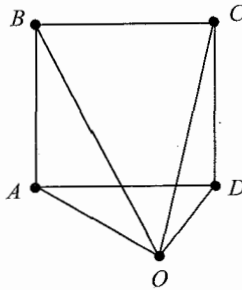
۴. پاسخ: ۳۵۰ کیلومتر.  
۶. ثابت می‌کنیم  $OB + OC + OD > OA$ . طرفین نابرابریهای مثلث  $AC + OC > OA$  و

$$OB + OD > BD$$

را با هم جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$AC + OB + OC + OD > OA + BD$$

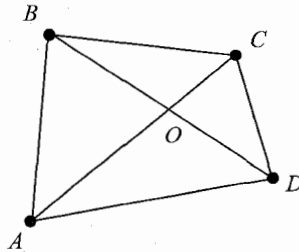
(شکل ۱۴۱ را ببینید). چون  $AC = BD$ ، از نابرابری آخری نتیجه مورد نظر به دست می آید. توجه کنید که همین اثبات حتی وقتی که نقطه  $O$  بیرون صفحه مربع  $ABCD$  هم باشد درست است.



شکل ۱۴۱

۷. فرض کنید قطرهای چهارضلعی یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند (شکل ۱۴۲). در این صورت

$$AB + BC > AC, BC + CD > BD, CD + DA > AC, DA + AB > BD$$



شکل ۱۴۲

از جمع کردن این نابرابریها به دست می آید

$$2(AB + BC + CD + DA) > 2(AC + BD)$$

و بنابراین نخستین حکمان ثابت می شود. علاوه بر این، در چهارضلعی مورد نظر،

$$OA + OB > AB, OB + OC > BC, OC + OD > CD, OD + OA > DA$$

از جمع کردن این نابرابریها هم نتیجه می شود

$$2(OA + OB + OC + OD) = 2(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$$

و به این ترتیب دومین حکم مسأله هم ثابت می‌شود.

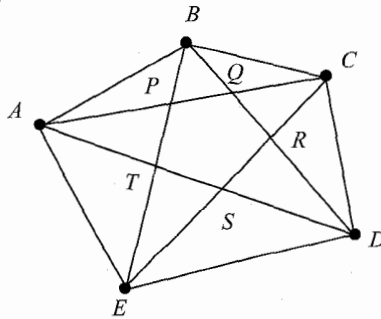
۸. می‌توان نوشت

$$AP + PB > AB, BQ + QC > BC, CR + RD > CD$$

$$DS + SE > DE, ET + TA > EA$$

(شکل ۱۴۳ را ببینید). از جمع کردن این نابرابریها به دست می‌آید

$$AP + PB + BQ + QC + CR + RD + DS + SE + ET + TA > AB + BC + CD + DE + EA$$



شکل ۱۴۳

طرف راست این نابرابری محیط پنج‌ضلعی است در حالی که طرف چپش از مجموع قطرهای کمتر است (طرف چپ نابرابری وقتی برابر با مجموع قطرهای می‌شود که محیط پنج‌ضلعی درونی  $PQRST$  را هم به آن اضافه کنیم). به این ترتیب نخستین حکمان ثابت می‌شود. برای اثبات حکم دوم، نابرابریهای

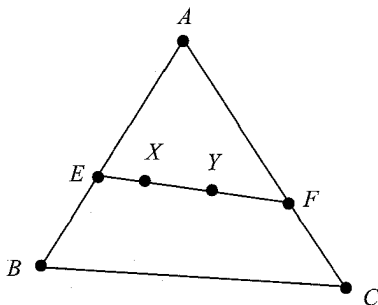
$$AC < AB + BC, BD < BC + CD, CE < CD + DE$$

$$DA < DE + EA, EB < EA + AB$$

را با هم جمع کنید.

۹. اگر نقطه‌های درونی موردنظر  $X$  و  $Y$  باشد، پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند از هر دو طرف امتداد می‌دهیم تا ضلعهای مثلث را قطع کند (شکل ۱۴۴ را ببینید). در این صورت

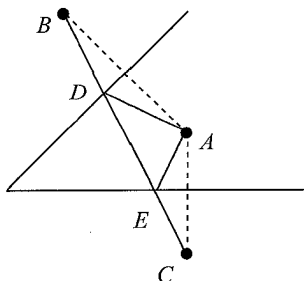
$$EF < EA + AF, \quad EF < EB + BC + CF$$



شکل ۱۴۴

از جمع کردن این نابرابریها نتیجه می‌شود که  $EF$  از نصف محیط مثلث کمتر است. چون  $XY < EF$ ، هم از نصف محیط مثلث کمتر است.

۱۱. جواب مسأله مسیر  $ADEA$  در شکل ۱۴۵ است. در حقیقت، هر مسیر دیگر متناظر با مسیری میان نقطه‌های  $B$  و  $C$  (در این نمودار) است که خطی راست نیست.



شکل ۱۴۵

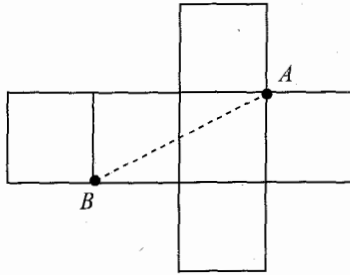
۱۲. اگر  $AD$  و  $AE$  را رسم کنیم (شکل ۱۴۵)، آن وقت

$$BC = BD + DE + EC = AD + DE + EA$$

در این صورت  $DE$  از نصف محیط مثلث  $ADE$  کمتر است (بنابر مسأله ۳). بنابراین  $DE$  از نصف  $BC$  هم کمتر خواهد بود.

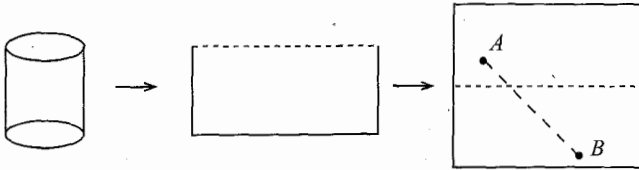
۱۴. فرض کنید بتوانیم مکعب را طوری باز کنیم که نموداری مانند شکل ۱۴۶ به دست آید. در این صورت اگر مگس در نقطه  $A$  باشد، کوتاهترین فاصله  $A$  تا رأس روبه‌روی اش،  $B$ ، خطی راست است. اکنون اگر مکعب را آن‌طور که قبلاً بود ببندیم پاسخ مسأله به دست می‌آید. دانش‌آموزان می‌توانند مدلی کاغذی برای این مسأله درست کنند. می‌توان مقداری عددی به بالها نسبت داد و از آنها خواست که طول کوتاهترین مسیر را پیدا کنند.





شکل ۱۴۶

۱۵. فرض کنید بتوانیم سطح لیوان را طوری «باز کنیم» که مستطیل میانی شکل ۱۴۷ به دست آید و بعد جلو و عقب این مستطیل را هم طوری «باز کنیم» که مستطیل آخری آن شکل به دست آید. در اینجا هم کوتاهترین مسیر باز با خطی راست مشخص می‌شود.



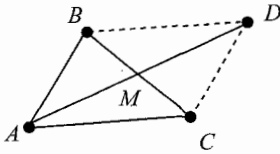
شکل ۱۴۷

۱۶. پاره خط  $AO$  را امتداد می‌دهیم تا ضلع  $BC$  را در نقطه‌ای مانند  $D$  قطع کند. اکنون نابرابریهای مثلث  $AB + BD > AD$  و  $AB + DC > OC$  را با هم جمع می‌کنیم و از طرفین نابرابری حاصل  $OD$  را کم می‌کنیم.

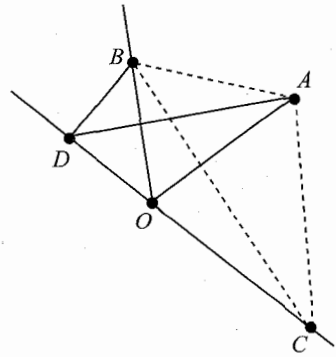
۱۸. جنگلیانی باید به رأس این زاویه برود و بعد به خانه‌اش بازگردد. اگر کلبه‌اش در نقطه  $A$  و زاویه منفرجه مورد نظر  $BOC$  باشد (شکل ۱۴۸ را ببینید)، یکی از زاویه‌های  $AOC$  یا  $AOB$  را که حاده است انتخاب می‌کنیم (ممکن است هر دو حاده باشند)؛ مثلاً فرض کنید زاویه  $AOC$  حاده باشد. در این صورت از نقطه  $B$  بر خط  $OC$  عمود  $BD$  را رسم می‌کنیم. بنابر حکم مسأله ۱۳،  $AB + BC + CA > 2AD$  و روشن است که  $AD > AO$ ؛ بنابر این اثبات کامل می‌شود.

۱۹. از مثلث  $ABC$  متوازی‌الاضلاع  $ABDC$  را بسازید (شکل ۱۴۹). اکنون بنابر نابرابری مثلث،  $AB + BD > AD = 2AM$ . چون  $BD = AC$ ، نخستین حکمان ثابت می‌شود. بعد اگر نابرابریهای متناظر را در مورد هر یک از میانه‌ها بنویسیم و آنها را با هم جمع کنیم، دومین حکم مسأله هم ثابت می‌شود.

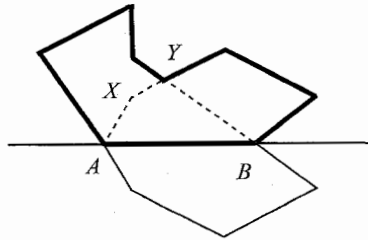
۲۰. هنگام محاسبه محیط چندضلعی تاشده آن بخش از محیط چندضلعی اولیه را که با نقطه چین  $AXYB$  (در مثال شکل ۱۵۰) نشان داده شده است از دست می‌دهیم، اما طول پاره خط  $AB$



شکل ۱۴۹



شکل ۱۴۸



شکل ۱۵۰

را اضافه می‌کنیم. چون مجموع طولهای همه ضلعهای هر چندضلعی، بجز یکی از آنها، از طول ضلع موردنظر بزرگتر است، پس با تا کردن چندضلعی محیط کاهش می‌یابد.

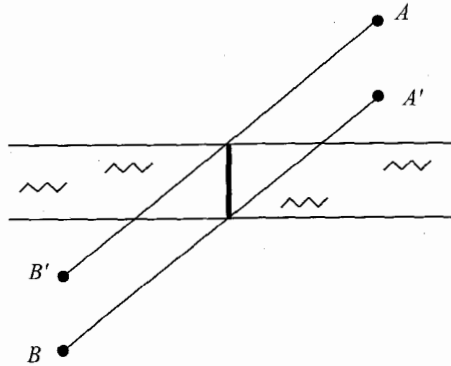
۲۱. دو تا از این ضلعها را در نظر بگیرید که هیچ رأس مشترکی نداشته باشند؛ مثلاً ضلعهای  $AB$  و  $CD$ . در این صورت، از یک طرف،  $AC + BD < AB + CD$  (چون  $AC$  و  $BD$  قطرند). از طرف دیگر، اگر  $BD$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند، آن وقت  $OA + OB > AB$  و  $OC + OD > CD$ . اکنون از جمع کردن این نابرابریها به دست می‌آوریم  $AB + CD < AC + BD$ ، که تناقض است.

۲۲. فرض کنید میانه‌های مثلث یکدیگر را در نقطه  $M$  قطع کنند. در این صورت از جمع کردن نابرابریهای

$$AM + BM > AB, BM + CM > BC, CM + AM > AC$$

و توجه به اینکه طول هر یک از پاره‌خطهای  $AM$ ،  $BM$  و  $CM$ ،  $\frac{2}{3}$  طول یک میانه است، نابرابری موردنظرمان به دست می‌آید.

۲۳. اگر عرض رودخانه مورد نظر  $h$  باشد و دو روستا در نقطه‌های  $A$  و  $B$  قرار داشته باشند، آن وقت دو سر پل باید در نقطه‌های برخورد خطهای  $A'B$  و  $AB'$  با کرانه‌های رودخانه گذاشته شوند، که در اینجا نقطه‌های  $A'$  و  $B'$  از انتقال نقطه‌های  $A$  و  $B$  به اندازه  $h$  به طرف رودخانه به دست می‌آیند (شکل ۱۵۱).



شکل ۱۵۱

۲۴. بزرگترین قطر این پنج ضلعی، مثلاً  $XY$ ، را در نظر بگیرید. دو تا از رأسهای پنج ضلعی در یک طرف این قطر قرار دارند و بنابراین دو قطر متقاطع وجود دارند که یک سر هر یک از آنها به ترتیب نقطه‌های  $X$  و  $Y$  اند. اکنون به آسانی می‌توان دریافت که از برخورد این سه قطر یک مثلث تشکیل می‌شود.

## ۷. بازیها

۲. بعد از هر حرکت تعداد کپه‌ها یکی زیاد می‌شود. در ابتدا سه کپه داریم و در پایان بازی ۴۵ تا. بنابراین روی هم ۴۲ حرکت انجام می‌شود. در نتیجه حرکت آخر را که به برد منجر می‌شود همیشه بازیکن دوم انجام می‌دهد.

۳. زوجیت عدد حاصل فقط به تعداد عددهای صحیح فرد مجموعه عددهای داده شده بستگی دارد نه به موقعیت علامتهای بعلاوه و منها. چون در ابتدا ۱۰ عدد صحیح فرد وجود دارد و ۱۰ عددی زوج است، بازیکن اول بازی را می‌برد.

۴. بعد از هر حرکت تعداد سطرها و همین‌طور تعداد ستونهایی که می‌توان در آنها یک رخ گذاشت یکی کم می‌شود. بنابراین روی هم فقط ۸ حرکت ممکن وجود دارد و در نتیجه بازیکن دوم حرکت آخر (حرکت منجر به برد) را انجام می‌دهد.

۵. زوجیت تعداد ۱‌های روی تخته سیاه بعد از هر حرکت بدون تغییر می‌ماند. چون در ابتدا تعداد ۱‌ها عددی زوج است، ممکن نیست که در پایان بازی فقط یک رقم ۱ بماند (زیرا ۱ عددی فرد

است!) بنابراین بازیکن دوم برنده می‌شود.

۶. وقتی این بازی را انجام می‌دهیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد اولیه دیر یا زود در مرحله‌ای نوشته می‌شود (این بازی را با الگوریتم اقلیدسی مقایسه کنید). بنابراین هر مضرب آن هم که از عددهای اولیه بزرگتر نباشد در اینجا می‌آید. در این مورد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای اولیه ۱ است و در نتیجه هر یک از عددهای از ۱ تا ۳۶ باید در اینجا نوشته شود. بنابراین ۳۴ حرکت وجود دارد و از این رو بازیکن دوم برنده می‌شود.

۷. این بازی کمی جدی‌تر است، زیرا، در حقیقت، بازیکنی که به نظر می‌رسد دارد برنده می‌شود ممکن است اشتباهی مرتکب شود و برتری‌اش را از دست بدهد. این اشتباه این است که حرکت‌های طوری باشند که خانه‌های خط‌خورده باقی‌مانده همگی یا در یک ستون باشند یا در یک سطر و به این ترتیب حریف بتواند در حرکت بعدی برنده شود. معلوم است که بازنده این بازی بازیکنی است که دقیقاً این حرکت باخت‌آور را انجام دهد. توجه کنید که بعد از خط زدن یک سطر از صفحه‌ای  $m \times n$  می‌توانیم خانه‌های باقی‌مانده را صفحه‌ای  $(m-1) \times n$  در نظر بگیریم. به همین ترتیب، می‌توانیم با خط زدن یک ستون از صفحه‌ای  $m \times n$  صفحه‌ای  $m \times (n-1)$  تشکیل دهیم. تنها وضعیتی که در آن هر حرکتی «باخت‌آور» است، صفحه  $2 \times 2$  است. بنابراین بازیکنی که با حرکتش این موقعیت را برای حریفش به وجود بیاورد برنده می‌شود. به هر حال، همان‌طور که دیدیم، بعد از هر حرکت مجموع تعداد سطرها و ستونها یکی کم می‌شود. بنابراین برنده از روی زوجیت این مجموع در ابتدای بازی مشخص می‌شود. در قسمت (الف) برنده بازیکن اول است، در حالی که در قسمتهای (ب) و (ج) برنده دومی است. توجه کنید که در قسمت (ب) بازیکن دوم می‌تواند استراتژی تقارن را دنبال کند (بخش ۲ را ببینید).

۱۱. چون اسب همیشه از خانه‌ای سیاه به خانه‌ای سفید می‌رود یا برعکس، بازیکن دوم می‌تواند با استفاده از تقارن نسبت به نقطه یا خط بازی را ببرد.

۱۲. اگر بازیکن اول در نخستین حرکتش شاه را در خانه مرکزی صفحه قرار دهد و بعد یک استراتژی تقارن را پیش گیرد برنده می‌شود.

۱۳. بازیکن دوم در هر دو قسمت مسأله استراتژی برد دارد، منتها در قسمت (الف) با استفاده از تقارن نسبت به خط و در قسمت (ب) با استفاده از تقارن نسبت به نقطه. اثبات در مورد اولی واقعاً ساده است: بازیکن دوم فقط کافی است تقارن میان حرکت‌های خودش و حریف را حفظ کند، این‌طور که در هر حرکت به خانه‌ای برود که قرینه مقصد حرکت قبلی بازیکن اول نسبت به خط میان سطرها و چهارم و پنجم صفحه است. چون هر دو خانه‌ای که نسبت به این خط قرینه هم‌اند همیشه رنگ‌هایشان با هم فرق می‌کند، ممکن نیست این وضعیت پیش بیاید که حرکت اخیر بازیکن اول مانع حرکت متقارن بازیکن دوم شود.

راه حل دومی دشوارتر است گرچه ایده‌اش عین همان است: بازیکن دوم در اینجا باید از تقارن

نسبت به مرکز صفحه استفاده کند. تکمیل جزئیات راه حل را برعهده خواننده می‌گذاریم.

۱۴. بازیکن دوم با استفاده از استراتژی تقارن نسبت به نقطه برنده می‌شود.
۱۵. اگر بازیکن اول ابتدا مهره مرکزی را بردارد و بعد استراتژی تقارن نسبت به نقطه را دنبال کند برنده می‌شود.
۱۶. اگر با نخستین حرکت بازیکن اول تعداد خرده‌سنگهای دو کپه برابر شوند و بعد او استراتژی بازیکن دوم در مسأله  $1^0$  را پیش بگیرد برنده می‌شود.
۱۷. بازیکن اول استراتژی برد دارد. ابتدا باید وتری رسم کند تا نقطه‌های موردنظر به دو گروه ۹ تایی تقسیم شوند. بعد باید در برابر هر حرکت حریفش حرکتی کاملاً متقارن با آن انجام دهد. توجه کنید که این استراتژی به اینکه نقطه‌ها چطور دور دایره چیده شده باشند بستگی ندارد.
۱۸. در هر دو قسمت مسأله بازیکن دوم استراتژی برد دارد. بازیکن اول هر طور که بازی را آغاز کند، در برابر حرکتش بازیکن دوم می‌تواند طوری بازی کند که دو ردیف عین هم از گلبرگها روی گل باقی بمانند. بعد می‌تواند استراتژی تقارن را دنبال کند.
۱۹. در قسمتهای (الف) و (ب) مسأله، بازیکن دوم با دنبال کردن یک استراتژی تقارن نسبت به نقطه استراتژی برد دارد.
- در قسمت (ج) بازیکن اول استراتژی برد دارد. در نخستین حرکتش آن ردیف را که از مکعبهای مرکزی چهار لایه  $3 \times 3$  تشکیل شده است سوراخ می‌کند. بعد از این کار به طور متقارن نسبت به نقطه مرکز شکل بازی می‌کند.
۲۰. بازنده بازیکنی است که مستطیلی (و نه مربعی) به عرض ۱ جدا کند. بازیکن اول استراتژی برد دارد، به این ترتیب که ابتدا شکلات موردنظر را به دو تکه  $5 \times 5$  می‌شکند. بعد از این کار به طور متقارن بازی می‌کند.
۲۱. اگر بازیکن اول در نخستین حرکتش  $x$  را در خانه مرکزی صفحه بگذارد و بعد در برابر هر یک از حرکت‌های بازیکن دوم یک  $x$  را به‌طور متقارن نسبت به همان خانه قرار دهد می‌برد.
۲۳. بازیکن اول استراتژی برد دارد. سطرها و ستونهای صفحه شطرنج را به ترتیب معمول شماره‌گذاری می‌کنیم، یعنی طوری که مختصات خانه  $a1$ ،  $(1, 1)$  باشد و مختصات خانه  $h8$ ،  $(8, 8)$ . اکنون موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها شاه در خانه‌ای می‌نشیند که هر دو مختصش عددی زوج‌اند. در نخستین حرکت هم شاه به خانه  $b2$  می‌رود.
۲۴. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها تعداد آب‌نباتهای هر دو دسته عددی فرد باشند. بازیکن اول در نخستین حرکتش باید دسته ۲۱ عددی آب‌نبات را بخورد و دسته ۲۰ عددی را به دو دسته دلخواه، هر یک شامل تعدادی فرد آب‌نبات، تقسیم کند.

