

تست‌های تکمیلی فصل ۲ - مبحث حد و پیوستگی (سوالات سطح ۱)

مبحث قضایای حدی

۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{[x]}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

(۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱
حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۳ در صفحه ۶۱، $[-1^+] = -1$ و $|x| = 1$ پس $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{[x]} = \frac{1}{-1} = -1$.

۲. حد چپ تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + |x| & x < -1 \\ [x] - |x| & x \geq -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱، سیستم ۸۱)
(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱
حل: گزینه ۲ درست است. حد چپ از ضابطه $x < -1$ به دست می‌آید.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} [x] + |x| = [-1^-] + |-1| = -2 + 1 = -1$$

۳. در مورد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ در $x_0 = 0$ کدام گزینه درست است؟

(۱) فقط حد راست دارد. (۲) حد چپ صفر است اما حد راست ندارد.
(۳) حد برابر صفر است. (۴) حد چپ و راست هر دو موجودند اما برابر نیستند.
حل: گزینه ۳ درست است. حد عبارت زیر رادیکال صفر است و با توجه به نکته ۶ در صفحه ۶۲ به دلیل زوج بودن فرجه باید نوع صفر را مشخص کنیم. چون $x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2)$ و در اطراف $x = 0$ داریم $1 - x^2 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{0^+} = 0$ پس $x^2 \rightarrow 0^+$.

۴. اگر به ازای هر x داشته باشیم $\frac{1}{x-1} \sin^2(x-1) < |f(x) + 2x|$ ، حد راست تابع $f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۰ (۴) حد وجود ندارد.
حل: گزینه ۲ درست است. حد تابع سمت راست نابرابری، صفر در کراندار و بنابراین صفر است و بنابراین از قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + 2x) = 0$ پس $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$.

مبحث حدهای بینهایت و حد در بینهایت

۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $+\infty$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan} x$ کدام است؟
 (۱) 0 (۲) 1 (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) ∞
 حل: گزینه ۳ درست است. چون $\tan(\frac{\pi}{4}) = +\infty$ پس حد مورد نظر برابر $\frac{\pi}{4}$ است. (نمودار $\tan^{-1} x$ را در صفحه ۲۹ ملاحظه کنید).

۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Arcsec} x$ کدام است؟
 (۱) 0 (۲) 1 (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) ∞
 حل: گزینه ۳ درست است. چون $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ پس $\sec(\frac{\pi}{2}) = \infty$ و بنابراین حد برابر $\frac{\pi}{2}$ است. (نمودار $\sec^{-1} x$ را در صفحه ۲۹ ملاحظه کنید).

۸. حد تابع $y = \sin \frac{\pi}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$:
 (۱) موجود است. (۲) برابر π است. (۳) موجود نیست. (۴) برابر ∞ است.
 حل: گزینه ۳ درست است. زیرا $\frac{\pi}{x} \rightarrow \infty$ و بنا به نکته ۱۱ در صفحه ۶۶ حد ندارند.
 ۹. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) \ln x$ برابر است با:
 (۱) 0 (۲) -2 (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$
 حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۹ در صفحه ۶۵، $\ln(0^+) = -\infty$ و چون $x-2 \rightarrow -2 < 0$ پس حد برابر $+\infty$ است.

مبحث صور مبهم

۱۰. اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}} = 2$ باشد آن گاه مقدار a کدام است؟
 (۱) -5 (۲) -3 (۳) -2 (۴) $-\frac{3}{5}$
 حل: گزینه ۱ درست است. برای رفع ابهام صورت و مخرج را در $1+\sqrt{5x+16}$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{1-(5x+16)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2a(x+3)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow a = -5$$

۱۱. حد تابع $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$ چه مقدار است؟
 (۱) $-2/99$ (۲) -3 (۳) $2/99$ (۴) $+\infty$
 حل: گزینه ۲ درست است. چون $x \rightarrow 1^-$ پس $|x-1| = 1-x$ و لذا:

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - (1-x) - 1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)} = -3$$

۱۲. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} 3x}{xe^{2x} - x^2}$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 3 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$
 حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به هم ارزی $\operatorname{Arcsin} 3x \sim 3x$ داریم:

$$\sim \frac{3x}{x(e^{2x} - x^2)} = \frac{3}{e^{2x} - x^2} \rightarrow 3$$

۱۳. حد عبارت $\frac{\cos x^2 - 1}{x^4}$ وقتی x به سمت صفر میل می کند برابر است با: (ژئوفیزیک ۷۹)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است.

$$\cos x^2 - 1 \sim -\frac{1}{2}(x^2)^2 = -\frac{x^4}{2} \Rightarrow \text{حد} = -\frac{1}{2}$$

۱۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sin x)}{x}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

- (۱) $-\pi$ (۲) -1 (۳) ۰ (۴) π

حل: گزینه ۴ درست است. با استفاده از قواعد هم‌ارزی:

$$\frac{\sin(\pi \sin x)}{x} \sim \frac{\pi \sin x}{x} \sim \frac{\pi x}{x} \rightarrow \pi$$

۱۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ برابر است با: (مواد ۷۹)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است.

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2 \Rightarrow \text{حد} = 1$$

۱۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{\text{Arctan} x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) ۱

حل: گزینه ۳ درست است. چون $1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2$

$$\frac{\frac{1}{2}(1 - \cos x)^2}{x^4} \sim \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2x^4} \rightarrow \frac{1}{8}$$

۱۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ برابر با کدامیک از مقادیر زیر است؟ (سیستم ۷۱)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) $+\infty$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{\times 0 \text{ کراندار}} 0$$

۱۸. قسمت اصلی بی‌نهایت کوچک $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر است با:

(تأسیسات آبیاری - آزاد ۸۱)

- (۱) $-\frac{x^2}{3}$ (۲) $\frac{x^2}{3}$ (۳) $-\frac{x^2}{2}$ (۴) $\frac{x^2}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به هم‌ارزی ۳ در صفحه ۶۸ داریم $\cos^\alpha x \sim 1 - \frac{\alpha}{2}x^2$ پس با استفاده از این رابطه برای $\alpha = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ داریم:

$$f(x) \sim (1 - \frac{x^2}{2}) - (1 - \frac{x^2}{4}) = -\frac{x^2}{4}$$

۱۹. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 \sin x - x^4 \cos x}{x^6}$ برابر است با: (فلسفه ۸۲)

۰ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ∞ (۴)

حل: گزینه ۲ درست است. با ساده کردن x^4 از صورت و مخرج، کسر را به صورت $\frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ می‌نویسیم. چون مخرج x^2 است باید بسط مک‌لورن صورت را تا x^3 نوشته شود.

$$\frac{1}{3} = \text{حد} \Rightarrow \frac{1}{3} x^3 = (x - \frac{x^3}{6}) - x(1 - \frac{x^2}{2}) = \frac{1}{3} x^3$$

تذکره ۱. پس از ساده کردن x^4 ممکن است از هم ارزی $\sin x \sim x$ استفاده کنیم. ۱ در این صورت:

$$\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sim \frac{x - x \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x} \sim \frac{\frac{1}{2} x^2}{x} = \frac{1}{2}$$

که نادرست است. توجه کنید که چون در صورت کسر پس از جایگذاری $\sin x \sim x$ هم‌ارزی (بسط مک‌لورن) $\cos x$ تا توان ۲ نوشته شده و در حقیقت بسط مک‌لورن $x \cos x$ را تا توان ۳ نوشته‌ایم در حالیکه بسط $\sin x$ تا توان یک نوشته شده و لذا قاعده (۲) در نکته ۱۵ در صفحه ۷۱ رعایت نشده است.

۲۰. حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - 3 \tan x}{x^3}$ کدام است؟ (انرژی - آزاد ۸۲)

۶ (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

حل: گزینه ۲ درست است. چون مخرج کسر x^3 است $\tan x$ را تا توان ۳ بسط می‌دهیم.

