√رياضي ، حسابان ، ،

۱۰۱- اگر مجموعه‌ی زوج مرتب‌های $\{(x,3x-1),(2x+1,y),(x,4x-3),(x+3,-2)\}$ $f=$، بیانگر یک تابع باشد، y کدام است؟

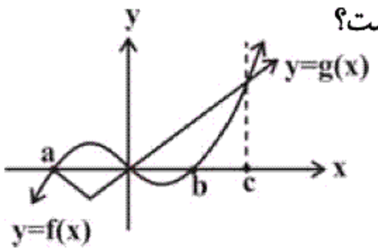
۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) صفر

۱۰۲- در کدام یک از رابطه‌های زیر، y تابعی از x است؟

۱) $|3y^2-4y+1|+\sqrt{x-1}=0$ ۲) $x^2+y^2-2y+4x+5=0$

۳) $y=\begin{cases}3x-1 & x>1\\ x+1 & x<2\end{cases}$ ۴) $x=-y^2+2y-1$

۱۰۳- اگر نمودار f و g به‌صورت شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $h=\dfrac{1}{f-g}$ کدام است؟



۱) $R-\{a,0,c\}$

۲) $R-\{a,0,b,c\}$

۳) $(a,+\infty)-\{0,c\}$

۴) $(a,+\infty)-\{0,b\}$

۱۰۴- اگر $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\geq 0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^2+4 & ,x\geq 0\\ x^2+1 & ,x<0\end{cases}$ باشد، آنگاه $(fog)(x)$ کدام گزینه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۵- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{2-x}{1+x}$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $(-1,2]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $[2,+\infty)$

۱۰۶- هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & x<0\\ 2\sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$ فرد باشد، آنگاه $g(-9)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۶ ۴) ۶-

۱۰۷- حدود a که به ازای آن تابع $f(x)=\begin{cases}x+a & ,x\geq 1\\ 2x+1 & ,x<1\end{cases}$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\geq 2$ ۲) $a>1$ ۳) $a\leq 3$ ۴) $a\leq 2$

۱۰۸- اگرمعکوس تابع $f(x)=\dfrac{x^3+b}{a}$ به صورت $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x-3}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام‌است؟

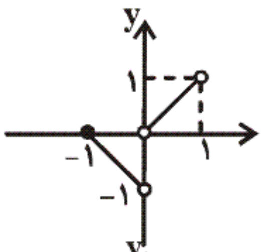
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

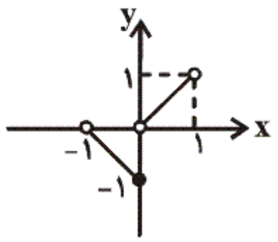
۱۰۹- تابع $f(x)=ax+b$، $(a\neq 0)$، مفروض است. در چه‌صورتی $f^{-1}(x)=f(x)$ می‌شود؟

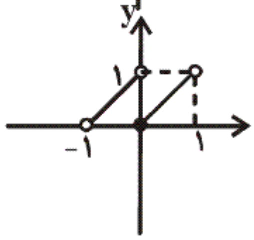
۱) $b=0$ ۲) $a=\pm 1$

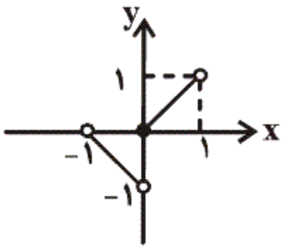
۳) $a=-1$ ۴) $a=1$

۱۱۰- نمودار تابع $y=|x|+[x]$ در فاصله‌ی $-۱<x<۱$، کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱)


۲)


۳)


۴)


√رياضي ، حسابان ، ،

پاسخ:

۱۰۱- گزینه‌ی «۳»

(امیر غلامی)

اگر تابع f شامل زوج مرتب‌های $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ باشد، آنگاه:

$$1)\ f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

$$2)\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

در این سؤال با در نظر گرفتن زوج مرتب‌های $(x, 4x-3)$ و $(x, 3x-1)$ داریم:

$$x = x \Rightarrow 3x - 1 = 4x - 3 \Rightarrow x = 2$$

با جای‌گذاری $x = 2$ در مجموعه داریم:

$$f = \{(2,5), (5,y), (2,5), (5,-2)\}$$

$$(5,y), (5,-2) \in f \Rightarrow y = -2$$

(حسابان- صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱۰۲- گزینه‌ی «۲»

(فریدون ساعتی)

چهار گزینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$1)\ |3y^2 - 4y + 1| + \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |3y^2 - 4y + 1| = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1\ ,\ y = \frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای یک مقدار برای x ، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید که معرف یک تابع نیست.

$$2)\ x^2 + y^2 - 2y + 4x + 5 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 0\ ,\ (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x = -2\ ,\ y = 1$ تابع است.

روابط چندضابطه‌ای در صورتی نشانگر یک تابع هستند که اولاً هر یک از ضابطه‌ها خود تابع و چنانچه دامنه‌ی آن‌ها دارای عضو مشترک باشند مقدار هر یک از این ضابطه‌ها به‌ازای هر عضو دامنه‌ی مشترک، جواب یکسان داشته باشند. در گزینه‌ی «۳» اگر $x = 1/5$ اختیار کنیم. داریم:

$3)\ y = \begin{cases} 3x - 1 & ; \quad x > 1 \Rightarrow 3(1/5) - 1 = 3/5 \\ x + 1 & ; \quad x < 2 \Rightarrow 1/5 + 1 = 2/5 \end{cases} \Rightarrow 3/5 \neq 2/5 \Rightarrow$ تابع نیست.

$$4)\ x = -(y^2 - 2y + 1) \Rightarrow x = -(y-1)^2$$

اگر $x = -1$ اختیار کنیم، برای y دو مقدار صفر و ۲ به‌دست می‌آید. بنابراین تابع نیست.