۲۵. بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی اند که در آنها تعداد خانه‌های خالی میان این مهره‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۶. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی اند که در آنها قوطی شامل  $1 - 2^n$  چوب کبریت است. در نخستین حرکت باید ۲۵۵ چوب کبریت در قوطی باقی گذاشته شود.

۲۷. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی اند که در آنها بزرگترین دسته شامل  $1 - 2^n$  خرده‌سنگ است. در نخستین حرکت باید دو کپه اول را به‌طور دلخواه تقسیم کرد و کپه سوم را به ترتیب به دو کپه  $63$  تایی و  $7$  تایی.

۲۸. در این بازی بازیکنی که یک عدد  $1$  به‌دست بیاورد برنده می‌شود. بنابراین برنده بازیکن اول است به شرطی که در یابد که نوشتن عددهای فرد موقعیتهای برد را به‌دست می‌دهد.

۲۹. در قسمت (الف) مسأله، بازیکن دوم استراتژی برد دارد و در قسمت (ب)، اولی. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی اند که در آنها هر یک از دسته‌ها شامل تعدادی فرد چوب‌کبریت است. در مورد مسأله‌های  $32$  تا  $38$ ، پاسخهایشان را می‌آوریم که از روش تحلیل از آخر به‌دست آمده‌اند. خواننده می‌تواند خودش جزئیات راه حل را به‌دست بیاورد.

۳۲. بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در شکل ۱۵۲ آرایش علامتهای بعلاوه و منها را نشان داده‌ایم.

-	-	+	+	-	+	+
-	-	+	+	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	+	+	-	+	+
-	-	+	+	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-

شکل ۱۵۲

۳۳. هر دو قسمت (الف) و (ب) مسأله را می‌توانیم با استفاده از صفحه شطرنج صورتبندی کنیم. در این صورت معلوم می‌شود که بازی قسمت (الف) عین بازی مسأله  $32$  است. آرایشهای علامتهای بعلاوه و منها در هر دو قسمت مسأله عین هم‌اند و در شکل مسأله  $32$  (شکل ۱۵۲) نشان داده شده‌اند.

۳۴. بازیکن اول استراتژی برد دارد. آرایش علامتهای بعلاوه و منها را بعد از صورتبندی مسأله با استفاده از صفحه شطرنج در شکل ۱۵۳ نشان داده‌ایم.

۳۵. این مسأله مثالی است از اینکه برای تحلیل بازیها از آخر آوردن تعبیری هندسی ضروری نیست. در اینجا مناسب است که هر عدد را با یک بعلاوه یا منها علامتگذاری کنیم. فقط مضربهای  $10$  را با بعلاوه علامتگذاری می‌کنیم. بنابراین بازیکن دوم استراتژی برد دارد.

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+
+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+

شکل ۱۵۳

۳۶. موقعیتهای برد در اینجا عددهای از ۵۶ تا ۱۱۱ یا عددهای از ۴ تا ۶ اند. بنابراین بازیکن اول آخرسر برنده می‌شود، به شرطی که در نخستین حرکتش یکی از عددهای ۴، ۵ یا ۶ را به دست بیاورد.

۳۷. موقعیتهای برد در اینجا عددهای ۵۰۰، ۲۵۰، ۱۲۵، ۶۲، ۳۱، ۱۵، ۷ و ۳ اند. بازیکن اول استراتژی برد دارد.

۳۸. موقعیتهای برد در اینجا مضرهای ۳ اند. بازیکن اول آخر سر برنده می‌شود، مثلاً این طور که در نخستین حرکتش یکی از عددهای ۱، ۴، یا ۱۶ را از عدد ۱۰۰۰ کم کند.

### ۹. استقرا

۸. پایه استقرا را می‌توان یا  $n = 1$  اختیار کرد یا  $n = 2$ . برای اثبات گام استقرایی  $k + 1$  نقطه روی دایره در نظر می‌گیریم. پاره‌خطهایی که همه این نقطه‌ها بجز نقطه  $(k + 1)$  ام را به هم وصل می‌کنند درون دایره را بنابر فرض استقرا به

$$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} + \frac{k(k-1)}{2} + 1$$

ناحیه تقسیم می‌کنند. پاره‌خطی که نقطه  $(k + 1)$  ام را به نقطه  $i$  ام ( $i$  عددی طبیعی است که  $i \leq k$ ) وصل می‌کند  $(i - 1)(k - i)$  پاره‌خط دیگر را قطع می‌کند. بنابراین، با افزودن این پاره‌خط، تعداد ناحیه‌ها به اندازه  $1 + (i - 1)(k - i)$  زیاد می‌شود. با ترسیم همه پاره‌خطهایی که نقطه  $(k + 1)$  ام را به  $k$  نقطه دیگر وصل می‌کنند تعداد ناحیه‌ها به اندازه

$$1 + (1 \times (k - 2) + 1) + \dots + ((i - 1)(k - i) + 1) + \dots + ((k - 2) \times 1 + 1) + 1$$

زیاد می‌شود. اما عبارت آخر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(k+1)(1+2+\dots+k) - (1^2+2^2+\dots+k^2) - k^2+k$$

با استفاده از اتحادهای

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

(راه‌حل مسأله ۶ را ببینید) و

$$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

(مسأله ۱۰ را ببینید)، به دست می‌آوریم

$$1 + (1 \times (k-2) + 1) + \dots + ((i-1)(k-i) + 1)$$

$$+ \dots + ((k-2) \times 1 + 1) + 1$$

$$= \frac{k(k+1)^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - k^2+k$$

فقط می‌ماند ثابت کنیم که

$$\left( \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} + \frac{k(k-1)}{2} + 1 \right)$$

$$+ \left( \frac{k(k+1)^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - k^2+k \right)$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{24} + \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

که این هم محاسبه‌ای جبری بیش نیست.

۹. پایه استقرا عبارت است از  $n=1$ . گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنا بر فرض استقرا،

$$1+3+\dots+(2k-1) = k^2$$

بنابراین

$$1+3+\dots+(2k-1) + (2(k+1)-1)$$

$$= k^2 + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$



۱۰. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ . گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

۱۱. پایه استقرا عبارت است از  $n = 2$  و درستی آن واضح است. بنابر فرض استقرا،

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1) \times k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1) \times k + k \times (k+1) \\ &= \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + k \times (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \end{aligned}$$

۱۲. پایه استقرا عبارت است از  $n = 2$ . بنابر فرض استقرا

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} = \frac{k-1}{k}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

۱۳. از استقرا روی  $n$  استفاده می‌کنیم. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ . گام استقرایی را ثابت

می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،

$$1 + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

بنابراین

$$1 + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$$

۱۴. از استقرا روی  $n$  استفاده می‌کنیم. درستی پایه استقرا ( $n = 1$ ) کاملاً واضح است. برای اثبات گام استقرایی، بنابر فرض استقرا می‌توان نوشت

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \dots + \frac{1}{(a+(k-1)b)(a+kb)} = \frac{k}{a(a+kb)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \dots + \frac{1}{(a+(k-1)b)(a+kb)} \\ & \quad + \frac{1}{(a+kb)(a+(k+1)b)} \\ & = \frac{k}{a(a+kb)} + \frac{1}{(a+kb)(a+(k+1)b)} \\ & = \frac{k+1}{a(a+(k+1)b)} \end{aligned}$$

۱۵. از استقرا روی  $n$  استفاده می‌کنیم. پایه استقرا عبارت است از  $n = 0$ :

$$\frac{m!}{0!} = \frac{(m+1)!}{0!(m+1)}$$

برای اثبات گام استقرایی (بنابر فرض استقرا) می‌توان نوشت

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+k)!}{k!} = \frac{(m+k+1)!}{k!(m+1)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+k)!}{k!} + \frac{(m+k+1)!}{(k+1)!} \\ & = \frac{(m+k+1)!}{k!(m+1)!} + \frac{(m+k+1)!}{(k+1)!} \\ & = \frac{(m+k+1)!}{k!} \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\ & = \frac{(m+k+2)!}{(k+1)!(m+1)} \end{aligned}$$

۱۶. پایه استقرا عبارت است از  $n = 2$ . بنابر فرض استقرا،

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

بنابراین

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ = \frac{k+1}{2k} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

۱۷. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$  و  $36$  بر  $9$  بخش پذیر است. اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،  $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$  بر  $9$  بخش پذیر است. از طرف دیگر، می‌توان نوشت

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + (k+3)^3 - k^3 \\ = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$$

بنابراین  $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$  هم بر  $9$  بخش پذیر است.

۱۸. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت،  $3^4 + 8 - 9 = 8^0$  و  $8^0$  بر  $16$  بخش پذیر است. اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،  $3^{2k+2} + 8k - 9$  بر  $16$  بخش پذیر است. می‌توان نوشت

$$(3^{2k+4} + 8(k+1) - 9) - (3^{2k+2} + 8k - 9) = 3^{2k+2} \times 8 + 8 = 8(3^{2k+2} + 1)$$

عدد  $3^{2k+2} + 1$  زوج است، بنابراین  $8(3^{2k+2} + 1)$  (و در نتیجه،  $3^{2k+4} + 8(k+1) - 9$ ) بر  $16$  بخش پذیر است.

۱۹. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت  $1 = 15 - 1 = 4^1$ . اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که  $4^k + 15k - 1$  بر  $9$  بخش پذیر است. می‌توان نوشت

$$(4^{k+1} + 15(k+1) - 1) - (4^k + 15k - 1) = 4^k \times 3 + 15 = 3(4^k + 5)$$

باقی مانده تقسیم عدد  $4^k$  بر  $3$ ،  $1$  می‌شود. بنابراین  $4^k + 5$  بر  $3$ ، و در نتیجه،  $3(4^k + 5)$  بر  $9$  بخش پذیر است.

۲۰. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت  $11^3 + 12^3 = 23 \times 133$ . در ضمن، بنابر فرض استقرا، می‌دانیم که  $11^{k+2} + 12^{2k+1}$  بر  $133$  بخش پذیر است. می‌توان نوشت

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \times 12^{2k+1}$$

بنابراین  $11^{k+3} + 12^{2k+3}$  بر  $13^3$  بخش پذیر است.

۲۱. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت واضح است که  $1 + 2^3$  بر  $3^2$  بخش پذیر است. از فرض استقرا می دانیم که  $1 + 2^{3^k}$  بر  $3^{k+1}$  بخش پذیر است. علاوه بر این،

$$2^{3^{k+1}} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = (2^{3^k} + 1)((2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1)$$

بنابراین فقط می ماند ثابت کنیم که  $1 + 2^{3^k} - (2^{3^k})^2$  بر  $3$  بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم عدد

$2^{3^k}$  بر  $3$  برابر  $2$  است. در نتیجه، باقی مانده تقسیم عدد  $1 + 2^{3^k} - (2^{3^k})^2$  بر  $3$  صفر می شود.

۲۲. پایه استقرا عبارت است از  $n = 0$  و  $n = 1$  و درستی حکم مسأله در این حالتها واضح است.

برای اثبات گام استقرایی از  $n$  به  $n + 1$  باید ثابت کنیم که  $d + c(n + 1) + ab^{n+1}$  بر  $m$  بخش پذیر

است. از این نکته استفاده می کنیم که جمله قبلی دنباله  $d + cn + ab^n$  بر  $m$  بخش پذیر است

و این جمله را در  $b$  ضرب می کنیم. در این صورت به دست می آوریم که  $bd + cbn + ab^{n+1}$

بر  $m$  بخش پذیر است و از این رو فقط می ماند ثابت کنیم که  $d(1 - b) + c(n + 1 - bn)$

هم بر  $m$  بخش پذیر است. با افزودن جمله  $cn(b - 1)$ ، که بر  $m$  بخش پذیر است، به این

عبارت، نتیجه می شود که  $c + d(1 - b)$  هم بر  $m$  بخش پذیر است، زیرا می توان آن را به شکل

$$(1 - b)(a + d) - (c + ab - a)$$

نوشت. به این ترتیب اثبات گام استقرایی کامل می شود.

۲۳. پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت نابرابری  $1 > 2^1$  به وضوح درست است.

اکنون نوبت اثبات گام استقرایی است. بنا بر فرض استقرا،  $k > 2^k$ . بنابراین

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k \geq k + 1$$

۲۴. الف) پاسخ:  $n \geq 3$ .

اگر  $n = 1, 2$ ، آن وقت  $2n + 1 < 2^n$ . به استقرا روی  $n$  ثابت می کنیم که اگر  $n \geq 3$ ،

$$2^n > 2n + 1.$$

پایه استقرا عبارت است از  $n = 3$ : در این حالت،  $2^3 > 2 \times 3 + 1$ . اثبات گام

استقرایی را از فرض  $2k + 1 > 2^k$  آغاز می کنیم. در این صورت

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 4k + 2 > 2(k + 1) + 1$$

ب) پاسخ:  $n = 1$  و  $n \geq 5$ .

اگر  $n = 1, 2$ ،  $2^1 > 1^2$  و اگر  $n$  عددهای  $2, 3$  یا  $4$  باشد،  $2^n \leq n^2$ . به استقرا روی  $n$

ثابت می کنیم که اگر  $n \geq 5$ ، آن وقت  $2^n > n^2$ .

پایه استقرا عبارت است از  $n = 5$ : در این حالت،  $2^5 > 5^2$ . اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که  $2^k > k^2$ . بنابراین

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

(در اینجا از نابرابری  $2^k > 2k + 1$  استفاده کرده‌ایم که در مسأله ۲۴ (الف) ثابت شد).

۲۵. پایه استقرا عبارت است از  $n = 2$ : در این حالت  $\frac{13}{24} > \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ . علاوه بر این، بنابر

فرض استقرا،

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \\ &= \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{2}{2k+2} = \frac{1}{k+1}$$

۲۶. پایه استقرا عبارت است از  $n = 2$  و  $n = 3$ : در این حالتها  $4 > 1 + 2\sqrt{2}$  و  $8 > 1 + 3 \times 2$ .

چون

$$2^k > 1 + k\sqrt{2^{k-1}}$$

به دست می‌آوریم

$$2^{k+1} > 2 + 2k\sqrt{2^{k-1}} > 1 + \sqrt{2} \times k\sqrt{2^k}$$

اکنون فقط کافی است توجه کنیم که اگر  $k \geq 3$ ، آن وقت  $\sqrt{2} \times k > k + 1$ .

۲۷. باید ثابت کنیم که به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  و عددهای حقیقی دلخواه  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

این حکم را با استفاده از استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم.

پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$  و  $n = 2$ . اگر  $n = 1$ ، درستی حکم واضح است. اگر

$n = 2$ ، حکم به شکل  $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$  درمی‌آید که می‌توان آن را با تحلیل حالت به

حالت ساده‌ای، یعنی بررسی هر چهار حالت ممکن علامتهای این عددها، ثابت کرد. اکنون، با استفاده از پایهٔ استقرا به دست می‌آید

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}|$$

آخر سر از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

۲۸. از استقرا روی  $n$  استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از  $n = 2$ : در این حالت، اگر  $x \neq 0$ ,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

اکنون بنابر فرض استقرا،  $(1+x)^k > 1 + kx$  و در نتیجه

$$(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$$

(توجه کنید که  $(1+x) > 0$ .)

۲۹. پایهٔ استقرا عبارت است از  $n = 1$ : در این حالت

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابر فرض استقرا،

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

بنابراین

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2k} \times \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \times \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

فقط می‌ماند که نابرابری

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

را ثابت کنیم. این نابرابری هم‌ارز نابرابری

$$(2k+1)(2k+3) \leq (2k+2)^2$$

است که درستی آن با بسط دادن دو طرفش ثابت می‌شود.

۳۳. در اینجا پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$  و  $n = 2$ . اثبات گام استقرایی هم کاملاً آسان است:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

۳۴. در حقیقت،  $a_3 = 1$ ،  $a_4 = -1$ ،  $a_5 = -2$ ،  $a_6 = -1$ ،  $a_7 = 1$  و  $a_8 = 2$ . از این رو به ازای  $n = 1$  و  $n = 2$ ،  $a_{n+6} = a_n$ . اکنون به «استقرای قوی» (بخش ۴ فصل «استقرا» را ببینید) حکم مسأله ثابت می‌شود.

۳۵. می‌توان حکم مسأله را در مورد عددهای طبیعی ۱ تا ۵ مستقیماً بررسی کرد. اکنون اگر عدد طبیعی  $x$  داده شده باشد، فرض کنید  $F_n$  بزرگترین عدد فیبوناتچی باشد که از  $x$  بزرگتر نیست. در این صورت،  $F_{n-1} > x - F_n \geq 0$  (چون  $F_{n-1} + F_n = F_{n+1} > x$ ) و بنابراین  $F_n - x$  را می‌توان به شکل مجموع چند عدد فیبوناتچی متمایز و کوچکتر از  $F_{n-1}$  نوشت.

۳۶. حکم زیر را به استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم:

به ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  باقی مانده‌های تقسیم عددهای فیبوناتچی  $F_n$  و  $F_{n+8}$  بر ۳، با هم برابرند.

پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$  و  $n = 2$ : در این حالتها،  $F_1 = 1$ ،  $F_2 = 1$ ،  $F_9 = 34$ ،  $F_{10} = 55$  و معلوم است که باقی مانده‌های تقسیم  $F_1$  و  $F_9$  (و  $F_2$  و  $F_{10}$ ) بر ۳ با هم برابرند.

اثبات گام استقرایی بسیار شبیه راه حل مسأله ۳۴ است. بنابر فرض استقرا، باقی مانده‌های تقسیم  $F_k$  و  $F_{k+8}$  (و همین‌طور،  $F_{k-1}$  و  $F_{k+7}$ ) بر ۳ با هم برابرند. چون  $F_{k+9} = F_{k+8} + F_{k+7}$  و  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$  پس باقی مانده‌های تقسیم  $F_{k+1}$  و  $F_{k+9}$  هم بر ۳ برابرند. فقط می‌ماند که باقی مانده‌های تقسیم نخستین هشت عدد فیبوناتچی بر ۳ را حساب کنیم. این باقی مانده‌ها عبارت‌اند از

$$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0$$

بنابراین  $n$  امین عدد فیبوناتچی وقتی و فقط وقتی بر ۳ بخش پذیر است که  $n$  بر ۴ بخش پذیر باشد. ۴۲. حکم مورد نظر را به استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم. درستی حکم در مورد پایه استقرا،  $n = 1$ ، واضح است. برای اثبات گام استقرایی ابتدا ثابت می‌کنیم که با استفاده از چنین ماشین حسابی می‌توانیم عددی طبیعی و کوچکتر از  $n$  به دست آوریم. برای اثبات این ادعا، از میان  $m$ ،  $m$  و  $0$  دو عددی را انتخاب می‌کنیم که یا هر دو زوج باشند و یا هر دو فرد و میانگین حسابیشان،  $x$ ، را حساب می‌کنیم. از دو عدد انتخاب شده دست‌کم یکی صفر نیست. به جای این عدد غیر صفر  $x$  می‌گذاریم و این عمل را در مورد سه عدد جدید تکرار می‌کنیم. این روند را آن قدر تکرار می‌کنیم تا اینکه از سه عدد مثبت حاصل یکی کوچکتر از  $n$  شود (دیر یا زود این وضعیت پیش می‌آید، زیرا بعد از هر عمل مجموع دو عدد مثبت در سه تایی حاصل کاهش می‌یابد).

