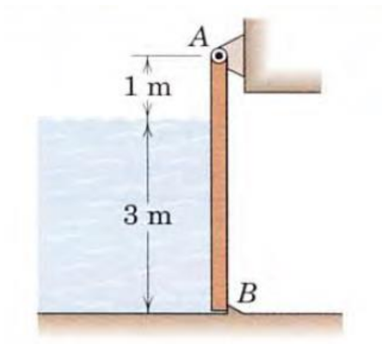
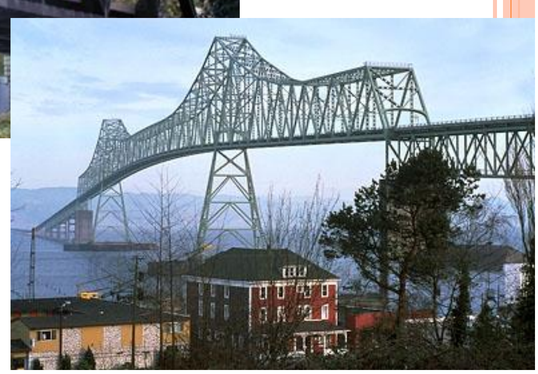
صفحه ی مستطیلی AB به ارتفاع 4 متر وعرض 6 متر در انتهای یک کانال آب شیرین نصب شده است.عمق آب در کانال 3 متر است.لبه ی بالایی صفحه در A لولا شده است،و لبه ی پایینی آن به برجستگی ثابت B تکیه دارد.نیرویی که این برجستگی بر صفحه وارد می کند چقدر است؟

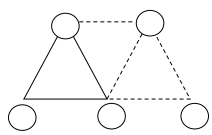




خرپا

خرپاهاي صفحه اي :

- دستگاه های ساختمانی که برای پوشاندن دهانه های بزرگ بین 10 تا 50 متر به کار می روند و معمولاً از یک سری اعضای دو نیرویی تشکیل شده اند.
- خرپا ، شبکه اي است متشکل از چندين عضو دو نيرويي که سرهايشان به هم متصل شده اند و مجموعا يک سازه با اتصالات مفصلي را تشکيل داده اند.
- خر پايي که اعضايش در يک صفحه قرار داشته باشند خرپاي صفحه اي مي گوييم ، جزء اصلي خرپاي صفحه اي مثلث 3 ميله ای يا ديواره صلب است.



تعداد مفصل $=j$ تعداد اعضا $=m$

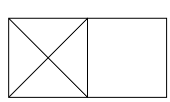
$$(m-3)=2(j-3)\rightarrow m=2j-3$$

خرپای ساده= از توسعه و گسترش خرپای صلب اولیه (سه ضلع و 3 مفصل) که با افزودن هر دو عنصر یک گره اضافه می شود.

تعداد مفصل $=j$ تعداد اعضا $=m$

$$(m-3)=2(j-3)\rightarrow m=2j-3$$

که یک شرط لازم برای خرپای ساده است یعنی هر خرپایی ، با این شرط لزوما یک خرپای ساده به حساب نمی آید.)



شرط را دارد ولی خرپای ساده نیست.

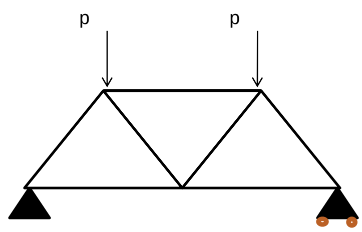
آنالیز یک خرپا
- 1- روش مفاصل (گره به گره)
- 2- روش مقاطع

آنالیز یک خرپا:

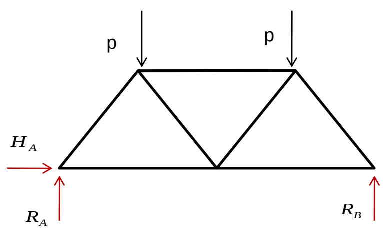
برای آنالیز یک خرپل دو روش داریم:

۱-روش مفاصل

۲-روش مقاطع



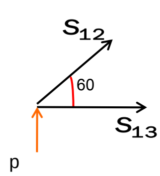
روش مفاصل :



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 2P$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2R_B l = P(l + \frac{l}{2}) + P\frac{l}{2}$$
$$\Rightarrow R_A = P \Rightarrow R_B = P$$

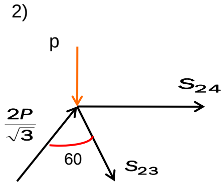
از مفصلی شروع میکنیم که دو تا مجهول داشته باشد (زیرا مفصل صفحه ای است و دو معادله و دو مجهول داریم.)

1)



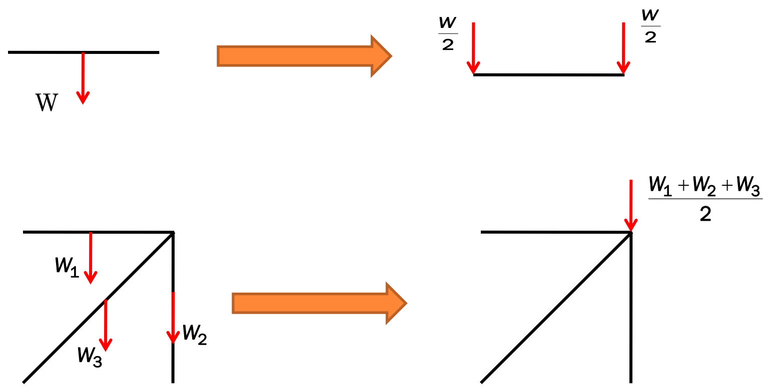
$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{13} + S_{12}\cos 60 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow S_{12} + P = 0$$
$$S_{12} = \frac{-2P}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{13} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

2)

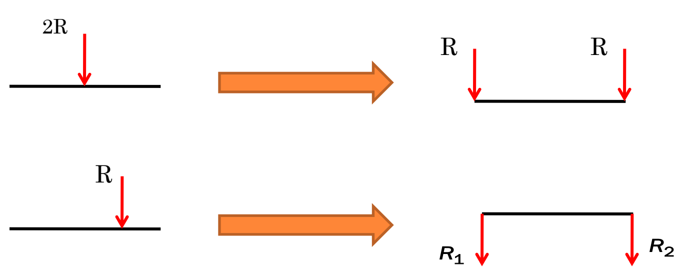


$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{24} + \frac{2P}{\sqrt{3}}\sin 30 + S_{23}\sin 30 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow P + S_{23}\cos 30 - \frac{2P}{\sqrt{3}}\cos 30 = 0$$
$$\Rightarrow S_{24} = \frac{-P}{\sqrt{3}} \rightarrow S_{23} = 0$$

در مورد اعضایی که وزن داشته باشند میتوان با تقریب نسبتی از وزن را به هر مفصل وارد کرد.

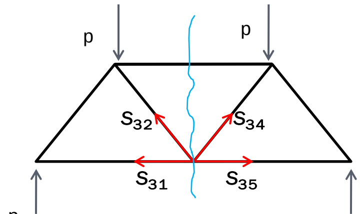


به جای نیروی وزن، هر نیروی دیگری اگر بر خرپا وارد شود میتوان به مفصل ها انتقال داد.



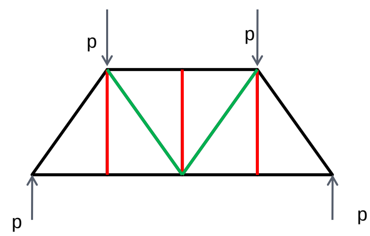
در مجموعه ی خرپا به عنوان یک سازه ی مستقل لنگر داریم،اما در تک تک اعضا لنگر نداریم.

در بعضی از خرپا ها به راحتی میتوان تشخیص داد که نیرو های داخلی در بعضی از اعضا صفر است.

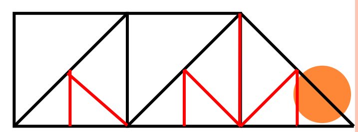


چون شکل کاملا متقارن است پس باید نسبت به محور تقارن قرینه باشد.

$$\sum F_y = (S_{34} + S_{32})\sin 60 = 0$$
$$S_{34} = S_{32}$$
$$\Rightarrow S_{34} = S_{32} = 0$$



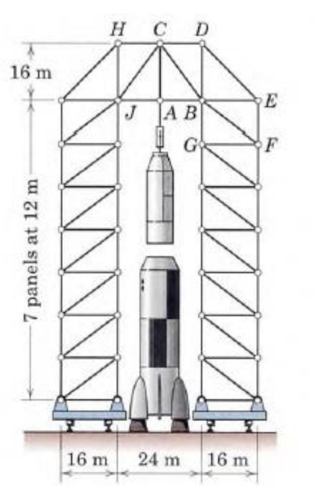
نیروی داخلی سه عضو قرمز رنگ صفر است.
نیروی داخلی دو عضو سبز رنگ مایل هم صفر است.



نیروی های داخلی عضوهای قرمز رنگ صفر است.

الف) روش مفصل ها :

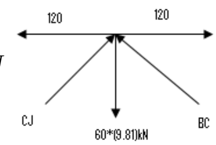
در روش مفصل ها ، شرايط تعادل را براي نيروهاي وارد بر هر يک از مفصل ها برقرار مي كنيم لذا در اين روش با تعادل نيروهاي متقارب سروكار داريم فقط بايد دو معادله تعادل مستقل بنويسيم.



مثال : جهت نصب موشكي به جرم 500 تن وآماده كردن آن براي پرتاب از نوعي پل متحرک استفاده مي گردد اين پل قسمتي از موشک به جرم 60 تن را كه از مفصل A آويزان شده است جابجا مي نمايد.در عضو ABنيرويي فشاري به اندازه ي $50\mathrm{kN}$ و در عضو CD نيروي كششي به اندازه ي $120\mathrm{kN}$ ايجاد شده است.نيرو در عضو BF وEF را محاسبه كنيد.

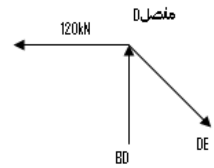
AJ=AB , CH=CD ,BC=JC

مفصلC $\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}(2BC) - 60(9.81) = 0 \Rightarrow BC = 368kN$



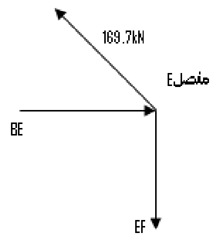
D مفصل $\sum F_y = 0 \Rightarrow BD = 120kN$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{DE}{\sqrt{2}} - 120 = 0 \Rightarrow DE = 169.7kN$

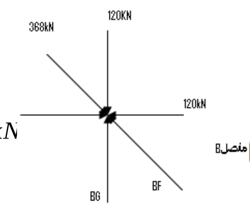


E مفصل $\sum F_x = 0 \Rightarrow DE = 120kN$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow EF = 120kN$



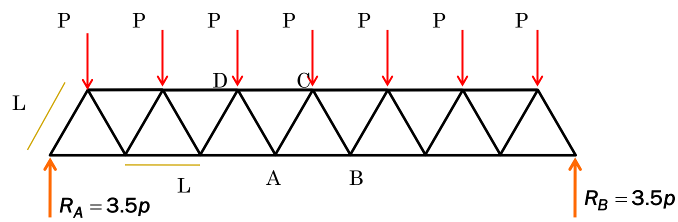
Bمفصل $\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}BF + 1200 - \frac{3}{5}368 = 0 \Rightarrow BF = 188.4kN$

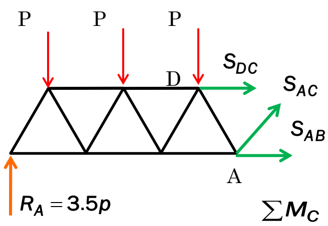


۲-روش مقاطع :

در صورتیکه خرپا دارای اعضای زیادی باشد از این زوش استفاده می شود.

در جایی که می خواهیم نیروهای داخلی را پیدا کنیم مقطع می زنیم:



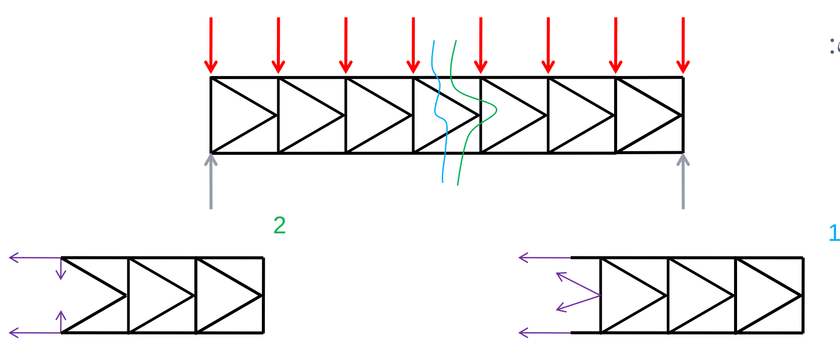


$S_{DC} S_{AC} S_{AB}$ نیروهای داخلی اعضا AB و ACوAD هستند.

