فصل ۸ - نظریه گراف

۸-۱- گراف‌ها و گراف‌های چندگانه:

هر گراف G از دو مجموعه زیر تشکیل می‌شود:

۱) $V = V(G)$ که عناصر آن رأس‌ها، نقطه‌ها یا گره‌های G نامیده می‌شود.

۲) مجموعه $E = E(G)$ از زوجهای نامرتب از رأس‌های متمایز که یال‌های G (edges) نامیده می‌شوند.

هرگاه بخواهیم بر دو قسمت گراف G تأکید کنیم آن را به صورت $G(V,E)$ نمایش می‌دهیم. رأس‌های u و v را مجاور (adjacent) یا همسایه (neighbor) گویند اگر یک یال $e\{u,v\}$ بین u و v وجود داشته باشد.

در چنین حالتی نقاط u و v دو سر e می‌باشند و می‌گویند e، u و v را به هم وصل می‌کند.

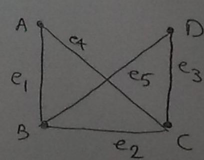
به علاوه می‌گویند یال e روی هر یک از نقاط دو سر u و v واقع شده است. (incident on)

گرافها در صفحه توسط نمودارهایی به صورت طبیعی رسم می‌شوند به ویژه این که، هر رأس v در V با یک نقطه (یا دایره کوچک) و هر یال $e=\{v_1, v_2\}$ با یک منحنی که دو سر v_1 و v_2 را به هم وصل می‌کند، نمایش داده می‌شود.

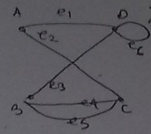
برای مثال شکل زیر گراف $G(V,E)$ را نشان می‌دهد که در آن:

۱) V شامل رأس‌های A، B، C و D است.

۲) E شامل یال‌های $e_1=\{A,B\}$، $e_2=\{B,C\}$، $e_3=\{C,D\}$ و $e_4=\{A,C\}$ و $e_5=\{B,D\}$ است. در حقیقت، معمولاً گراف را به جای نوشتن لیست رأس‌ها و یال‌ها با رسم نمودار نشان می‌دهند.



گراف های چندگانه



در نمودار شکل . یالهای e_4 و e_5 یالهای چندگانه نامیده می‌شوند زیرا یالهایی هستند که نقاط دوسر یکسانی را بهم وصل می‌کنند. و یال e_6 ، حلقه یا دور loop نامیده می‌شود زیرا نقاط دوسر آن تنها یک راس است. به این گراف ، چندگانه multigraph گفته می‌شود.

درجه یک راس

درجه راس v در گراف G بصورت deg(v) نوشته می‌شود برابر تعداد یالهایی است که در آن گراف G شامل v می‌شود. یعنی روی v واقع شده باشد. از آنجاکه هر یال در شمارش درجه راس‌های G دوبار شمرده می‌شود قضیه ساده زیر را داریم.

قضیه ۸-۱ مجموع درجه راس های یک گراف G ، دو برابر تعداد یالهای آن است.

برای مثال در شکل قبلی deg(D)=2 deg(C)=3 deg(B)=3 deg(A)=2

مجموع درجه ها ۱۰ است که دو برابر تعداد یالهاست.

یک راس را زوج یا فرد گوییم اگر درجه آن ، یک عدد زوج یا فرد باشد. لذا A و D راس‌های زوج هستند و B و C فرد.

راسی که درجه آن صفر باشد، راس تنها نامیده می‌شود

گراف با پایان ، گراف بدیهی

یک گراف چندگانه با پایان گوییم اگر هم تعداد راس ها و هم تعداد یالهای آن با پایان باشد

گراف با پایان با یک راس و هیچ یالی یعنی تنها یک نقطه، گراف بدیهی نام دارد.

۸-۲- زیرگراف‌ها، گراف‌های یک ریخت و گراف‌های همسان ریخت

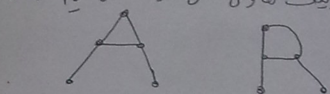
در این بخش رابطه‌های مهم بین گراف‌ها بررسی می‌شود.