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \frac{(3x)^3}{3} - 3(x + \frac{x^3}{3})}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^3 - x^3}{x^3} = 8$$

۲۱. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۰ (۱) ۱ (۲) ∞ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قوانین رشد: $\frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$

۲۲. حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{3x}$ کدام است؟ (شیمی نساجی - آزاد ۸۱)

۰ (۴) ∞ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به قوانین رشد: $\frac{\ln(e^x)}{3x} = \frac{x}{3x} \rightarrow \frac{1}{3}$ عبارت

۲۳. فرض می‌کنیم n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((nx)^n + 1)^{n+1}}{((x+1)(x^2+1)\dots(x^n+1))^2}$ برابر است با: (ریاضی ۷۵)

۰ (۱) ۱ (۲) n^{n+1} (۳) $n^{n(n+1)}$ (۴)

حل: گزینه ۴ درست است. با استفاده از هم‌ارزی چندجمله‌ای‌ها:

$$\text{کسر} \sim \frac{(nx)^{n(n+1)}}{(x \cdot x^2 \dots x^n)^2} = \frac{n^{n(n+1)} x^{n(n+1)}}{(x^{1+2+\dots+n})^2} = \frac{n^{n(n+1)} x^{n(n+1)}}{x^{n(n+1)}} = n^{n(n+1)}$$

۲۴. اگر $f(x) = \frac{1 + 10^{-\frac{1}{x}}}{2 - 10^{-\frac{1}{x}}}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ چه مقدار خواهد شد؟ (هسته‌ای ۸۲)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ پس از قوانین رشد:

$$f(x) \sim \frac{10^{-\frac{1}{x}}}{-10^{-\frac{1}{x}}} \rightarrow -1$$

(علوم کامپیوتر ۸۲)

۲۵. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \cosh x)$ کدام است؟

- (۱) $\cosh 1$ (۲) $\ln 2$ (۳) e (۴) $-\infty$

حل: گزینه ۲ درست است. توجه کنید که $\frac{e^x}{3} \sim \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ و لذا داریم:

$$x - \ln \cosh x \sim x - \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = x - x + \ln 2 \rightarrow \ln 2$$

۲۶. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (معماری کشتی ۸۲)

- (۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$
(۳) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \text{مبهم}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون برای $x \rightarrow +\infty$ داریم $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ پس $x \sin \frac{1}{x} \sim x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 1$

۲۷. هرگاه $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{1}{x}$ آن‌گاه A برابر است با: (تکنولوژی نساجی ۸۱)

- (۱) $A = 1$ (۲) $A = 0$ (۳) $A = -1$ (۴) $A = \infty$

حل: گزینه ۱ درست است. چون برای $x \rightarrow +\infty$ داریم $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ پس $x \tan \frac{1}{x} \sim x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 1$

۲۸. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۸۰)

- (۱) e (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) ۰

حل: گزینه ۴ درست است. نتیجه ۸ در صفحه ۷۳ را ملاحظه کنید.

۲۹. حد $\lim_{x \rightarrow 0} \tan 2x \csc 4x$ را به دست آورید. (عمران - آزاد ۸۱)

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. حالت $0 \times \infty$ است. آن را به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\tan 2x \csc 4x = \frac{\tan 2x}{\sin 4x} \sim \frac{2x}{4x} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(سیستم ۸۲)

۳۰. مقدار حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-\frac{1}{x}}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{5!}{(0/1)^5}$ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

حل: گزینه ۱ درست است. حالت $0 \times \infty$ است به $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل و از قوانین رشد استفاده می‌کنیم.

$$x^5 e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^5}{e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow 0$$

۳۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۶
 حل: گزینه ۴ درست است. از هم‌ارزی $y \sim y - 1$ وقتی $y \rightarrow 1$ استفاده می‌کنیم.

$$x \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right) \sim x\left(\frac{x+3}{x-3} - 1\right) = \frac{6x}{x-3} \rightarrow 6$$

۳۲. حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$ برابر است با:
 (۱) بی‌نهایت (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) صفر
 حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\infty - \infty$ است. با ضرب و تقسیم در مزدوج یعنی $\sqrt{x+4} + \sqrt{x}$:

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}} = 0$$

۳۳. حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ برابر است با:
 (۱) ∞ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر
 حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به هم‌ارزی رادیکال‌ها:
 $\sqrt{x^2+1} - x \sim (x+0) - x \rightarrow 0$

۳۴. حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ برابر است با:
 (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$
 حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به قوانین رشد:
 $x - \ln x \sim x \rightarrow +\infty$

۳۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right)$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{1}{32}$
 حل: گزینه ۴ درست است. حالت $0 \times \infty$ است. مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\text{کسر} = \frac{3x+5-2x-6}{(x-1)(x+3)(3x+5)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+3)(3x+5)} = \frac{1}{(x+3)(3x+5)} \rightarrow \frac{1}{32}$$

۳۶. مطلوبست تعیین حد تابع داده شده: $y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$
 (۱) $y = \frac{\pi}{4}$ (۲) $y = \pi$ (۳) $y = 1$ (۴) $y = 0$
 حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\frac{1}{0} - \infty$ است. پس مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan x - x}{x \tan x} \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{x^2} = \frac{x}{3} \rightarrow 0$$

۳۷. مطلوب است $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲
 حل: گزینه ۲ درست است.

$$\text{عبارت} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x - \tan x}{x^2 \tan x} \sim \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

۳۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x})$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت $\infty - \infty$ است با مخرج مشترک گرفتن از عبارت تحت حد:

$$\text{عبارت} = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

۳۹. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^3}{2x^2 + x + 1} - \frac{x^2}{2x + 4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ∞ (۳) ۳ (۴) ۰

حل: گزینه ۱ درست است. حالت $\infty - \infty$ است. از مخرج مشترک گیری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{x^3}{2x^2 + x + 1} - \frac{x^2}{2x + 4} = \frac{2x^4 + 4x^3 - (2x^4 + x^3 + x^2)}{(2x^2 + x + 1)(2x + 4)} \sim \frac{3x^3}{4x^3} \rightarrow \frac{3}{4}$$

۴۰. حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (مدیریت و تکنولوژی نساجی ۸۱)

- (۱) صفر است. (۲) یک است. (۳) بی نهایت است. (۴) موجود نیست.

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 0^0 است پس $\ln$ گرفته و سپس از نتیجه قوانین رشد استفاده کنیم.

$$\ln(x^x) = x \ln x \rightarrow 0 \implies \text{حد} = e^0 = 1$$

۴۱. حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ برابر است با: (معادن - آزاد ۸۱)

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ∞ (۴) ۲

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت 0^0 است. از عبارت تحت حد، $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln(\sin x)^{\tan x} = \tan x \ln(\sin x) \sim x \ln x \rightarrow 0 \implies \text{حد} = e^0 = 1$$

۴۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) e

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ پس حد به صورت 0^0 است، با اعمال $\ln$:

$$\frac{1}{\ln x} (\ln \sin x) \sim \frac{1}{\ln x} \ln x \rightarrow 1 \implies \text{حد} = e^1 = e$$

۴۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x})^{\sin x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت ∞^0 است و با اعمال $\ln$ و استفاده از نتیجه قوانین رشد:

$$\sin x \ln(\frac{1}{x}) \sim x \ln(\frac{1}{x}) = -x \ln x \rightarrow 0 \implies \text{حد} = e^0 = 1$$

۴۴. حد $(1 + \frac{m}{x})^{nx}$ برای هر عدد حقیقی m, n وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) e^m (۳) $e^{\frac{n}{m}}$ (۴) e^{mn}

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت 1^∞ است و از نکته ۲۰ در صفحه ۷۸:

$$e^{nx(1+\frac{m}{x}-1)} = e^{nx\frac{m}{x}} \rightarrow e^{mn}$$

(معدن ۸۲)

۴۵. حد $(1 + \frac{2}{x})^x$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) e^2 (۳) e (۴) $2e$

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 1^∞ است و از نکته ۲۰ در صفحه ۷۸:

$$e^{x(1+\frac{2}{x}-1)} = e^{\frac{2x}{x}} \rightarrow e^2$$

(تأسیسات آبیاری - آزاد ۸۱)

۴۶. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2e}$ (۲) e (۳) 2 (۴) e^2

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت 1^∞ است و عبارت هم ارز e^2 است.

(علوم کامپیوتر ۷۹)

۴۷. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2}$ برابر است با:

(۱) e^2 (۲) e (۳) e^{-1} (۴) 1

حل: گزینه ۱ درست است. حالت مبهم 1^∞ است.

$$e^{x^2(\frac{x+1}{x}-1)} = e^{\frac{x^2}{x}} \rightarrow e^x$$

(صنایع غذایی ۷۱)

۴۸. حد عبارت $\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x^2}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) e (۳) e^{-2} (۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. حد به صورت 1^∞ است.

$$e^{x^2(\frac{2x-1}{2x+3}-1)} = e^{\frac{-4x^2}{2x+3}} \sim e^{-2x} \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

(مکانیک ۸۱)

۴۹. به ازای هر عدد حقیقی و ثابت a حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) ∞ (۳) e^a (۴) e^{2a}

حل: گزینه ۴ درست است. حالت مبهم 1^∞ است.

$$e^{x(\frac{x+a}{x-a}-1)} = e^{\frac{2ax}{x-a}} \rightarrow e^{2a}$$

(نقشه برداری و مواد ۸۲)

۵۰. کدام یک از گزینه‌های زیر در خصوص حد $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ صحیح است؟

(۱) 2 (۲) e^2 (۳) e (۴) ∞

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 1^∞ است. با توجه به نکته ۲۰:

$$(x + e^x)^{\frac{1}{x}} \sim e^{\frac{1}{x}(x + e^x - 1)} \sim e^{\frac{x+x}{x}} \rightarrow e^2$$

۵۱. حد مقابل را به دست آورید $\lim_{x \rightarrow e^+} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ (۱) صفر (۲) $+\infty$ (۳) e (۴) $-\infty$ (عمران = آزاد ۸۰)

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 1^∞ است پس:

$$\sim e^{\frac{(x+0x^2) - \frac{1}{x}}{x^2}} = e^{\frac{1 - \frac{1}{x}}{x}} \sim e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

عبارت $\sim e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} (\sin x + \cos x - 1)$

۵۲. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ برابر (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲ (مواد ۷۶)

حل: گزینه ۱ درست است. حالت 1^∞ است.

$$= e^{\frac{1}{\sin x} (\cos x - 1)} \sim e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}} = e^{-\frac{x}{2}} \rightarrow e^0 = 1$$

عبارت $= e^{\frac{1}{\sin x} (\cos x - 1)}$

۵۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$ کدام است؟ (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۳) $\sqrt{e}$ (۴) e^2 (هسته‌ای ۷۶)

حل: گزینه ۲ درست است. حالت 1^∞ است.

$$\sim e^{\frac{\cos x - 1}{\tan^2 x}} = e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

عبارت $\sim e^{\cot^2 x (\cos x - 1)}$

۵۴. حد عبارت $(e^x - x)^{\frac{1}{x^2}}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر کدام است؟ (۱) e^2 (۲) $\sqrt{e}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$ (ژئوفیزیک ۷۷)

حل: گزینه ۲ درست است. حالت 1^∞ است.

$$\sim e^{\frac{e^x - x - 1}{x^2}} \sim e^{\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}} \rightarrow e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

عبارت $\sim e^{\frac{e^x - x - 1}{x^2}}$

مبحث مجانب

۵۵. مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ به کدام صورت است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

- (۱) دو مجانب قائم (۲) یک مجانب افقی و یک مجانب قائم (۳) دو مجانب افقی (۴) دو مجانب مایل

حل: گزینه ۳ درست است. مخرج فاقد ریشه است ولی در بینهایت داریم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$ پس $y = \pm 1$ مجانب افقی f هستند.