و به راحتی میتوان آنها را محاسبه کرد.

$$\sum M_C = 0 \rightarrow S_{AB}\left(\frac{L}{2}\right) + P(L + 2L + 3L) - (3.5P)(3.5L) = 0$$

مثال:



یک خرپای فضایی ساده از گسترش یک مثلث صلب اولیه و به ازای هر مفصلی سه عضو ایجاد میشود.

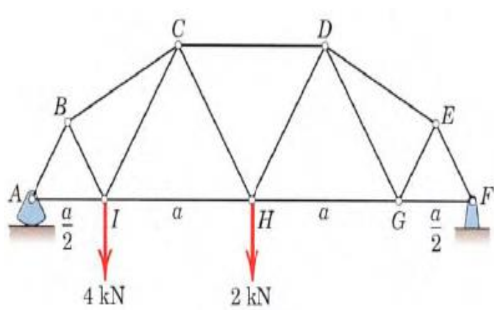
ساده ترین هرم فضایی یک هرم مثلث القاعده است.

برای حل و آنالیز خرپای فضایی از دو روش مفاصل و مقاطع استفاده میشود.

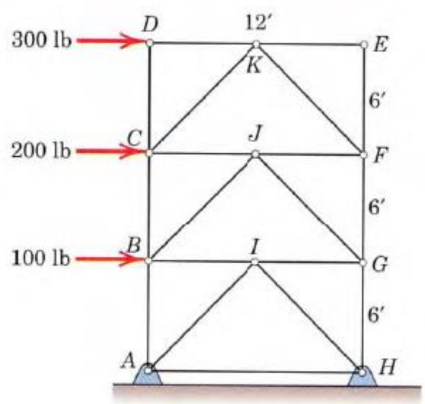
- **ب) روش مقاطع :**
- در روش مفصل ها از سه معادله ي تعادل فقط دو معادله را مورد استفاده قرار داديم زيرا در هر مفصل نيروها متقارب اند اما اگر خرپا را با یک مقطع خيالي برش بزنيم و دياگرام آزاد قسمتي از آن را در نظر بگيريم که تحت اثر نيروهاي نامتقارب قرار دارد مي توانيم از معادله ي سوم يعني معادله ي گشتاور نيز استفاده کنيم اين روش ، روش مقطع ها ناميده مي شود.

- در صورتی که تعداد اعضای خرپا زیاد باشد فقط نیروهای داخلی در اعضای خاصی را بخواهیم از این روش استفاده می نماییم . با مقطع زدن دو عنصر موردنظر خرپا سیستم را به دو نیمه می کنیم و سپس معادله ی تعادل را برای یک نیمه می نویسیم.

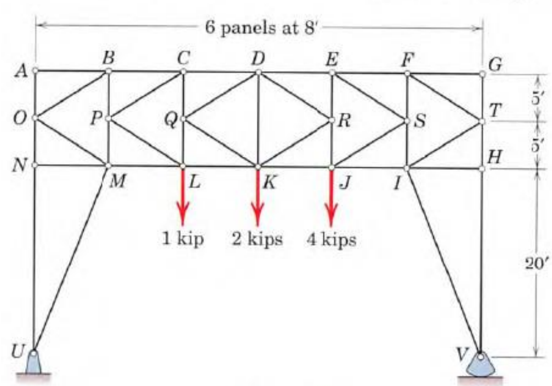
برای خرپای بارگذاری شده ی شکل زیر، نیرو در اعضای BIوCIوHI را بدست آورید. انـدازه ی زوایا یا ۳۰ یا۶۰ یا۹۰ درجه است (۲/۵، ۲/۱۳ و ۲/۷-)



یک خرپای متقارن مطابق شکل زیر بارگـذاری شـده اسـت.نیـرو در اعضـای FGوBC را بدست آورید.محاسبه را با استفاده از یک برش ودو معادله که هر یک فقط شامل یکی از مجهـول هـا هسـتند،انجام دهیـد.آیـا نـامعین بـودن استاتیکی تکیه گاه ها تأثیری در نتایج محاسبه دارد؟



خرپای شکل زیر برای نصب تابلو در عرض جاده در نظر گرفته شده است.نیرو در عضو DKرا بدست آورید.



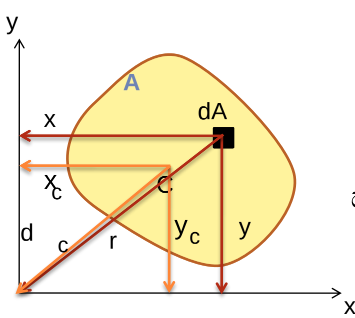
کابل ها

کابل ها از لحاظ نیروهای وارد بر آنها به دو دسته تقسیم بندی می شوند:

۱)تحت تاثیر شدت بار در واحد طول افقی هستند مثل پل های معلق (که از وزن خود کابل صرف نظر می شود)

۲)آنهایی که تحت اثر وزن واحد طول خود هستند مثل کابل انتقال نیرو

- محاسبه ممان استاتيك سطوح (گشتاور اول سطح) :



مختصات مركز سطح

$$x_c = \frac{\int_A x.\, dA}{A}$$

$$y_c = \frac{\int_A y.\, dA}{A}$$

$$Q_y = x_c \,.\, A$$ ممان استاتيك حول محور y

$$Q_x = y_c \,.\, A$$ ممان استاتيك حول محور x

محاسبه ممان اینرسی سطوح (گشتاور دوم سطح) :

ممان اینرسی سطح حول يك محور نمایانگر نحوه پراکندگی سطح حول آن محور می باشد.

ممان اینرسی حول محور yها :

$$I_y = \int_A x^2 . dA$$

ممان اینرسی حول محور xها :

$$I_x = \int_A y^2 . dA$$

ممان اینرسی قطبی :

$$J_Z = \int_A r^2 . dA = I_x + I_y$$

حاصلضرب اینرسی سطح :

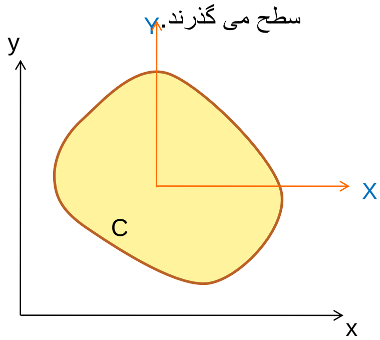
$$I_{xy} = \int_A x.y . dA$$

انتقال محورهای موازی :

چنانچه ممان اینرسی نسبت به محورهای ثقلی (مرکزی) مقطعی معلوم باشد، نسبت به هر دستگاه محورهای دیگر نیز می توان ممان اینرسی بدست آورد.

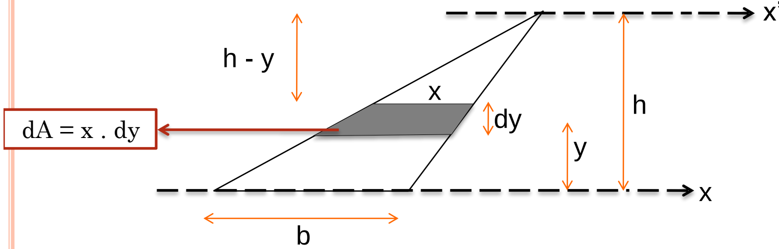
$$\begin{cases} I_x = \bar{I}_X + A . y_C^2 \\ I_y = \bar{I}_Y + A . x_C^2 \\ I_{xy} = \bar{I}_{XY} + x_C . y_C . A \\ J_z = \bar{J}_Z + A . d_C^2 \end{cases}$$

I_X و I_Y ممان اینرسی سطح حول محورهایی به موازات محورهای x و y که از مرکز سطح می گذرند.



- **مسائل مربوط به مشخصات مقطع (ممان اینرسی – محورهای اصلی):**

1- ممان اینرسی مثلثی با ارتفاع h و قاعده b را ،
اولاً نسبت به محوری شامل ضلع قاعده ؛
ثانیاً نسبت به محوری موازی با قاعده و بر مرکز ثقل مثلث بدست آورید.



حل : نسبت به محور قاعده :
جز سطح طبق شکل انتخاب شده و از تشابه مثلث ها طول $x = \frac{b}{h}.(h - y)$

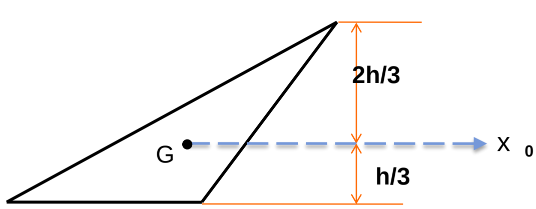
تعیین می گردد. ممان اینرسی نسبت به محور x عبارت خواهد بود از :

$$I_x = \int y^2 . dA$$

$$I_x = \int_0^h y^2 . x . dy = \int_0^h y^2 b/h . (h - y) . dy = b/h . \left[\int_0^h h . y^2 . dy - \int_0^h y^3 . dA \right]$$

$$= b/h . \left[h . y^3 / 3 - y^4 / 4 \right]_0^h \Rightarrow \boxed{I_x = b . h^3 / 12}$$

برای تعیین ممان اینرسی سطح نسبت به محور x بر مرکز ثقل G ($\bar{I}_x$)انتقال انجام می دهیم :



$$(I_x = \bar{I}_x + A.d^2)$$

$$b.h^3 / 12 = \bar{I}_x + [(b.h /2).(h /3)^2] \Rightarrow \boxed{\bar{I}_x = b.h^3 / 36}$$

نسبت به راس را نیز می توان بدست آورد :

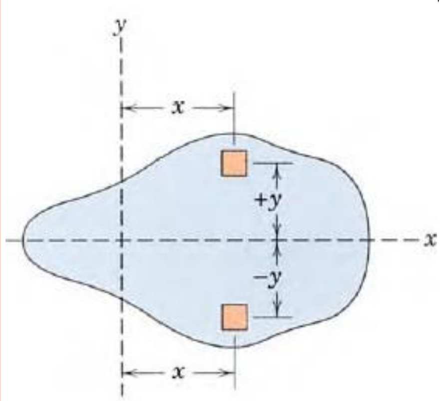
$$I_{x'} = \bar{I}_x + A. d^2 = b.h^3 / 36 + (b.h /2).(2.h /3)^2 = b.h^3 /4$$

حاصلضرب اینرسی و دوران محورها

تعریف : $I_{xy} = \int xydA$

که در آن x و y مختصات المان سطح هستند. کمیت Ixy را حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به محورهای x-y گوییم. حاصلضرب اینرسی بر خلاف ممانی اینرسی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.

انتقال محورها : شکل روبرو را در نظر می گیریم:

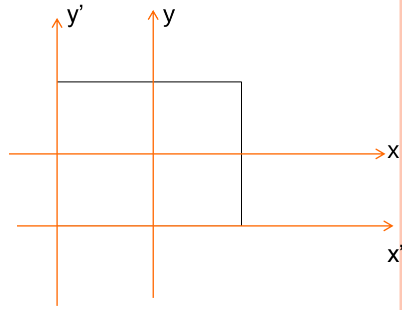


$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} y^2\,(bdy) = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA = \frac{db^3}{12}$$

$$I_{x'x'} = I_{xx} + A\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{bd^3}{3}$$

$$I_{x'y'} = 0 + bd\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{d^2b^2}{4}$$



حاصلضرب اینرسی این سطح را نسبت به محورهای x-y می نویسیم و در آن x و y برحسب مختصات x_0 و y_0 المان سطح dA نسبت به محورهای مرکزی قرار می دهیم:

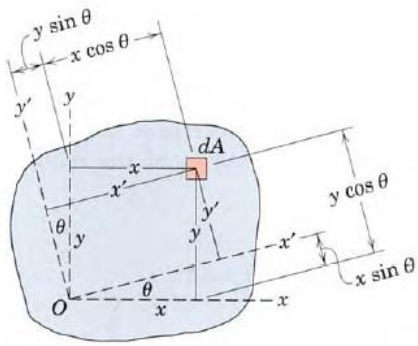
$$I_{xy} = \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x)$$

$$= \int x_0 y_0 dA + d_x \int x_0 dA + d_y \int y_0 dA + d_x d_y \int dA$$

در سمت راست معادله ی فوق، جمله اول طبق تعریف، حاصلضرب اینرسی حول محورهای مرکزی است، که آن را با $\bar{I}_{xy}$ نشان می دهیم. جملات دوم و سوم هر دو برابر صفر هستند، زیرا گشتاور اول هر سطح حول مرکزش لزوما برابر صفر است. جمله چهارم برابر $d_x d_y A$ است.