زیرگراف‌ها subgraph

گراف $G=G(V,E)$ را در نظر بگیرید. گراف $H=H(V',E')$ زیرگراف G است اگر راس‌ها و یال‌های H در داخل راس‌ها و یال‌های G باشد: $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$

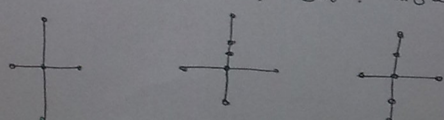
گراف‌های یک ریخت isomorphic

دو گراف $G=(V,E)$ و $G^*(V^*,E^*)$ را یک ریخت گویند اگر یک تناظر یک به یک $f: V\to V^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\{u,v\}$ یک یال G باشد اگر و فقط اگر $\{f(u),f(v)\}$ یک یال G^* باشد. معمولاً بین گراف‌های یک ریخت تفاوتی قائل نمی‌شویم (حتی اگر ظاهر آنها متفاوت باشد) مثال:



گراف‌های همسان ریخت homeomorphic

فرض کنید گراف G داده شده است، با تجزیه یک یال G به دو راس اضافی می‌توان یک گراف جدید به دست آورد. دو گراف G و G^* را همسان ریخت گویند اگر بتوان آنها را از گراف یکسان یا گراف‌های یک ریخت، با این روش به دست آورد. گراف‌های الف و ب در شکل زیر یک ریخت نیستند اما همسان ریخت هستند زیرا هر کدام با اضافه کردن راس‌های مناسب می‌توان از گراف (ج) به دست آورد.



الف　　(ب)　　(ج)

۸-۴- مسیرها، همبندی

مسیر در گراف چندگانه G، شامل دنباله‌ای یک در میان از رأس‌ها و یال‌ها به صورت زیر است:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

که در آن هر یال e_i شامل راس‌های v_{i-1} و v_i است که روی ضلع‌های e_i به ترتیب ظاهر می‌شوند. n، تعداد یال‌های آن، طول مسیر نامیده می‌شود. وقتی ابهامی وجود نداشته باشد مسیر را با دنباله‌ای از راسهایش $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ نشان می‌دهیم. اگر $v_0 = v_n$ باشد، مسیر را بسته گویند.

در غیر این صورت می‌گوییم مسیر از v_0 به v_n یا بین v_0 و v_n است. یا v_0 را به v_n وصل می‌کند.

مسیر ساده مسیری است که در آن تمام راس‌ها متمایز باشند

گذر، مسیری است که تمام یالهای آن متمایز باشد.

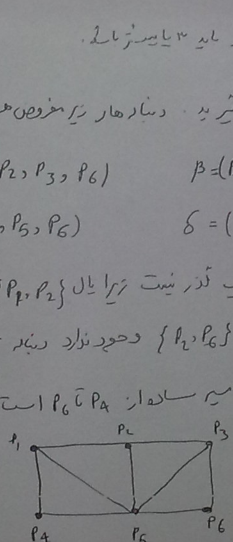
دور: مسیر بسته‌ای است که در آن تمام راس‌هایش به جز v_n متمایز باشند. دور به طول k را، k دور گویند. در یک گراف طول هر دور باید ۳ یا بیشتر باشد.

مثال: گراف G در شکل را در نظر بگیرید. دنباله‌های زیر مفروض هستند:

$\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$ $\qquad$ $\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$

$\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$ $\qquad$ $\delta = (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$

دنباله α یک مسیر از P_4 به P_6 است ولی یک گذر نیست زیرا یال $\{P_1, P_2\}$ دو بار به کار رفته است. دنباله β یک مسیر ~~از P_4 به P_6~~ نیست زیرا هیچ یال $\{P_2, P_6\}$ وجود ندارد. دنباله γ یک گذر است زیرا ~~مسیر ساده نیست~~ یالهای آن متمایز هستند. مسیر δ یک مسیر ساده از P_4 تا P_6 است.



G

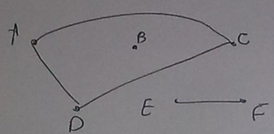
قضیه ۱-۲- یک مسیر از راس u به v وجود دارد اگر و فقط اگر یک مسیر ساده از u به v وجود داشته باشد.