اکنون فرض کنید  $l$  بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر از  $n$  باشد که می توان آن را با استفاده از چنین ماشین حسابی به دست آورد. علاوه بر این، فرض کنید  $l \neq n - 1$ . بنابر فرض همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا  $l$  را می توان با استفاده از چنین ماشین حسابی به دست آورد. اگر  $l$  و  $n$  هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، می توانیم میانگین حسابی  $l$  و  $n$ ،  $y$ ، را حساب کنیم که این با تعریف  $l$  تناقض دارد، زیرا  $n > l > n/2$ . اگر از عددهای  $l$  و  $n$  یکی فرد و دیگری زوج باشد، می توانیم میانگین حسابی  $l - 1$  و  $n$  را حساب کنیم و باز به همان تناقض برسیم.

۴۳. راهنمایی: گام استقرایی از دستور

$$3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1} + 1$$

که به ازای هر عدد صحیح مانند  $n$  درست است، نتیجه می شود.

۴۴. از استقرا روی  $m$  استفاده می کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از  $m = 1$ : در این حالت باید ثابت کنیم  $2^{n-1} \geq n$ . این نابرابری را می توان به استقرا روی  $n$  ثابت کرد.

اکنون بنابر فرض استقرا،  $2^{m+n-2} \geq mn$  و در نتیجه

$$2^{(m+1)+n-2} \geq 2mn \geq (m+1)n$$

۴۵. راهنمایی: ابتدا ثابت کنید می توان هر مربع را به چند تکه طوری برید که با کنار هم چیدن آنها می شود مستطیلی درست کرد که طول یک ضلعش واحد باشد.

۴۶. گام استقرایی را می توان این طور ثابت کرد:  $2^{n+1}$  عدد داده شده را به دو دسته، هر یک شامل  $2^n$  عدد، تقسیم کنید. در هر یک از این دو دسته می توانیم  $2^{n-1}$  عدد بیابیم که مجموعشان بر  $2^{n-1}$  بخش پذیر باشد. بعد، از میان  $2^n$  عدد باقی مانده می توانیم مجموعهٔ سومی هم شامل  $2^{n-1}$  عدد پیدا کنیم که مجموع آنها هم بر  $2^{n-1}$  بخش پذیر باشد. فرض کنید مجموع عددهای این سه دسته  $2^{n-1}a$ ،  $2^{n-1}b$  و  $2^{n-1}c$  باشد. در میان عددهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  می توانیم دو عدد پیدا کنیم که یا هر دو زوج باشد یا هر دو فرد. اجتماع مجموعه های متناظر این دو عدد مجموعه ای شامل  $2^n$  عدد است که مجموعشان بر  $2^n$  بخش پذیر است.

۴۷. در مورد  $n$  دایره پاسخ مسأله  $2 + n(n-1)$  است. برای اثبات این حکم می توانیم از استقرا روی  $n$  استفاده کنیم. درستی پایهٔ استقرا ( $n = 1$ ) واضح است.

برای اثبات گام استقرایی موقتاً دایرهٔ  $(k+1)$  ام را برمی داریم. بنابر فرض استقرا،  $k$  دایره صفحه را حداکثر به  $2 + k(k-1)$  ناحیه تقسیم می کنند. اکنون دایرهٔ برداشته شده را «سرجایش می گذاریم». این دایره هر یک از  $k$  دایرهٔ قبلی را حداکثر در دو نقطه قطع می کند و بنابراین تعداد ناحیه های صفحه حداکثر  $2k$  زیاد می شود. با به دست آوردن دستور

$$k(k-1) + 2 + 2k = k(k+1) + 2$$



این بخش از اثبات کامل می‌شود.

می‌توان آرایشی از دایره‌ها را که صفحه را به این تعداد ناحیه تقسیم می‌کنند به استقرا به دست آورد. این آرایشها (به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ، یک آرایش) را طوری می‌سازیم که ویژگیهای زیر را داشته باشند:

(الف) هیچ سه دایره‌ای از یک نقطه نگذرند؛

(ب) اشتراک درونهای همهٔ این  $n$  دایره تهی نباشد؛

(ج)  $n$  دایره‌مان صفحه را به  $2 + n(n-1)$  ناحیه تقسیم کنند.

باز هم درستی پایهٔ استقرا، یعنی حالتی که  $n = 1$ ، واضح است.

اثبات گام استقرایی را با آرایشی از  $k$  دایره (که فرض می‌شود وجود دارد) شروع می‌کنیم که صفحه را به  $2 + k(k-1)$  ناحیه تقسیم می‌کند. دایرهٔ دیگری را طوری اضافه می‌کنیم که از نقطه‌ای واقع در درون هر  $k$  دایرهٔ این آرایش بگذرد. این دایرهٔ  $(k+1)$ ام را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که از نقطه‌های برخورد دایره‌های دیگر نگذرد. این آرایش جدید شامل  $k+1$  دایره است و همهٔ ویژگیهای موردنظر را دارد.

در مورد  $n$  مثلث پاسخ مسأله  $2 + 3n(n-1)$  است. اثبات دقیقاً مانند اثبات بالاست، بجز اینکه دو مثلث یکدیگر را حداکثر در ۶ نقطه قطع می‌کنند.

برای ساختن آرایشی از  $n$  مثلث که صفحه را به  $2 + 3n(n-1)$  ناحیه تقسیم کنند، می‌توان  $n$  مثلث متساوی‌الاضلاع برابر را طوری رسم کرد که مرکزشان یکی باشد و هیچ سه تایی از آنها در یک نقطه هم را قطع نکنند.

۴۸. از استقرا روی  $n$ ، تعداد دایره‌ها، استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از  $n = 1$ .

برای اثبات گام استقرایی موقتاً دایرهٔ  $(k+1)$ ام و وترش را برمی‌داریم. بنابر فرض استقرا، ناحیه‌هایی از صفحه را که  $k$  دایره و وترهایشان به‌وجود آورده‌اند می‌توان با ۳ رنگ (مثلاً، قرمز، آبی و سبز) طوری رنگ کرد که شرط موردنظر برقرار باشد.

اکنون دایرهٔ برداشته شده و وترش را سرجایشان می‌گذاریم. وتر موردنظر درون این دایره را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. رنگهای یک ناحیه را با استفاده از طرح: قرمز ← آبی، آبی ← سبز، سبز ← قرمز و رنگهای ناحیهٔ دیگر را با استفاده از طرح: قرمز ← سبز، سبز ← آبی، آبی ← قرمز عوض می‌کنیم. رنگهای ناحیه‌هایی که بیرون دایرهٔ  $(k+1)$ ام قرار دارند بی‌تغییر می‌مانند. در رنگ‌آمیزی حاصل، رنگهای هر دو ناحیهٔ مجاور از صفحه مختلف‌اند.

۴۹. از اصل استقرای ریاضی «اصل خوشترتیبی» نتیجه می‌شود. در واقع فرض کنید اصل استقرای ریاضی درست باشد و «اصل خوشترتیبی» نادرست. مجموعه‌ای ناتهی مانند  $S$  از عددهای طبیعی درنظر بگیرید که کوچکترین عضو نداشته باشد. به استقرا ثابت می‌کنیم که هیچ عدد طبیعی

مانند  $n$  متعلق به  $S$  نیست (که این مطلب با ناتهی بودن  $S$  تناقض دارد).

پایه استقرا عبارت است از  $n = 1$ . اگر  $1 \in S$ ، آن وقت ۱ کوچکترین عضو  $S$  است.

اکنون نوبت اثبات گام استقرایی است. بنابر فرض استقرا، عددهای ۱، ۲، ... و  $k$  متعلق به

$S$  نیستند. در این صورت اگر  $k + 1 \in S$ ، آن وقت  $k + 1$  کوچکترین عضو  $S$  است.

اکنون ثابت می‌کنیم که از اصل خوشترتیبی، اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود.

فرض کنید که اصل خوشترتیبی درست باشد ولی اصل استقرای ریاضی نادرست. زنجیره‌ای

از حکمها را در نظر بگیرید که نخستین حکم آن درست باشد و به ازای هر عدد طبیعی مانند  $k$ ، از

درستی حکم  $k$  ام زنجیره درستی حکم  $(k + 1)$  ام آن نتیجه شود. مجموعه همه عددهای طبیعی

مانند  $n$  را که حکم  $n$  ام زنجیره درست نیست، تشکیل دهید. فرض کنید این مجموعه ناتهی و

$n_0$  کوچکترین عضوش باشد. در این صورت حکم  $(n_0 - 1)$  ام درست است اما حکم  $n_0$  ام

درست نیست. این نتیجه با فرضمان تناقض دارد و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

## ۱۰. بخش پذیری - ۲

۳. در راه حل مسأله ۲ به جای جمع کردن  $a - b$  و  $c - d$  آنها را از هم کم کنید.

۵. حکم مسأله مستقیماً از حکم مسأله ۴ نتیجه می‌شود.

۸. می‌توان نوشت

$$(-1)^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1 \text{ (به پیمانه ۳۱)}, \quad 61^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \text{ (به پیمانه ۳۱)}$$

۹. (ب) مستقیماً با ضرب کردن عبارتها می‌توان ثابت کرد که وقتی  $n$  عددی فرد است،

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1})$$

۱۰. جمعوندهای  $k^n$  و  $(n - k)^n$  از مجموع داده شده را در نظر بگیرید. چون  $n$  عددی فرد است،

علامت باقی مانده‌های تقسیم  $k^n$  و  $(-k)^n$  بر  $n$  مختلف است. بنابراین مجموع این دو جمعوند

بر  $n$  بخش پذیر است. اما چون این مجموع را می‌توان به  $\frac{n-1}{2}$  جفت از جمعوندهای از این دست

دسته بندی کرد نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

۱۱. هیچ یک از عددهای به شکل  $8k + 7$  را نمی‌توان به شکل مجموع سه مربع کامل نوشت. در

حقیقت، باقی مانده تقسیم هر مربع کامل بر ۸ یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۴ است. اکنون به آسانی

می‌توان بررسی کرد که از تقسیم مجموع هیچ سه تا از باقی مانده‌های از این دست بر ۸، باقی مانده

۷ به دست نمی‌آید.

۱۳. از اتحاد  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  استفاده کنید.

۱۴. راهنمایی: ثابت کنید که اگر  $x$  عددی مناسب باشد، آن وقت  $x - 1000001$  هم عددی مناسب است.  
 ۱۵. پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر. در حقیقت، آخرین رقم مربع هر عدد از روی آخرین رقم آن عدد مشخص می‌شود. بعد از بررسی همه حالت‌های ممکن آخرین رقم و مربعهایشان معلوم می‌شود که آخرین رقم هر مربع کامل یکی از عددهای ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ است. البته این راه حل را می‌توان برحسب «همنهشتی به پیمانه ۱۰» هم بیان کرد.

۱۶. این مسأله چند جواب دارد، مثلاً ۱- یا ۱-  $n$ . توجه کنید که باقی‌مانده تقسیم عدد داده شده بر  $n$  برابر با ۱ است.

۱۷. پاسخ: ۵.

۱۸. پاسخ: ۲۸۵۸.

۱۹. الف) چون  $k$  بر ۳ بخش پذیر است، پس (به پیمانه ۳)  $k - 1 \equiv 2$ . برای کامل کردن اثبات فقط کافی است به یاد بیاورید که باقی‌مانده تقسیم هیچ مربع کاملی بر ۳، ۲ نمی‌شود.

ب) چون  $k$  عددی زوج است و بر ۴ بخش پذیر نیست، (به پیمانه ۴)  $k + 1 \equiv 3$ . اکنون از اینکه هر مربع کامل به پیمانه ۴ فقط با یکی از عددهای ۰ یا ۱ همنهشت است استفاده می‌کنیم.  
 ۲۰. خیر، زیرا  $n^2 + n + 1$  بر ۵ بخش پذیر نیست. در حقیقت، پنج دسته همنهشتی به پیمانه ۵ وجود دارد؛ اگر (به پیمانه ۵)  $n \equiv 0$ ، آن وقت

$$n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod{5} \text{ (به پیمانه ۵)}$$

اگر (به پیمانه ۵)  $n \equiv 1$  آن وقت

$$n^2 + n + 1 \equiv 3 \pmod{5} \text{ (به پیمانه ۵)}$$

و همین طور تا آخر. بنابراین  $n^2 + n + 1$  به پیمانه ۵ هیچ وقت با صفر همنهشت نمی‌شود، یعنی  $n^2 + n + 1$  بر ۵ و در نتیجه بر ۱۹۵۵ بخش پذیر نیست.

۲۲. ثابت می‌کنیم که مجموع مقسوم‌علیه‌های  $n$  بر ۳ و ۸ بخش پذیر است. برای اثبات اینکه این مجموع بر ۳ بخش پذیر است آن را به جفت مقسوم‌علیه‌های به شکل  $(k, \frac{n}{k})$  دسته‌بندی می‌کنیم (توجه کنید که  $k \neq \frac{n}{k}$ ، زیرا  $n$  مربع کامل نیست، چرا؟) و ثابت می‌کنیم که مجموع عددهای هر یک از این جفتها، یعنی  $k + \frac{n}{k}$ ، بر ۳ بخش پذیر است. در حقیقت،  $k$  بر ۳ بخش پذیر نیست (زیرا در غیر این صورت  $n$  بر ۳ بخش پذیر می‌شود که مسلماً چنین چیزی ممکن نیست). بنابراین، یا (به پیمانه ۳)  $k \equiv 1$ ، یا (به پیمانه ۳)  $k \equiv 2$ . در حالت اول، (به پیمانه ۳)  $\frac{n}{k} \equiv 2$  و در حالت دوم، (به پیمانه ۳)  $\frac{n}{k} \equiv 1$  (به یاد بیاورید که  $n + 1$  بر ۳ بخش پذیر است). از این رو، در هر حالت  $k + \frac{n}{k}$  مضربی از ۳ است. بخش دوم اثبات (در مورد بخش پذیری بر ۸) درست عین همین است.

۲۳. الف) باقی مانده‌های تقسیم جمله‌های این دنباله بر ۴ را در نظر می‌گیریم. در این صورت  
(به پیمانه ۴)  $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$  در نتیجه

$$a_3 \equiv 1 \times 1 + 1 = 2 \text{ (به پیمانه ۴)}$$

$$a_4 \equiv 2 \times 1 + 1 = 3 \text{ (به پیمانه ۴)}$$

$$a_5 \equiv 3 \times 2 + 1 \equiv 3 \text{ (به پیمانه ۴)}$$

$$a_6 \equiv 3 \times 3 + 1 \equiv 2 \text{ (به پیمانه ۴)}$$

$$a_7 \equiv 2 \times 3 + 1 \equiv 3 \text{ (به پیمانه ۴)}$$

و بنابراین دوری به دست می‌آید که شامل باقی مانده صفر نیست.

ب) باقی مانده‌های تقسیم جمله‌های دنباله بر  $a_n$  را در نظر بگیرید. با محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که

$$a_{n+1} \equiv 1 \text{ (به پیمانه } a_n)$$

$$a_{n+2} \equiv 1 \text{ (به پیمانه } a_n)$$

$$a_{n+3} \equiv 2 \text{ (به پیمانه } a_n)$$

⋮

$$a_{n+6} \equiv 22 \text{ (به پیمانه } a_n)$$

بنابراین  $a_{n+6} - 22$  بر  $a_n$  بخش پذیر است و اگر  $n + 6 > 10$ ، آن وقت مسلماً  
 $a_{n+6} > a_n > 1$ .

۲۵. راهنمایی: توجه کنید که همه توانهای ده از  $10^0$  به بعد بر ۴ بخش پذیرند.

۲۶. وقتی و فقط وقتی عددی بر  $2^n$  (یا  $5^n$ ) بخش پذیر است که عدد حاصل از  $n$  رقم آخرش بر  $2^n$  (یا  $5^n$ ) بخش پذیر باشد.

۲۸. دو رقم آخر مربع عدد  $n$  فقط از روی دو رقم آخر خود عدد  $n$  مشخص می‌شود. فرض کنید  
 $n = \overline{000ab}$  و توجه کنید که

$$\overline{ab}^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

اکنون روشن است که رقم دهگان عدد  $b^2$  باید عددی فرد باشد. در این صورت با تحلیل حالت به حالت معلوم می‌شود که رقم یکان عدد  $n^2$  برابر با ۶ است.

۲۹. راهنمایی: باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۱۶ را در نظر بگیرید.

۳۲. پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر. باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۹ را در نظر بگیرید.

۳۳. پاسخ: ۷. باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۹ را در نظر بگیرید.

۳۴. مجموع رقمهای عدد اصلی و مجموع رقمهای عدد مقلوب با هم برابرند و بنابراین باقی مانده‌های تقسیمشان بر ۹ برابر می‌شوند.

۳۵. این کار را می‌توان به شش طریق مختلف انجام داد: ۱۱۵۵، ۴۱۵۵، ۷۱۵۵، ۳۱۵۰، ۶۱۵۰، ۹۱۵۰. در حقیقت، آخرین رقم عدد حاصل باید ۰ یا ۵ باشد. اما عددهای خواسته شده بر ۳ بخش پذیرند؛ یعنی مجموع رقمهایشان باید بر ۳ بخش پذیر باشد.

۳۶. دو عدد از این دست وجود دارند: ۶۹۷۵ و ۲۹۷۰. برای به دست آوردن این عددها راه حل مسأله قبل را ببینید.

۳۷. پاسخ: ۱۰۲۳۴۵۷۸۹۶. راهنمایی: ابتدا توجه کنید هر عددی که در نمایش اعشاری هر ۱۰ رقم بیاید بر ۹ بخش پذیر است. بعد به یاد بیاورید که بخش پذیری بر ۴ فقط به دو رقم آخر عدد بستگی دارد. بنابراین عدد مورد نظر با ... ۱۰ شروع و به رقمی زوج ختم می‌شود. با تحلیل حالت به حالت ساده‌ای پاسخ مسأله به دست می‌آید.

۳۸. راهنمایی: در رقمهای یکان عددهای  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) و همچنین در باقی مانده‌های تقسیم این عددها بر ۳ دور پیدا کنید.

۳۹. پاسخ: خیر. بنابر قاعده بخش پذیری بر ۹ (مسأله ۳۱ را ببینید)، (به پیمانه ۹)  $1970 \equiv 8$ . اما هیچ مربع کاملی به پیمانه ۹ با ۸ هم‌نهشت نیست.

۴۰. چون بعد از نخستین تفریق عدد حاصل بر ۹ بخش پذیر می‌شود، هیچ یک از عددهایی که در این فرایند به دست می‌آوریم مجموع رقمهایش از ۹ کمتر نیست (البته بجز خود عدد صفر). بنابراین اگر عدد اولیه از  $99 \times 9$  یا ۸۹۱ یا بزرگتر نباشد، آن وقت آنچه می‌خواستیم ثابت شده است. بررسی درستی حکم مسأله را در مورد بقیه عددهای سه رقمی بر عهده خواننده می‌گذاریم.

۴۱. چون  $1017776 = 4444(10^4) < 44444444$ ، پس  $159984 = 9 \times 17776 < A$  و بنابراین  $45 = 9 \times 5 < B$  (زیرا در میان عددهایی طبیعی که از ۱۵۹۹۸۴ کوچکترند، مجموع رقمهای عدد ۹۹۹۹۹ از همه بیشتر است). اما در میان عددهای کوچکتر از ۴۵ مجموع رقمهای عدد ۳۹ (یعنی عدد ۱۲) از همه بیشتر است و در نتیجه مجموع رقمهای عدد  $B$  حداکثر برابر با ۱۲ است. در ضمن می‌دانیم که عددهای  $A$  و  $B$  (و همچنین مجموع رقمهای عدد  $B$ ) به پیمانه ۹ با ۴۴۴۴۴۴۴ هم‌نهشت‌اند؛ یعنی باقی مانده تقسیم همه آنها هم بر ۹ برابر با ۷ است. اما تنها عددی که از ۱۲ بزرگتر نیست و به پیمانه ۹ با ۷ هم‌نهشت است خود عدد ۷ است. بنابراین مجموع رقمهای عدد  $B$  باید ۷ باشد.

۴۳ و ۴۴. این عددها بر ۱۱ بخش پذیرند.