۵۶. تعداد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. ریشه‌های مخرج $x = 0, -1, -2$ هستند اما تابع f در همسایگی $x = -1, -2$ تعریف نمی‌شوند یعنی حد ندارد پس $x = 0$ تنها مجانب قائم است. حد تابع در $+\infty$ برابر صفر است پس $y = 0$ مجانب افقی است.

۵۷. تعداد مجانب‌های مایل و افقی $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1}$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۰ و ۲ (۲) ۰ و ۲ (۳) ۱ و ۱ (۴) ۱ و ۰

حل: گزینه ۳ درست است. از هم‌ارزی رادیکال‌ها استفاده می‌کنیم.

$$f(x) \sim |x + 2| + (x + 1) \rightarrow \begin{cases} 2x + 3 & x \rightarrow +\infty \\ -1 & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

پس $y = -1$ مجانب افقی و $y = 2x + 3$ مجانب مایل است.

۵۸. اگر $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ، $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ نمودار تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند خط مجانب دارد؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

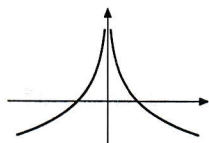
حل: گزینه ۴ درست است. اگر $h(x) = (\frac{f}{g})(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ خط $x = 0$ مجانب قائم (تنها ریشه مخرج) است

و با توجه به قوانین رشد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x}}{-2^{-x}} = -1$$

پس دو مجانب افقی $y = \pm 1$ و یک مجانب قائم $x = 0$ وجود دارد.

۵۹. ضابطه نمودار تابع شکل زیر کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)



(۱) $f(x) = \ln x^2$ (۲) $f(x) = \ln |x|$

(۳) $f(x) = \ln |\frac{1}{x}|$ (۴) $f(x) = x \ln x$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به شکل باید $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ که تنها گزینه‌ای که این ویژگی را دارد گزینه (۳) است.

بحث دقیق‌تر: اگر نیمه سمت راست شکل را در نظر بگیریم، با توجه به نمودار تابع لگاریتمی برای $a > 1$ در صفحه ۳۱، می‌تواند قرینه نمودار $y = \ln x$ نسبت به محور x ها یعنی $y = -\ln x$ باشد و با توجه به این که شکل نسبت به محور y ها متقارن است باید نمودار آن از تبدیل $x \rightarrow |x|$ در نمودار $y = -\ln x$ به دست آید پس $f(x) = -\ln |x| = \ln |\frac{1}{x}|$

مبحث پیوستگی

۶۰. برای تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{[x]} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) f در $x = 0$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد. (۲) f در $x = 0$ پیوسته است.

(۳) حد راست f در $x = 0$ موجود نیست. (۴) f در $x = 0$ ناپیوسته از چپ است.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $x \rightarrow 0^-$ داریم $[x] = -1$ پس $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ یعنی f از چپ پیوسته

است. چون $[x]$ برای $0 \leq x < 1$ صفر می‌شود، پس $D_f = \mathbb{R} - (0, 1)$ یعنی تابع در همسایگی راست $x = 0$

تعریف نمی‌شود و لذا حد راست ندارد.

۶۱. اگر f تابع زوج و g تابع فرد و پیوسته و $f(0) \neq 0$ و تابع $f(x)^{g(x)}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) e

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $h(x) = f(x)^{g(x)}$ ، چون h در $x = 0$ پیوسته است $h(0) = f(0)^{g(0)}$ و چون g فرد است $g(0) = 0$ و لذا حد برابر ۱ می‌شود.

۶۲. به ازای کدام مقادیر a تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. برای پیوستگی باید حد تابع و مقدار آن برابر باشند.

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

۶۳. تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$ ، $x \neq 1$ ، مقدار این تابع در $x = 1$ کدام باشد تا f در $x = 1$ پیوسته گردد؟ (ریاضی ۷۹)

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) e (۳) ۱ (۴) ۰

حل: گزینه ۲ درست است. باید $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ که حالت 1^∞ رخ می‌دهد. از نکته ۲۰ در صفحه ۷۸ داریم $f(1) = e$ و لذا $f(x) \sim e^{\frac{1}{x-1}(x-1)} \rightarrow e$.

۶۴. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟ (مخازن ۷۸)

- (۱) e (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\frac{1}{x^2}$ برای $x \neq 0$ پیوسته است پس f نیز بر $\mathbb{R} - \{0\}$ پیوسته است پس کافی است a را طوری تعیین کنیم که f در $x = 0$ پیوسته شود.

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

۶۵. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{\sin x} - 1) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

حل: گزینه ۳ درست است. باید a را طوری تعیین کنیم که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ چون $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x$:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

۶۶. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cos x & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$ مفروض است، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
(ریاضی ۸۰)

- (۱) به ازای هر مقدار α ، f در صفر ناپیوسته است. (۲) اگر $\alpha = 0$ ، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.
(۳) اگر $\alpha = 1$ ، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. (۴) اگر $\alpha = -1$ ، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

حل: گزینه ۱ درست است. f بر $\mathbb{R} - \{0\}$ پیوسته است.

f همواره در $x = 0$ ناپیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow$

۶۷. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} \ln x & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است؟
(هوشناسی کشاورزی ۷۶)

- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2
حل: گزینه ۲ درست است. دامنه تابع $(0, +\infty)$ است و f فقط در $x = 1$ ممکن است ناپیوسته باشد.

$$a = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

۶۸. در کدامیک از فاصله‌های زیر تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln(x-1)$ پیوسته است؟

- (۱) $(-2, 2]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $[1, 2]$

حل: گزینه ۳ درست است. هر تابعی بر نقاطی که در دامنه آن قرار ندارند، ناپیوسته است پس ابتدا D_f را محاسبه می‌کنیم. با توجه به دامنه رادیکال و لگاریتم:

$$4 - x^2 \geq 0, \quad x - 1 > 0 \Rightarrow D_f = (1, 2]$$

تابع f بر $(1, 2)$ پیوسته و در $x = 2$ پیوسته از چپ است پس بر D_f پیوسته خواهد بود.

۶۹. فرض کنید $f(x) = \sqrt{1-x^2} = u(v(x))$ که در آن $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = 1-x^2$ در این صورت:

(مدیریت نساجی ۸۲)

- (۱) u در نقاط $x > 0$ و f در نقاط $x \leq 1$ پیوسته است.
(۲) u در نقاط $x \geq 0$ و f در نقاط $x \geq 1$ پیوسته است.
(۳) u در بازه $[0, +\infty)$ و f در بازه $[-1, 1]$ پیوسته است.
(۴) u در نقاط $x > 0$ و f در نقاط $x^2 > 1$ پیوسته است.
حل: گزینه ۳ درست است. $u(x)$ برای $x > 0$ پیوسته و در $x = 0$ از راست پیوسته و لذا بر $[0, +\infty)$ پیوسته است. f نیز برای $x^2 < 1$ پیوسته و برای $x = 1$ و $x = -1$ به ترتیب از چپ و راست پیوسته است و لذا بر $[-1, 1]$ پیوسته خواهد بود.

۷۰. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-2 & 1 < x \end{cases}$ از نظر پیوستگی کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

(۱) در هر نقطه بجز در $x=1$ پیوسته است. (۲) پیوسته است.

(۳) در هر نقطه بجز در $x=0$ پیوسته است. (۴) در هر نقطه بجز در $x=1, x=0$ پیوسته است.

حل: گزینه ۲ درست است. توابع موجود در هر ضابطه در دامنه خود پیوسته‌اند، پس فقط پیوستگی تابع در $x=0, 1$ را بررسی می‌کنیم.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, f(0) = 1 \Rightarrow$ در $x=0$ پیوسته است.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, f(1) = 0 \Rightarrow$ در $x=1$ پیوسته است.

پس f در همه نقاط پیوسته است.