لذا قضیه انتقال محورها برای حاصلضرب اینرسی به صورت زیر در می آید:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A$$



دوران محورها : حاصلضرب اینرسی، هنگام محاسبه ی ممان اینرسی سطح حول محورهای مایل، قابل استفاده است. با این بررسی، مستقیما به مسئله ی مهم تعیین محورهایی که ممان اینرسی حول آنها ماکزیمم یا می نیمم است، رهنمون می شویم. ممان اینرسی های سطح نشان داده شده در شکل زیر حول محورهای مایل x’ و y’ می توان به صورت زیر نوشت :

$$I_{x'} = \int y'^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\, dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)^2\, dA$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$I_{x'y'} = \int x' y'\, dA = \int (y\sin\theta + x\cos\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta) dA$$

$$\Rightarrow$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

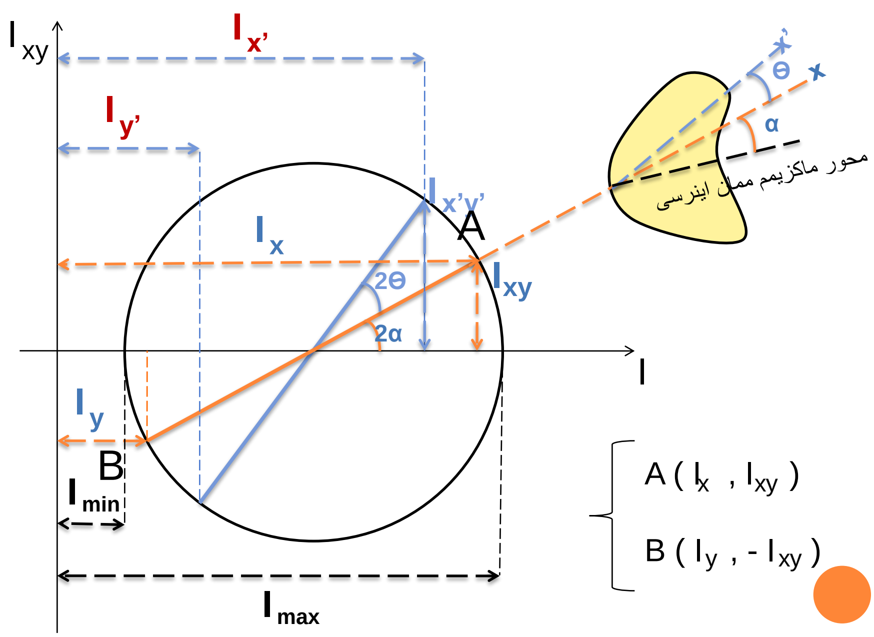
$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\Rightarrow$$

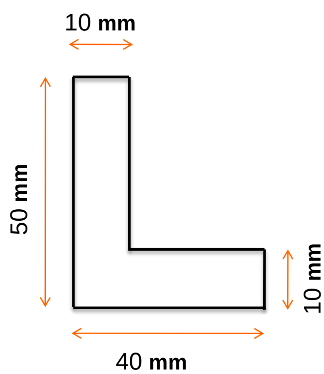
$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$

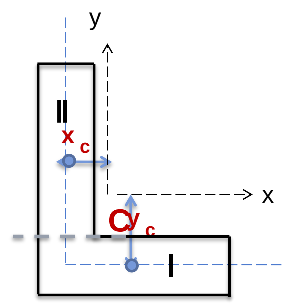
$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2}$$



- **مثال :** برای سطح نبشی داده شده در شکل محورهای مرکزی اصلی ماند و همچنین لنگرهای ماند ماکزیمم ومینیمم مربوطه را محاسبه نمایید.
(محورهای مرکزی اصلی ، محورهای اصلی هستند که از مرکز سطح مقطع می گذرند.)

- **حل :** ابتدا مختصات نقطه c (مرکز سطح) را بدست می آوریم.





$$x_c = \frac{10 * 40 * (20 - 5)}{10*40 + 10*40} = 7.5 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{10 * 40 * (20 + 5)}{10*40 + 10*40} = 12.5 \text{ mm}$$

$\boxed{\text{I}}$

$$I_x = \bar{I}_x + A.y_{C_1}^2 = 1/12 *40*10^3 + 400*12.5^2 = 65833 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A.x_{C_1}^2 = 1/12 *10*40^3 + 400*(20 - (7.5+5))^2 = 75833 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A.x_{C_1}.y_{C_1} = 0 + 400*(-12.5)*7.5 = -37500 \text{ mm}^4$$

$\boxed{II}$

$$I_x = \bar{I}_x + A.y_{C_1}^2 = 1/12 *10*40^3 + 400*(25 - 12.5)^2 = 115833\ mm^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A.x_{C_1}^2 = 1/12 *40*10^3 + 400*7.5^2 = 25833\ mm^4$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A.\ x_{C_1}.\ y_{C_1} = 0 + 400*(-7.5)*12.5 = -37500\ mm^4$$

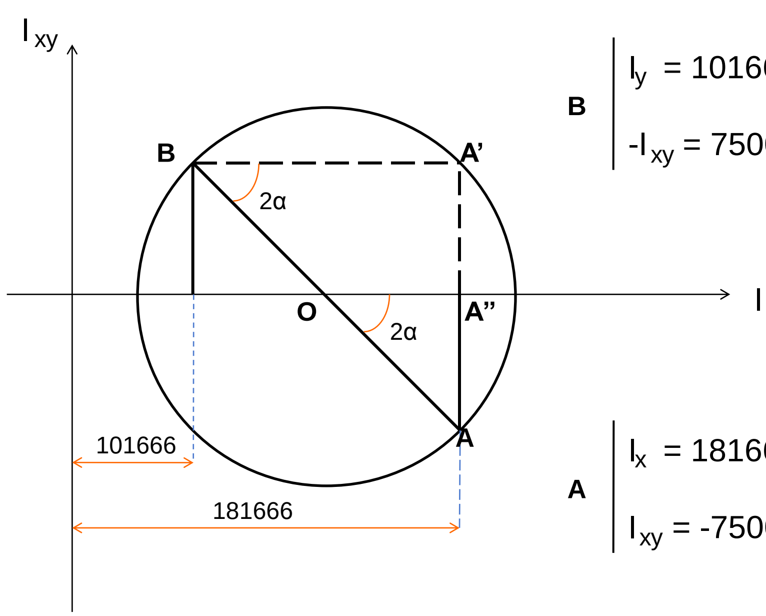
• **نکته:** I_{xy} برای سطوح متقارن حول هر محور تقارن برابر با <u>صفر</u> است.

بنابراین برای کل مقطع داریم:

$$I_x = 65833 + 115833 = 181666\ mm^4$$

$$I_y = 75833 + 25833 = 101666\ mm^4$$

$$I_{xy} = -37500 - 37500 = -75000\ mm^4$$



B | $I_y = 101666$ | $-I_{xy} = 75000$

A | $I_x = 181666$ | $I_{xy} = -75000$

$$\tan 2\alpha = \frac{AA'}{A'B}$$

$AA' = 75000 * 2$

$A'B = 181666 – 101666 = 80000$

$\Rightarrow \tan 2\alpha = 2*75000 /80000 = 1.875$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 30.96^\circ}$

$$I_{max} = \frac{181666 + 101666}{2} + OA$$

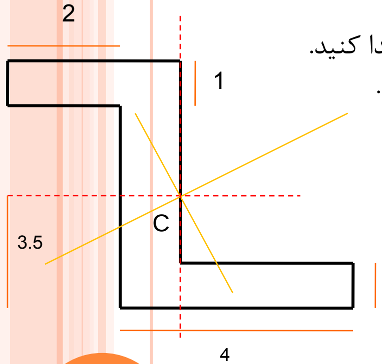
$$I_{min} = \frac{181666 + 101666}{2} - OA$$

$$OA = \sqrt{OA''+AA''} = \sqrt{(181666 – 101666)^2 / 4 + 75000^2}$$

$OA = 85000 \ mm^4$

$I_{max} = 141666 + 8500 = 226666 \ mm^4$

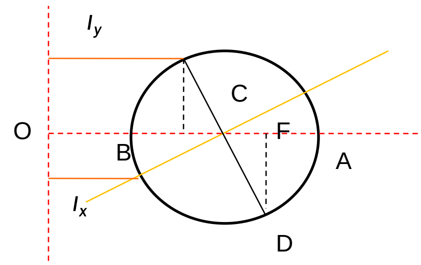
$I_{min} = 141666 – 85000 = 56666 \ mm^4$



مثال: ممان اینرسی نسبت به محور های اصلی را پیدا کنید.
ممان اینرسی نسبت به محور ۳۰ درجه را پیدا کنید.

$$I_{X_cX_c} = 113.2$$
$$I_{Y_cY_c} = 326.7$$
$$I_{X_cY_c} = -42.6$$

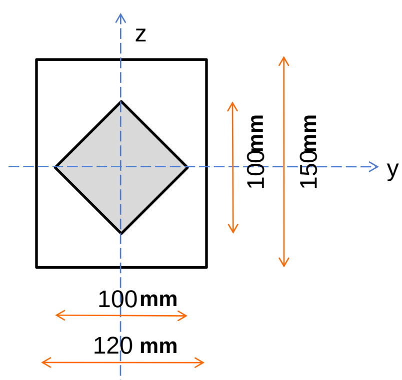
روش ترسیمی



$$I_{Max} = OA = 131.1 in^4$$
$$I_{Min} = OB = 14.75 in^4$$

ماکزیمم و مینیمم نسبت به محور های مختلف فرق میکند اما مینیمم ترین مینیمم ها مربوط به محوری است که از مرکز سطح میگذرد، اما ماکزیمم ماکزیمم ها معنی ندارد.

گشتاور دوم سطح را برای مقطع نشان داده شده در زیر را حول محور خنثی y حساب کنید.

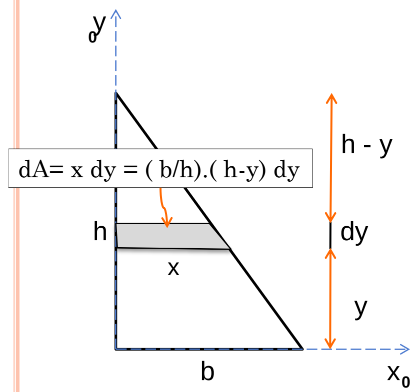


$I_y = 3167 \ cm^4$

$$I_y = 1/12 .(120).(150)^3 - 2.(1/12 . (100).(50)^3)$$

$$I_y = 31666666.7 \ mm^4 = 3167 \ cm^4$$

ممان اینرسی حاصلضرب مثلث شکل را نسبت به محورهای x و y بدست آورید.



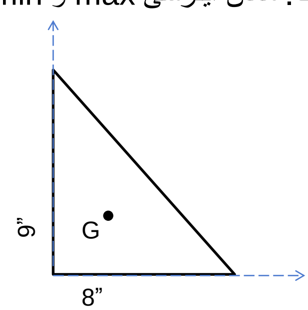
$$I_{xy} = \int_0^h [\frac{1}{2}.\frac{b}{h}(h-y)].y.[\frac{b}{h}.(h-y)\,dy]$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h.y^2 - 2h.y^2 + y^3)\,dy$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}.(h^2.y^2/2 - 2/3\,(h.y^3) + y^4/4)\Big]_0^h$$

$$= \boxed{I_{xy} = b^2.h^2/24}$$

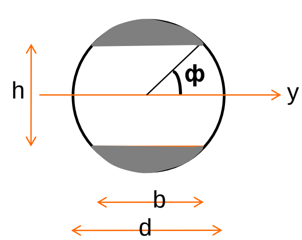
قاعده مثلث قائم الزاویه ای 8” و ارتفاع آن 9” است. ممان اینرسی max و min آن نسبت به محورهای اصلی را بیابید.



$$I_{max} = 218.9\ in^4$$

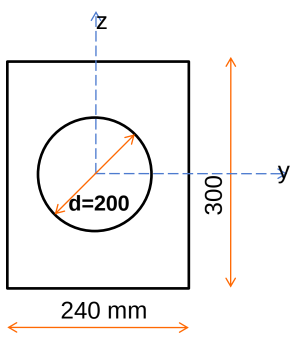
$$I_{min} = 77.7\ in^4$$

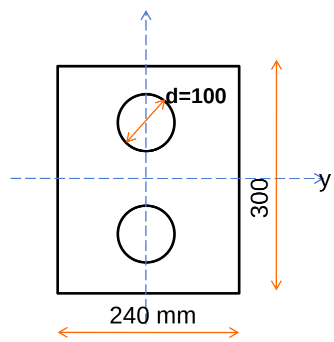
مطلوبست محاسبه گشتاور دوم سطح (حول محور y) تیری به مقطع دایره ای که طبق شکل دو قطاع از آن بریده شده است.