۴۵. عدد  $\overline{aabb}$  بر ۱۱ بخش پذیر است در حالی که عدد  $\overline{cdcdcdcd}$  این ویژگی را ندارد.

۴۶. مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  را نمی‌توان به دو دسته سه‌تایی طوری تقسیم کرد که تفاضل مجموع عددهای یک دسته و مجموع عددهای دسته دیگر بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۴۷. این دو عدد هم باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۹ با هم برابرند و هم باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۱۱.

۴۸. پاسخ: خیر. در حقیقت، اگر هر یک از این چهار رقم را در ۹ ضرب کنید، آن وقت رقم یکان حاصل ضرب هیچ‌یک از آنها نمی‌شود.

۴۹. در حقیقت می‌توان نوشت

$$\overline{aba} = 10 \cdot 10a + 10b = 7(14a + b) + 3(a + b)$$

۵۰. چون (به پیمانه ۷)  $2(a + b + c) \equiv 0$ ، پس

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c \pmod{7} \equiv b - c \pmod{7}$$

بنابراین عدد  $\overline{abc}$  وقتی و فقط وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که عدد  $b - c$  بر ۷ بخش‌پذیر باشد. اکنون چنانچه این را هم به حساب بیاوریم که رقمهای  $b$  و  $c$  هر دو از ۷ کوچکترند، آن وقت معلوم می‌شود که تفاضلشان فقط در صورتی بر ۷ بخش‌پذیر است که این دو رقم برابر باشند.

۵۱. الف) می‌توان نوشت می‌توان نوشت

$$\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = \overline{def} - \overline{abc} \pmod{7}$$

ب و ج) وقتی و فقط وقتی عددی بر ۷ (یا ۱۳) بخش‌پذیر است که عدد حاصل از عمل زیر بر ۷ (یا ۱۳) بخش‌پذیر باشد: از طرف راست عدد رقمهایش را سه‌تاسه‌تا دسته‌بندی کنید و عددهای حاصل را یکی در میان جمع و تفریق کنید. مثلاً، اگر این قاعده را در مورد عدد  $10345678$  به‌کار ببریم عدد  $10 + 345 - 678 + 9$  یا  $343$  به‌دست می‌آید که بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد اصلی هم بر ۷ بخش‌پذیر است. در واقع عدد اصلی برابر با  $1477954 \times 7$  است. اثبات این قاعده‌های بخش‌پذیری را برعهده خواننده می‌گذاریم؛ در این اثباتها باید از اینکه عدد  $1001$  بر ۷ (و ۱۳) بخش‌پذیر است استفاده کنید.

۵۲. وقتی و فقط وقتی عددی بر ۳۷ بخش‌پذیر است که اگر رقمهایش را از طرف راست سه‌تاسه‌تا جدا کنیم، مجموع عددهای حاصل بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. مثلاً، اگر این قاعده را در مورد عدد  $830946$  به‌کار ببریم، عدد  $830 + 946 - 1776$  یا  $1776$  به‌دست می‌آید که بر ۳۷ بخش‌پذیر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که عدد  $830946$  هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است. در حقیقت، این عدد برابر با  $22458 \times 37$  است. اثبات این قاعده هم درست عین اثبات قاعده‌های مسأله ۵۱ است. در اینجا از اینکه (به پیمانه ۳۷)  $1000 \equiv 1$  استفاده می‌شود.

۵۳. پاسخ: خیر. چون  $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$  و  $a \neq c$ ، عدد  $\overline{abc} - \overline{cba}$  بر ۱۱ بخش پذیر است، ولی بر  $11^2$  بخش پذیر نیست.

۵۴. پاسخ: این عدد با سیصد رقم یک نوشته می شود. در حقیقت، این عدد بر عدد های ۳ و  $11 \dots 11$  (صد تا رقم ۱ در این عدد آمده است) که نسبت به هم اول اند بخش پذیر است. برای اثبات اینکه این عدد کوچکترین عدد ممکن است ابتدا توجه کنید که تعداد رقم های عدد مورد نظر باید بر  $10^0$  بخش پذیر باشد، زیرا در غیر این صورت بر عدد  $11 \dots 11$  (صد تا رقم ۱ در این عدد آمده است) بخش پذیر نخواهد بود. ثانیاً عدد های  $11 \dots 11$  (صد رقم ۱ در این عدد آمده است) و  $11 \dots 11$  (دویست رقم ۱ در این عدد آمده است) بر ۳ بخش پذیر نیستند. ۵۵. پاسخ: خیر. از راه برهان خلف پاسخمان را ثابت می کنیم. فرض کنید چنین چیزی ممکن باشد. باقی مانده های عددها به پیمانه ۵ را در نظر می گیریم. چون مجموع نخستین  $n$  عدد طبیعی برابر با  $\frac{n(n+1)}{2}$  است و

$$2 \left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) = n(n+1) + 2$$

$n(n+1) + 2$  باید بر ۵ بخش پذیر باشد (در حقیقت، آخرین رقم های عدد  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  عبارت اند از  $0, 1, 2, 3, 4$ ، به جای  $n$  معلوم می شود که عدد  $n(n+1) + 2$  بر ۵ بخش پذیر نیست و بنابراین به تناقض می رسیم.

۵۷. پاسخ: ۶۹. می دانیم که  $10^2 a + b = 90a + 9b$ . اگر طرفین این برابری را ساده کنیم به دست می آید  $3a = 2b$ . اکنون فقط کافی است توجه کنیم که  $a$  و  $b$  دو تا رقم اند.

۵۸. چون هر عدد به شکل  $\overline{aabb}$  بر ۱۱ بخش پذیر است، پس جذر عدد مورد نظر باید عددی دورقمی و بر ۱۱ بخش پذیر باشد (یعنی رقم هایش برابر باشند). با محاسبه مربعات ۹ عدد ۱۱ تا ۹۹ معلوم می شود که پاسخ مسأله فقط عدد ۷۷۴۴ یا  $88^2$  است.

۵۹. پاسخ: ۶۲۵ و ۳۷۶. راهنمایی: رقم یکان عددهای مورد نظر باید یکی از عددهای ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد. اکنون رقم دهگان و بعد از آن رقم صدگان عددهای خواسته شده را هم به همین ترتیب تحلیل کنید. توجه داشته باشید که هیچ یک از عددهای ۰۰۰ و یا ۰۰۱ را عددی سه رقمی به حساب نمی آوریم.

۶۰. می توانیم ثابت کنیم که دیر یا زود یکی از این عددها بر ۱۱ بخش پذیر خواهد شد. در حقیقت، اگر عددی از این دنباله را با  $x$  نشان دهیم، آن وقت عدد بعدی  $100x + 43$  می شود و (به پیمانه ۱۱)  $100x + 43 \equiv x - 1$ . در نتیجه، بعد از حداکثر ۱۰ مرحله، به پیمانه ۱۱، عدد حاصل با صفر همنهشت می شود.

۶۱. پیش از هر چیز توجه کنید که  $۱۰۰۰۱ = ۷۳ \times ۱۳۷$ ؛ رسیدن به این تجزیه چندان ساده نیست، اما در هر صورت چنین تجزیه‌ای وجود دارد. بعد، برای اثبات اینکه هر عدد دیگر این دنباله مانند  $۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱$  هم مرکب است آن را در عدد  $۱۱۱۱$  ضرب می‌کنیم. عدد حاصل  $۴k (k > ۲)$  رقمی است و بنابراین بر عدد  $x$  که

$$x = ۱۰۰۰ \dots ۰۰۱ = ۱۰^{۲k} + ۱$$

بخش‌پذیر است؛ در حقیقت،

$$\underbrace{۱۱۱ \dots ۱۱}_{۴k \text{ رقم}} = \underbrace{۱۰۰۰ \dots ۰۰۱}_{۲k+۱ \text{ رقم}} \times \underbrace{۱۱۱ \dots ۱۱}_{۲k \text{ رقم}}$$

آخر سر از اینکه  $x$  از  $۱۱۱۱$  بزرگتر و از عدد اصلی کوچکتر است استفاده می‌کنیم. بنابراین عدد اصلی باید بر عدد  $\frac{x}{(x, ۱۱۱۱)}$ ، که از  $۱$  بزرگتر است، بخش‌پذیر باشد.

۶۳. این معادله ریشهٔ صحیح ندارد. طرف چپ این معادله در هر صورت بر  $۳$  بخش‌پذیر است، اما طرف راستش هیچ‌وقت بر  $۳$  بخش‌پذیر نیست.

۶۵. جوابهای معادله به شکل  $x = ۱۶k - ۲$  و  $y = -۷k + ۱$  هستند که در اینجا  $k$  عددی صحیح و دلخواه است.

۶۶. این مسأله را می‌توان به حل یک معادلهٔ دیوفانتی معمولی تبدیل کرد. فرض کنید  $z = p$ ؛ در این صورت

$$۲x + ۳y = ۱۱ - ۵p$$

که در اینجا  $p$  را به جای متغیر پارامتری مجهول در نظر می‌گیریم. با استفاده از همان روش قبل این جواب به دست می‌آید:  $x = ۵p + ۳q - ۱۱$  و  $y = ۱۱ - ۵p - ۲q$  و البته  $z = p$  که در اینجا  $p$  و  $q$  عددهایی صحیح و دلخواه‌اند.

این معادله در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد، زیرا اگر یکی از عددهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  از  $۱$  بزرگتر باشند، آن وقت مجموع  $۲x + ۳y + ۵z$  از  $۱۱$  بزرگتر می‌شود.

۶۷. ابتدا توجه کنید که وقتی و فقط وقتی می‌توان این سرباز را به خانهٔ مجاور برد که عددهای  $m$  و  $n$  نسبت به هم اول باشند. در حقیقت، اگر  $k$  حرکت به طرف راست انجام دهیم (در هر یک از این حرکتها سرباز  $m$  خانه به طرف راست منتقل می‌شود) و  $l$  حرکت هم به طرف چپ، آن وقت سرباز در کل  $km - ln$  خانه به طرف راست منتقل می‌شود (اگر این عدد منفی باشد، انتقال سرباز در کل به طرف چپ است). عدد  $۱$  را وقتی و فقط وقتی می‌توان با چنین عبارتی نمایش داد که عددهای  $m$  و  $n$  نسبت به هم اول باشند. مسألهٔ پیدا کردن کمترین تعداد حرکتهای لازم برای



رسیدن به خانه مجاور به مراتب دشوارتر است. راهنمایی: ابتدا بهتر است که مسأله را این طور بیان کنید: دو عدد طبیعی نسبت به هم اول  $m$  و  $n$  داده شده‌اند؛ عددهایی طبیعی مانند  $k$  و  $l$  پیدا کنید که  $mk - nl = 1$  و قدرمطلق مجموع این عددها،  $|k + l|$ ، کمترین مقدار ممکن باشد.

۶۸. پاسخ:  $(9, -4)$ ،  $(-21, 14)$ ،  $(-9, 4)$  و  $(21, -14)$ . برای حل کردن مسأله همه نمایشهای

ممکن عدد اول ۷ به صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح را بررسی کنید.

۷۰. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. در حقیقت، در معادله  $(x - y)(x + y) = 14$  دو

عامل طرف چپ یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فرد و بنابراین حاصل ضربشان باید یا عددی فرد

باشد (در صورتی که عددهای  $x + y$  و  $x - y$  هر دو فرد باشند) و یا بر ۴ بخش پذیر (در صورتی

که عددهای  $x + y$  و  $x - y$  هر دو زوج باشند). اما عدد ۱۴ هیچ یک از این دو نوع عدد نیست.

۷۱. پاسخ:  $(2, 0)$ ،  $(0, 2)$ ،  $(-1, 1)$ ،  $(1, -1)$ ،  $(0, -1)$ ،  $(-1, 0)$ ،  $(1, 1)$  و  $(-1, -1)$ . معادله

اصلی را به معادله  $x(x - 1) + y(y - 1) = 2$  تبدیل می‌کنیم. چون وقتی  $t > 2$  یا  $t < -1$ .

حاصل ضرب  $t(t - 1)$  منفی نمی‌شود و از ۲ بزرگتر است، فقط چند جفت عدد مانند  $(x, y)$

را باید بررسی کنیم.

۷۳. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۷ را در نظر بگیرید.

۷۵. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۵ را در نظر بگیرید.

۷۶. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی مانده‌های عددها به پیمانه ۸ را در نظر بگیرید.

۷۹. پاسخ: این معادله سه دسته جواب به شکل  $(1, a, -a)$ ،  $(b, 1, -b)$  و  $(c, -c, 1)$  دارد که در

آنها  $a$ ،  $b$  و  $c$  عددهایی صحیح و دلخواه‌اند (البته غیرصفر) و سه دسته جواب دیگر هم به شکل

$(3, 2, 3)$ ،  $(4, 4, 2)$  و  $(3, 3, 3)$  دارد. (جوابهای دیگر دو دسته اول از جابه‌جایی مؤلفه‌هایشان

به دست می‌آید). راهنمایی: اگر عددهای  $a$  و  $b$  و  $c$  همگی مثبت باشند، یا دست کم یکی از آنها

از ۲ بزرگتر نیست یا همگی برابر با ۳ هستند. اگر از این عددها یکی، مثلاً  $a$ ، منفی باشد، آن وقت

$$1 > \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ یا } b = 1 \text{ یا } c = 1.$$

۸۰. پاسخ:  $x = \pm 498$ ،  $x = \pm 496$ ،  $y = \pm 78$  و  $x = \pm 78$ ،  $y = \pm 64$  (در اینجا علامت  $x$  و  $y$  را

می‌توان مستقل از علامت دیگری انتخاب کرد). برای به دست آوردن این پاسخها معادله مورد نظر

را این طور می‌نویسیم

$$(x - y)(x + y) = 2 \times 2 \times 7 \times 71$$

(توجه کنید که ۷۱ عددی اول است). در اینجا می‌توانیم موقتاً فرض کنیم که  $x$  و  $y$  مثبت‌اند (بعداً

می‌توانیم این عددها را با علامتهای دلخواه در نظر بگیریم). اکنون توجه کنید که عدد ۱۹۸۸ را

فقط به دو طریق می‌توان به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی نوشت که یا هر دو زوج باشند یا

هر دو فرد (راه حل مسئله ۷۰ را ببینید):  $۱۹۸۸ = ۲ \times ۹۹۴$  و  $۱۹۸۸ = ۱۴ \times ۱۴۲$  و  $۱۹۸۸ = ۱۴ \times ۱۴۲$ . بنابراین اگر عاملهای  $x - y$  و  $x + y$  را برابر با این عددها اختیار کنیم راه حل مسأله کامل می شود.

۸۱. اگر  $n = pq$  (که در آن  $p, q > ۱$ )، آن وقت

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}, \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{p(q-1)} - \frac{1}{pq(q-1)}$$

اگر  $n$  عددی اول باشد، آن وقت از معادله اصلی نتیجه می شود  $n(y-x) = xy$  و بنابراین  $xy$  بر  $n$  بخش پذیر است. از این رو یا  $x$  بر  $n$  بخش پذیر است یا  $y$ . اکنون روشن است که  $y$  بر  $n$  بخش پذیر است، زیرا در غیر این صورت  $x \geq n$  و  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  برابر با  $\frac{1}{n}$  نخواهد بود. در نتیجه،  $y = kn$ ،  $x = \frac{kn}{k+1}$  و  $k = n - 1$ . پس فقط به یک طریق نمایش برای  $\frac{1}{n}$  وجود دارد:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}$$

۸۲. پاسخ: این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: معادله داده شده را به شکل  $x^3 = (2y-1)(2y+3)$  بنویسید و از اینکه عاملهای طرف راست معادله حاصل نسبت به هم اول اند استفاده کنید.

۸۳. این معادله همان معادله فیثاغورسی معروف است.

پاسخ: همه جوابهای این معادله را می توان این طور نوشت

$$x = (a^2 - b^2)c$$

$$y = 2abc$$

$$z = (a^2 + b^2)c$$

که در اینجا  $a, b$  و  $c$  عددهایی صحیح و دلخواه اند. راهنمایی: ابتدا عددهای  $x, y$  و  $z$  را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان تقسیم کنید تا دو به دو نسبت به هم اول شوند.

۸۴. این هم معادله معروف دیگری به نام معادله پل است. نام این معادله برگرفته از نام جان پل، ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم، است. راهنمایی: ابتدا فقط دنبال جوابهای غیرمنفی بگردید. یکی از این جوابها را به راحتی می توان پیدا کرد:  $(1, 0)$ . اکنون می توان همه جوابهای دیگر را از این یکی به دست آورد. به بیان دقیق تر، اگر  $(a, b)$  جوابی از معادله مان باشد، آن وقت  $(3a+4b, 2a+3b)$  جواب بعدی است.

۸۶. می دانیم که  $ka - kb$  بر  $kn$  بخش پذیر است. بنابراین  $k(a-b) = mkn$  و در نتیجه  $a-b = mn$  که این همان چیزی است که می خواستیم.

۸۷. بنابر قضیه «کوچک» فرما باقی مانده مورد نظر برابر با ۱ است.

۸۹. می توان نوشت

$$۳۰۰۳۰۰۰ = (۳۰۰۵۰۰)^۶ \equiv ۱ (۷ \text{ به پیمانه})$$

به همین ترتیب، (به پیمانه ۱۱)  $۳۰۰۳۰۰۰ \equiv ۱$  و (به پیمانه ۱۳)  $۳۰۰۳۰۰۰ \equiv ۱$ . بنابراین عدد  $۳۰۰۳۰۰۰ - ۱$  بر عددهای ۷، ۱۱ و ۱۳ و در نتیجه بر  $۱۰۰۱$  بخش پذیر است.

۹۰. پاسخ: ۷. راهنمایی: از قضیه «کوچک» فرما استفاده کنید.

۹۲. راهنمایی: ثابت کنید که عدد داده شده بر ۳۱ بخش پذیر است.

۹۳. برای اثبات حکم این مسأله فقط کافی است که برابری و هم‌نهشتیهای زیر را بنویسیم

$$(a + b)^p \equiv (a + b) = a + b \equiv a^p + b^p \quad (p \text{ به پیمانه})$$

۹۴. راهنمایی: ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مانند  $x$  هم‌نهشتی (به پیمانه ۳۰)  $x^5 \equiv x$  درست است. به این منظور، ثابت کنید که  $x^5 - x$  بر عددهای ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر است.

۹۵. الف) راهنمایی: ثابت کنید که عدد  $q^p + p - q$  بر  $p$  و  $q$  بخش پذیر است.

۹۶. فرض کنید  $b = a^{p-2}$ . در این صورت (به پیمانه  $p$ )  $ab = a^{p-1} \equiv ۱$ .

۹۷. همه عددهای از ۲ تا  $p - ۲$  را به جفتهایی طوری دسته بندی می کنیم که حاصل ضرب دو عضو هر یک از این جفتها به پیمانه  $p$  با ۱ هم‌نهشت باشد (اثبات این را که می توان عددهای مورد نظر را این طور دسته بندی کرد برعهده خواننده می گذاریم). بنابراین حاصل ضرب همه عددهای از ۲ تا  $p - ۲$  به پیمانه  $p$  با ۱ هم‌نهشت می شود. در نتیجه

$$(p - ۱)! \equiv ۱ \times (p - ۱) = p - ۱ \equiv -۱ \quad (p \text{ به پیمانه})$$

۹۸. چون

$$(n^A + ۱)(n^A - ۱) = n^{۱۶} - ۱ \equiv ۰ \quad (۱۷ \text{ به پیمانه})$$

یکی از عاملهای طرف چپ باید بر ۱۷ بخش پذیر باشد.

۹۹. الف) عدد  $۱۱۱ \dots ۱۱$  (رقم یک در این عدد آمده است) برابر با  $\frac{۱۰^p - ۱}{۹}$  است. اما عدد

$۱۰^p - ۱$  بر  $p$  بخش پذیر نیست، زیرا

$$۱۰^p - ۱ \equiv ۱۰ - ۱ = ۹ \quad (p \text{ به پیمانه})$$

ب) عدد  $۱۱۱ \dots ۱۱$  (رقم یک در این عدد آمده است) برابر با  $\frac{۱۰^{p-۱} - ۱}{۹}$  و عدد

$۱۰^{p-۱} - ۱$  بر  $p$  بخش پذیر است، زیرا  $p$  هم نسبت به ۱۰ اول است و هم نسبت به ۹.