۷۱. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{[3x-5]}$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) هیچ (۴) بی‌نهایت

حل: گزینه ۲ درست است. چون $0 \leq x \leq 1$ داریم $-5 \leq 3x-5 \leq -2$ پس در این بازه مخرج صفر نمی‌شود، لذا فقط نقاطی که g در آنها عددی صحیح است، می‌توانند نقاط ناپیوستگی f باشند. چون در فاصله $(-5, -2)$ تابع g در دو مقدار -3 و -4 عددی صحیح می‌شود و در این مقادیر می‌نیم نیست. پس بنا به نکته ۳۰ در صفحه ۸۶، تابع f در این نقاط ناپیوسته است. ضمناً f در $x=1$ ناپیوسته از چپ است اما در $x=0$ پیوسته از راست است. پس در مجموع سه نقطه ناپیوستگی دارد.

۷۲. اگر تابع $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2 + ax + 1}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $|a| > 2$ (۲) $|a| \geq 2$ (۳) $|a| < 2$ (۴) $|a| \leq 2$

حل: گزینه ۳ درست است. صورت و مخرج f پیوسته‌اند پس ناپیوستگی فقط در ریشه‌های مخرج f رخ می‌دهد. برای آن که f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $x^2 + ax + 1$ فاقد ریشه باشد یعنی $\Delta < 0$ پس $a^2 - 4 < 0$ یعنی $|a| < 2$.

۷۳. معادله $(x-1)^7 + (x-2)^7 + \dots + (x-100)^7 = 0$ دارای است.

(۱) حداقل سه ریشه حقیقی (۲) دقیقاً یک ریشه مثبت

(۳) دقیقاً یک ریشه منفی (۴) ۷ ریشه حقیقی

حل: گزینه ۲ درست است. اگر طرف چپ معادله را $f(x)$ بگیریم تابع f پیوسته و $f(100) = f(1) < 0$ پس در فاصله $(1, 100)$ حداقل یک ریشه دارد از طرفی f مجموع توابع صعودی اکید و لذا صعودی اکید است، پس دقیقاً یک ریشه دارد.

۷۴. تابع $g(x) = \frac{1}{x^3 + 2x - 4}$ بر کدامیک از بازه‌های زیر پیوسته است؟

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[1, 3]$

(۳) $[5, 6]$ (۴) بر هر سه بازه پیوسته است.

حل: گزینه ۳ درست است. ناپیوستگی g در ریشه‌های مخرج است و چون $g(x) = x^3 + 2x - 4$ جمع دو تابع صعودی اکید $2x - 4$ و x^3 است پس صعودی اکید است و لذا حداکثر یک ریشه دارد.

در $(1, 3)$ ریشه دارد. $\Rightarrow f(1)f(3) < 0$, در $(0, 2)$ ریشه دارد. $\Rightarrow f(0)f(2) < 0$

پس f دقیقاً یک ریشه دارد که در اشتراک $(0, 2)$ و $(1, 3)$ قرار دارد. پس f در $(0, 6)$ نمی تواند دارای ریشه باشد و لذا g بر این بازه پیوسته است.

۷۵. اگر f, g توابعی پیوسته بر $[a, b]$ باشند، با کدام شرط نمودار دو تابع f و g الزاماً یکدیگر را در نقطه ای که x آن بین a و b است، قطع می کنند؟

(ریاضی ۸۰، MBA ۸۲)

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b) \quad (۲)$$

$$f(a) > g(a), f(b) > g(b) \quad (۱)$$

$$f(a) = g(a), f(b) < g(b) \quad (۴)$$

$$f(a) < g(b), g(a) > f(b) \quad (۳)$$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $h(x) = f(x) - g(x)$ تابع h پیوسته است پس باید گزینه ای انتخاب شود که با شرایط آن تابع h بر بازه $[a, b]$ تغییر علامت دهد. با شرایط گزینه ۲:

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad \text{و} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

پس $x_0 \in (a, b)$ موجود است که $h(x_0) = 0$ و لذا $g(x_0) = f(x_0)$.

۷۶. اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد معادله $x^n + nx + 1 = 0$ دارای ...

(آمار ۸۰)

(۱) دقیقاً یک ریشه است.

(۲) حداکثر یک ریشه است.

(۳) یک ریشه مکرر است

(۴) n ریشه است.

حل: گزینه ۱ درست است. چون چندجمله ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد و x^n و nx صعودی اکید و لذا $f(x) = x^n + nx + 1$ صعودی اکید است پس دقیقاً یک ریشه دارد.

۷۷. معادله $2^x = 3x$ در کدام بازه جواب دارد؟

(ژئوفیزیک ۸۰)

$$(0, 1) \quad (۴)$$

$$(1, 2) \quad (۳)$$

$$(-1, 0) \quad (۲)$$

$$(-\infty, 0) \quad (۱)$$

حل: گزینه ۴ درست است. تابع $g(x) = 2^x - 3x$ پیوسته است:

g در $(0, 1)$ ریشه دارد. $\Rightarrow g(1) = 2 - 3 < 0$, $g(0) = 1 > 0$

۷۸. اگر تابع f بر $\mathbb{R}$ با ضابطه x گویا x گنگ $f(x) = \begin{cases} 5x & x \text{ گویا} \\ x^2 + 6 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ باشد این تابع از نظر پیوستگی در نقاط $x = 1$

و $x = 2$ چگونه است؟

(ژئوفیزیک، سیستم ۸۱)

(۱) در هر دو نقطه پیوسته است.

(۲) در هر دو نقطه ناپیوسته است.

(۳) در $x = 1$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است.

(۴) در $x = 1$ ناپیوسته و در $x = 2$ پیوسته است.

حل: گزینه ۴ درست است. f در نقاطی پیوسته است که $5x = x^2 + 6$ پس f در $x = 2, 3$ پیوسته و در بقیه نقاط ناپیوسته است.

تستهای تکمیلی فصل ۲ - مبحث حد و پیوستگی (سوالات سطح ۲)

۱. تعداد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{\ln(x^2 - x)}{x + 2}$ برابر است با:

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

حل: گزینه ۱ درست است. $x = -2$ ریشه مخرج است و صورت کسر به ازای آن تعریف می‌شود و مخالف صفر است و لذا مجانب قائم خواهد بود. با توجه به نکته ۲۲ در صفحه ۸۲ ریشه‌های عبارت تحت لگاریتم یعنی $x = 0, 1$ را نیز بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0, 1 \text{ مجانب قائم هستند.}$$

از طرفی بنا قوانین رشد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ پس $y = 0$ مجانب افقی است.

۲. $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{x^2}}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (صفر) ۳ ($e^{\frac{1}{2}}$) ۴ ($\frac{1}{\sqrt{e}}$)

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 0^∞ است. با توجه به اینکه برای x های نزدیک صفر $1 < \cos x < 0$ پس $[\cos x] = 0$ و لذا برای x های نزدیک صفر $[\cos x]^{\frac{1}{x^2}} = 0$ تابع ثابت صفر و لذا حد آن صفر خواهد بود.

۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ ($\frac{1}{3}$) ۲ ($\frac{1}{2}$) ۳ ($-\frac{1}{6}$) ۴ (صفر)

حل: گزینه ۳ درست است. برای حذف رادیکال، کسر را در $\sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin x}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{کسر} = \frac{\sin^2 \sqrt{x} - \sin x}{x\sqrt{x}(\sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin x})} \sim \frac{\sin^2 \sqrt{x} - \sin x}{x\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{\sin^2 \sqrt{x} - \sin x}{2x^2}$$

پس باید بسط مک‌لورن صورت را تا x^2 بنویسیم.

$$\sin^2 \sqrt{x} - \sin x \sim (\sqrt{x} - \frac{1}{6}(\sqrt{x})^3)^2 - (x + 0x^2) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^3 - x \sim -\frac{1}{3}x^2$$

و لذا حاصل حد برابر $-\frac{1}{6}$ است.

۴. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \sin x^2}{x + xe^{\frac{1}{x}}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۰) ۳ (∞) ۴ (موجود نیست)

(ریاضی ۷۶)

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. با توجه به هم‌ارزی $\sin x^2 \sim x^2$:

$$\text{کسر} \sim \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x(1 + e^{\frac{1}{x}})} = x \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

حال اگر $x \rightarrow 0^+$ آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ و لذا $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \sim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow 1$ پس حد راست صفر می‌شود و اگر $x \rightarrow 0^-$ داریم

پس حد چپ هم صفر می‌شود. $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = 0$

روش دوم. چون $0 \leq \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \leq 1$ پس این عبارت کراندار است و حد مورد نظر صفر در کراندار و لذا صفر است.

۵. اگر در یک همسایگی محذوف $x_0 = 1$ رابطه $x^2 + \frac{1}{3} < f(x) < x^2 + \frac{4}{5}$ برقرار باشد، آن‌گاه:

(۱) تابع f در $x_0 = 1$ فاقد حد است. (۲) تابع $[f]$ در $x_0 = 1$ دارای حد است.