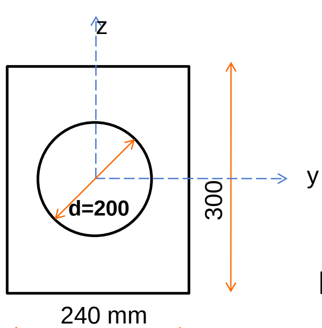


$$\boxed{I_y = d^4/32\,(\phi - \sin(4.\phi)/4)}$$

سطح مقطع تیری تو خالی طبق شکل فرض می شود. چنانچه سوراخ یگانه دایروی به قطر **20 cm** در مقطع مذکور را با دو سوراخ دایروی هر یک به قطر **10 cm** جایگزین کنیم، چه تغییری در مساحت و اندازه گشتاور دوم سطح مقطع را رخ می دهد؟



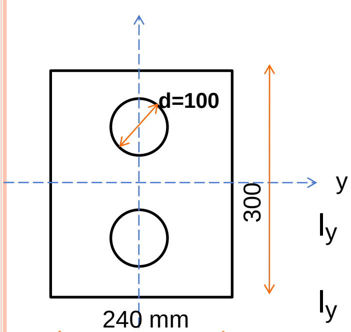




حالت اول)

$$A = 24 * 30 - \pi * 10^2 = 405.84 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 24 * 30^3 / 12 - \pi * 10^4 / 4 = 46146.02 \text{ cm}^4$$



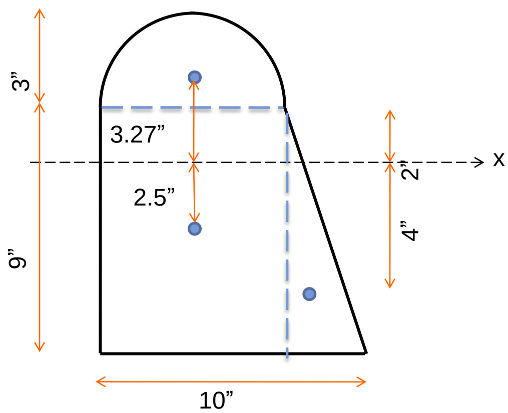
حالت دوم)

$$A = 24 * 30 - (\pi * 5^2) * 2 = 562.92 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 24 * 30^3 / 12 - 2 * (\pi * 5^4 / 4 + (\pi * 5^2) * 7.5^2)$$

$$I_y = 44182.52 \text{ cm}^4$$

مماں اینرسی سطح مرکب شکل زیر را بدست آورید. (نسبت به محور x)

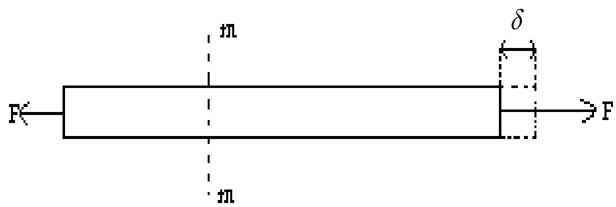


	$\bar{I}_x$	مساحت	d	d^2	$A.d^2$
مستطیل	365	54	2.5	6.25	337.5
نیم دایره	8.91	14.14	3.27	10.7	151.3
مثلث	81	81	4	16	288
$\sum$	454.91				776.8

$$I_x = 454.91 + 776.8 = 1232 \quad in^4$$

قانون اول مقاومت مصالح : <u>اجسام همه تغییرشکل می دهند.</u>

افزایش طول



تنش و کرنش:

تنش کششی در مقطع با میله منشوری

✦سیستم آحاد موجود برای واحد تنش :

۱. psi (انگلیسی)

۲. Pa یا MPa (SI)

۳. kg/cm^2 (MKS)

نکته: تنش کششی <u>**مثبت**</u> و تنش فشاری <u>**منفی**</u> می باشد.

اجسام:

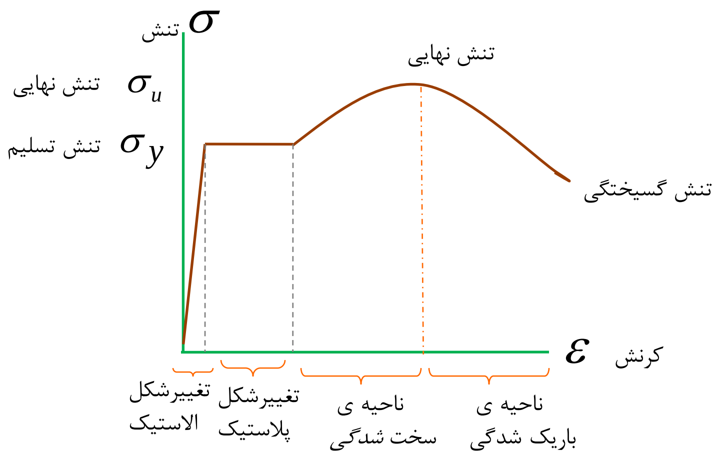
ارتجاعی (الاستیک): مثل فنر و کش که پس از حذف نیرو به حالت اولیه اش بر می گردد.

خمیری (پلاستیک): که تغییرشکل به وجود آمده در جسم باقی می ماند.

تذکر: فولاد یک جسم الاستوپلاستیک می باشد.

آزمایش کشش فولاد: (منحنی تنش- کرنش)

تذکر: سرعت وارد شدن نیرو و نیز حرارت در آزمایش تأثیر دارد.
فولاد از اجسامی است که در کشش و فشار یکسان عمل می کند.



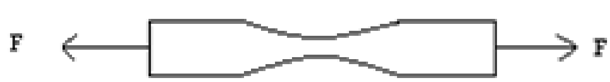
✦از نقطه A به بعد، جسم دچار باریک شدگی می گردد.

مفاهیم تنش و کرنش

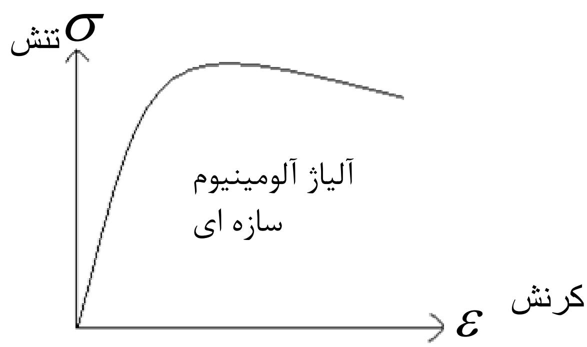
$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \text{تنش}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \qquad \text{کرنش}$$

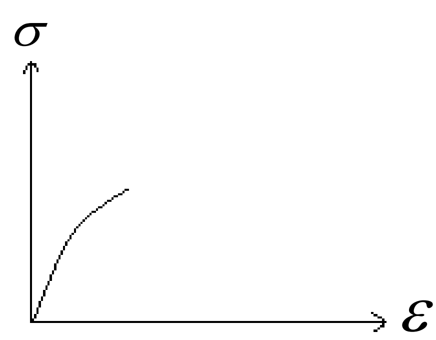
پدیده ی باریک شدگی میله



منحنی تنش-کرنش برای چند ماده دیگر:



رفتار تنش، کرنش یک ماده شکننده مانند : شیشه یا چدن (فولاد با کربن زیاد)



قانون هوک و تغییر مکان محوری :

در منحنی تنش و کرنش بیشتر مصالح یک بخش اولیه خطی وجود دارد که در آن، ماده به طور ارتجاعی عمل می کند .

ماده ی ارتجاعی خطی ماده ای است که به طور الاستیک عمل می کند و رفتار تنش کرنش نیز خطی می باشد.

که در رابطه قانون هوک E شیب منحنی تنش- کرنش در محدوده ارتجاعی خطی می باشد.

(ضریب یانگ)

$$\sigma = E.\varepsilon$$

تذکر: قانون هوک برای موادی که خاصیت الاستیک دارند، برقرار است.

اگر در رابطه قانون هوک به جای σ و ε ، مقادیر آن را جایگذاری کنیم، رابطه

تغییرمکان محوری به دست می آید

رابطه تغییرمکان محوری :

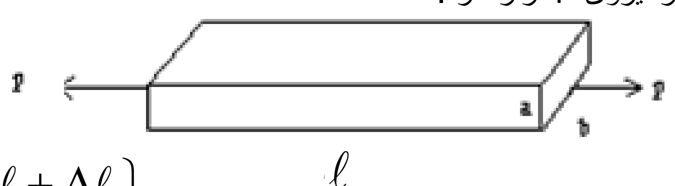
$$\sigma = E.\varepsilon \rightarrow \begin{cases} \sigma = \dfrac{P}{A} \\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \end{cases} \Rightarrow \frac{P}{A} = E\frac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{EA}$$

تذکر :

در رابطه تغییرمکان محوری، صلبیت محوری میله عبارتست از : EA

✦نسبت یا ضریب پواسن:

تغییر ابعاد اجسام: میله ای با مقطع منشوری زیر را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی P قرار دارد.



تغییر ابعاد در میله عبارتست از: $\left.\begin{matrix} \ell + \Delta\ell \\ a - \Delta a \\ b - \Delta b \end{matrix}\right\}$

به علت جابه جا شدن مولکول های جسم، از ابعاد دیگر کاسته می شود.

(البته حجم کل ثابت نیست و زیاد می شود)

✦اجسام:

۱. ایزوتروپ (همگن) : $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$

۲. آنیزوتروپ : خواص مکانیکی در جهات مختلف یکسان نیست.

ضریب پواسون عبارتست از تغییر طول نسبی عرضی تقسیم بر تغییر طول نسبی طولی : که در مورد یک میله، تغییرطول نسبی عرضی در مقطع و تغییر طول نسبی طولی در امتـداد میله، رخ می دهد.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

υ نسبت یا ضریب پواسون = $\frac{\text{تغییر طول نسبی عرضی}}{\text{تغییر طول نسبی طولی}}$

تذکر : تا زمانی که میله به صورت ارتجاعی عمل می کند نسبت V ثابت باقی می ماند.

تذکر : محدوده تغییر ضریب پواسون بین صفر و ۰/۵می باشد

$$0 \leq \nu \prec 0/5$$

تذکر : محدوده تغییر ضریب پواسون برای فلزات بین ۰/۲۵ تا ۰/۳۵ می باشد.

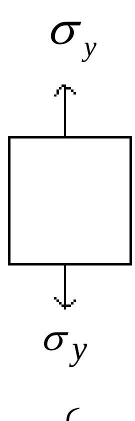
به طور مثال برای میله بالا داریم :

$$\nu_b = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_\ell} = \frac{\frac{\Delta b}{b}}{\frac{\Delta \ell}{\ell}}$$

به مثال زیر توجه کنید:

قسمتی از یک میله را در نظر بگیرید که تحت تنش های طولی قرار می گیرد:

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$



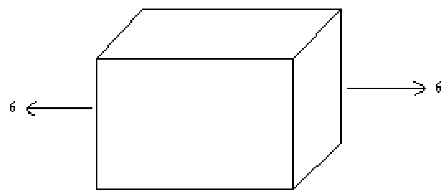
$$\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

✦و در حالت حضور هر دو دسته تنش داریم :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu \sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu \sigma_x}{E} \end{cases}$$

تغییر حجم یک میله با مقطع منشوری تحت کشش را با دانستن E و ν

می توان به دست آورد



✦حجم V به نسبت $\dfrac{(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2}{1}$ افزایش می یابد.

که پس از بسط دادن و صرف کردن از بخش های با توان های بالاتر داریم:

نسبت تغییر حجم به حجم اولیه برای مکعبی ایزوتروپ به اضلاع واحد =

$$\frac{(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2}{1} \approx \frac{1+\varepsilon-2\nu\varepsilon}{1}$$

✦کاهش حجم یک میله تحت کشش $\dfrac{\Delta V}{V}=\varepsilon(1-2\nu)$

غیرمعقول به نظر می رسد بنابراین نسبت تغییرحجم مثبت است.

پس عبارت $(1-2\nu)$ نمی تواند منفی باشد پس $\nu \prec 0/5$.

✦تعیین تغییر طول محوری یک میله تحت کشش یا فشار:

وقتی که بارها نه تنها در انتها بلکه در یک یا چند نقطه در طول میله نیز وارد می شوند ویا اینکه سطح مقطع میله به طور ناگهانی تغییر کند ، می توان از رابطه

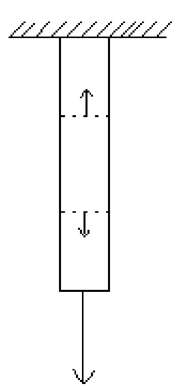
$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

استفاده کرد .