۱۰۰. راهنمایی: از این همنهشتیها استفاده کنید:

$$\begin{aligned} 10^p &\equiv 10^{\binom{p}{2}} \text{ (به پیمانه } p), \\ 10^{2p} &\equiv 10^{2\binom{p}{2}} \text{ (به پیمانه } p), \\ &\vdots \\ 10^{8p} &\equiv 10^{8\binom{p}{2}} \text{ (به پیمانه } p) \end{aligned}$$

## ۱۱. ترکیبیات - ۲

۷. پاسخ برابر است با  $\binom{12}{3}$  یا  $12^3$ . این مطلب نتیجه مستقیم تعریف تعداد ترکیبهاست.
۸. افسر را می توان به سه طریق انتخاب کرد، ۲ استوار را به  $\binom{6}{2}$  طریق و ۲۰ سرباز را به  $\binom{6}{2}$  طریق. بنابراین دسته مورد نظر را می توان به  $\binom{6}{2} \binom{6}{2} 3$  طریق انتخاب کرد.
۹. الف) هر مثلث که رأسهایش از نقطه های انتخاب شده اند یا یک رأس روی خط اول دارد و دو رأس روی خط دوم یا دو رأس روی خط اول دارد و یک رأس روی خط دوم.  $10 \times \binom{11}{2}$  مثلث از نوع اول و  $11 \times \binom{10}{2}$  مثلث از نوع دوم وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با

$$10 \binom{11}{2} + 11 \binom{10}{2}$$

ب) پاسخ:  $\binom{11}{2} \binom{11}{2} = 2475$ .

۱۰. تعداد راه های انتخاب دقیقاً ۰، ۱، ... و ۵ کلمه را از مجموعه مفروض با هم جمع کنید. پاسخ برابر است با

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5} = 4944$$

۱۱. ابتدا سه جفت زن و شوهر را انتخاب می کنیم. این کار را می توان به  $\binom{4}{3}$  طریق انجام داد. سه نماینده این جفتها را می توان به  $2^3$  طریق انتخاب کرد (از هر یک از این سه جفت یا شوهر را انتخاب می کنیم یا زنش را). بنابراین  $2^3 \times \binom{4}{3}$  یا  $32$  راه برای انتخاب کمیته وجود دارد.
۱۲. سه حالت ممکن است پیش بیاید، فقط پت عضو تیم باشد، فقط جان عضو تیم باشد یا هیچ یک از آنها عضو تیم نباشد.  $\binom{29}{1}$  تیم مختلف وجود دارد که پت عضو آنهاست اما جان نیست (زیرا ده نفر هم تیمی پت را فقط باید از ۲۹ دانش آموز دیگر کلاس انتخاب کرد). به همین ترتیب،  $\binom{29}{1}$  تیم وجود دارد که جان عضو آنهاست اما پت نیست. سرانجام،  $\binom{29}{2}$  تیم وجود دارد که هیچ یک از این دو عضو آن نیستند. به این ترتیب، پاسخ برابر است با  $\binom{29}{1} + \binom{29}{1} + \binom{29}{2}$ .

۱۳. چون ترتیب حروف صدا دار و نیز حروف بی صدا معلوم است، همه چیز با دانستن جای حروف صدا دار معلوم می شود. بنابراین  $\binom{7}{3}$  یا ۳۵ راه برای انتخاب ۳ جا برای حروف صدا دار در کلمه ای ۷ حرفی وجود دارد.

۱۴.  $\binom{12}{5}$  تیم وجود دارد که هیچ معلمی عضو آنها نیست،  $\binom{12}{4}$  تیم وجود دارد که ۱ معلم و ۴ دانش آموز عضو آنهاست،  $\binom{12}{3}$  تیم وجود دارد که ۲ معلم و ۳ دانش آموز عضو آنهاست و  $\binom{12}{2}$  تیم وجود دارد که ۳ معلم و ۲ دانش آموز عضو آنهاست. بنابراین

$$\binom{12}{5} + 10 \binom{12}{4} + \binom{10}{2} \binom{12}{3} + \binom{10}{3} \binom{12}{2}$$

یا ۲۳۵۶۲ تیم مختلف وجود دارند که ویژگیهای مورد نظر مسأله را دارند.

۱۵. ابتدا جای ۱۲ سرباز سفید را روی ۳۲ خانه سیاه صفحه شطرنج انتخاب می کنیم. این کار را می توان به  $\binom{32}{12}$  طریق انجام داد. پس از اینکه سربازهای سفید را قرار دادیم،  $\binom{20}{2}$  راه برای قرار دادن ۱۲ سرباز سیاه روی ۲۰ خانه سیاه خالی وجود دارد. پاسخ:  $\frac{32!}{12!12!18!} \binom{20}{2} \binom{32}{12}$ .

۱۶. راه حل این مسأله شبیه راه حل مسأله ۶ است. پاسخ: الف)  $\frac{(15)(15)(5)}{3!}$ ؛ ب)  $\frac{(15)(15)}{2}$ .  
 ۱۷. الف) یکی از کارتهایی را که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است انتخاب می کنیم، بعد نه کارت دیگر را جداگانه از میان ۴۸ kartی که روی آنها عددی غیر از ۱ نوشته شده انتخاب می کنیم. چون انتخاب اول را به ۴ طریق می توان انجام داد و انتخاب دوم را به  $\binom{48}{9}$  طریق، پاسخ برابر است با  $4 \binom{48}{9}$ .

ب)  $\binom{52}{10}$  طریق برای انتخاب ۱۰ کارت از میان کارتهای مورد نظر وجود دارد و  $\binom{48}{10}$  طریق برای انتخاب ۱۰ کارت که روی آنها عدد ۱ نوشته نشده است. بنابراین  $\binom{48}{10} - \binom{52}{10}$  راه برای انتخاب ۱۰ کارت وجود دارد که دست کم روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده است.

۱۸. بر حسب اینکه رقم اول عدد مورد نظر زوج باشد یا فرد دو حالت وجود دارد. در هر حالت می توانید تعداد راهها را با انتخاب جای عددهای فرد حساب کنید. پاسخ:  $5^5 \times 4 \binom{5}{3} + 5^6 \binom{5}{2}$ .

۱۹. راهنمایی: همه نمایشهای عددهای ۲، ۳ و ۴ را به شکل مجموع چند عدد صحیح غیر منفی پیدا کنید. فراموش نکنید که رقم اول نباید صفر باشد.

پاسخ: الف)  $10$ ؛ ب)  $55 = 1 + 9 + 9 + 1 + \binom{9}{2} + \binom{9}{1} + \binom{9}{0} = 220$ ؛ ج)  $\frac{31}{21} + \binom{9}{2} + \binom{9}{1} + \binom{9}{0} + 2 = 1$ .

۲۰. الف) پاسخ:  $\binom{45}{6}$ .

ب) فرض کنید نتیجه ها از قبل معلوم اند. در این صورت باید دقیقاً سه عدد از عددهای

«خوش اقبال» و سه عدد از میان ۳۹ عدد «بد اقبال» انتخاب کنیم. پاسخ برابر است با

$$\binom{39}{3} \binom{6}{3}$$

۲۲. پاسخ برابر است با تعداد همه زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای  $10$  عضوی؛ یعنی،  $2^{10}$  یا  $1024$ .
۲۳. هر روشی برای پایین رفتن از پلکان معادل انتخاب چند پله است که می‌خواهید روی آنها بایستید. بنابراین مسأله معادل است با محاسبه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای  $7$  عضوی و در نتیجه جواب برابر است با  $2^7$  یا  $128$ .
۲۵. ثابت می‌کنیم که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مفروض از اشیا که تعداد عضوهایشان عددی زوج است برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از این مجموعه که تعداد عضوهایشان عددی فرد است. ابتدا یکی از اشیا - مثلاً  $A$  - را انتخاب کنید که در بقیه راه‌حل نقش خاصی دارد. اکنون می‌توانیم همه زیرمجموعه‌ها را به جفتهایی تقسیم کنیم که در هر جفت دو زیرمجموعه وجود دارد، یکی که تعداد عضوهایش عددی زوج است و یکی که تعداد عضوهایش عددی فرد است. برای این کار یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه مفروض را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر  $A$  عضو این زیرمجموعه بود  $A$  را از آن حذف می‌کنیم و اگر  $A$  عضو این زیرمجموعه نبود  $A$  را به آن اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید با مجموعه اولیه در یک جفت قرار می‌گیرد و زوجیت تعداد عضوهای این دو زیرمجموعه متفاوت است. به سادگی معلوم می‌شود که اگر زیرمجموعه  $S$  زیرمجموعه  $S'$  را تولید کند، با اعمال همین روند بر  $S'$ ،  $S$  به دست می‌آید. بنابراین تقسیم موردنظر را به دست می‌آوریم و اثبات کامل شده است.
۲۶. از نتیجه مسأله ۲۵ استفاده کنید.

- ۲۷ و ۲۸. راهنمایی: از استقرا روی تعداد عددهای روی قطر موردنظر در مثلث پاسکال استفاده کنید.
۲۹. از نتیجه مسأله‌های ۲۷ و ۲۸ استفاده کنید.
۳۰. تعداد راه‌های پایین رفتن از «قله» مثلث پاسکال و رسیدن به  $m$  امین عدد در سطر  $2m$  برابر است با  $\binom{2m}{n}$ . هر یک از این راه‌ها از دقیقاً یکی از عددهای سطر  $m$  می‌گذرد. چون تعداد چنین راه‌هایی که از  $k$  امین عدد می‌گذرند برابر با  $\binom{n}{k} \binom{2m-n}{n-k}$  یا  $\left[\binom{2m}{k}\right]^2$  است، می‌توانیم این عددها را جمع کنیم تا مجموع موردنظر را به دست آوریم. یافتن این نوع تعبیر هندسی برای اتحادی جبری یکی از شگردهای زیبای ترکیبیات مقدماتی است.

۳۴. ۱۲ سکه یک ریالی را «توپها» و پنج کیف را «جعبه‌ها» می‌نامیم. در این صورت مسأله موردنظر تقریباً همان مسأله ۳۱ است. پاسخ:  $330 = \binom{11}{2} = \binom{12-1}{5-1}$ .
۳۵. این بار ۱۲ کتاب «توپها» و سه رنگ «جعبه‌ها» هستند. مسأله موردنظر به مسأله‌ای شبیه مسأله ۳۲ تبدیل می‌شود، پاسخ:

$$\binom{12+3-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91$$

۳۶. برای بریدن گردنبند به ۸ قطعه لازم است ۸ جا از ۳۰ جایی را که می‌توان در آنها برش انجام داد انتخاب کنیم. بنابراین پاسخ برابر است با  $\binom{30}{8}$ .

۳۷. اگر نامزدها «جعبه‌ها» و آرا «توپها» باشند، مسئله مورد نظر شبیه مسئله ۳۲ می‌شود. پاسخ:  $\binom{۳۴}{۴}$ .  
 ۳۸. راهنمایی: کارتهای تبریک را «توپها» و نوع آنها را «جعبه‌ها» قلمداد کنید. پاسخ: الف)  $\binom{۲۱}{۹}$ ؛  
 ب)  $\binom{۱۷}{۹}$ .

۳۹. الف) مسافر اول می‌تواند در هر یک از  $n$  ایستگاه پیاده شود. مسافر دوم هم می‌تواند در هر یک از  $n$  ایستگاه پیاده شود. بنابراین  $n \times n$  یا  $n^2$  طریق برای پیاده شدن این دو مسافر وجود دارد. چون مسافر سوم می‌تواند در هر یک از  $n$  ایستگاه را انتخاب کند،  $n \times n^2$  یا  $n^3$  طریق مختلف برای پیاده شدن این سه نفر از قطار وجود دارد. اکنون معلوم است که اگر در مورد بقیه مسافران هم به همین ترتیب استدلال کنیم به پاسخ  $n^m$  می‌رسیم.  
 ب) این قسمت هم مسئله‌ای درباره «توپها» (مسافران) و «جعبه‌ها» (ایستگاهها) است. بنابراین پاسخ برابر است با  $\binom{n+m-1}{n-1}$ .

۴۰. این مسئله معادل است با مسئله نمایش عدد ۲۰ به صورت مجموع سه عدد صحیح غیرمنفی. پاسخ:  $\binom{۲۲}{۲}$  یا ۲۳۱.

۴۱. راهنمایی: جواب را جداگانه برای توپهای سیاه و سفید پیدا کنید و نتیجه‌ها را در هم ضرب کنید. پاسخ:  $\binom{۱۰}{۸} \binom{۱۶}{۸}$ .

۴۲. کار تقسیم میوه‌ها را به چهار مرحله تقسیم کنید: سیبها، پرتقال، آلو و نارنگی. پاسخ:  $\binom{۳}{۲} \times ۳ \times ۳ \times ۳$  یا ۷۵۶.

۴۳. چون  $\binom{۹}{۵}$  طریق مختلف برای گذاشتن توپهای هر یک از سه رنگ در شش جعبه مختلف وجود دارد، پاسخ  $\binom{۹}{۵}^۳$  طریق است.

۴۴. الف) هر یک از  $n$  نفر رأی دهنده می‌تواند به هر یک از  $n$  نفر نامزد رأی دهد. بنابراین پاسخ  $n^n$  طریق است.

ب) افراد این جماعت را «جعبه‌ها» و رأیها را «توپها» در نظر بگیرید. پاسخ:  $\binom{۲n-1}{n-1}$ .

۴۵. توپهای قرمز و سبز را موقتاً سیاه می‌کنیم و توپهای سیاه را در یک ردیف می‌چینیم. چیدن  $۱۰$  توپ سیاه و  $۵$  توپ آبی به نحوی که هیچ دو توپ آبی‌ای پشت سر هم نباشند معادل قرار دادن  $۵$  توپ آبی در  $۱۱$  «سطل» میان توپهای سیاه و در دو انتهای ردیف توپهای سیاه است، به طوری که هیچ دو توپ آبی‌ای در یک سطل نباشند. یعنی، باید  $۵$  سطل از میان  $۱۱$  سطل انتخاب کنیم - که می‌توان این کار را به  $\binom{۱۱}{۵}$  طریق انجام داد. سرانجام،  $\binom{۱۰}{۵}$  طریق برای برگرداندن رنگ توپهای سیاه شده به قرمز و سبز وجود دارد. بنابراین، پاسخ  $\binom{۱۱}{۵} \binom{۱۰}{۵}$  یا  $۱۱۶۴۲۴$  طریق است.

۴۶. راهنمایی: می‌دانیم  $۲۶ \times ۵۶ = ۱۰۰۰۰۰۰$ . هر یک از عاملها را می‌توان با تعداد ۲ها و ۵های موجود در تجزیه آن کاملاً مشخص کرد. تعداد کل ۲ها ۶ تا است و تعداد کل ۵ها نیز همین است. پاسخ:  $۲ \binom{۸}{۲}$  یا ۷۸۴.

۴۷. کتابهای انتخاب شده را کنار می‌گذاریم و هفت کتاب باقی مانده را در نظر می‌گیریم. در میان هر دو تا از اینها و در دو انتهای ردیف کتابها، یا جایی خالی (که جای کتابی است که برداشته‌ایم) وجود دارد یا هیچ جای خالی‌ای وجود ندارد. مجموعه این جاهای خالی، کتابهای انتخاب شده را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. بنابراین پاسخ (۵) طریق است.

۴۸. چون فقط دو مهره آبی وجود دارد، نوع گردن‌بند کاملاً با معلوم بودن فاصله میان این دو مهره برحسب کمترین تعداد مهره‌های میان آنها (بدون در نظر گرفتن رنگ آنها) مشخص می‌شود. این فاصله فقط سه مقدار دارد: ۱، ۲ و ۳. بنابراین فقط ۳ نوع گردن‌بند مختلف وجود دارد.

۴۹. راه حل قسمتهای این مسأله با به‌کار بردن نتیجه‌های اصلی این فصل به‌دست می‌آیند. پاسخ: الف)  $27405 = (3^5)!$ ؛ ب)  $657720 = 27 \times 28 \times 29 \times 30$ .

۵۰. ابتدا تعداد همه کلمه‌های شش حرفی را حساب می‌کنیم. هر یک از ۲۶ حرف را می‌توان در هر یک از ۶ جای ممکن قرار داد. بنابراین با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی می‌توان ۲۶<sup>۶</sup> کلمه شش حرفی مختلف نوشت. ۲۵۶ کلمه شش حرفی می‌توان نوشت که در آنها حرف A وجود ندارد (در این حالت فقط می‌توان از ۲۵ حرف استفاده کرد). بنابراین ۲۵۶ - ۲۶<sup>۶</sup> یا ۶۴۷۷۵۱۵۱ کلمه شش حرفی وجود دارد که در آنها دست‌کم یک حرف A به‌کار رفته است.

۵۱. می‌توان رسم کردن مسیر مورد نظر را از هر یک از شش رأس شش ضلعی شروع کرد. نقطه بعدی را می‌توان به ۵ طریق انتخاب کرد، و همین طور تا آخر. بنابراین ۶! طریق برای رسم راهها وجود دارد. اما در این محاسبه هر راه را دقیقاً شش بار شمرده‌ایم، زیرا می‌توان هر یک از رأسهای آن را رأس اول انتخاب کرد. بنابراین  $\frac{6!}{6}$  یا ۵! مسیر وجود دارد.

۵۲. الف) هر عدد بخش‌پذیر بر ۴ که با رقمهای مفروض نوشته شود باید به ۱۲، ۲۴ یا ۳۲ ختم شود. در هر یک از این حالتها دو راه مختلف برای استفاده از دو رقم دیگر در ابتدای عدد مورد نظر وجود دارد. پاسخ ۲ × ۳ یا ۶ عدد است.

ب) در این حالت عدد مورد نظر باید به ۱۲، ۲۴، ۳۲ یا ۴۴ ختم شود. از هر یک از چهار رقم مفروض می‌توان به جای دو رقم باقی مانده استفاده کرد. بنابراین پاسخ ۴ × ۴ یا ۶۴ عدد است.

۵۳. همه چیز با معلوم بودن سه روزی که پدر گلابیها را به دخترش می‌دهد مشخص می‌شود. چون (۵) طریق برای انتخاب سه روز از پنج روز وجود دارد، پاسخ (۵) طریق است.

۵۴. (۲) طریق برای انتخاب ۶ بازیگر برای اجرای اول وجود دارد. در هر یک از این حالتها ۱۴ بازیگر نقشی در اجرای اول ندارند. (۱۴) طریق برای انتخاب ۶ بازیگر برای اجرای دوم وجود دارد. پاسخ (۱۴) (۲) طریق است.

۵۵. در هر مکان هر یک از رقمها دقیقاً ۴ یا ۱۶ بار به‌کار می‌رود. پاسخ  $16 \times 1111 \times (1+2+3+4)$  یا ۱۷۷۶۰ است.



۵۶. شش کارت را می‌توان به دو طریق در میان چهار دسته توزیع کرد:  $۱ + ۱ + ۱ + ۳$  و  $۲ + ۲ + ۱ + ۱$ . تعداد راههای مختلف انتخاب طریق اول را حساب می‌کنیم. می‌توانیم دسته‌ای را که شامل ۳ کارت است به ۴ طریق انتخاب کنیم.  $\binom{۳}{۳}$  طریق برای انتخاب ۳ کارت از این دسته وجود دارد. برای انتخاب یک کارت از دسته‌های باقی‌مانده ۱۳ راه وجود دارد. بنابراین پاسخ  $۱۳^۳ \times \binom{۳}{۳} \times ۴$  است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که در مورد طریق دوم توزیع پاسخ  $۱۳^۲ \times \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۲}$  است. بنابراین پاسخ مسأله  $۱۳^۲ \times \binom{۳}{۲} \times \binom{۴}{۲} + ۴ \times \binom{۳}{۳}$  طریق است.

۵۷. پاسخ:  $\binom{۱۳}{۲} \binom{۶}{۲}$  یا ۵۷۲۰. راه حل مسأله ۴۱ را ببینید.