(۳) تابع $\sqrt{f(x)}$ در $x_0 = 1$ حد دارد. (۴) تابع $f(x)(x-1)^2$ در $x_0 = 1$ حد ندارد.
حل: گزینه ۲ درست است.

$$x^2 + \frac{1}{3} < f(x) < x^2 + \frac{4}{5} \implies [x^2 + \frac{1}{3}] \leq [f(x)] \leq [x^2 + \frac{4}{5}]$$

اما $\lim_{x \rightarrow 1} [x^2 + \frac{1}{3}] = \lim_{x \rightarrow 1} [x^2 + \frac{4}{5}] = 1$ و بنا به قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

بررسی سایر گزینه‌ها: تابع f و بنابراین $\sqrt{f}$ در $x = 1$ ممکن است دارای حد یا فاقد حد باشد. رابطه داده شده نتیجه می‌دهد f در همسایگی $x_0 = 1$ کراندار است و بنابراین $f(x)(x-1)^2$ ضرب صفر در کراندار و حد آن صفر است.

۶. تابع با ضابطه $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx+1}$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟ (ژئوفیزیک ۸۱)

(۱) $-\frac{1}{n}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{n}$ (۴) 1

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا ضابطه تابع را به دست می‌آوریم.

$$x \neq 0: \frac{nx}{nx+1} \sim \frac{nx}{nx} \rightarrow 1, \quad x = 0 \implies f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (0) = 0$$

پس $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و لذا فقط در $x = 0$ ناپیوسته است.

۷. اگر $f(x) = 2^{x-1} - 4$ ، نقاط M و N بر نمودار تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ از دو سمت نزدیک و نزدیک‌تر به محور y می‌شوند. فاصله دو نقطه حدی برابر است با: (ژئوفیزیک ۷۹)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 2 (۴) 4

حل: گزینه ۱ درست است. چون M و N به محور y یعنی خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند. پس طول آنها به صفر میل می‌کند و عرض آنها در حالت حدی برابر $m = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$ و $n = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)}$ است. پاسخ مسأله $|m-n|$ می‌باشد.

$$m = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^{x-1} - 4} = \frac{1}{2^{+\infty} - 4} = 0, \quad n = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^{x-1} - 4} = -\frac{1}{4} \implies |m-n| = \frac{1}{4}$$

۸. اگر $x \in [a, b]$ و $y = f(x)$ تابعی یک‌به‌یک و پیوسته و $f(a) < f(b)$ باشد آن‌گاه برای هر $x \in [a, b]$:

(آیاری وزه‌کشی ۸۰)

(۱) $f(x) < f(b)$ (۲) $f(x) > f(b)$ (۳) $f(x) < f(a)$ (۴) $f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون تابع f پیوسته و یک‌به‌یک است بنا به نکته ۳۲ در صفحه ۸۷ یکنوای اکید می‌باشد. با توجه به $f(a) < f(b)$ این تابع صعودی اکید بوده و لذا برای $a \leq x < b$ داریم $f(a) \leq f(x) < f(b)$.

۹. فرض کنید m, n اعداد طبیعی باشند، مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

(۱) $\frac{m-n}{mn}$ (۲) $\frac{m-n}{2}$ (۳) $\frac{n-m}{2}$ (۴) حد ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم.

عبارت = $\frac{m - mx^n - n + nx^m}{(1 - x^m)(1 - x^n)} = \frac{m - n + nx^m - mx^n}{(1 - x)(1 + \dots + x^{n-1})(1 - x)(1 + \dots + x^{m-1})}$

با توجه به اینکه $x \rightarrow 1$ پس $1 + \dots + x^{m-1} \rightarrow m$ و $1 + \dots + x^{n-1} \rightarrow n$ ولذا مخرج کسر هم ارز $m(1 - x)^2$ می باشد. حال از تغییر متغیر $x = 1 + t$ استفاده می کنیم تا $t \rightarrow 0$ و به کسر $\frac{m - n + n(1 + t)^m - m(1 + t)^n}{mnt^2}$ برسیم. پس باید مک لورن صورت کسر را توان ۲ نوشته شود که با استفاده از بسط دو جمله ای یا فرمول (۱۲) در صفحه ۷۰ داریم:

$$\begin{aligned} \text{صورت کسر} &\sim m - n + n(1 + mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2) - m(1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2) \\ &\sim \frac{nm}{2}(m-1-n+1)t^2 = \frac{mn}{2}(m-n)t^2 \\ \text{بنابراین} \quad \text{حد} &= \frac{\frac{mn}{2}(m-n)}{mn} = \frac{m-n}{2} \end{aligned}$$

تذکرہ ۱. بہ حل همین سؤال درست ۴۶ در صفحہ ۲۳۱، با قاعدہ هویتال نیز مراجعہ کنید.

هرگاه تابع f در x پیوسته باشد و در همسایگی دلخواه از x مقادیر مثبت و منفی بگیرد، آنگاه:

(ریاضی ۷۹)

$$f(x_0) < 0 \quad (1)$$

$$f(x_0) > 0 \quad (2)$$

$$f(x_0) = 0 \quad (3)$$

(۴) اطلاعات فوق برای مشخص نمودن علامت $f(x_0)$ کافی نیست.

حل: گزینه ۳ درست است. باید $f(x_0) = 0$. برای اثبات این موضوع با توجه به برهان خلف، فرض می‌کنیم $f(x_0) \neq 0$. پس $f(x_0) > 0$ یا $f(x_0) < 0$. ابتدا حالت $f(x_0) > 0$ را در نظر می‌گیریم. چون f در x_0 پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ و لذا بنا به قضیه ۵ در صفحه ۶۴ همسایگی مناسبی حول x_0 موجود است که برای هر x در آن همسایگی داشته باشیم $f(x) > 0$ اما این موضوع با فرض تست تناقض دارد. به طور مشابه حالت $f(x_0) < 0$ نیز نادرست است و لذا $f(x_0) = 0$.

۱۱. اگر $a, b \geq 0$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ برابر است با:

$$b \text{ (१)} \qquad ab \text{ (३)} \qquad \sqrt{ab} \text{ (२)} \qquad \frac{a+b}{2} \text{ (१)}$$

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت 1^∞ است. با توجه به نکته ۲۰ در صفحه ۷۸ داریم:

$$\text{عبارت} \sim e^{\frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right)} = e^{\frac{a^x + b^x - 2}{2x}} \sim e^{\frac{x \ln a + x \ln b}{2x}} = e^{\frac{1}{2} \ln ab} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

۱۲. مقدار a برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{-x+2} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته از چپ باشد، چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۰

حل: گزینه ۱ درست است. باید $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a$ چون $\frac{x^2+2x}{-x+2} \rightarrow 3$ پس باید بررسی کنیم که حد 3^+ یا 3^- است. چون $x \rightarrow 1^-$

$$x^2 + 2x \rightarrow 3^-, -x + 2 \rightarrow 1^+ \Rightarrow \text{کسر} \rightarrow \frac{3^-}{1^+} = 3^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [3^-] = 2$$

۱۳. عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{\sin x} - 1) \ln(1 + \sin 2x)}{x \tan^{-1} x}$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2 \ln 2$ (۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۱۴ در صفحه ۶۹ داریم $2^{\sin x} - 1 \sim (\sin x) \ln 2$

$$\sim \frac{\sin x \times \ln 2 \times \sin 2x}{x \cdot x} \sim \frac{2x^2 \ln 2}{x^2} \rightarrow 2 \ln 2$$

۱۴. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{(1+x^2)^3 - 1}$ برابر است با:

$$(1) -\frac{1}{6} \quad (2) \frac{1}{6} \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) -\frac{3}{2}$$

حل: گزینه ۱ درست است. مخرج کسر هم ارز $3x^2$ است و لذا بسط صورت را تا x^2 می‌نویسیم.

$$\frac{\ln(1+x) - \sin x}{(1+x^2)^3 - 1} \sim \frac{(x - \frac{1}{6}x^3) - (x + 0x^2)}{3x^2} = \frac{-x^2}{6x^2} \rightarrow -\frac{1}{6}$$

(ریاضی ۷۷)

۱۵ اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ پیوسته باشد، آنگاه:

- (۱) برد f اعداد طبیعی است.
 (۲) f یک به یک است.
 (۳) f پوشاست.
 (۴) f یک تابع ثابت است.
- حل: گزینه ۴ درست است. ثابت می‌کنیم:

اگر تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{Q}$ پیوسته باشد، تابعی ثابت خواهد بود.

با برهان خلف، اگر f تابع ثابت نباشد آنگاه حداقل دو عدد متمایز q_1, q_2 در برد آن موجودند. یعنی اعداد مناسب $t_1, t_2 \in D_f$ موجود هستند که $f(t_1) = q_1, f(t_2) = q_2$. می‌دانیم بین هر دو عدد گویا، عددی گنگ موجود است. پس عدد گنگ p را بین q_1 و q_2 انتخاب می‌کنیم. چون f پیوسته و p بین $q_1 = f(t_1)$ و $q_2 = f(t_2)$ قرار دارد بنا به خاصیت مقدار میانی عدد $t \in D_f$ موجود است که $f(t) = p$ و لذا p در برد f است که چون این عدد گویا نیست و برد f بنا به فرض سؤال اعداد گویا است، امکان پذیر نمی‌باشد. این تناقض نشان می‌دهد که f تابعی ثابت است.

تذکره ۲. در استدلال بالا نیازی به پیوستگی f نیست و فقط کافی است f در خاصیت مقدار میانی صدق نماید.