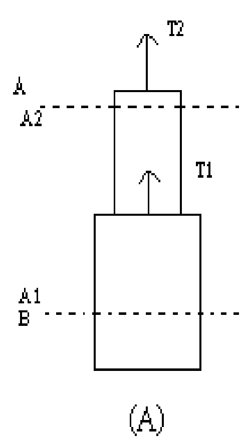
ابتدا باید نیروهای محوری را به دست آورد سپس تغییر طول هـر قسـمت را حسـاب کرده و جمع جبری نمود.

در شکل زیراگر از مکان A مقطع بزنیم نیروی کششی T_2 است .

و اگر از مکان B مقطع بزنیم، نیروی کششی T_1+T_2 است .

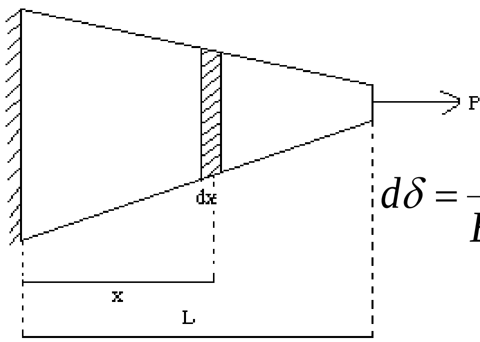


$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$



چنانچه نیروی محوری یا سطح مقطع در طول میله به طور پیوسته تغییر کند :

در این حالت جزء دیفرانسیلی از میله به طول dx به فاصله x از انتهای چپ میله در نظر گرفته می شود .

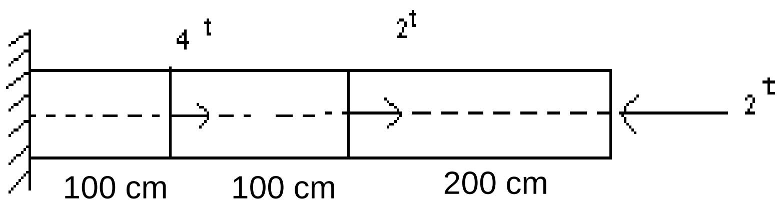


$$d\delta = \frac{p_x dx}{E \quad A_x} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{p_x dx}{E \quad A_x}$$

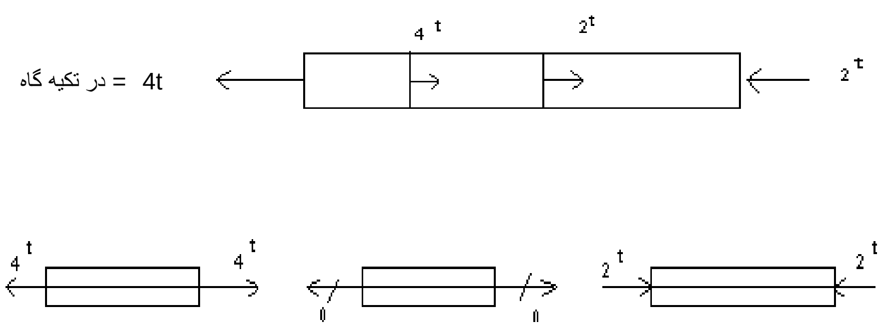
حل چند مثال پیرامون مباحث اولیه :

1)تنش های ایجاد شده را در میله ای فولادی شکل در همهٔ قسمتهای نشانداده شده بدست آورید.

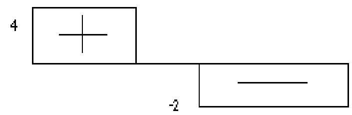
چنانچه سطح مقطع میله 10^{cm^2} فرض شود، تغییر شکل کلی میله را محاسبه کنید.



حل: با استفاده از دیاگرام آزاد نیروهای وارده به میله می توان، نیروی محوری در هر یک از سه قسمت را بدست آورد:



دیاگرام نیروی
محوری در میله



تنش کششی +
تنش فشاری -

حال که نیروهای محوری در قسمتهای مختلف میلهٔ فولادی بدست آمد براحتی می توان تنش ها را بدست آورد:

تنش کششی در قسمت چپ :

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{4000}{10} = 400 \quad {kg}/{cm^2}$$

در قسمت وسط :

$$\sigma_2 = \frac{0}{10} = 0$$

در قسمت راست :

$$\sigma_3 = \frac{-2000}{10} = -200 \quad {kg}/{cm^2}$$

حال می توان تغییرشکل کلی میله را که جمع جبری تغییرمکان هاست تعیین نمود :

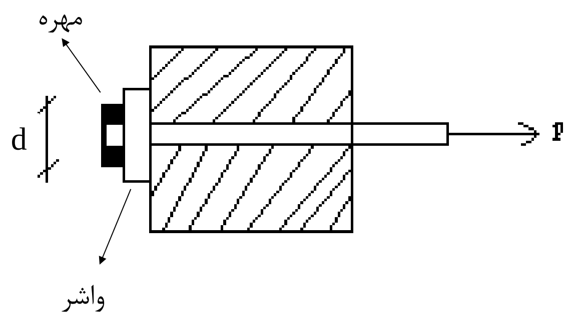
$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3$$

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE}$$ تغییر طول محوری (که برای هر قسمت از میله حساب می شود)

$$\Delta\ell = \frac{4000\times100}{AE} + 0 + \frac{-2000\times200}{AE} = 0$$

یعنی میلهٔ مزبور بطور کلی (در مجموع) تغییر طول نمی دهد. البته باید توجه داشت که نقاط میانی میلهٔ فوق، تغییرطول خواهند داد، چون تحت تنش قرار دارند .

۲. میله به قطر 25mm توسط نیروی P طبق شکل کشیده شده است و تنش $1000\ {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2}$ در آن ایجاد می گردد. چنانچه فشاری که توسط واشر به دیواره انتقال می یابد نباید از $14\ {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2}$ تجاوز کند، قطر خارجی واشر، d را چه اندازه باید در نظر گرفت؟



حل: ابتدا با توجه به تنش موجود در میله می توان نیروی p را بدست آورد:

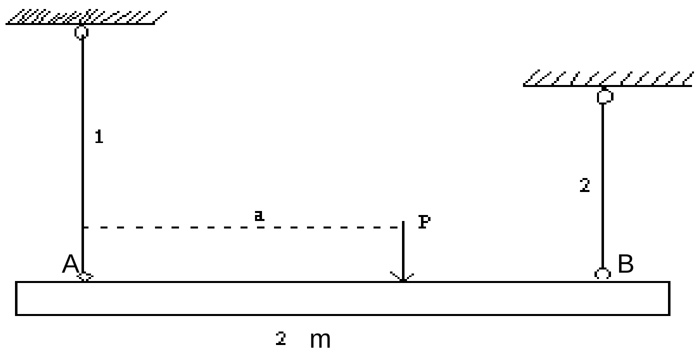
$$\sigma = \frac{P}{A} \quad , \quad P = 1000 \times \frac{(\pi \times 2.5^2)}{4} = 4908.74 \quad kg$$

این نیروی کششی باید توسط مهره و واشر به دیواره انتقال یابد، بنابراین فشاری توسط واشر به دیواره وارد می شود :

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow \quad 14 = \frac{4908.74}{\frac{\pi(d^2 - 2.5^2)}{4}} \Rightarrow d^2 - 2.5^2 = 446.429$$

$$d = 21.28 \quad cm \quad \approx \quad 213mm$$

۳- تیر صلب AB که از تغییرشکل آن می توان صرف نظر کرد، توسط دو میلهٔ 1 و 2 به طولهـای ۱/۵ و ۱ متـر و با مقطعهای گرد در امتداد افقی آویزان است.
میله ۱ فولادی و به قطر 20mm و میله 2 از مس به قطر 25mm است. نیـروی p در چـه فاصلـه از اتصـال A باید اعمال گردد تا تیرAB پس از تغییر شکل های میله های 1 ,2 بطور افقی بماند؟
در چنین حالتی اگر نیروی P برابر 3ton باشد، تنش در میله ها چه اندازه خواهد بود؟



حل: از آنجا که بایستی تیر AB بصورت افقی بماند پس باید تغییر شکلهای محوری در میله مساوی باشد:

مس $E_c = 1\times10^6 \;\; {kg}/{cm^2}$

فولاد $E_s = 2\times10^6 \;\; {kg}/{cm^2}$

$$\delta_1 = \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1 \ell_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2 \ell_2}{A_2 E_2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 \times 150}{\frac{\pi (2)^2}{4} \times (2\times10^6)} = \frac{P_2 \times 100}{\frac{\pi (2.5)^2}{4} \times (1\times10^6)} \Rightarrow P_2 = 1.172 P_1$$

و با توجه به تعادل تیرAB، گشتاور نیروها نسبت به محل اثر بار P باید صفر باشد:

$$P_1 \times a = p_2 \times (200-a) \quad \Rightarrow \quad p_1 a = 1.172 p_1 (200-a) \Rightarrow \quad a = 107.9cm$$

حال به راحتی از $\sum F_y = 0$ استفاده کرده و نیرو در میله ها را بازای p=3ton بدست می آوریم :

$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 = P = 3000kg \\ P_2 = 1.172 P_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P_1 = 1381.22kg, \quad P_2 = 1618.78kg$$

بنابراین تنش در میله ها برابر خواهد بود با:

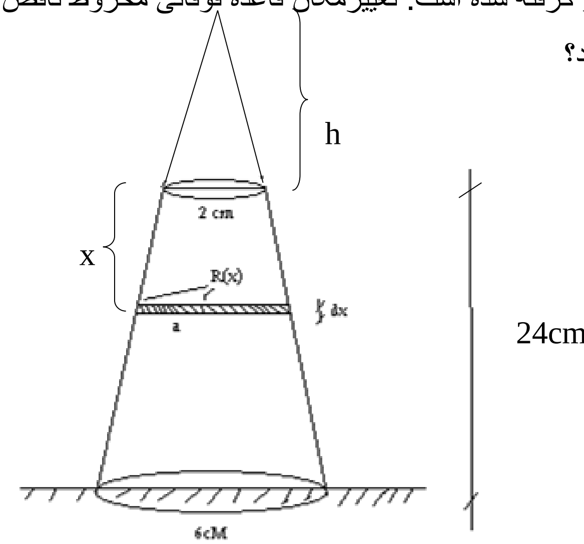
$$\sigma_1 = \frac{1381.22}{\frac{(\pi(2)^2)}{4}} = 439.7 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} = 44MP_a$$

$$\sigma_2 = \frac{1618.78}{\frac{(\pi(2.5)^2)}{4}} = 329.8 \ {}^{kg}\!/_{cm^2} = 33MP_a$$

رابطه کلی تغییر طول برای میله تحت اثر نیروی محوری متغیر :

$$\Delta = \int \frac{P(x)}{A(x) \quad E(x)} dx$$

4- مخروط ناقص روی قاعدهٔ بزرگ خویش روی تکیه گاه قرار دارد. قطر قاعدهٔ کوچک 2cm و قاعدهٔ بزرگ 6cm می باشد. ارتفاع مخروط ناقص 24cm و وزن مخصوص مصالح آن γ در نظر گرفته شده است. تغییرمکان قاعدهٔ فوقانی مخروط ناقص را تحت تأثیر وزنش بدست آورید؟



حل: ابتدا المانی طبق شکل به شعاع R(x) در نظر می گیریم:

R(x) شعاع در مقطع x

از تشابه هندسی مثلث ها : $\frac{a}{2}=\frac{x}{24} \Rightarrow a=\frac{x}{12}$

بنابراین
$$\begin{cases} R(x)=1+a=1+\frac{x}{12} \\ A(x)=\pi R^2(x)=\pi(1+\frac{x}{12})^2 \end{cases}$$

از هندسهٔ شکل: $\frac{h}{h+24}=\frac{2}{6} \Rightarrow h=12cm$

از قبل داشتیم که : $\Delta=\int_0^l \frac{P(x)}{A(x)\quad E(x)}dx$

P(x) : وزن قسمتی از مخروط ناقص است که بالاتر از المان قرار دارد .

$$P(x) = \gamma . V = \gamma \frac{\pi}{3}\left[R^2(x)(x+12) - 1^2 \times 12\right]$$

حال می توان Δرا بدست آورد :

$$\Delta = \frac{\gamma\pi}{3E}\int_0^{24}\frac{\left[R^2(x)(x+12) - 12\right]dx}{\pi(1+\frac{x}{12})^2} = \frac{\gamma}{3E}\int_0^{24}\left[(x+12) - \frac{12}{(1+\frac{x}{12})^2}\right]dx$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\gamma}{3E}\left[\frac{x^2}{2} + 12x - \frac{144}{1+\frac{x}{12}}\right]_0^{24} = \frac{160\gamma}{E}$$

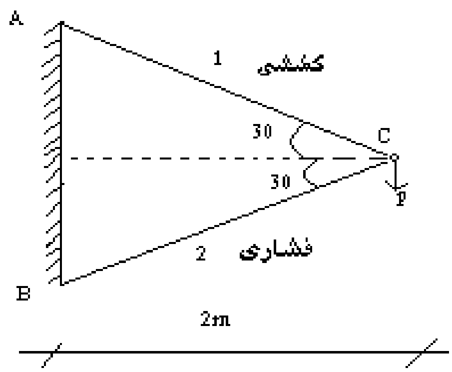
اگر بخواهیم مقدار عددی را بدست آوریم باید واحدها مطابقت داشته باشند :

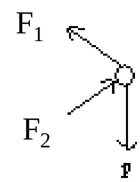
مثلا در مثال قبل باید :

$$\gamma : {kg}/{cm^3}$$

$$E : {kg}/{cm^2}$$

در سازهٔ زیر، میلهٔ AC فولادی (از دو ناودانی به شمارهٔ 10) با سطح مقطع $2\times(12.74cm^2)$ و میلهٔ BC تیرفولادیا به سطح مقطع $35.5cm^2$ می باشد. تنش مجاز میلهٔ AC برابر $1600\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$ و در مورد میلهٔ BC برابر $1000\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$ فرض میشود. ماکزیمم بار مجاز P و نیز جابجایی قائم نقطهٔ C را بدست آورید .