۵۸. معلوم است که ۱۰ عدد صحیح یک رقمی وجود دارد که ویژگی موردنظر مسأله را دارند. تعداد عددهای طبیعی دورقمی با ویژگی موردنظر را پیدا می‌کنیم. رقم اول عددی طبیعی دورقمی می‌تواند هر رقمی بجز ۰ باشد. رقم دوم می‌تواند هر یک از ۹ رقم متفاوت با رقم اول باشد. بنابراین ۹۲ عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که دو رقمشان با هم فرق دارد. ۹۳ عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که ویژگی موردنظر مسأله را دارند، زیرا ۹ رقم (هر رقمی بجز رقمی که برای دومین رقم از آن استفاده شده) برای انتخاب رقم سوم داریم. اگر به همین ترتیب استدلال را ادامه دهیم به پاسخ نهایی می‌رسیم:  $۹۶ + ۹۵ + ۹۴ + ۹۳ + ۹۲ + ۱۰$ .

۵۹. مسأله‌ای دیگر را در نظر می‌گیریم:

به چند طریق می‌توانیم از میان ۳۶ کارت موردنظر ۱۸ کارت طوری انتخاب کنیم که در میان این ۱۸ کارت دقیقاً دو کارت با شماره ۱ وجود داشته باشد؟

ابتدا دو تا از کارتهایی را که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است انتخاب می‌کنیم. سپس شانزده کارت دیگر از میان ۳۲ کاردتی که روی آنها عددی غیر از ۱ نوشته شده است انتخاب می‌کنیم. بنابراین، پاسخ مسأله جدید  $\binom{۳۲}{۱۶} \binom{۲}{۲}$  طریق است. اکنون توجه کنید که با انتخاب ۱۸ کارت، دسته کارت را به دو نیم کرده‌ایم. اما هر طریق ممکن برای تقسیم موردنظر را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین پاسخ مسأله  $\frac{\binom{۳۲}{۱۶} \binom{۲}{۲}}{۲}$  طریق است.

۶۰. الف) رخ می‌تواند به هر یک از ۲۸ خانه‌ای که در دو انتها قرار دارند برود یا از آنها رد شود. بنابراین، پاسخ  $۲^{۲۸}$  طریق است.

ب) پاسخ برابر است با تعداد راههای نمایش عدد ۲۹ به صورت مجموع هفت عدد طبیعی که ترتیب آنها مهم است. پاسخ:  $\binom{۲۸}{۶}$  طریق.

۶۱. فرض کنید که هیچ‌یک از قایقرانان از میان ده نفری که می‌خواهند طرف چپ بنشینند انتخاب نشده باشند. در این صورت چهار قایقرانی را که باید در طرف چپ بنشینند باید از میان نه نفری انتخاب کرد که نشستن در طرفی خاص مد نظرشان نیست. چهار قایقرانی را که باید در طرف چپ بنشینند باید از میان هفده نفر (دوازده نفر که می‌خواهند در طرف راست بنشینند و پنج نفر از

میان نه نفری که طرفی خاص مد نظرشان نیست و برای نشستن در طرف چپ انتخاب نشده‌اند). بنابراین در این حالت  $\binom{17}{4} \binom{9}{1} \binom{10}{1}$  طریق انتخاب وجود دارد. اکنون فرض می‌کنیم که دقیقاً یکی از قایقرانانی که می‌خواهند در طرف چپ بنشینند انتخاب شده است. در این صورت سه نفر قایقران دیگر سمت چپ را باید از میان نه نفر انتخاب کرد. همچنین، چهار قایقران سمت راست را باید از میان هجده نفر انتخاب کرد. بنابراین در این حالت  $\binom{18}{4} \binom{9}{3} \binom{10}{1}$  انتخاب داریم. با در نظر گرفتن سه حالت آخر (دو، سه یا چهار قایقران از ده نفری که می‌خواهند در طرف چپ بنشینند انتخاب شوند) به پاسخ نهایی می‌رسیم:

$$\binom{10}{0} \binom{9}{4} \binom{17}{4} + \binom{10}{1} \binom{9}{3} \binom{18}{4} + \binom{10}{2} \binom{9}{2} \binom{19}{4} + \binom{10}{3} \binom{9}{1} \binom{20}{4} + \binom{10}{4} \binom{9}{0} \binom{21}{4}$$

۶۲. هر مستطیل بدون اینکه ابهامی ایجاد شود با رأسهای بالا سمت چپش و پایین سمت راستش مشخص می‌شود. برای به دست آوردن مستطیلی علامت‌دار، رأس بالا سمت چپ باید روی سطری با شماره‌ای کوچکتر از یا برابر با  $p$  و ستونی با شماره‌ای کوچکتر از یا برابر با  $q$  قرار داشته باشد. رأس پایین سمت راست باید روی سطری با شماره‌ای بزرگتر از یا برابر با  $p$  و ستونی با شماره‌ای بزرگتر از یا برابر با  $q$  قرار داشته باشد. بنابراین  $pq$  جای مختلف برای رأس بالا سمت چپ و  $(m - p + 1)(n - q + 1)$  جای مختلف برای رأس پایین سمت راست وجود دارد. بنابراین

$$pq(m - p + 1)(n - q + 1)$$

مستطیل خانه علامت‌دار را دربر دارند.

۶۳. ملخ باید ۲۷ بار جهش کند، ۹ جهش در هر سمت. جهشهای در سمت اول را با حرف  $A$ ، جهشهای در سمت دوم را با حرف  $B$  و جهشهای در سمت سوم را با حرف  $C$  نشان می‌دهیم. در این صورت می‌توان هر مسیری را که ملخ طی می‌کند بی‌آنکه ابهامی پیش بیاید با کلمه‌ای ۲۷ حرفی که در آن از هر یک از حروف  $A$ ،  $B$  و  $C$  دقیقاً ۹ بار استفاده شده است، مشخص کرد و مسأله تبدیل به شمردن تعداد این کلمه‌ها می‌شود. اگر این کار را مانند مسأله‌های ۱۷ تا ۲۱ فصل «ترکیبیات-۱» انجام دهیم پاسخ به دست می‌آید:  $\frac{27!}{(9!)^3}$ .

## ۱۲. ناورداها

۴. پاسخ: ۱ - ۲۱!

۵. می‌توانیم از مقدار زیر به عنوان ناوردا استفاده کنیم: به هر گنجشک اندیسی مخصوص نسبت می‌دهیم که برابر است با شماره درختی که در حال حاضر روی آن نشسته است (شماره‌ها را از

چپ به راست حساب می‌کنیم). در این صورت  $S$ ، مجموع این اندیسه‌ها، مقدار موردنظر است. در حقیقت، پس از پرواز کردن هر دو گنجشک فقط اندیسه‌ایشان فرق می‌کند - یکی از آنها به اندازه عددی مانند  $x$  کم می‌شود و دیگری به همین مقدار زیاد می‌شود. بنابراین مجموع  $S$  ناورداست. در ابتدا مقدار  $S$  برابر است با  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$  و اگر همه گنجشکها روی درختی با شماره  $k$  باشند، مقدار  $S$  برابر با  $۶k$  است. چون ۲۱ بر ۶ بخش پذیر نیست نتیجه می‌گیریم که ممکن نیست گنجشکها روی یک درخت جمع شوند.

از طرف دیگر، اگر هفت گنجشک و هفت درخت وجود داشته باشد، در ابتدا  $S = ۲۸$ ، که بر ۷ بخش پذیر است و اینکه همه گنجشکها روی یک درخت جمع شوند بعید نیست. در حقیقت، به سادگی می‌توانید دنباله‌ای از پروازها را مشخص کنید که منجر به وضعیت موردنظر شوند: همه گنجشکها روی درخت میانی‌اند.

۶. راهنمایی: ثابت کنید زوجیت تعداد خانه‌های سیاه جدول ناورداست.

۷. راهنمایی: ثابت کنید زوجیت تعداد خانه‌های سیاه در میان چهار خانه گوشه‌ای تحت تغییر رنگ ناورداست.

۸. این مسأله را می‌توان دقیقاً به همان روش مسأله ۷ حل کرد، در اینجا باید مجموعه‌ای از چهار خانه با همان ویژگی در نظر بگیریم. یکی از این مجموعه‌ها چهار خانه‌ای است که مربعی  $۲ \times ۲$  در گوشه بالا سمت چپ جدول تشکیل می‌دهد.

۹. راهنمایی: از زوجیت مجموع همه عددهای روی تخته سیاه به عنوان ناوردا استفاده کنید.

۱۳. الف) صفحه را به طریق زیر رنگ کنید: سطرهایی که شماره‌شان فرد است با سیاه و سطرهایی که شماره‌شان زوج است با سفید. در این صورت چند مربعی  $۱ \times ۴$  را هر طور که روی صفحه قرار دهیم تعدادی زوج از خانه‌های سفید را می‌پوشاند. علاوه بر این، چند مربعی شکل  $۹۴$  همواره تعدادی فرد از خانه‌های سفید را می‌پوشاند. از این دو موضوع نتیجه می‌شود که تعداد کل خانه‌های سفیدی که پوشانده می‌شوند عددی فرد است، در حالی که این تعداد باید ۳۲ باشد. تناقض به دست آمده راه حل را کامل می‌کند.

ج) از رنگ آمیزی شبیه قسمت الف) منتها با چهار رنگ استفاده کنید. چون هر چند مربعی یا چهار خانه به یک رنگ یا چهار خانه با چهار رنگ مختلف را می‌پوشاند، نتیجه می‌گیریم که تقاضل تعداد خانه‌های به رنگ A و خانه‌های به رنگ B بر ۴ بخش پذیر است (صرفنظر از اینکه A و B کدام رنگها باشند). از محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که  $۲۶۵۲$  خانه از رنگ اول،  $۲۶۵۲$  خانه از رنگ دوم،  $۲۵۵۰$  خانه از رنگ سوم و  $۲۵۵۰$  خانه از رنگ چهارم وجود دارد. تقاضل میان تعداد خانه‌های به رنگهای اول و سوم  $۱۰۲$  است که بر ۴ بخش پذیر نیست. راه حل کامل شده است.

۱۴. رنگ آمیزی شکل ۱۵۴ را که با چهار رنگ انجام شده است در نظر می‌گیریم. در این صورت هر کاشی  $2 \times 2$  دقیقاً یک خانه از رنگ ۱ را پوشانده است و هر کاشی  $1 \times 4$  یا اصلاً خانه‌ای به رنگ ۱ ندارد یا دقیقاً دو خانه به رنگ ۱ را پوشانده است. بنابراین، زوجیت تعداد چندمربعیهای  $2 \times 2$  با زوجیت تعداد خانه‌های به رنگ ۱ یکسان است. حکم از این مطلب نتیجه می‌شود: پس از اینکه زوجیت تعداد چندمربعیهای  $2 \times 2$  تغییر کرد (مثلاً وقتی که یکی از آنها کم شود) دیگر نمی‌توانیم صفحه را بدون همپوشانی فرش کنیم.

۲	۳	۲	۳	
۱	۴	۱	۴	
۲	۳	۲	۳	
۱	۴	۱	۴	

شکل ۱۵۴

۱۶. باقی‌مانده تقسیم تعداد سرهای اژدها بر ۷ را به‌عنوان ناوردا در نظر می‌گیریم. استفاده از هر یک از شمشیرها این باقی‌مانده را تغییر نمی‌دهد و چون  $0^\circ$  و  $100^\circ$  به‌پیمانه ۷ همنهشت نیستند، متأسفانه پاسخ منفی است.

۱۷. می‌توان از باقی‌مانده تقسیم تفاضل تعداد دالرها و دیلرهای مرد تاجر بر ۴ به‌عنوان ناوردا استفاده کرد. چون در ابتدا این تفاضل ۱ است، مرد تاجر نمی‌تواند کاری کند که این تفاضل صفر شود.

۱۸. چون ماشین دکتر گیزمو پس از هر عمل تعداد سکه‌ها را چهارتا افزایش می‌دهد، باقی‌مانده تقسیم تعداد سکه‌ها بر ۴ ناورداست. اما باقی‌مانده تقسیم ۲۶ و ۱ بر ۴ فرق دارد. بنابراین ممکن نیست در انتها ۲۶ سکه داشت.

۲۰. پاسخ ۸ است. چون باقی‌مانده تقسیم عددی طبیعی بر ۹ و باقی‌مانده تقسیم مجموع رقم‌هایش بر ۹ یکسان است، باقی‌مانده  $8^{1989}$  با باقی‌مانده نتیجه نهایی، که آن را  $x$  می‌نامیم، یکسان است. بنابراین، باقی‌مانده  $x$  به‌پیمانه ۹ برابر با ۸ است، و می‌دانیم  $x$  رقم است. در نتیجه  $x = 8$ .

۲۱. نوع آمیب  $B$  است. زوجیت تفاضلهای  $N(A) - N(B)$ ،  $N(B) - N(C)$ ، و  $N(C) - N(A)$  را که در آنها  $N(X)$  تعداد آمیبهای از نوع  $X$  است در نظر بگیرید. در حین ادغام این زوجیتها تغییر نمی‌کنند. یعنی، به‌ویژه، در آخر کار (وقتی که فقط یک آمیب در لوله آزمایش مانده است) زوجیت تعداد آمیبهای نوع  $A$  و آمیبهای نوع  $C$  یکسان است، که فقط وقتی ممکن است که تنها آمیب باقی‌مانده از نوع  $B$  باشد.

۲۲. پس از هر حرکت مجموع شماره سطر و ستون خانه‌ای که سرباز روی آن است یا دو تا کم می‌شود یا یکی زیاد می‌شود. بنابراین باقی‌مانده تقسیم این مجموع بر ۳ هر بار یکی زیاد می‌شود. چون در

کل  $n^2 - 1$  حرکت داریم، و مجموع آخری باید یکی بیشتر از مجموع اولیه باشد، پس  $n^2 - 2$  باید بر ۳ بخش پذیر باشد، که ممکن نیست (باقی مانده هیچ مربع کاملی بر ۳ برابر با ۲ نیست). بنابراین سر باز نمی تواند چنین مسیری را طی کند.

یادداشت. توجهتان را به این نکته جلب می کنیم که در این راه حل از کلمه «ناوردا» صحبت نکرده ایم. البته، مقداری ناوردا وجود دارد. می توانید آن را پیدا کنید؟

۲۳. چون مجموع عددهای هر سطر برابر با ۱ است و  $m$  سطر داریم، مجموع همه عددهای در جدول برابر با  $m$  است. از طرف دیگر مجموع عددهای هر ستون برابر با ۱ است و  $n$  ستون داریم. بنابراین مجموع همه عددهای در جدول برابر با  $n$  است. اما مجموع عددهای در جدول به روش محاسبه آن بستگی ندارد (از این نظر، این مسأله مربوط به ناورداهاست). بنابراین  $m = n$ .

۲۴. پاسخ منفی است. راهنمایی: از زوجیت تعداد لیوانهایی که وارونه اند به عنوان ناوردا استفاده کنید.

۲۵. چهار رأس مکعب را طوری نشان کنید که هیچ دو تایی از آنها دو سر یک یال نباشند (این کار ساده است). سپس تفاضل میان مجموع عددهای روی رأسهای نشان شده و مجموع عددهای روی بقیه رأسها را در نظر بگیرید. این تفاضل تحت عملهایی که در مسأله گفته شده ناوردا هستند. با استفاده از این ناوردا به سادگی می توانیم ثابت کنیم که پاسخ هر دو سؤال مسأله منفی است.

۲۶. از یکی از قطاعها شروع به شماره گذاری کنید و قطاعها را با عددهای از ۱ تا ۶ شماره بزنید. سپس تفاضل مجموع عددهای نوشته شده در قطاعهای ۱، ۳ و ۵ و مجموع عددهای نوشته شده در قطاعهای ۲، ۴ و ۶ را در نظر بگیرید. این مقدار ناورداست و در ابتدا مقدارش  $\pm 1$  است. بنابراین ممکن نیست برابر با صفر شود و پاسخ منفی است.

۲۷. فقط می توانیم کارتهایی به شکل  $(a, b)$  را که در آنها  $a < b$  و  $a - b$  بر ۷ بخش پذیر است به دست بیاوریم.

۲۸. پاسخ منفی است. فرض کنید  $k$  برابر با مجموع تعداد خرده سنگها و تعداد کپه ها باشد. به سادگی می توان ثابت کرد که مقدار  $k$  ناورداست و مقدار اولیه اش  $1002$  است. اگر  $k$  کپه داشته باشیم که در هر کدام دقیقاً ۳ خرده سنگ وجود داشته باشد، مقدار  $k$  برابر است با  $3k + k$  یا  $4k$ ، که ممکن نیست برابر با  $1002$  باشد، زیرا  $1002$  بر ۴ بخش پذیر نیست.

۲۹. پاسخ منفی است. راهنمایی: از مقدار زیر به عنوان ناوردا استفاده کنید: زوجیت تعداد زوجهایی مانند  $(a, b)$  که در اینجا  $a$  عدد سمت راست عدد  $b$  است و  $a > b$ .

۳۰. مجموع مربعهای عددهای هر سه تایی پس از عمل گفته شده در مسأله تغییر نمی کند. اگر این مقدار را به عنوان ناوردا در نظر بگیریم، به سادگی معلوم می شود که پاسخ منفی است (مقدار ناوردا برای سه تاییهای مفروض مختلف است:  $\frac{13}{4} \neq 6 + 2\sqrt{2}$ ).

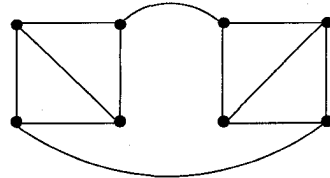
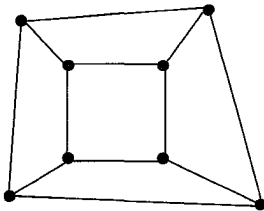
## ۱۳. گرافها - ۲

۲. چون ۴ یال وجود دارد که از چهار تا از رأسها خارج شده‌اند، پس هر یک از این رأسها به بقیه وصل است. یعنی رأس پنجم هم به بقیه رأسها وصل است؛ پس درجه‌اش ۴ است. این تناقض راه‌حل را کامل می‌کند.

۳. راهنمایی: از استقرا روی  $n$  استفاده کنید. پایه استقرا (وقتی که  $n = 1$ ) ساده است. برای اثبات گام استقرایی، گراف  $2n$  رأسی  $G$  را در نظر بگیرید که در شرطهای مسأله صدق می‌کند و دو رأس دیگر مانند  $A$  و  $B$  به آن اضافه کنید که، تا اینجای کار، به هیچ‌یک از رأسهای  $G$  وصل نشده باشند. گراف  $G$  دو خانواده از رأسها مانند  $V_1$  و  $V_2$  دارد که هر کدام  $n$  رأس دارند که درجه‌هایشان برابر است با  $1, 2, \dots, n$ . یکی از رأسهای جدید - مثلاً  $A$  - را به همه رأسهای خانواده  $V_1$  و نیز رأس  $B$  وصل کنید. گراف حاصل گرافی  $2n + 2$  رأسی است که ویژگی مورد نظر را دارد.

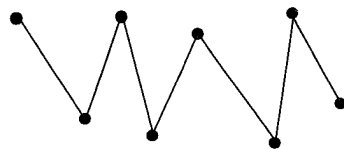
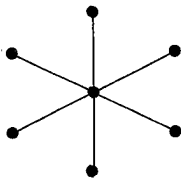
۴. الف) بله، چون در چنین گرافی هر رأس به بقیه رأسها وصل است؛ یعنی، گراف مورد نظر با گراف کامل  $10$  رأسی یکرخت است.

ب) خیر - شکل ۱۵۵ را ببینید.



شکل ۱۵۵

ج) خیر - شکل ۱۵۶ را ببینید.



شکل ۱۵۶

۵. فرض کنید بتوان چنین یالی را حذف کرد. اگر این یال دو رأس با درجه‌های برابر را به هم وصل کند، آن وقت تعداد رأسهای فرد در هر مؤلفه همبندی عددی فرد است، که ممکن نیست. در غیر این صورت، فقط یکی از مؤلفه‌ها رأسی با درجه ۲ دارد و ممکن نیست مؤلفه‌ها یکرخت باشند.