۱۶. تعداد مجانب‌های افقی و قائم برای معکوس تابع $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ به ترتیب عبارتست از:

$$(1) 3 \text{ و } 1 \quad (2) 3 \text{ و } 2 \quad (3) 3 \text{ و } 3 \quad (4) 1 \text{ و } 3$$

حل: گزینه ۱ درست است. برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم پس

مجانِب‌های آن نیز نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌شوند. یعنی برای دست آوردن معادله مجانب‌های f^{-1} کافی است مجانب‌های f را محاسبه و در آن x را به y و y را به x تبدیل کنیم بنابراین مجانب‌های افقی f به قائم برای f^{-1} و مجانب‌های قائم f به مجانب‌های افقی برای f^{-1} فرستاده می‌شوند. مجانب‌های قائم f خطوط $x = 2, \pm 1$ و مجانب افقی f خط $y = 0$ است پس f^{-1} دارای سه مجانب افقی به معادله $y = 2, \pm 1$ و یک مجانب قائم به معادله $x = 0$ است.

۱۷. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x + \sin x}$ برابر است با: (۱) ۱ (۲) صفر (۳) بی‌نهایت (۴) حد ندارد. (مهندسی پزشکی - آزاد ۷۷)

حل: گزینه ۴ درست است. کسر را به صورت $\frac{\sin x}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{x \sin x}{x(1 + \frac{\sin x}{x})}$ می‌نویسیم. چون $\sin x$ کراندار است پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ و لذا حد مورد نظر برابر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ است که بین -1 و 1 نوسان کرده و لذا حد ندارد.

۱۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(-\sin 2x)}$ کدام است؟ (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲ (ژئوفیزیک ۸۰ و ۸۱)

حل: گزینه ۳ درست است. حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. برای استفاده از هم‌ارزی از تغییر متغیر $x = -t + \pi$ استفاده می‌کنیم که $t \rightarrow 0^+$:

$$\text{کسر} = \frac{\ln \sin(-t + \pi)}{\ln(-\sin(-2t + 2\pi))} = \frac{\ln \sin(t)}{\ln \sin(2t)} \sim \frac{\ln t}{\ln 2t} \sim \frac{\ln t}{\ln 2 + \ln t} \sim \frac{\ln t}{\ln t} \rightarrow 1$$

تذکره ۲. حل همین سؤال با قاعده هوییتال و استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ساده‌تر است.

۱۹. مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & [x] \text{ زوج} \\ |x - [x + 1]| & [x] \text{ فرد} \end{cases}$ کدام است؟

(تأسیسات آبیاری - آزاد ۸۲)

(۱) $\emptyset$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۴) $\mathbb{Z}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به تست ۲۱ در صفحه ۴۸، دوره تناوب هر ضابطه $T = 1$ و با توجه به شرطی که برای هر ضابطه اعمال شده است دوره تناوب تابع $T = 2$ است. پس کافی است ناپیوستگی را در بازه‌ای به طول ۲ بررسی کنیم. در بازه $[0, 2]$ تابع $f(x)$ به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

این تابع بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است و بنابراین در $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود.

۲۰. عرض از مبدأ مجانب مایل نمودار پارامتری $x(t) = \frac{6t^2}{1+t^3}$ ، $y(t) = \frac{7t^2}{1+t^3}$ کدام است؟ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) فاقد مجانب مایل است.

حل: گزینه ۲ درست است. مجانب مایل وقتی می‌تواند رخ دهد که x و y به بی‌نهایت میل کنند و این فقط وقتی

می‌تواند رخ دهد که $-1 \rightarrow t$ در این صورت اگر $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد آنگاه:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{6t^2}{1+t^3}}{\frac{1+t^3}{6t}} = \lim_{t \rightarrow -1} t = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{6t^2}{1+t^3} + \frac{6t}{1+t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6(t+t^3)}{1+t^3} = -2$$

پس $y = -x - 2$ معادله مجانب مایل و عرض از مبدأ آن $b = -2$ است.

۲۱. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) تابع f همواره علامت مثبت دارد.

(۲) تابع $f(x) - 2$ نزدیک $x = 0$ علامت مثبت دارد.

(۳) در یک همسایگی محذوف $x = 0$ تابع f از یک بیشتر است.

(۴) تابع f در یک همسایگی محذوف $x = 0$ از $\frac{3}{4}$ کمتر است.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $0 < 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1)$ پس بنا به قضیه ۵ در صفحه ۶۴ در یک همسایگی

محذوف $x = 0$ تابع $f(x) - 1$ هم علامت $L = 1$ یعنی مثبت است پس $f(x) > 1$.

بررسی سایر گزینه‌ها: چون حد f در صفر برابر ۲ است در یک همسایگی محذوف $x = 0$ تابع f مثبت است یعنی

گزینه (۱) در حالت کلی درست نمی‌باشد. مثلاً تابع $f(x) = x + 2$ دارای حد ۲ است اما همواره مثبت نمی‌باشد.

در گزینه (۲) چون $0 \rightarrow f(x) - 2$ پس در مورد علامت f در $x = 0$ نمی‌توان قضاوت کرد. در گزینه (۴) داریم

$$0 < \frac{1}{4} \rightarrow f(x) - \frac{3}{4} \rightarrow f(x) - \frac{3}{4} > 0 \text{ داریم } x = 0 \text{ ولذا } f(x) - \frac{3}{4} \text{ از } \frac{3}{4} \text{ بیشتر است.}$$

۲۲

دایره به مرکز O و شعاع R مفروض است. از مرکز آن دو خط به دایره طوری وصل می‌کنیم که دایره را در

A و B قطع کرده و زاویه مرکزی $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ایجاد نماید. از نقطه O به وسط کمان AB وصل کرده و آنرا C

می‌نامیم. اگر S و S' به ترتیب برابر مساحت قطعه $ABCA$ و مساحت مثلث ABC باشد، حاصل $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{S'}$ چقدر

است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

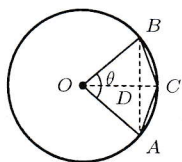
$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به شکل روبرو مساحت مثلث OAB برابر

$$\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \theta = \frac{R^2}{2} \sin \theta \text{ است.}$$



مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع OAB

$$= \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} R^2 \sin \theta = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

اگر نقطه تقاطع OC با AB را D بنامیم، با توجه به اینکه $OD = R \cos \frac{\theta}{2}$ ارتفاع مثلث ABC برابر

$$CD = OC - OD = R - R \cos \frac{\theta}{2}$$

و قاعده آن $AB = 2BD = 2R \sin \frac{\theta}{2}$ است ولذا $S' = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} \left(2R \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(R - R \cos \frac{\theta}{2} \right)$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S}{S'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r} R^2 (\theta - \sin \theta)}{R^2 \sin \frac{\theta}{r} \left(1 - \cos \frac{\theta}{r}\right)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)}{r \times \frac{\theta}{r} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\theta}{r}\right)^2\right)} = \frac{4}{3}$$

۲۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) e^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $+\infty$ (هسته‌ای ۸۲)

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $0 \times \infty$ است اما:

$$\sin x e^{\frac{1}{x}} \sim x e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{y = \frac{1}{x}} \frac{e^y}{y} \xrightarrow{\text{قواعد رشد}} +\infty \quad (y \rightarrow +\infty)$$

۲۴. تابع f بر تمام مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است. کدام گزینه در مورد پیوستگی صحیح است؟

(ریاضی ۷۴)

(۱) از پیوستگی $|f|$ ، پیوستگی f نتیجه می‌شود. (۲) از پیوستگی f^2 ، پیوستگی f نتیجه می‌شود.
 (۳) از پیوستگی f^3 ، پیوستگی f نتیجه می‌شود. (۴) f پیوسته است اگر و تنها اگر f^2 پیوسته باشد.
 حل: گزینه ۳ درست است. تعریف کنید $g(x) = \sqrt[3]{x}$ در این صورت g در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است و
 $f(x) = \sqrt[3]{f^3(x)} = g(f^3(x))$ پس $f(x)$ ترکیب دو تابع پیوسته $f^3(x)$ و $g(x)$ و لذا پیوسته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

قرار دهید $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در این صورت $|f|$ و f^2 پیوسته ولی f ناپیوسته است.

۲۵. اگر $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\tan x}}$ $f(x)$ آن‌گاه حد چپ و راست f در $x = \frac{\pi}{2}$ به ترتیب کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)
 (۱) ۰ و ۱ (۲) ۰ و ۰ (۳) ۱ و ۱ (۴) ۱ و ۰
 حل: گزینه ۱ درست است.