همبندی ، مولفه‌های همبند

گراف G ، همبند یا متصل است اگر مسیری بین هر دو راس دلخواه آن وجود داشته باشد.

گراف شکل قبل همبند است.

فرض کنید G یک گراف باشد. زیرگراف همبند H از G را مولفه همبند G گویند اگر H در هیچ یک از زیرگراف‌های همبند G بزرگتر از G نباشد. به صورت شهودی ، هر گراف می‌تواند به زیرگراف‌های همبند افراز شود.



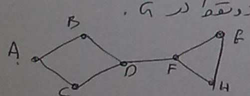
در این شکل ، گراف به سه مولفه همبند {A, C, D} و {E, F} و {B} افراز می‌شود.

B راس منفرد نامیده می‌شود زیرا B متعلق به هیچ یالی نیست . و تشکیل مولفه همبند می‌دهد.

فاصله ، قطر:

فاصله بین راس‌های u و v در G به صورت $d(u,v)$ نوشته می‌شود که طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است.

قطر G که به صورت $diam(G)$ نوشته می‌شود ماکزیمم فاصله بین دو نقطه در G.



$d(A,F) = 3$

$diam(G) = 4$

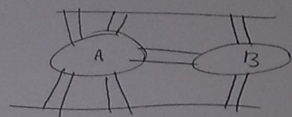
نقطه‌های برش و پل

یک گراف همبند است. راس v را در گراف G ، نقطه برش می‌گویند اگر $G-v$ ناهمبند باشد. ($G-v$ گرافی است که از حذف راس v و تمام یال‌های شامل v ، از G به دست می‌آید). یال e در گراف G ، پل نامیده می‌شود اگر $G-e$ ناهمبند باشد (حذف یال e)

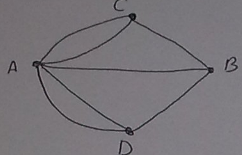
۸-۵- گراف های قابل پیمایش و اویلری، پل کونیگسبرگ

در قرن هجدهم شهر کونیگسبرگ در پروس شرقی، از دو جزیره و هفت پل تشکیل می‌شد. این سوال مطرح بود که آیا می‌توان با قدم زدن و با شروع از نقطه دلخواهی از شهر، از هفت پل عبور کرد بدون اینکه از هیچ پلی دوبار گذشت و به نقطه دلخواه دیگری در شهر رسید؟

اویلر در سال 1736 ثابت کرد این گونه گذر از پل‌ها امکان‌پذیر نیست.



شهر (الف)



(ب) نمایش گرافیکی اویلر

شکل (ب) یک گراف چندگانه است. یک گراف چندگانه را قابل پیمایش گویند، اگر بتوان این گراف را بدون قطع منحنی و بدون تکرار هیچ یالی از آن رسم کرد.

یک گراف چندگانه قابل پیمایش باید با پایان و همبند باشد.

روش اثبات اویلر:

یک راس زوج یا فرد است اگر درجه آن زوج یا فرد باشد. فرض کنید این گراف یک گراف چندگانه قابل پیمایش است. وفرض کنید گذر از راس P شروع نمی‌شود و با آن هم پایان نمی‌رسد. ادعا می‌کنیم که P یک راس زوج است زیرا اگر گذر قابل پیمایش به وسیله یالی وارد P شود، همیشه باید یالی باشد که قبلاً استفاده نشده است و به وسیله آن، گذر می‌تواند P را ترک کند.

بنابراین یالهای داخل گذر که از P می‌گذرند باید به صورت جفت ظاهر شوند و لذا P باید راس زوج باشد.

اگر راس Q فرد باشد، گذر قابل پیمایش باید از راس Q شروع شود یا در آن به پایان برسد.

لذا یک گراف چندگانه با بیش از دو راس فرد نمی‌تواند قابل پیمایش باشد. در این مساله چهار راس فرد دارد که نمی‌تواند قابل گذر باشد.

اویلر در حقیقت عکس مسئله بالا را ثابت کرد. و قضیه و نتیجه زیر را بدست آورد.

گراف G یک گراف اویلری است اگر یک گذر قابل پیمایش بسته، به نام گذر اویلری وجود داشته باشد.