۹. یکی از مؤلفه‌های همبندی گراف مفروض را در نظر بگیرید. این مؤلفه درخت نیست، زیرا رأسی آویز ندارد. بنابراین دور دارد.
۱۰. فرض کنید دو سر یال حذف شده در گراف جدید با مسیری ساده به هم وصل باشند. در این صورت این مسیر به همراه یال حذف شده دوری در گراف قدیمی تشکیل می‌دهند - تناقض.
۱۲. راهنمایی: اگر این گراف درخت نباشد، با حذف کردن برخی یالهایش می‌توانیم از آن درخت به دست آوریم.
۱۴. تعداد کل راهها در این کشور  $(3^0)$  است. چون تعداد یالها در درختی  $3^0$  رأسی برابر با ۲۹ است پاسخ چنین است:  $\frac{3^0 \times 29}{2} - 29 = 406$ .
۱۵. راهنمایی: درختی ماکسیمال در گراف مفروض انتخاب کنید و رأسهای آویزش را حذف کنید.
۱۶. راهنمایی: درختی ماکسیمال در گراف مفروض در نظر بگیرید. هر یال این درخت را مضاعف کنید (۹۹ یال داریم). هر چند که نتیجه واقعاً گراف نیست، اما قضیهٔ اویلر در مورد کشیدن گرافها با قلم بدون برداشتن آن از روی کاغذ در مورد این «گراف چندگانه» هم درست است.
۱۷. گرافی مسطح در نظر بگیرید که رأسهایش دریاچه‌ها هستند، یالهایش نهرها هستند و وجه‌هایش جزیره‌ها. چون  $2 = V - E + F$ ،  $V = 7$  و  $E = 10$ ، پس  $F = 5$ . البته، یکی از وجه‌ها وجه بیرونی است که جزیره نیست. پاسخ: ۴ جزیره.
۱۹. راهنمایی: هر وجه را دست‌کم سه یال احاطه کرده‌اند.
۲۴. نابرابری  $E \geq 3V - 6$  در مورد این گراف درست نیست و در نتیجه این گراف مسطح نیست.
۲۵. فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت  $6V \geq 2E$ ؛ یعنی  $E \geq 3V$ ، که با نابرابری ثابت شده تناقض دارد.
۲۶. فرض کنید هر دو گراف مسطح باشند. در این صورت روی هم حداکثر

$$(3 \times 11 - 6) + (3 \times 11 - 6)$$

- یا ۵۴ یال دارند. اما گراف کامل ۱۱ رأسی باید ۵۵ یال داشته باشد، یعنی به تناقض رسیده‌ایم.
۲۷. راهنمایی: ابتدا با استفاده از اینکه درجهٔ هر رأس دست‌کم ۳ است نابرابری  $E \leq 3V$  را ثابت کنید. اگر تعداد پنج ضلعیها را  $a$  و تعداد شش ضلعیها را  $b$  بنامیم، معلوم می‌شود که

$$5a + 6b + 7 = 2E \leq 6F - 12 = 6(a + b + 1) - 12$$

بنابراین  $a \geq 13$ .

۲۹. الف) خیر، زیرا گراف مورد نظر ۱۲ رأس فرد دارد. یعنی دست‌کم به ۶ خط شکسته احتیاج داریم. ب) بله، می‌توان. از خواننده می‌خواهیم که مثالی بیابد.

۳۰. گرافی که با دایره‌ها تشکیل می‌شود (نقطه‌های برخورد دایره‌ها، رأسها و کمانهای دایره‌ها یالهای این گراف‌اند) همبند است و درجه همه رأسهایش زوج‌اند.

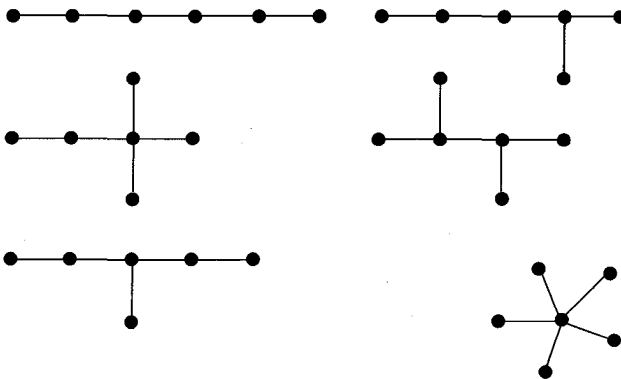
۳۱. اثبات را می‌توان به استقرا روی  $n$  انجام داد. پایه استقرا، وقتی که  $n = 0$ ، واضح است. برای اثبات گام استقرایی دو رأس فرد مانند  $A$  و  $B$  انتخاب می‌کنیم و آنها را به‌طور ذهنی با یالی جدید به هم وصل می‌کنیم. پس از این کار، گراف جدید فقط  $2n - 2$  رأس فرد دارد و می‌توان آن را طوری کشید که قلم دقیقاً  $1 - n$  بار از روی کاغذ برداشته شود. به‌هنگام ترسیم، وقتی که می‌خواهیم از روی  $AB$ ، یالی که به‌طور ذهنی اضافه کرده‌ایم (و وجود واقعی ندارد)، بگذریم، قلم را از روی کاغذ برمی‌داریم و در انتهای دیگر این یال آن را باز هم روی کاغذ می‌گذاریم.

۳۲. راهنمایی: دو دانشمند بیابید که با هم آشنا نیستند و همه افرادی را که با آنها آشنا هستند در نظر بگیرید.

۳۳. اگر فرض کنیم حکم درست نباشد، در میان هر گروهی از دانش‌آموزان که تعدادشان عددی از  $68$  تا  $101$  است، دقیقاً سه دانش‌آموز وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است. در این صورت تعداد دانش‌آموزانی که تعداد دوستانشان عددی فرد است، عددی فرد است، که ممکن نیست.

۳۴. راهنمایی: این دو رأس را با مسیری به هم وصل کنید. اگر طول این مسیر برابر با  $a$  باشد، زوجیت طول هر رأس تا این دو رأس با زوجیت  $a$  یکسان است.

۳۵. راهنمایی: ثابت کنید هر درخت شش‌رأسی با یکی از گرافهای شکل  $157$  یگریخت است.



شکل ۱۵۷

۳۶. الف و ب) این قسمتها نتیجه قسمتهای (ج) و (د)‌اند.

ج) فرض کنید حکم درست نباشد. شهری دلخواه مانند  $X$  و شهری مانند  $A$  در نظر بگیرید که نتوان از  $X$  از طریق خط هوایی با حداکثر یک باریاده و سوار شدن به  $A$  رفت و نیز شهری



مانند  $B$  در نظر بگیرید که توان از  $X$  از طریق راه آهن با حداکثر یک بار پیاده و سوار شدن به  $B$  رفت. اکنون توجه کنید که شهرهای  $A$  و  $B$  از طریق یکی از راههای حمل و نقل گفته شده به هم وصل اند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می توانیم فرض کنیم  $A$  و  $B$  از طریق راه آهن به هم وصل اند. بنابر فرض  $X$  و  $A$  از طریق راه آهن به هم وصل اند و در نتیجه، می توانیم از  $X$  با قطار با یک بار پیاده و سوار شدن در  $A$  به  $B$  برویم، که تناقض است. (د) راهنمایی: فرض کنید بتوانیم با حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن از  $A$  به  $B$  پرواز کنیم و نتوانیم با حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن از  $C$  به  $D$  برویم. گرافی را در نظر بگیرید که از این چهار شهر تشکیل شده است.

۳۷. مسأله ۲۸ فصل «اصل لانه کبوتری» را ببینید.

۳۸. رأسی دلخواه در نظر بگیرید و توجه کنید که دست کم شش یال یکرنگ از این رأس خارج شده اند. اکنون از مسأله ۳۷ استفاده کنید.

۳۹. فرض کنید رأسی وجود داشته باشد که شش یال آبی از آن خارج شده اند. در این صورت می توانیم از مسأله ۳۷ استفاده کنیم. اگر رأسی وجود داشته باشد که حداکثر چهار یال آبی از آن خارج شده باشد (ممکن نیست که از هر نه رأس پنج یال آبی خارج شده باشد)، دست کم چهار یال قرمز وجود دارند که از این رأس خارج شده اند.

۴۰. از هر رأس دست کم ۹ یال یکرنگ خارج شده است. اکنون از مسأله ۳۹ استفاده کنید.

۴۲. فرض کنید تعداد راههایی که به پایتخت وارد می شوند  $a$  باشد. در این صورت تعداد کل راههای «ورودی» برابر با  $a + 100 \times 21$  و تعداد کل راههای خروجی حداکثر  $(100 - a) + 100 \times 20$  است. بنابراین

$$21 \times 100 + a \leq 20 \times 100 + (100 - a)$$

یعنی  $0 \leq 2a$ ؛ پس  $a = 0$ .

۴۳. شهرها را شماره گذاری کنید و هر جاده را از شهر با شماره کوچکتر به سمت شهر با شماره بزرگتر یک طرفه کنید.

۴۴. راهنمایی: ابتدا همه رأسهای متصل به رأس انتخاب شده  $A$  را در نظر بگیرید، بعد رأسهای جدید را که به این رأسها وصل اند، و همین طور تا آخر. ضمن گسترش این «شبه» (تا جایی که می توانیم) یالهایی را که رأسهای تازه اضافه شده را به رأسهای قدیمی وصل می کنند از سمت رأس قدیمی به سمت رأس جدید جهت دار می کنیم.

۴۵. راهنمایی: مسیری اولیری در نظر بگیرید که از همه یالهای گراف می گذرد و یالها را براساس ترتیبشان در این دور جهت دار کنید.

۴۶. راهنمایی: ثابت کنید مسیری بسته از روی پیکانها وجود دارد که از روی هر یال دقیقاً یک بار می گذرد. برای این کار مسیر بسته ای را در نظر بگیرید که تعداد یالهایش بیشترین مقدار ممکن است.

۴۸. فرض کنید  $A$  برندهٔ تورنمنت باشد. اگر تیمی وجود داشته باشد که  $A$  و نیز همهٔ تیمهایی را که به  $A$  باخته‌اند برده باشد، باید امتیازش از  $A$  بیشتر باشد، که ممکن نیست. حکم هر دو قسمت مسأله از این مطلب نتیجه می‌شود.

۴۹. راهنمایی: از استقرا روی تعداد شهرها استفاده کنید. پایهٔ استقرا (وقتی که تعداد شهرها سه‌تاست) با تحلیل مورد به مورد اثبات می‌شود. برای اثبات گام استقرایی، شهری را که جاده‌هایی هم به آن وارد می‌شوند هم خارج می‌شوند موقتاً در نظر نگیرید.

۵۰. حکم را به استقرا روی  $n$  تعداد تیمها، ثابت می‌کنیم. اثبات پایهٔ استقرا، وقتی که  $n = ۲$  ساده است. برای اثبات گام استقرایی موقتاً یکی از تیمها، مثلاً تیم  $X$ ، را کنار می‌گذاریم و بقیهٔ  $n - ۱$  تیم را آن‌طور که می‌خواهیم شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر  $X$  تیم  $۱$  را برده باشد یا به این  $n - ۱$  تیم باخته باشد، به سادگی می‌توانیم آن را به زنجیر تیمهای شماره‌گذاری شده اضافه کنیم. در حالت دیگر،  $X$  به تیم  $۱$  باخته است و  $n - ۱$  تیم را برده است. بنابراین عددی مانند  $k$  وجود دارد که  $X$  به تیم  $k$  باخته است و تیم  $k + ۱$  را برده است - در غیر این صورت  $x$  باید به تیم  $۲$ ، در نتیجه به تیم  $۳$ ، در نتیجه به تیم  $۴$ ، و همین‌طور بقیهٔ تیمها، باخته باشد. با پیدا کردن چنین  $k$  ای می‌توانیم  $X$  را در زنجیر موجود با ایجاد شکافی بین تیمهای  $k$  و  $k + ۱$  بگنجانیم و زنجیر موردنظر را به دست بیاوریم.

۵۱. فرض کنید تعداد تیمهایی که تیمهای  $A$  و  $B$  برده‌اند برابر باشد و تیم  $B$  تیم  $A$  را برده باشد. در این صورت اگر هر تیمی مانند  $C$  که به  $A$  باخته است به  $B$  هم باخته باشد، آن وقت امتیاز تیم  $B$  باید از امتیاز تیم  $A$  بیشتر باشد. بنابراین تیمی مانند  $C$  وجود دارد که تیم  $A$  تیم  $C$  را برده است و تیم  $C$  تیم  $B$  را.

۵۲. الف) راهنمایی: فرض کنید نتوانیم از شهر  $A$  به شهر  $B$  برویم. شهرهایی را در نظر بگیرید که جاده‌هایی که از  $A$  خارج می‌شوند به این شهرها ختم شوند و نیز شهرهایی را در نظر بگیرید که جاده‌هایی که به  $B$  وارد می‌شوند از این شهرها خارج شده‌اند.

ب) راهنمایی: با همان نمادگذاری قسمت (الف)، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ جاده‌ای از  $A$  به  $B$  وجود ندارد و هیچ شهری مانند  $C$  وجود ندارد که جاده‌ای از  $A$  به  $C$  و جاده‌ای از  $C$  به  $B$  وجود داشته باشد. چهل شهر مانند  $A_1, A_2, \dots, A_{40}$  پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی که از  $A$  خارج می‌شوند به این شهرها ختم شوند و چهل شهر دیگر (!) مانند  $B_1, B_2, \dots$  و  $B_{40}$  پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی که به  $B$  وارد می‌شوند از این شهرها خارج شده باشند. در این صورت  $۱۶۰۰$  جاده وجود دارد که از  $A_i$  ها خارج شده‌اند. در همین وضعیت، تعداد کل جاده‌هایی که  $A_i$  ها را به هم وصل می‌کنند حداکثر  $\frac{۴۰ \times ۳۹}{۲}$  یا  $۷۸۰$  است و تعداد جاده‌هایی که از این شهرها به سوی  $۱۹$  شهر دیگر خارج می‌شوند حداکثر  $۱۹ \times ۴۰$  یا  $۷۶۰$  است. چون

$$۱۶۰۰ > ۱۵۴۰ = ۷۸۰ + ۷۶۰$$

پس باید جاده‌ای از  $A_i$  به  $B_j$  وجود داشته باشد.

۵۳. راهنمایی: فرض کنید یال میان رأسهای  $A$  و  $B$  را حذف کرده‌ایم. دو رأس دلخواه در نظر بگیرید و سه حالت را بررسی کنید: هیچ‌یک از این دو رأس  $A$  یا  $B$  نباشد؛ یکی از آنها یا  $A$  باشد یا  $B$ ؛ یا این دو رأس همان  $A$  و  $B$  باشند.

### ۱۴. هندسه

۱. راهنمایی: طول ضلع سوم مثلثی که طول دو ضلعش  $a$  و  $b$  است چه مقادیری ممکن است باشد.
۲. راهنمایی: نابرابریهای  $AM > AB - \frac{BC}{2}$  و  $AM > AC - \frac{BC}{2}$  را ثابت کنید.
۳. دایره محاطی مثلث و طول پاره‌خطهایی را که نقطه‌های تماس روی ضلعهای مثلث ایجاد می‌کنند در نظر بگیرید. سه جفت پاره‌خطها به طولهای برابر داریم که طولهای آنها مقادیرهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  موردنظرند.
۴. فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت یکی از زاویه‌ها از دیگری بزرگتر است و طول ضلع متناظرش باید از طول دو ضلع دیگر بیشتر باشد.
۵. راهنمایی: از نابرابریهای  $\angle BAM < \angle ABM$  و  $\angle CAM < \angle ACM$  استفاده کنید.
۶. این مسأله تمرینی ساده برای نحوه استفاده از نابرابری شماره ۱ است. اگر  $a + b > c$ ، آن وقت

$$a + 2\sqrt{ab} + b > c$$

- یا  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c})^2$  و در نتیجه  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$ .
۷. چون  $AB + CD < AC + BD$  (راستی، چرا؟) می‌توانیم حکم موردنظر را با جمع کردن این نابرابری با نابرابری داده شده در صورت مسأله به‌دست بیاوریم.
  ۹. چون  $\angle A > \angle A_1$ ، پس  $BD > B_1D_1$  و در نتیجه  $\angle C > \angle C_1$ . اگر  $\angle B > \angle B_1$ ، به‌طور مشابه معلوم می‌شود  $\angle D > \angle D_1$ ، که ممکن نیست، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعیها باید برابر باشد.
  ۱۰. راهنمایی: متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  را رسم کنید که سه رأسش بر رأسهای مثلث  $ABC$  منطبق‌اند و  $D$  از امتداد دادن میانه موردنظر به‌اندازه خودش به‌دست می‌آید. اکنون از نابرابری شماره ۲ استفاده کنید.
  ۱۱. پاسخ: خیر. از نابرابری شماره ۲ نتیجه می‌شود

$$\angle BAC > \angle BCA = \angle DCE > \angle DEC = \dots > \angle KAI = \angle BAC$$

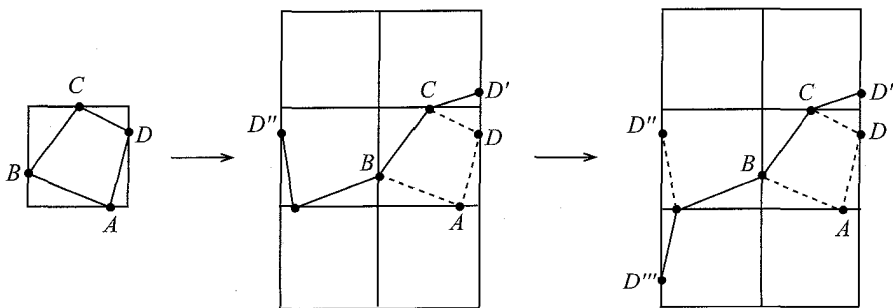
که تناقض است!

۱۲. الف) راهنمایی: سه نسخه از مثلث مفروض را طوری روی صفحه قرار دهید که ساقهایشان بر هم منطبق باشد. اکنون به‌دنبال مثلثی متساوی‌الاضلاع بگردید.

ب) نقطه  $E$  را طوری روی ضلع  $AB$  انتخاب کنید که  $AE = AC$ . سپس ثابت کنید  
 $EB > CE > AC$

۱۳. راهنمایی: اگر محیط بیرونی را با  $a$ ، محیط ستاره را با  $b$  و محیط درونی را با  $c$  نشان دهیم، آن وقت  $a > c$ ،  $a + c < b$  و  $a > b$ . اکنون با بررسی حالت به حالت راه حل کامل می شود.

۱۴. محیط چهارضلعی مورد نظر را مانند شکل ۱۵۸ «باز کنید».



شکل ۱۵۸

۱۵. مثلث دوم را در سه گام طوری حرکت دهید که هر سه رأسش بر رأسهای مثلث اول منطبق شود (هر باریک رأس).

۱۶. الف) ثابت کنید هر نقطه ثابت می ماند.

ب) از قسمت الف) استفاده کنید.

۱۷. الف) پاسخ: باز هم انتقال است.

ب) دو خط موازی در نظر بگیرید که بر جهت انتقال عمودند و فاصله آنها برابر با نصف طول انتقال است.

ج) این حرکت ممکن نیست دوران باشد، زیرا نقطه‌ای وجود ندارد که در جایش ثابت بماند.

انتقال هم ممکن نیست باشد، زیرا فاصله میان نقطه‌ها و تصویرهایشان ثابت نیست. سرانجام،

تقارن نسبت به خط هم ممکن نیست باشد: اگر باشد، هر نقطه مانند  $A$  و تصویرش،  $A'$  را

که در نظر بگیریم، عمود منصف پاره خط  $AA'$  خطی ثابت است و به نحوه انتخاب نقطه  $A$

بستگی ندارد.

۱۸. پاسخ مثبت است. کافی است یکی از مرکزها را بر دیگری تصویر کنیم.

۱۹. فقط دوران همانی می تواند نیم صفحه را بر خودش تصویر کند: در غیر این صورت، کناره‌ها کجا

می روند؟ با تقارن نسبت به خط می توان این کار را کرد، به شرطی که این خط بر کناره نیم صفحه

عمود باشد.