حل: ابتدا بایستی نیروهای دو میله را بدست آوریم:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_1 \cos 30 = F_2 \cos 30 \Rightarrow F_1 = F_2$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos 60 + F_2 \cos 60 = P \Rightarrow F_1 = F_2 = P$$

یعنی در دو میله نیروهای مساوی ایجاد مي گردد. حال می توان ماکزیمم بار مجاز P را تعیین کرد:

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{35.5} = 0.0282P \quad / \quad \sigma_1 = \frac{F_1}{2\times 12.74} = 0.0392P$$

تنش مجاز میله BC کمترست ولی چون سطح مقطع آنها متفاوت است باید σ ها را مقایسه کرد.

یعنی تنش در میله AC بزرگترست، البته تنش مجاز میله AC نیز بیشترست

در میله ي AC :
$$1600 = 0.03925P \Rightarrow P = 40.77t$$

مقدار کوچکتر انتخاب می گردد

در میله ي BC :
$$1000 = 0.0282P \Rightarrow P = 35.46t$$

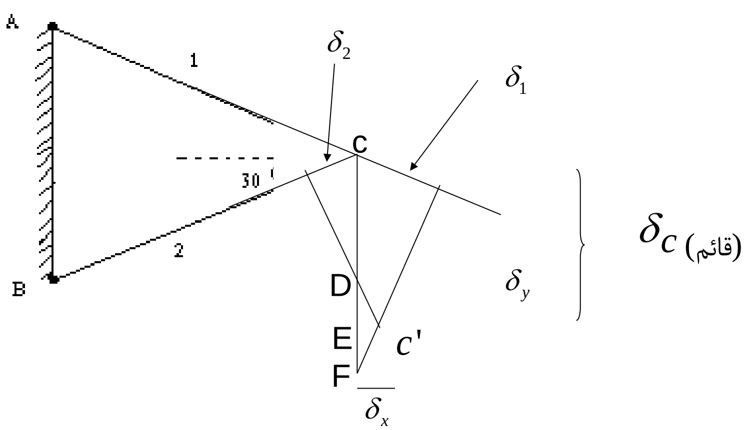
حال می توان تغییرطول هر یک از میله ها را بدست آورده از برآیند آنها $\downarrow \delta_c$ را تعیین نمود.

$$F_1 = F_2 = 35.46t$$

$$\delta_1 = \frac{+35.46\times 10^3(\frac{200}{\cos 30})}{2\times 12.74(2\times 10^6)} = 0.161cm$$

$$\delta_2 = \frac{-35.46\times 10^3(\frac{200}{\cos 30})}{35.5\times(2\times 10^6)} = 0.115cm$$

یعنی نقطهٔ C علاوه بر پائین آمدن، کمی هم بطرف راست رفته است:



با توجه به تشابه مثلث های قائم الزاویهٔ شکل می توان نوشت :

$$CD = \frac{\delta_2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow CD = 2\delta_2 = 0.23cm$$

$$CF = \frac{\delta_1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow CF = 2\delta_1 = 0.322cm$$

$$DE = EF = \frac{(CF - DC)}{2} = 0.046cm$$

بنابراین تغییرمکان قائم نقطهٔ C برابر خواهد شد:

$$\delta_c)_y = CD + DE = 0.276cm$$

$$\delta_c)_x = 0.0266cm$$

در این مثال، معادلات سازگاری تغییرشکلها را در حالت کلی می توان:

$$\delta_1 = \delta_y \sin 30^\circ + \delta_x \cos 30^\circ$$

$$\delta_2 = \delta_y \sin 30^\circ - \delta_x \cos 30^\circ$$

که به همان جواب قبلی می رسد

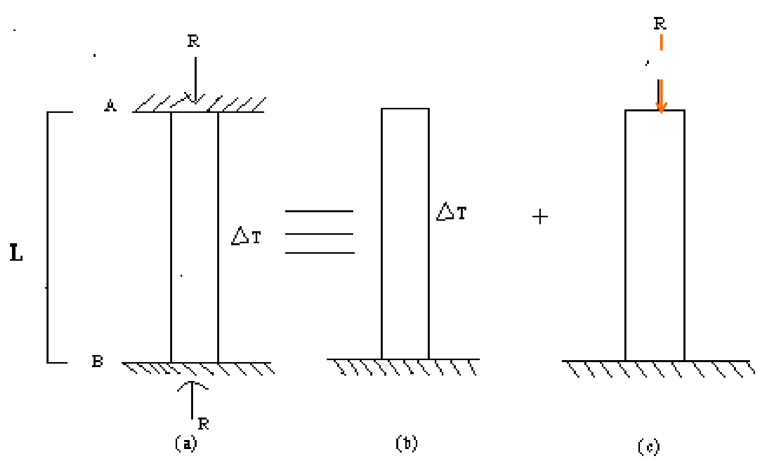
زیباترین پل دنیا ساخته شده در ژاپن

سازه های هیپراستاتیک (آثار گرمایی) :

در سازه های معین، تغییر یکنواخت درجه حرارت در سراسر سازه، تنشی را به وجود نمی آورد زیرا سازه می تواند با آزادی انبساط یا انقباض یابد .

ولی تغییرات درجه حرارت در سازه های نامعین، تولید تنش های گرمایی میکند (مثلاً میله ای که در هر دو انتها گیردار است) در حالتی که میله آزاد باشد در اثر افزایش درجه حرارت به اندازه ی $\delta = \alpha \ell \Delta T$ افزایش طول می یابد و هیچ تنش در میله به وجود نمی آید .

✦برای سازه‌ی نامعین که تحت تأثیر گرما قرار گرفته باشد می توان به صورت زیر از جمع آثار قوا کمک گرفت:



با توجه به همسازی تغییر شکل ها داریم : $\delta_b = \delta_c$

$$\delta_b \uparrow = \alpha L \Delta T \qquad \delta_c \downarrow = \frac{RL}{EA}$$

$$\Rightarrow \delta_b = \delta_c \Rightarrow R = EA\alpha\Delta T$$

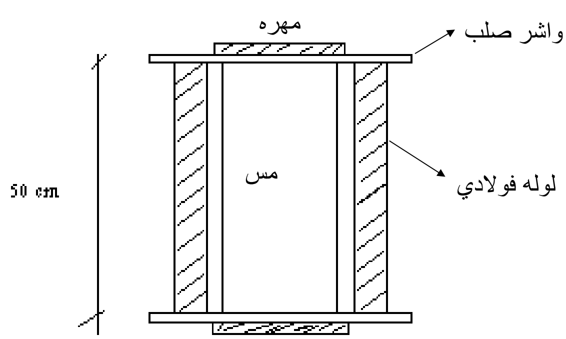
و لذا تنش فشاری در میله در اثر ازدیاد درجه حرارت عبارتست از:

$$\sigma = E\alpha\Delta T$$

✦**نکته** قابل توجه این است که با آنکه سازه تحت هیچ بارگذاری قرار نداشت، در آن تنش به وجود آمده است.

میلهٔ مسی به قطر 20mm درون لولهٔ فولادی به قطر خارجی 32mm و داخلی 22mm مطابق شکل قرار گرفته است واشر صلب مزبور تغییرشکلها را یکسان نگه مي دارد. چنانچه سیستم را تا 120oc حرارت دهیم، تنش ها را مشخص کنید :

$L_{Cu} = L_{St} = 50cm$



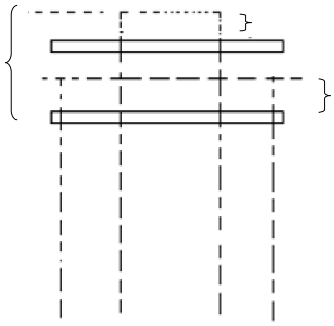
مس $\begin{cases} E_{Cu} = 1.05\times10^{6} \; kg/cm^{2} \\ \lambda_{Cu} = 1.8\times10^{-5} \; /0C \end{cases}$

فولاد $\begin{cases} E_{S} = 2.1\times10^{6} \; kg/cm^{2} \\ \lambda_{S} = 1.2\times10^{-5} \; /0C \end{cases}$

حل:

هدف از قرار دادن واشر اینستکه تغییر طولها برابر باشد و با هم بمانند.

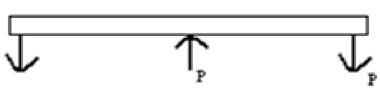
افزایش طول میله مسی =0.108



برای فولادی اگر واشر نبود
افزایش طول لوله فولادی
=0.072

در صورتیکه واشر نباشد

$$\begin{cases} \Delta L_S = \lambda_S L_S \Delta t = 1.2\times10^{-5}\times50\times120 = 0.072cm \\ \Delta L_{Cu} = \lambda_C L_C \Delta t = 1.8\times10^{-5}\times50\times120 = 0.108cm \end{cases}$$



(فشاری) Pمیله = P لوله (کششي)

$$\begin{cases} A_S = \dfrac{\pi}{4}(3.2^2 - 2.2^2) = 4.24cm^2 \\ A_{Cu} = \dfrac{\pi}{4}(2^2) = 3.14cm^2 \end{cases}$$

تغییر طولالاستیکی لوله

$$\Delta = \frac{PL_S}{A_S E_S} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{A_S E_S}{L_3}\Delta$$

تغییرطول الاستیکی میله

$$\Delta' = \frac{PL_C}{A_C E_C} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} P = \dfrac{A_C E_C}{L_C}\Delta' \\ \Delta' = 0.036 - \Delta \end{array} \right\} \quad P = \frac{A_C E_C}{L_C}(0.036 - \Delta)$$

البته طول میله، هنگامیکه به آن نیرو وارد می شود، بیشتر از50cmمی باشد که از آن صرف نظر نمی کنیم
البته می توان صرفنظر کرد. (چون خيلي جزئي است)

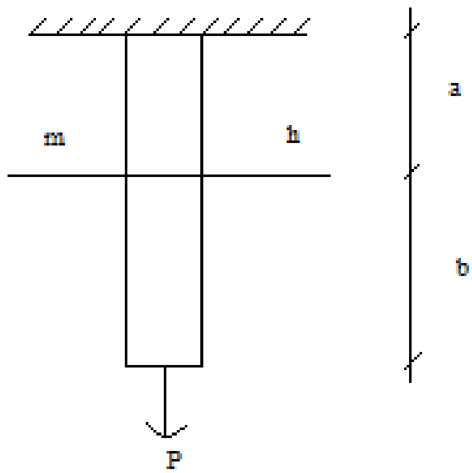
$$\frac{(0.036-\Delta)3.14\times1.05\times10^6}{50.108}=\frac{\Delta\times4.24\times2.1\times10^6}{50.072} \Rightarrow \Delta=0.0097cm$$

طول نهایی میله = طول نهایی لوله =$50+0.072+0.0097=50.0817cm$

$$P=1725kg \rightarrow \begin{aligned} \sigma_S &= 406.8 \ {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2} \\ \sigma_C &= 549.1 \ {}^{kg}\!/\!{}_{cm^2} \end{aligned}$$

زیباترین شهر دنیا، ونکوور کانادا

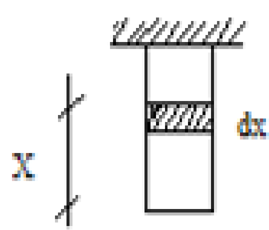
میله ای به سطح مقطع A، ضریب یانگ E و وزن مخصوص γ طبق شکل تحت اثر بار P قرار گرفته. تغییرمکان مقطع mn از میله چه اندازه خواهد بود؟ اثر وزن میله را در محاسبات منظور نمائید.