(حسابان- صفحه‌های ۵۱ و ۵۲)

۱۰۳- گزینه‌ی «۳»

(حمید علیزاده)

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x \mid (f-g)(x) = ۰\}$$

$$D_f = R \text{ و } D_g = [a,+\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = [a,+\infty) \quad (۱)$$

$$(f-g)(x) = ۰ \Rightarrow x = a, ۰, c \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} D_h = [a,+\infty) - \{a, ۰, c\} = (a,+\infty) - \{۰, c\}$$

(حسابان- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۱۰۴- گزینه‌ی «۲»

(محمدمهدی ناظمی)

$$D_f = (-\infty, ۰) \cup [۰, \infty) = R$$

$$D_g = (-\infty, ۰) \cup [۰, +\infty) = R$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in R \mid g(x) \in R\} = R$$

توجه کنید: تابع $g(x)$ همواره مثبت است. اعم از آن‌که $x \geq ۰$ یا $x < ۰$ باشد.

بنابراین: $(fog)(x) = ۱ \qquad (x \in R)$

(حسابان- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

$$y = (gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{۲-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} \Rightarrow y + y\sqrt{x} = ۲ - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}(۱+y) = ۲ - y \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۲-y}{۱+y} \geq ۰$$

$$\Rightarrow -۱ < y \leq ۲ \Rightarrow R_y = (-۱, ۲]$$

(حسابان- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۱۰۶- گزینه‌ی «۴»

(امیر محمد طاهری)

تابع f فرد است پس: $f(-x) = -f(x)$

$$\xrightarrow{x=۹} f(-۹) = -f(۹) \xrightarrow{f(-۹)=g(-۹)} g(-۹) = -f(۹) = -۲\sqrt{۹} = -۶$$

(حسابان- صفحه‌های ۷۶ تا ۷۹)

۱۰۷– گزینه‌ی «۱»

(هادی پلاور)

شرط صعودی بودن f آن است که بیش‌ترین مقدار تابع $y_۲ = ۲x + ۱$ کوچک‌تر یا مساوی کم‌ترین مقدار تابع $y_۱ = x + a$ باشد.

$$\begin{cases} x \geq ۱ \Rightarrow x + a \geq ۱ + a \Rightarrow y_۱ \geq ۱ + a \\ x < ۱ \Rightarrow ۲x + ۱ < ۳ \Rightarrow y_۲ < ۳ \end{cases}$$

$$y_۲ \leq y_۱ \Rightarrow ۳ \leq ۱ + a \Rightarrow a \geq ۲$$

(حسابان – صفحه‌ی ۸۰)

۱۰۸– گزینه‌ی «۲»

(کوروش شاه‌منصوریان)

راه حل اول: با فرض $y = f(x)$ داریم:

$$y = \frac{x^۳ + b}{a} \Rightarrow ay - b = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{ay - b} \xrightarrow[x = f^{-۱}(y)]{y = f(x)} f^{-۱}(y) = \sqrt[۳]{ay - b}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{ax - b} \equiv \sqrt[۳]{۲x - ۳} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۵$$

راه حل دوم: به ازای هر x عضو دامنه‌ی $f^{-۱}$ داریم:

$$fo(f^{-۱}(x)) = x \Rightarrow \frac{(\sqrt[۳]{۲x - ۳})^۳ + b}{a} = x \Rightarrow \frac{۲x + b - ۳}{a} = x \Rightarrow ۲x + b - ۳ = ax$$

$$\Rightarrow (۲ - a)x + b - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲ - a = ۰ \\ b - ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۵$$

(حسابان– صفحه‌های ۹۰ تا ۹۵)

۱۰۹- گزینه‌ی «۳»

(هادی پلاور)

$$y=f(x)=ax+b\Rightarrow x=\frac{y-b}{a}\Rightarrow x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}\Rightarrow (a-\frac{1}{a})x+(b+\frac{b}{a})=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-\dfrac{1}{a}=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{a}\Rightarrow a=\pm 1 & (1)\\[2ex] b+\dfrac{b}{a}=0\Rightarrow b(\dfrac{a+1}{a})=0\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ \text{یا}\\ b=0\end{cases} & (2)\end{cases}$$

مشاهده می‌شود که اگر $a=-1$ باشد، شروط (۱) و (۲) همزمان برقرار می‌شوند.

(حسابان- تمرین ۸- صفحه‌ی ۹۵)

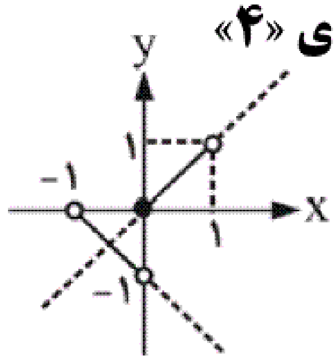
۱۱۰- گزینه‌ی «۴»

(آزاد غیرپزشکی- ۸۲)

$$-1<x<0\ \Rightarrow\ |x|=-x\ ,\ [x]=-1$$

$$\Rightarrow\ y=-x-1$$

$$0\le x<1\ \Rightarrow\ |x|=x\ ,\ [x]=0\ \Rightarrow\ y=x$$



(حسابان- صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)