۲۰. بله، درست است. در حقیقت، ترکیب هشت تا از این دورانها دورانی ۲۴ درجه حول همان نقطه است. علاوه بر این، ترکیب سه تا از این برهنه‌هیها دورانی به اندازه ۷۲ درجه حول نقطه  $O$  است.
۲۱. راهنمایی: مثلث را نسبت به نقطه مفروض قرینه کنید. جایی که مثلث و تصویرش بر هم قرار می‌گیرند دو سرپاره خط موردنظرند.
۲۲. راهنمایی: از انتقال استفاده کنید.
۲۴. راهنمایی: چون خطهای  $(AB)$ ،  $(CD)$  و  $(MN)$  در یک نقطه به هم می‌رسند، تقارن نسبت به خط  $(MN)$  خطهای  $(AB)$  و  $(CD)$  را بر هم تصویر می‌کند.
۲۵. راهنمایی: از دورانی  $90^\circ$  درجه استفاده کنید که مربع را بر خودش تصویر می‌کند.
۲۶. راهنمایی: از دورانی  $60^\circ$  درجه حول نقطه  $P$  استفاده کنید و نقطه برخورد خط اول و تصویر خط دوم را در نظر بگیرید.
۲۷. الف) راهنمایی: اگر دو نقطه مفروض  $X$  و  $Y$  در طرفهای مختلف خط  $L$  قرار داشته باشند، آن وقت  $M = (XY) \cap L$ ؛ در مورد دیگر،  $M = (XY) \cap L$ ، که در آن  $Y_1$  قرینه  $Y$  نسبت به  $L$  است.
- ب) راهنمایی: اگر  $X$  و  $Y$  در طرفهای مختلف خط  $L$  قرار داشته باشند، آن وقت  $M = (XY) \cap L$ ؛ در غیر این صورت،  $M = (XY) \cap L$ ، که در آن  $Y_1$  قرینه  $Y$  نسبت به  $L$  است.
۲۸. راهنمایی: محور اول را نسبت به محور دوم قرینه کنید. ثابت کنید تصویر حاصل باید محور تقارنی برای مثلث باشد. همچنین، ثابت کنید که ممکن نیست دو خط اول بر هم عمود باشند.
۲۹. الف)  $A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, T, U, V, W, X, Y$ .  
ب)  $H, I, N, O, S, X, Z$ .
- پاسخ بستگی به این دارد که چگونه حروف را بنویسید. در اینجا از حروف رومن تایی رایج استفاده کرده‌ایم.
۳۰. پاسخ منفی است. به عنوان راهنمایی، مسأله ۲۸ را ببینید.
۳۱. راهنمایی: نقطه‌های موردنظر نقطه‌هایی هستند که از آنها پاره خط  $OS$  ( $O$  مرکز دوران است) به زاویه  $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$  یا  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  دیده می‌شود ( $\alpha$  زاویه دوران است). می‌توانید توصیف دقیقتری برای مکان هندسی موردنظر بیابید.
۳۴. خیر. راهنمایی: اگر دو نیمساز بر هم عمود باشند، مجموع این دو زاویه مثلث  $180^\circ$  می‌شود.
۳۵. فرض کنید خط  $L$  بر خطهای  $AB$  و  $CD$  عمود باشد و از مرکز دایره بگذرد. در این صورت پاره‌خطهای  $AC$  و  $BD$  نسبت به خط  $L$  متقارن‌اند.
۳۶. راهنمایی: مجموع دو زاویه روبه‌رو در چهارضلعی محاطی باید  $180^\circ$  درجه باشد. پاسخ:  $60^\circ$ ،  $90^\circ$  و  $120^\circ$ .

۳۸. به سادگی معلوم می‌شود که اندازه زاویه  $AOD$  برابر با  $60^\circ$  است. علاوه بر این، مثلث  $DOC$  متساوی‌الساقین است، در نتیجه  $\angle DOC = 75^\circ$ . بنابراین  $\angle AOC = 135^\circ$ .
۳۹. زاویه‌های  $ABC$  و  $ABD$  برابر با  $90^\circ$  اند. بنابراین  $\angle CBD = 180^\circ$ .
۴۰. الف) فرض کنید  $a = |AB|$ ،  $b = |BC|$ ،  $c = |CD|$  و  $d = |DA|$ . در این صورت  $b$  از طول ارتفاع وارد بر ضلع  $AB$  در مثلث  $ABC$  بیشتر نیست. بنابراین  $S_{ABC} \leq \frac{ab}{4}$  و  $S_{CDA} \leq \frac{cd}{4}$ . با جمع کردن این نابرابریها حکم به دست می‌آید.
- ب) از قسمت (الف) و اینکه می‌توان چهارضلعی  $ABCD$  را به چهارضلعی‌ای تبدیل کرد که مساحتش همان مساحت چهارضلعی  $ABCD$  باشد، اما ترتیب ضلعهایش  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  باشد استفاده کنید (چهارضلعی را از روی قطر  $AC$  ببرید و یکی از نیمه‌ها را «برگردانید»).
۴۲. چون  $\frac{bc}{4} \geq 1$ ، پس  $b^2 \geq 2$ .
۴۳. بله، ممکن است. مساحت  $ABC$  را در نظر بگیرید که در آن  $AC = 2002 + \varepsilon$  و  $AB = BC = 1001$  (در اینجا  $\varepsilon$  عددی مثبت و به قدر کافی کوچک است؛ مثلاً  $\varepsilon = 0.1$ ).
۴۴.  $ABCD$  را از روی قطر  $AC$  ببرید و برابری موردنظر را برای هر دو نیمه جداگانه ثابت کنید. فراموش نکنید که ضلعهای  $KLMN$  با قطرهای  $ABCD$  موازی‌اند.
۴۵. به سادگی می‌توان ثابت کرد که مساحت چهارضلعی‌ای که قطرهایش برهم عمودند برابر با نصف حاصل ضرب قطرهایش است. در این مسأله،  $S_{ABCD} = 12$ .
۴۶. پاسخ: ۷. راهنمایی: ثابت کنید که مساحت هر یک از مثلثهای اضافه شده برابر با ۲ است.
۴۷. برابری مساحتها معادل برابری ارتفاعهای وارد بر  $BM$  به ترتیب از  $A$  و  $C$  است. این هم معادل است با اینکه  $AC$ ،  $BM$  را نصف کند.
۴۸. از مسأله ۴۴ استفاده کنید.
۴۹. راهنمایی: ثابت کنید مساحت مثلثهای  $ABD$  و  $ACD$  برابر است.
۵۰. اگر نقطه  $O$  درون مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  باشد، مساحت مثلث  $ABC$  برابر با مجموع مساحتهای مثلثهای  $OAB$ ،  $OBC$  و  $OAC$  می‌شود. می‌توان این مساحتها را برحسب عمودهای وارد از  $O$  بر ضلعهای مثلث پیدا کرد.
۵۵. خیر، دروغ می‌گوید. مثلاً می‌توانیم ثابت کنیم که نقطه‌هایی روی صفحه وجود دارند که ویژگی موردنظر را دارند و هر چقدر که بخواهیم از نقطه موردنظر دورند (در حقیقت، مجموعه مفروض سهمی است).
۵۶. علت غلط بودن اثبات غلط بودن شکل است؛ نقطه  $M$  بیرون مثلث قرار دارد.
۵۷. چون فاصله  $P$  از  $A$  و  $B$  و نیز از  $C$  و  $D$  برابر است، مثلثهای  $PAD$  و  $PBC$  هم‌منهشت‌اند. بنابراین در این مثلثها میانه‌های  $PM$  و  $PN$  هم برابرند.
۵۸. یکی از راهها این است که ثابت کنیم این عمود منصف ضلع زاویه قائمه بلندتر را به دو پاره خط طوری تقسیم می‌کند که یکی از آنها برابر است با طول قسمت گفته شده از عمود منصف و طول

پاره‌خط دیگر دو برابر طول این پاره‌خط است. راه دیگر این است که مستقیماً طولها را برحسب طول یکی از ضلعهای مثلث اصلی حساب کنید.  
 ۵۹. راهنمایی: از این مطلب استفاده کنید که هر یک از قطعه‌های این خط شکسته میانه وارد بر وتر در مثلثی قائم‌الزاویه و در نتیجه برابر با نصف این وتر است.

### ۱۵. مبناهای عددی

راه‌حل تمرینها

۱. الف (۲؛ ب)  $n$ .

$$۱۰۱۰۱۲ = ۲۱, ۱۰۱۰۱۳ = ۹۱, ۲۱۱۴ = ۳۷, ۱۲۶۷ = ۶۹, ۱۵۸۱۱ = ۱۸۴.۲$$

$$۱۰۰۱۰ = ۱۱۰۰۱۰۰۲ = ۱۰۲۰۱۳ = ۱۲۱۰۴ = ۴۰۰۵ = ۲۴۴۶ = ۲۰۲۷.۳$$

$$= ۱۴۴۸ = ۱۲۱۹$$

$$۱۱۱۱۰ = ۸۱۱۱.۴$$

۵. جدول ضرب در مبنای ۵ را در زیر نوشته‌ایم.

۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳
۲	۰	۲	۴	۱
۳	۰	۳	۱	۴
۴	۰	۴	۳	۲

۶. الف (۱۱۰۰۱۲؛ ب) ۲۱۲۰۲۳

۷. الف (۲۶۲۶۷؛ ب) ۱۰۰۰۳۷

مسئله‌ها

۱. پاسخ: بله، در دستگاه با مبنای ۱۲ درست است. راهنمایی: رقمهای ۳ و ۴ همواره عددهای ۳۱۰ و ۴۱۰ هستند و حاصل ضربشان برابر است با ۱۲۱۰.

۲. الف) بله، چنین دستگاهی وجود دارد: دستگاه با مبنای ۷. راهنمایی: مسئله قبل را ببینید.

ب) پاسخ: خیر. این تساویها فقط در دستگاه با مبنای ۵ ممکن است درست باشند، اما در این

دستگاه رقم ۵ وجود ندارد.

۳. وقتی و فقط وقتی عددی زوج است که

الف) تعداد رقمهای ۱ در نمایش آن در مبنای ۳ عددی زوج باشد (یعنی، مجموع رقمهای عددی زوج باشد). در حقیقت، هر عدد برابر است با مجموعی از توانهای ۳ ضرب در یکی از رقمهای ۰، ۱ یا ۲. جمعوندهای متناظر با رقمهای ۰ و ۲ زوج اند و در نتیجه، زوجیت این مجموع بستگی به تعداد جمعوندهای متناظر با رقمهای ۱ دارد.

ب) به ازای  $n$  های زوج، نمایش آن در مبنای  $n$  به رقمی زوج ختم شود؛ به ازای  $n$  های فرد مجموع رقمهای زوج باشد. اثبات حالت اخیر شبیه اثبات قسمت الف) است. در حالی که  $n$  زوج است، وقتی عددی به شکل مجموع توانهای  $n$  ضرب در رقمهای این عدد نوشته می شود همه جمعوندها از دومی به بعد زوج اند، زیرا بر  $n$  بخش پذیرند. بنابراین زوجیت مجموع مورد نظر با زوجیت رقم یکان مشخص می شود.

۴. پاسخ  $42423 = 15642 + 23451$  (در مبنای ۷) است.

۵. فرض کنید مبنای دستگاه  $n$  باشد. در این صورت  $(2n + 4) + (3n + 2) = n^2$ ؛ یعنی  $0 = n^2 - 5n - 6$ ، بنابراین  $n = -1$  یا  $n = 6$ . پاسخ:  $n = 6$ .

۶. الف) در دستگاه با مبنای  $n$  نمایش عددی وقتی و فقط وقتی به  $k$  صفر ختم می شود که این عدد بر  $n^k$  بخش پذیر باشد.

ب) فرض کنید  $m$  مقسوم علیهی از  $n$  باشد. رقم آخر نمایش عددی در مبنای  $n$  وقتی و فقط وقتی بر  $m$  بخش پذیر است که خود این عدد بر  $m$  بخش پذیر باشد.

۷. الف) فرض کنید  $m$  مقسوم علیهی از  $n - 1$  باشد. در این صورت مجموع رقمهای نمایش عددی در مبنای  $n$  وقتی و فقط وقتی بر  $m$  بخش پذیر است که خود این عدد بر  $m$  بخش پذیر باشد.

ب) مجموع «متناوب» (با علامتهای «متناوب») رقمهای نمایش عددی در مبنای  $n$  وقتی و فقط وقتی بر  $n + 1$  بخش پذیر است که خود این عدد بر  $n + 1$  بخش پذیر باشد.

ج) فرض کنید  $m$  مقسوم علیهی از  $n + 1$  باشد. مجموع متناوب (با علامتهای متناوب) رقمهای نمایش عددی در مبنای  $n$  وقتی و فقط وقتی بر  $m$  بخش پذیر است که خود این عدد بر  $m$  بخش پذیر باشد.

۱۲. راهنمایی: مجموعه مورد نظر همان است که در مسأله ۱۱ گفتیم.

۱۳. الف) این بازی همان بازی نیم است که در آن به جای سه کپه، هشت کپه داریم. استراتژی و اثبات درستی آن هم دقیقاً همان است. البته، اثبات ساده تر دیگری هم وجود دارد که نشان می دهد بازیکن دوم می برد. در حقیقت، همه آنچه که بازیکن دوم باید انجام دهد این است که متقارن بودن مهره های روی صفحه (نسبت به خطی که ستونهای چهارم و پنجم را جدا می کند) حفظ کند.

ب) بازیکن دوم نمی تواند ببازد. دلیل این امر مانند قبل است. این بازی واقعاً هیچ ربطی به بازی نیم ندارد. در حقیقت، این بازی ممکن است تا قیامت تمام نشود، که البته چیز مهمی نیست.



## ۱۶. نابرابریها

۲. الف) توجه کنید که  $۲^۳ = ۸ < ۹ = ۳^۲$  و در نتیجه  $۲^{۳۰۰} > ۳^{۲۰۰}$ .

ب) توجه کنید که  $۳^۷ = ۲۱۸۷ < ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$  و در نتیجه  $۳^{۲۸} < ۲^{۴۰}$ .

ج) عدد  $۴۵۳$  بزرگتر است.

۴. پاسخ:  $۷^{۹۲} > ۸^{۹۱}$ .

۶. پاسخ:  $۱ = |۲۳ - ۳۲| = ۲, |۳۳ - ۵۲| = ۴, |۶۲ - ۲۵| = ۵, |۳۳ - ۲۵| = ۵, |۲۷ - ۵۳| = ۳$ .

$۴ = |۱۱۲ - ۵۳|$  و  $۷ = |۱۱۲ - ۲۷|$ .

۸. صورت یکی از کسرها را  $x$  می‌نامیم. در این صورت خود این کسر برابر است با  $a = \frac{x}{۱۰x - ۹}$  و

در نتیجه  $\frac{۱}{a} = ۱۰ - \frac{۹}{x}$ . در نتیجه اگر  $x$  بزرگ شود،  $a$  کوچک می‌شود. بنابراین کسر اول بزرگتر

است.

۹. پاسخ مسأله‌ای کلیتر را پیدا می‌کنیم: چه وقت  $\frac{x}{y}$  از  $\frac{x+۱}{y+۱}$  بزرگتر است؟ اگر  $x$  و  $y$  مثبت باشند،

$$\frac{x}{y} - \frac{x+۱}{y+۱} = \frac{x-y}{y(y+۱)}$$

بنابراین همه چیز بستگی به این دارد که  $x$  بزرگتر است یا  $y$ . در مورد مسأله ما  $y > x$ ، یعنی

$$\frac{۱۲۳۴۵۶۸}{۷۶۵۴۳۲۲} \text{ بزرگتر است.}$$

۱۰. عدد  $۱۰۰^{۱۰۰}$  بزرگتر است، زیرا  $۱۵۰ \times ۵۰ > ۱۰۰^۲$ .

۱۱. پاسخ:  $۱۰۰۰ > (۱۰۰۱)^{۱۰۰۰}$ . در حقیقت،  $(۱۰۰۱)^۸ > ۱۰۰۸$  و

$$(۱۰۰۱)^{۱۰۰۰} = \left( (۱۰۰۱)^۸ \right)^{۱۲۵} > (۱۰۰۸)^{۱۲۵}$$

علاوه بر این،  $(۱۰۰۸)^۵ > ۱۰۴$  و

$$۱۰۰۰ > ۲۴۰۱ > ۷^۴ > (۲۰۷)^۸ > (۱۰۴)^{۲۴} > (۱۰۴)^{۲۵} > (۱۰۰۱)^{۱۰۰۰}$$

۱۳. چون  $۹۹! > ۱۰۰$ ، معلوم است که  $A < B$ .

۱۷. می‌توان نوشت  $۱ + x - ۲\sqrt{x} = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \geq ۰$ .

۱۹ و ۲۰. اگر همه جمله‌ها را به یک طرف نابرابری بیاوریم نابرابری موردنظر تبدیل می‌شود به

$$(x-y)^۲ \geq ۰$$

۲۱. اگر همه جمله‌ها را به یک طرف بیاوریم و مخرجها را در هم ضرب کنیم نابرابری موردنظر تبدیل

$$\text{می‌شود به } (x-y)^۲ \geq ۰.$$

۲۳. سه نابرابری

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

را در هم ضرب کنید.

۲۴. راهنمایی: از نابرابری

$$(\sqrt{ab} - \sqrt{ac})^2 + (\sqrt{ac} - \sqrt{bc})^2 + (\sqrt{bc} - \sqrt{ab})^2 \geq 0$$

استفاده کنید.

۲۵. توجه کنید که

$$x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = \frac{1}{2} \left( (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \right) \geq 0$$

۲۷. توجه کنید که

$$x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4 \geq 4\sqrt[4]{x^4 y^4 \times 4 \times 4} = 8xy$$

۲۸. می توان نوشت

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

اکنون این نابرابریها را در هم ضرب کنید.

۲۹. می توان نوشت

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}} = 3$$

۴۱. راهنمایی: نابرابری موردنظر را می توان با جمع کردن نابرابریهای ساده تر

$$(2^k - 1)(2^l - 1)(2^m - 1) > 0$$

$$2^{k+l+m} > 2^k + 2^l + 2^m$$

به دست آورد؛ در مورد نابرابری دوم توجه کنید که (اگر  $k \geq l \geq m$ )

$$2^{k+l+m} > 2^{k+2} = 4 \times 2^k > 2^k + 2^l + 2^m$$

۴۲. توجه کنید که

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2} \left( (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 \right) = -\frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$$

۴۴. اگر همه جمله‌ها را به یک طرف بیاوریم معلوم می‌شود که نابرابری مورد نظر با

$$\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \geq 0.$$

هم‌ارز است.

۴۶. ایده اصلی اثبات این است: اگر جایگشت  $(c_i)$  همانی نباشد، اندیسهایی مانند  $i$  و  $j$  وجود دارند که  $c_i > c_j$  و  $i < j$ . اکنون با عوض کردن جای  $c_i$  و  $c_j$  می‌توانیم مقدار مجموع حاصل ضربها را بزرگتر کنیم. در حقیقت

$$c_i a_i + c_j a_j - c_j a_i - c_i a_j = (a_i - a_j)(c_i - c_j) < 0.$$

بنابراین، با استفاده از این جابه‌جاییهای دوتایی می‌توانیم جایگشت  $(c_i)$  را به جایگشت همانی تبدیل کنیم بی‌آنکه مقدار مجموع حاصل ضربها در حین کار کوچکتر شود.

۵۲. پایه استقرا ساده است. اثبات گام استقرایی به شکل زیر است:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

زیرا

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

۵۳. راه‌حل مانند راه‌حل مسأله قبل است (فقط جهت نابرابریها را عوض کنید).

۵۷. می‌توان درستی حالتی را که  $n = 4$ ، پایه استقرا، «دستی» تحقیق کرد. در مورد گام استقرایی توجه کنید که

$$(n+1)! = (n+1)n! > 2^n(n+1) > 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

۵۸. اثبات پایه استقرا، وقتی که  $n = 1$ ، ساده است. در مورد گام استقرایی توجه کنید که (اگر  $n > 1$ )

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2(2n) = 4n > 2(n+1)$$

۵۹. پاسخ: نابرابری مورد نظر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند  $n$  که  $n \geq 10$  درست است. راهنمایی:

می‌توانید درستی آن را به‌ازای  $n$ هایی که  $1 \leq n \leq 10$  مستقیماً تحقیق کنید. برای اثبات گام استقرایی توجه کنید که  $2^{n+1}$  دو برابر  $2^n$  است و  $(n+1)^3$  از  $2n^3$  کوچکتر است.