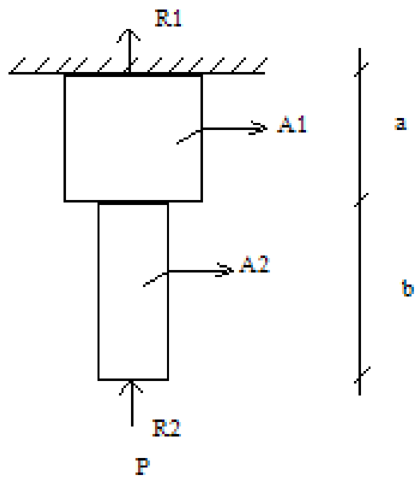
حل: در رابطه با بخش بالایی میله (به درازای a)، وزن بخش زیرین (با درازای b) همراه با نیروی P، بصورت نیروی خارجی در نظر گرفته میشود.

لذا تغییرمکان مقطع mn که همان افزایش طول بخش بالایی میله در ازای a است، برابر خواهد بود با:

$$\delta_{mn} = \Delta\ell_a = \frac{(P+\gamma.(A.b))}{A.E}a + \frac{\gamma.a^2}{2E}$$



واکنش های تکیه گاهی میلهٔ شکل را در اثر وزن میله به تنهایی محاسبه کنید.



حل : اگرچه دو بخش فوقاني و تحتانی میله از یک جنس (یکسان γ, E) ساخته شده اند ولی سطح مقاطع متفاوت است :

تعادل : $\gamma(A_1.a)+\gamma.(A_2.b)=R_1+R_2$

افزایش طول میله بخاطر R : $\Delta\ell_1=\frac{R_1}{E}(\frac{b}{A_2}+\frac{a}{A_1})=\frac{R_1a}{A_1E}(1+\frac{bA_1}{aA_2})$

انقباض میله در اثر وزن میله : $\Delta\ell_2=\frac{\gamma a^2}{2E}+\frac{\gamma b^2}{2E}+\frac{(\gamma a.A_1)b}{A_2E}$

$$=\frac{\gamma a^2}{2E}\left[1+(\frac{b}{a})^2+2\frac{b}{a}\times\frac{A_1}{A_2}\right]$$

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 \Rightarrow \quad R_1 = \frac{\gamma A_1 a}{2} \times \frac{1 + \frac{b^2}{a^2} + 2\frac{bA_1}{aA_2}}{1 + \frac{b}{a}.\frac{A_1}{A_2}}$$

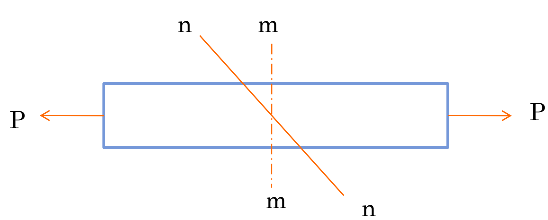
و

$$R_2 = \gamma A_1 a + \gamma A_2 b - R_1$$

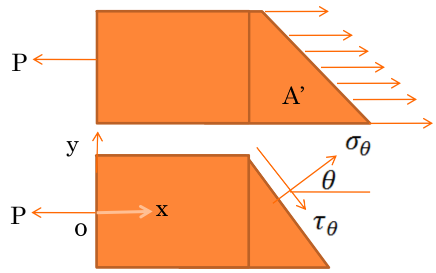
* وضعیت تنش روی سطوح مایل :

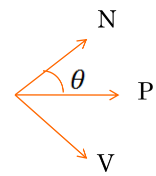
هنگامی که یک میله ی منشوری تحت کشش ساده واقع می شود ، تنش ها روی سطوح قائم (مثل مقطع mm) عمود بر محور میله بطور یکنواخت توزیع شده و P/A می باشد . حال می خواهیم تنش ها را روی سطوح مایل مثلا nn که با مقطع mm زاویه θ دارد بدست آوریم :

نیروی کل موجود در مقطع nn را به دو مولفه ی عمودی و مماسی در سطح nn تجزیه می کنیم :



102





$N = PCos\theta$

$V = PSin\theta$

103

- از آنجا که مساحت A’ ، سطح مقطع مایل $\dfrac{A}{Cos\theta}$ می باشد پس تنش های عمودی و برشی عبارتند از :

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{N}{A'} = \frac{PCos^2\theta}{A} = \sigma_x Cos^2\theta \\ \tau_\theta &= \frac{V}{A'} = \frac{PCos\theta Sin\theta}{A} = \sigma_x Sin\theta Cos\theta \end{aligned}\right.$$

در رابطه ی فوق $\sigma_x = \dfrac{P}{A}$ تنش در جهت x ها در سطح مقطع عمود بر محور میله است.

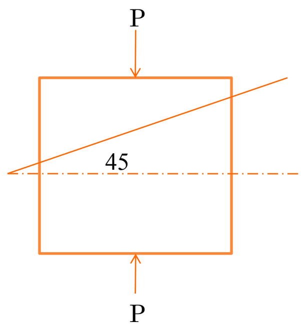
اگر $\theta = 0$ $\xrightarrow[\text{nnمنطبق با}]{\text{سطحmm}}$ $\sigma_\theta = \sigma_x$ و $\tau_\theta = 0$

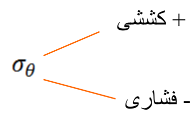
اگر $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\xrightarrow[\text{برهم}]{\text{دو سطح عمود}}$ $\tau_\theta = \sigma_\theta = 0$

اگر $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $\longrightarrow$ $\sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x}{2}$ و $\tau_\theta = \tau_{max} = \dfrac{\sigma_x}{2}$

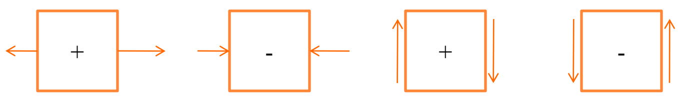
104

- اگر ماده ای در مقابل برش خیلی ضعیف تر از کشش باشد ، تنش تعیین کننده تنش برشی می باشد . (نوارهای لغزشی در زاویه ی 45 درجه)

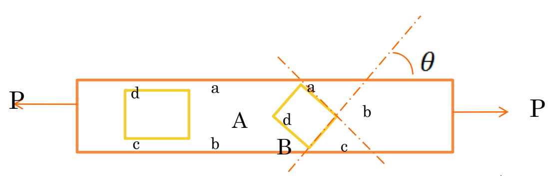




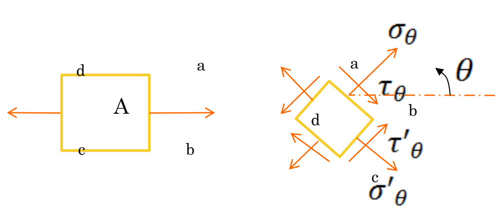
- قرارداد علامت برای تنش ها :



- تنش عمودی مثبت از مصالح المان دور می شود و تنش برشی مثبت المان را در جهت عقربه های ساعت می چرخاند .



- حالت B مانند حالت A می باشد با این تفاوت که با افق زاویه Θ می سازد



- θ : زاویه ی نرمال سطح مورد نظر با محور xها در جهت مثلثاتی.

- تنش های روی ضلع ab همان σ_θ و τ_θ که از روابط قبل بدست می آیند .
- برای تعیین تنش ها روی ضلع bc و ad می توان به ترتیب به جای θ ، $\theta - \frac{\pi}{2}$ ، $\theta + \frac{\pi}{2}$ قرارداد.

برای ضلع bc

$$\begin{cases} \sigma'_\theta = \sigma_x Cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x Sin^2\theta \\ \tau'_\theta = \sigma_x Sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) Cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma_x Sin\theta Cos\theta \end{cases}$$

برای ضلع ad

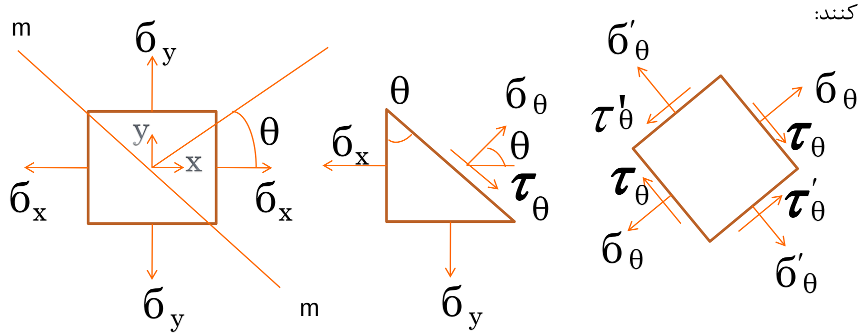
$$\begin{cases} \sigma'_\theta = \sigma_x Cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x Sin^2\theta \\ \tau'_\theta = \sigma_x Sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) Cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma_x Sin\theta Cos\theta \end{cases}$$

نکته ی جالب توجه : در دو سطح عمود بر هم

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x \\ \tau'_\theta = -\tau_\theta \end{cases}$$

تنش دو محوری:

حالت کلی تر از وضعیت تنش آنست که تنشهای عمودی در دو جهت x و y روی یک عنصر اثر کنند:



در اینجا جسم تحت تاثیر تنش دو بعدی قرار دارد (دو محوری) مثل مخازن تحت فشار و تیرهاو....

حالت کلی تر تنش مسطح است.

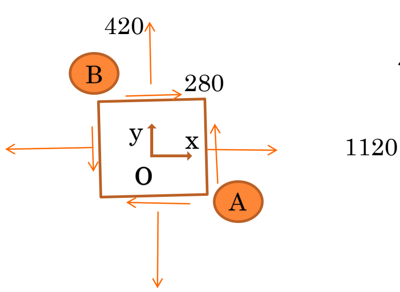
برای تعیین تنش σ_n
- به کمک نوشتن روابط تعادل المانی از جسم
- استفاده از روابط تعادل (که بر اساس معادلات تعادل بدست آیند)
- کاربرد روش ترسیمی دایره مور

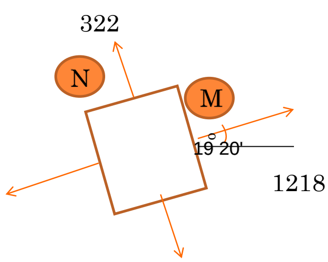
مثال: المانی درتنش مسطح طبق شکل تحت تنش های $\sigma_x = 1120\ kg/cm^2$ و $\sigma_y = 420\ kg/cm^2$ و $\tau_{xy} = 280\ kg/cm^2$ قرار دارد. با استفاده از دایره مور مطلوبست :

الف : تنش ها و صفحات اصلی

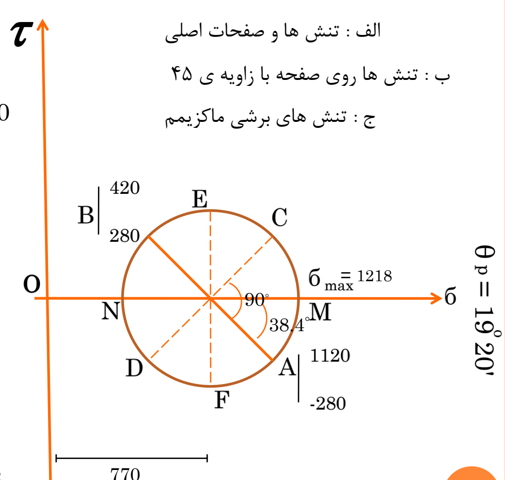
ب : تنش ها روی صفحه با زاویه ی ۴۵

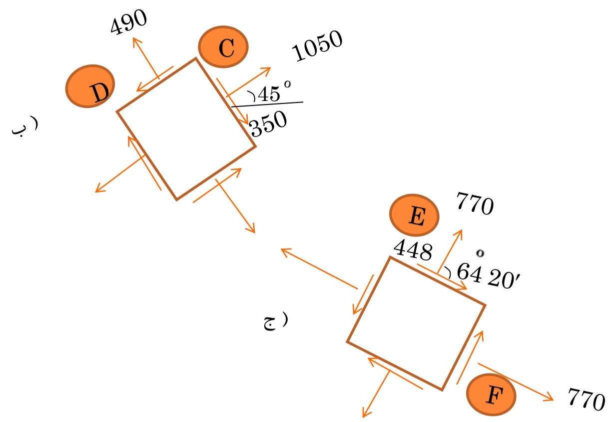
ج : تنش های برشی ماکزیمم





الف)





برای تعیین تنش های برشی
ماکزیمم با توجه به دایره مور:

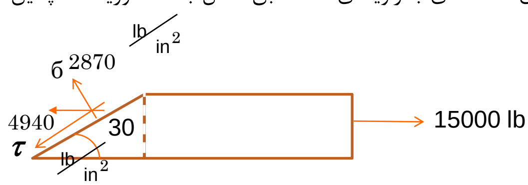
زاویه ی چرخش = $\frac{90^\circ + 38.4^\circ}{2} = 64^\circ 20'$

$$\begin{cases} \sigma = 770 \\ \tau = 448 \end{cases}$$

111

مثال:

میله ای به سطح مقطع $1.3\ in^2$ تحت تاثیر نیروی محوری کششی 15000 lb در دو انتها قرار گرفته است. تنش های عمودی و برشی را روی صفحه ای با زاویه ی 30° طبق شکل بدست اورید. همچنین تنش برشی ماکزیمم را بدست اورید.