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \tan x \rightarrow +\infty \quad (\text{زیرا } x \text{ در ربع اول است.}) \Rightarrow \text{حد} = \frac{1}{1 + 2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \tan x \rightarrow -\infty \quad (\text{زیرا } x \text{ در ربع دوم است.}) \Rightarrow \text{حد} = \frac{1}{1 + 2^{-\infty}} = 1$$

۲۶. با فرض $x > 1$ مقدار حد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[x] + [x^2] + \dots + [x^n]}{x^n}$ چقدر است؟ (ریاضی ۷۶)
 (۱) $\frac{x}{x-1}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{x(x+1)}{2}$ (۴) $+\infty$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به خواص جزء صحیح:

$$x - 1 < [x] \leq x, \quad x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2, \quad \dots, \quad x^n - 1 < [x^n] \leq x^n$$

$$\Rightarrow (x + x^2 + \dots + x^n) - n < [x] + \dots + [x^n] \leq x + x^2 + \dots + x^n$$

حال $x + x^2 + \dots + x^n$ مجموع جملات یک تصاعد هندسی و برابر $\frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$ است پس با تقسیم رابطه‌های بالا بر x^n داریم:

$$\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n} - \frac{n}{x^n} < \text{کسر} < \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^n - 1}{x^n}$$

چون $x > 1$ وقتی $n \rightarrow +\infty$ داریم $x^n \rightarrow +\infty$ و لذا $\frac{x^n - 1}{x^n} \rightarrow 1$ و $\frac{n}{x^n} \rightarrow 0$ پس عبارات دو طرف نابرابری به

$\frac{x}{x-1}$ میل می‌کند و لذا بنا به قضیه فشردگی حد برابر $\frac{x}{x-1}$ است.

(مکانیک ۷۵)

۲۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan 2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) ۰ (۳) موجود نیست (۴) $e^{\frac{2}{\pi}}$

حل: گزینه ۱ درست است. حالت 1^∞ است پس:

$$e^{(\tan 2x)(\tan x - 1)} = e^{f(x)} \sim \text{عبارت}$$

برای محاسبه حد عبارت ظاهر شده از فرمول $\tan 2x$ در صفحه ۲۳ استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} (\tan x - 1) = \frac{2 \tan x (\tan x - 1)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{2 \tan x}{-(1 + \tan x)} \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow \text{حد} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

تذکر ۳. برای حل این سؤال با استفاده از قاعده هوییتال به تست ۷۰ در صفحه ۱۷۱ مراجعه کنید.

۲۸. اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و $g(x) = 2^x$ تعداد خط‌های مجانب نمودار $f \circ g$ کدام است؟ (آیاری وزه‌کشی ۸۲)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. مخرج $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ $h(x) = f \circ g(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ صفر نمی‌شود، لذا تابع $h(x)$ فاقد مجانب قائم است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \sim \frac{2^x}{2^x} \rightarrow 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{2^{-\infty} - 1}{2^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

پس نمودار فقط دو مجانب افقی دارد.

(سیستم ۷۹)

۲۹. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) فاقد حد است.

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$ و حاصل $2^{\pm\infty}$ اعداد متفاوتی هستند پس باید حد چپ و راست بررسی شود. با توجه به نکته ۱۰ در صفحه ۶۵:

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{کسر} \rightarrow \frac{1 + 2^{-\infty}}{3 + 2^{-\infty}} = \frac{1 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{کسر} \rightarrow \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}} \sim \frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

(ژئوفیزیک ۷۶)

۳۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8^{\sqrt{x}} - 1}{3^{\sqrt{x}} - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{\ln 3}{\ln 8}$ (۴) $\log_3 8$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۱۴ در صفحه ۶۹:

$$\sim \frac{\sqrt{x} \ln 8}{\sqrt{x} \ln 3} \rightarrow \frac{\ln 8}{\ln 3} = \log_3 8$$

۳۱. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + [x^2] + \dots + [x^{100}])$ کدام است؟ (ریاضی ۸۲)

- (۱) -50 (۲) 0 (۳) 50 (۴) 100

حل: گزینه ۱ درست است. داخل براکت به صفر میل می‌کند پس باید نوع صفر را مشخص کنیم.

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^{2n} \rightarrow 0^+ \Rightarrow [x^{2n}] = 0 \quad \text{و} \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^{2n+1} \rightarrow 0^- \Rightarrow [x^{2n+1}] = -1$$

بنابراین حد توان‌های زوج صفر و توان‌های فرد -1 است پس:

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + [x^2] + \dots + [x^{100}]) = \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{50 \text{ تا}} = -50$$

۳۲. حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$ کدام است؟ (انرژی - آزاد ۸۲)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) 0 (۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به x^2 در مخرج باید $e^{\sin x}$ را تا ضرب x^2 بسط داد.

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2} x^2 - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

۳۳. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

حل: گزینه ۲ درست است. تعداد نقاط برخورد $\cos x$ و $x^2 + 1$ را به دست می‌آوریم. دقت کنید که $x^2 + 1 \geq 1$ و

$\cos x \leq 1$ پس فقط در نقطه‌ای که هر دو تابع برابر یک باشند یعنی در $x = 0$ دو نمودار با هم برخورد می‌کنند.

بنابراین f فقط در $x = 0$ پیوسته است.

۳۴. $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{m+n} & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. این تابع در کجا پیوسته است؟

(ریاضی ۷۶)

- (۱) تنها در اعداد اصم (۲) تنها در اعداد گویا (۳) تنها در صفر (۴) هیچ جا

حل: گزینه ۱ درست است. تابع f در هیچ نقطه گویا پیوسته نیست. زیرا اگر $x_0 \in (0, 1)$ عددی گویا باشد، اعداد

طبیعی m و n موجودند که $x_0 = \frac{m}{n}$ و در این صورت $f(x_0) = \frac{1}{m+n}$ ولی اگر دنباله دلخواهی از اعداد گنگ را

طوری در نظر بگیریم که به x_0 میل کند، حد تابع f روی اعضای این دنباله صفر است پس دنباله در x_0 ناپیوسته (و

ضمناً فاقد حد) است.

اگر x_0 عددی اصم در بازه $(0, 1)$ باشد ادعا می‌کنیم f در x_0 پیوسته است.^۲ برای اثبات این موضوع نشان می‌دهیم

برای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود است که:

$$(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \stackrel{f(x_0)=0}{\Rightarrow} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)$$

ابتدا برای $\epsilon > 0$ داده شده $m \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب کنیم که $\frac{1}{m} < \epsilon$ (کافی است $m = [\frac{1}{\epsilon}] + 2$). تعریف می‌کنیم:

^۲ استدلال پیوسته بودن تابع برای اعداد اصم کمی دور از ذهن است. در واقع این سؤال در درس آنالیز که یکی از دروس تخصصی رشته ریاضی است، مطرح شده و می‌توانید از آن صرف‌نظر کنید.

$$A_m = \left\{ \frac{p}{q} : 2 \leq q \leq m, 1 \leq p \leq m-1, p < q \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m} \right\}$$

حال $\delta > 0$ را طوری می‌گیریم که اعداد گویای با مخرج کمتر یا مساوی m یعنی اعضای مجموعه A_m در همسایگی متقارن به مرکز x_0 و شعاع δ واقع نباشد در این صورت برای هر x که $|x - x_0| < \delta$ چنانچه $x \notin \mathbb{Q}$ داریم $f(x) = 0$ و لذا $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$ و اگر $x \in \mathbb{Q}$ آنگاه $x = \frac{n'}{m'}$ که $m' > m$ و لذا $f(x) = \frac{1}{m' + n'} < \frac{1}{m}$ و لذا $|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{m' + n'} < \frac{1}{m} < \epsilon$ پیوسته است.

خودآزمایی ۲ - سطح ۱

۱. در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x < 4 \\ 5x+k & x \geq 4 \end{cases}$ چنانچه حد $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه مقدار k برابر است با: (سیستم - آزاد ۸۲)

(۱) -۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

۲. مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]^3 - x^3}{[x] - x}$ برابر است با: (ریاضی ۷۴)

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[-x]^2 + 1}{1 - x^2}$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sech} x}{1 - \cosh x}$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.

۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \coth x^2$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.

۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sech}^{-1} x$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.

۷. حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{x^3}$ برابر است با: (معدن - آزاد ۸۱)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۸. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh^{-1}(x^2 - x)}{\sqrt{1 - 2x} - 1}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2 - x^3}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۱۲

۱۰. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}$ برابر است با: (MBA ۸۱)

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) حد وجود ندارد.

۱۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1+x} [x] \frac{\sin x - \tan x}{x}$ کدام است؟ (آمار ۷۶)

(۱) وجود ندارد (۲) صفر (۳) ۱ (۴) e

۱۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{\sin^{\frac{1}{5}} x \times \sec x} \left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟ (مکانیک - آزاد ۷۵)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ∞

۱۳. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$ عبارت است از:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۳

۱۴. اگر $f(x) = \frac{(\sin x)^\delta \ln x}{(1+x^\delta)x^\gamma}$ و $x > 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $-\infty$ (۳) $+\infty$ (۴) وجود ندارد.

۱۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x+x^2})$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-\infty$

۱۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2^x + 3^x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ برابر است با:

(۱) $\ln \sqrt{3}$ (۲) $\ln \sqrt{2}$ (۳) $\ln 3$ (۴) $\ln 2$

۱۷. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^t}}{t^2}$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{e}$ (۴) $+\infty$

۱۸. اگر $|f(x) + 7| < \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x-1}$ وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x)$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) ۷ (۳) ۰ (۴) -۷

۱۹. حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) $+\infty$ (۴) -۱

۲۰. حد $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} \right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۲۱. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x (\cot x - \cot 3x)$ برابر است با:

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۲۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \csc x \right)$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ∞

۲۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ∞

۲۴. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x+5} - \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x+1} \right)$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۲۵. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) ∞

۲۶. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cosh x^2 + \sinh x^2)^{\frac{1}{x^2}}$ برابر است با:

(۱) e (۲) $\sqrt{e}$ (۳) ∞ (۴) وجود ندارد.