قضیه ۸-۳- گراف همبند باپایان G اویلری است اگر و فقط اگر درجه هر راس آن زوج باشد.

نتیجه ۸-۴ هر گراف همبند باپایان با دو راس فرد، قابل پیمایش است. یک گذر قابل پیمایش می‌تواند از یک راس فرد شروع شود و در یک راس فرد دیگر به پایان برسد.

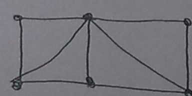
گراف همیلتونی

تاکید بحث فوق از گراف اویلری روی پیمایش یال‌ها است.

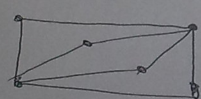
در اینجا روی راس‌ها متمرکز می‌شویم. دور همیلتونی در یک گراف G، مسیر بسته‌ای است که هر راس گراف G را تنها یک بار ملاقات می‌کند. (یعنی مسیر بسته‌ای باید یک دور باشد.)

اگر گراف G یک دور همیلتونی داشته باشد، آنگاه G را گراف همیلتونی می‌گویند.

توجه داریم که یک مدار اویلری دقیقاً یک بار از هر یال استفاده می‌کند اما ممکن است راسهای تکراری داشته باشد حال آنکه دور همیلتونی از هر راس دقیقاً یک بار استفاده می‌کند.



همیلتونی غیر اویلری



اویلری و غیرهمیلتونی

اگر چه روشن است که تنها گراف‌های همبند، می‌توانند همیلتونی باشند، با این وجود معیار ساده‌ای وجود ندارد که بگوید یک گراف همیلتونی است یا خیر.

قضیه ۸-۵: اگر G یک گراف همبند با n راس باشد، آنگاه G همیلتونی است اگر $n \geq 3$ و برای هر راس v در G $deg(v) \geq n$

۸-۶- گراف های برچسب دار و وزن دار

گراف G را گراف برچسب دار گویند اگر به یال ها یا راس های آن، داده هایی از یک نوع یا نوعی دیگر نسبت داده شود. در حالت خاص، گراف G، گراف وزن دار است اگر به هر یال e، یک عدد حقیقی نامنفی $w(e)$ نسبت داده شود، که آن وزن یا طول e می گویند.

بنا به تعریف، وزن (یا طول) یک مسیر، در گراف وزن دار G مجموع وزن یالهای آن مسیر است.

یک مسئله مهم در ~~...~~ نظریه گراف، مسئله کوتاه ترین مسیر است. یعنی مسیری با کوتاه ترین وزن (طول) بین هر دو راس داده شده است.

۸-۷- گراف های کامل، منتظم و دوبخشی

گراف ها دارای انواع متعدد و زیادی هستند. در اینجا، سه نوع از آنها بررسی می شوند.

گراف کامل complete

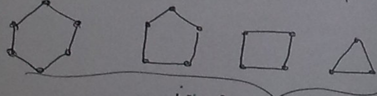
گراف G را کامل گویند اگر هر راس آن به تمام راس های دیگر متصل باشد. بنابراین گراف کامل باید همبند باشد. گراف کامل با n راس را K_n نشان می دهند.

K_4

گراف های منتظم regular

گراف G را منتظم از درجه k یا k-منتظم است اگر درجه هر راس آن k باشد.

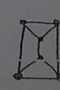
~~درجه هر راس آن~~



2 منتظم

1-منتظم

0 منتظم



3 منتظم

گراف دوبخشی bipartite

گراف G دوبخشی است اگر بتوان V، راس های آن را به دو مجموعه M و N افراز کرد به طوری که هر یال گراف G از اتصال یک راس M به یک راس N به وجود آمده باشد.

منظور از یک گراف دوبخشی کامل، این است که در آن هر راس دلخواه M به هر راس دلخواه از N متصل است. این گراف را با $K_{n,m}$ نشان می دهند که در آن m تعداد راس های M و n تعداد راس های N است.

$K_{2,3}$

۸-۸- گراف های درختی

گراف T را درخت free می گویند اگر T همبند بوده و هیچ دوری نداشته باشد، مثل