تنش کلی در سطح شیب دار مزبور عبارت است از:

$$\sigma' = \frac{P}{A / \sin\theta} = \frac{P \sin\theta}{A}$$

مولفه های تنش

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma' \sin\theta = \frac{P \sin^2\theta}{A} \\ \tau_n = \sigma' \cos\theta = \frac{P \sin\theta \cos\theta}{A} = \frac{P \sin 2\theta}{2A} \end{cases}$$

σ

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{2}(1-\cos 2\theta) \qquad \tau_n = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{15000}{1.3} = 11500 \frac{lb}{in^2}$$

112

با استفاده از روابط فوق می توان نوشت :

$$\sigma_n = \tfrac{1}{2}\,(11500)\,(1-\cos 60^{\circ}) = 2875\ \mathrm{lb}/\mathrm{in}^2$$

$$\tau_n = \tfrac{1}{2}\,(11500)\,\sin 60^{\circ} = 4980\ \mathrm{lb}/\mathrm{in}^2$$

با، توجه به رابطه ی تنش های مماسی در سطح شیب دار داریم: برای تعیین τ_{max}

$$\tau = \tfrac{1}{2}\,\sigma\,\mathrm{Sin}\,2\theta \xrightarrow{\max} 2\theta = 90^{\circ} \longrightarrow \theta = 45^{\circ}$$

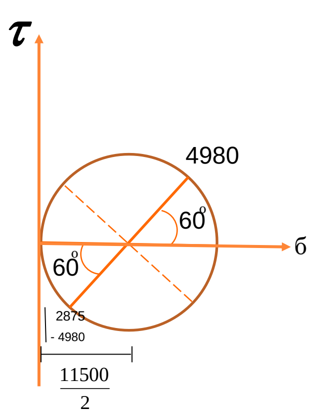
$$\begin{cases} \tau_{n\,max} = \tfrac{1}{2}\,(11500)\,\mathrm{Sin}\,90^{\circ} = 5750\ \mathrm{lb}/\mathrm{in}^2 \\ \sigma_n = \tfrac{1}{2}\,(11500)\,(1-\cos 90^{\circ}) = 5750\ \mathrm{lb}/\mathrm{in}^2 \end{cases}$$

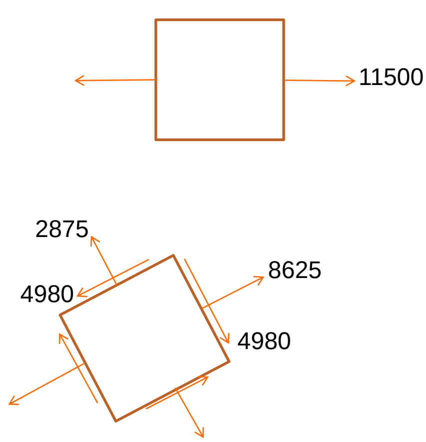
نرمال که در اینجا با افق زاویه 45 درجه دارد

113

مثال فوق را می توان با استفاده از فرمول ها و نیز دایره ی مور حل کرد .

دقت شود که کدام صفحه ملاک است:



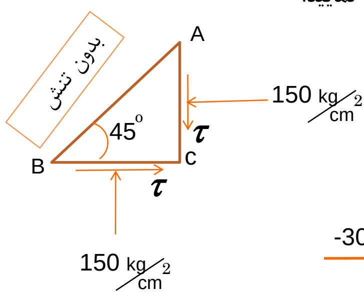


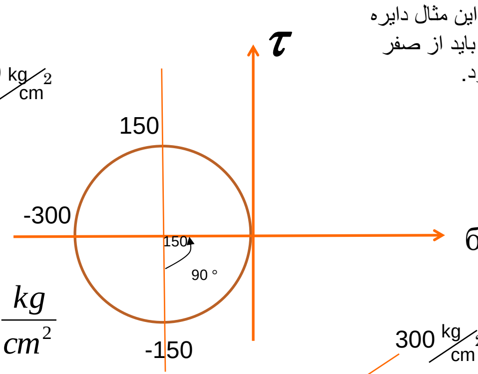
114

مثال:

عنصری به شکل منشور از یک قطعه طبق شکل مورد نظر است. سطح AB تحت اثر باری قرار نگرفته است. تنش های قایم در سطوح AC و BC هر دو 150 kg/cm می باشند. تنش های برشی در سطوح AC و BC و نیز اندازه و راستای تنش های اصلی را تعیین نمایید.

*در این مثال دایره مور باید از صفر بگذرد.



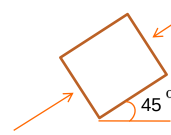


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \tau = 150 \frac{kg}{cm^2}$$

تنش های اصلی

$$б_{max} = 300\ kg/cm^2$$

$$б_{min} = 0$$



$\theta_p = 45°$

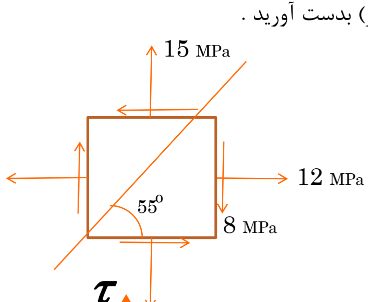
115

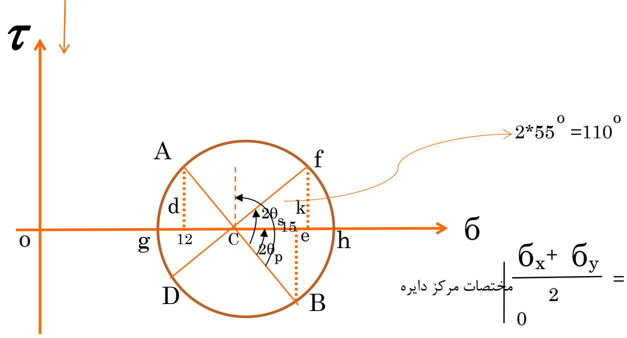
مثال:

برای حالت تنش نشان داده شده در شکل زیر، تنش های اصلی و زاویه ی جهات اصلی و نیز تنش برشی حداکثر و زاویه ی آن را (استفاده از روابط–استفاده از دایره ی مور) بدست آورید .

تنش ها را تحت زاویه ی ۵۵° نیز بدست اورید.

از دایره ی مور استفاده می کنیم.





A | 12 MPa, 8

B | 15, -8

مختصات مرکز دایره

$$\frac{б_x + б_y}{2} = 13.5$$

0

116

$$cg = ch = R = \sqrt{\left(\frac{15-12}{2}\right)^2 + 8^2} = 8.15$$

$$og = oc - cg = 13.5 - 8.15 = 5.35$$

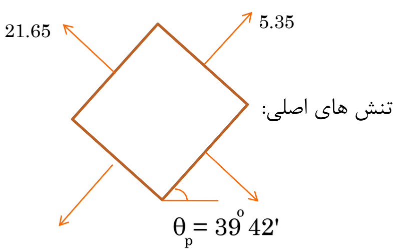
$$oh = oc + ch = 13.5 + 8.15 = 21.65$$

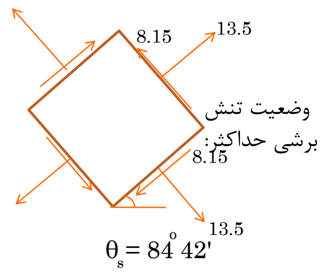
$$ck = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 1.5$$

$$tg\,2\,\theta_p = \frac{Bk}{Ck} = \frac{8}{(15-13.5)} \Longrightarrow \theta_p = 39.42^o$$

حداکثر تنش برشی ، شعاع دایره است و شعاع آن با وضعیت فعلی θ_s (در دایره مور $2\theta_s$) :

$$2\theta_s = 90 + 2\theta_p \Longrightarrow \theta_s = 84^o\ 42'$$





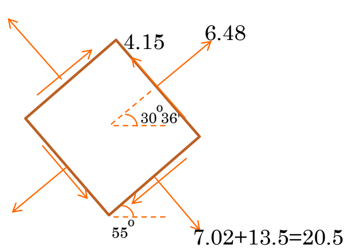
117

تحت زاویه ی ۵۵° نیز به راحتی می توان بدست آورد. به اندازه ی زاویه ی 110° می چرخانیم تا نقطه ی fبدست آید:

$$kf = cf \sin \alpha = 4.15 \text{ MPa}$$

$$ck = cf \cos \alpha = 7.02 \text{ MPa}$$

$$\sigma = ok = 7.02 + 13.5 = 20.5 \text{ MPa}$$



118

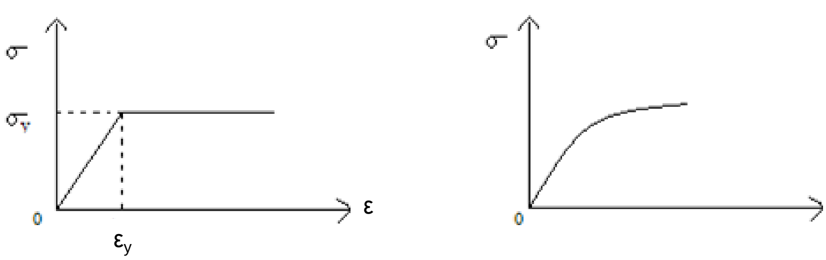
رفتار غیرارتجاعی (پلاستیک) و تحلیل خمیری سازه ها (کشش و فشار):

رفتار غیرخطی: تا به حال فرض بر این بود که مصالح سازه از قانون هوک تبعیت می کند. هنگامیکه تنش از حد تناسب تجاوز می کند، سازه رفتار غیرخطی خواهد داشت.

برای یک سازهٔ معین (ایزواستاتیک) براحتی می توان از معادلات تعادل نیروها را بدست آورد و سراغ نمودار تنش کرنش رفت ولی در سازهٔ هیپراستاتیک تحلیل مشکل می شود، زیرا نیروها را نمی توان بدون یافتن تغییرمکان ها یافت و خود تغییرمکان ها بستگی به نیروها و رابطهٔ تنش کرنش دارند. (روش آزمون و خطا) چون رابطهٔ هوک صادق نیست.

- بدین ترتیب می توان تصویر کاملی از رفتار سازه، همچنانکه بار از صفر تا مقدار ماکزیمم افزایش می یابد، بدست آورد.

نمودار تنش- کرنش غیرخطی



- تحلیل خمیری: برخی مصالح مثل فولادیک ناحیهٔ ارتجاعی خطی دارند که پس از آن تسلیم رخ می دهد. (با دو خط مستقیم می توان منحنی تنش- کرنش را بصورت ایده آل در آورد).

- ماده تا نقطهٔ تسلیم از قانون هوک تبعیت می کند (فرض) و پس از آن تحت تنش ثابت تغییرشکل نامحدود می دهد و تسلیم می گردد (مادهٔ کاملاً خمیری: که بدون افزایش تنش تسلیم می شود)

البته منحنی تنش کرنش فولاد بعلت خاصیت سخت شدگی در انتها شیب مثبتی پیدا می کند ولی در آنجا تغییرشکل های زیادی رخ داده و پس از آن قدری جلوتر، سازه دیگر قابل استفاده نخواهد بود.

ماده ارتجاعی خمیری (الاستوپلاستیک): مثل فولاد که منحنی تنش کرنش آن در امتداد دارای یک ناحیهٔ ارتجاعی خطی میباشد و پس از آن، ناحیهٔ کاملاً خمیری وجود دارد