۲۷. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sinh 4x - \cosh x)^{\frac{1}{x+1}}$ برابر است با:

- (۱) e (۲) e^2 (۳) e^4 (۴) وجود ندارد.

۲۸. حد عبارت $(1 + \frac{x}{a})^a$ وقتی a به $+\infty$ میل می کند، کدامیک از مقادیر زیر است؟ (عمران، کامپیوتر ۷۲)

- (۱) ۱ (۲) e^x (۳) x^a (۴) $+\infty$

۲۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

- (۱) $\sqrt{e}$ (۲) $\frac{2}{e}$ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

۳۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{5}{x}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

- (۱) e^{-1} (۲) e^{10} (۳) e^{-5} (۴) e^5

۳۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) e^2

۳۲. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{-2x}$ برابر است با: (مواد ۷۶)

- (۱) e (۲) e^{-2} (۳) e^2 (۴) e^4

۳۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{2x}$ کدام است؟ (هواشناسی کشاورزی ۷۶)

- (۱) e (۲) e^2 (۳) e^3 (۴) e^6

۳۴. c را به قسمی بیابید که $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$ (مکانیک ۷۲، معماری کشتی ۸۱)

- (۱) $c = \ln 4$ (۲) $c = 2$ (۳) $c = \ln 2$ (۴) هیچکدام

۳۵. مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ برابر است با: (عمران ۷۴، ژئوفیزیک ۷۷، آمار ۸۱)

- (۱) $e^{\frac{1}{2}}$ (۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ (۳) e (۴) e^{-1}

۳۶. حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$ برابر است با: (ژئوفیزیک - آزاد ۸۱)

- (۱) -۱ (۲) ∞ (۳) ۱ (۴) ۰

۳۷. $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$ کدام است؟ (فیزیک پزشکی ۸۱)

- (۱) فقط $y = 1$ (۲) $y = 1$ و $x = 0$ (۳) $y = 1$ و $x = -1$ (۴) فقط $x = 0$

۳۸. تعداد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x+3}{|x|-1}$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۹. $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟ (عمران - آزاد ۸۰)

- (۱) $y = 1$ و $y = -1$ (۲) $y = x$ و $y = -x$ (۳) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (۴) $y = x + 1$

۴۰. اگر تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 12}{x - 2}$ پیوسته باشد، $f(2)$ کدام است؟ (آمار ۷۷)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

(آمار ۸۲)

۴۱. کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (۲) & \frac{\sin x}{x} \quad (۱) \\ & \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (۴) & \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۳) \end{aligned}$$

۴۲. شرط پیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$ بر $\mathbb{R}$ ، وجود کدام مقدار برای $f(0)$ است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی، صنایع غذایی ۷۷)

$$\begin{aligned} & 0 \quad (۱) & \frac{1}{2} \quad (۲) & 1 \quad (۳) & 2 \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۳. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} \right| \sin x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟ (هوافضا ۸۱)

$$\begin{aligned} & -1 \quad (۱) & 0 \quad (۲) & 1 \quad (۳) & ۴ \text{ هیچ مقدار} \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۴. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نظر بگیرید. مجموعه نقاط پیوستگی این تابع کدام است؟ (ریاضی ۷۴)

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} - \{1\} \quad (۱) & \mathbb{R} - \{-1\} \quad (۲) & \mathbb{R} \quad (۳) & \mathbb{R} - \{0\} \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۵. تابع $f(x) = (x-1)[x]$ در فاصله $[0, 2]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

(صنایع غذایی، مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

$$\begin{aligned} & 0 \quad (۱) & 1 \quad (۲) & 2 \quad (۳) & 3 \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۶. تابع $x \neq 0$ و $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2kx}{1-kx}$ مفروض است. $f(0)$ چه مقدار باشد تا تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؟

(فیزیک پزشکی ۸۱)

$$\begin{aligned} & 0 \text{ صفر} \quad (۱) & 1 \quad (۲) & -2 \quad (۳) & 2 \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۷. اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، کدام یک از روابط زیر وجود لااقل یک ریشه را برای f تضمین می‌کند؟

(تکنولوژی نساجی ۸۲)

$$\begin{aligned} & f(a)f(b) < 0 \quad (۱) & f(a) = f(b) \quad (۲) & f(a)f(b) > 0 \quad (۳) & f(a) \neq f(b) \quad (۴) \end{aligned}$$

۴۸. در مورد ریشه‌های حقیقی $x^2 + 2x + c = 0$ که در آن c مقدار ثابت است، کدام گزینه صحیح است؟

(آمار ۸۱)

(۱) ریشه حقیقی ندارد. (۲) فقط سه ریشه حقیقی دارد.

(۳) فقط یک ریشه حقیقی دارد. (۴) فقط پنج ریشه حقیقی دارد.

۴۹. اگر $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ پیوسته باشد، کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (آمار ۷۹)

(۱) $f(x) - x = 0$ حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد. (۲) $f(x) - x = 0$ ریشه‌ای در $[a, b]$ ندارد.

(۳) $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در $[a, b]$ دارد. (۴) $f(x) = 0$ ریشه‌ای در $[a, b]$ ندارد.

۵۰. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 5x & x \text{ گویا} \\ x^2 - 6 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟ (هسته‌ای ۸۰)

$$\begin{aligned} & 0 \quad (۱) & 1 \quad (۲) & 2 \quad (۳) & ۴ \text{ تعداد نامتناهی} \quad (۴) \end{aligned}$$

خودآزمایی ۲ - سطح ۲

۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{4x-1}{x+1}} - x \sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \right)$ برابر است با:

(۱) -۱	(۲) $-\frac{7}{2}$	(۳) $-\frac{7}{4}$
--------	--------------------	--------------------
۲. حد راست تابع $f(x) = \left(\operatorname{sech} \frac{1}{x} \right)^{[2x]}$ در $x = 0$ برابر است با:

(۱) e^{-2}	(۲) e^{-1}	(۳) e^{-4}
--------------	--------------	--------------
۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} [4x] \left[\frac{2}{x} \right]$ برابر است با:

(۱) ۴	(۲) ۳	(۳) ۸
-------	-------	-------
۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \tanh^{-1} x$ برابر است با:

(۱) e	(۲) $+\infty$	(۳) $-\infty$
---------	---------------	---------------
۵. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \ln x \right)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

(۱) ۱	(۲) e	(۳) e^2
-------	---------	-----------
۶. نقطه برخورد مجانب‌های تابع $f(x) = x - \sqrt{x^2 - ax}$ برابر $(b, 1)$ است. b برابر است با:

(۱) -۱	(۲) ۰	(۳) -۲
--------	-------	--------
۷. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^{-1} x - \tanh^{-1} x - x}{x^5}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{5}$	(۲) $-\frac{5}{8}$	(۳) $-\frac{1}{4}$
-------------------	--------------------	--------------------
۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x+1}{2x^2+x} \right]$ برابر است با:

(۱) ۱	(۲) $\frac{1}{2}$	(۳) ۰
-------	-------------------	-------
۹. اگر تابع کراندار f فقط در نقطه $x_0 = 2$ دارای حد باشد، تابع $g(x) = (x^2 - |x|)f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

(۱) حداکثر ۳	(۲) حداکثر ۴	(۳) دقیقاً ۴
--------------	--------------	--------------
۱۰. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)(\ln \cos x)$ برابر است با:

(۱) ۰	(۲) $\frac{1}{4}$	(۳) $-\frac{1}{4}$
-------	-------------------	--------------------
۱۱. اگر $v = 5 + \ln x^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{v}}$ برابر است با:

(۱) e	(۲) ۱	(۳) e^2
---------	-------	-----------
۱۲. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ برابر است با:

(۱) ۰	(۲) e	(۳) $+\infty$
-------	---------	---------------

۱۳. مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} - x \right)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱۴. حد چپ تابع $f(x) = \left(\operatorname{sech} \frac{1}{x} \right)^{[2x]}$ در $x = 0$ برابر است با:

- (۱) e^{-2} (۲) e^2 (۳) صفر (۴) $+\infty$

۱۵. معادله مجانب افقی تابع $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $y = \frac{1}{4}$ (۲) $y = 1$ (۳) $y = \frac{1}{2}$ (۴) مجانب افقی ندارد.

۱۶. اگر $f(x) = [\cos(2\pi x)] + (-1)^{[4x]}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) -۲

۱۷. اگر $0 < x < \frac{1}{2}$ و $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x^2}}$ و تابع f در نقطه صفر پیوسته باشد $f(0)$ کدام است؟

(فیزیک پزشکی ۸۲)

- (۱) e^2 (۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ (۳) $e^{\frac{1}{2}}$ (۴) e^{-2}

۱۸. حد راست تابع $f(x) = \sqrt[4]{x^2 \tan \frac{1}{x^2}}$ در $x = 0$ برابر است با

- (۱) وجود ندارد. (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۱۹. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+\alpha}} - x \right) = 2$ ، α برابر است با:

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) -۸ (۴) ۶

۲۰. مجانب مایل نمودار پارامتری $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t}{t + 1} \end{cases}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (۱, ۱) (۳) (۲, ۱) (۴) (۰, ۰)