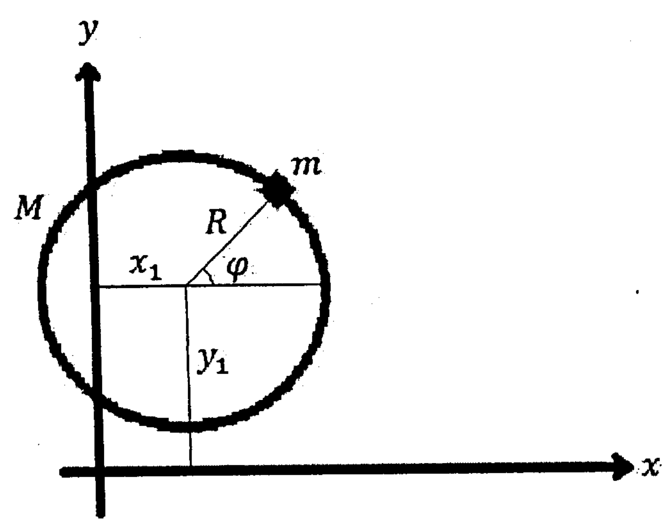
زمان پاسخگویی: ۳۰۰ دقیقه		المپیاد: فیزیک
تاریخ آزمون: ۹۳/۶/۱۶		سوالات امتحان: نهایی تئوری۲
تعداد مسائل : ۴ مسئله	باشگاه دانش پژوهان جوان	نام : علی
سوالات ۹ صفحه در ۵ برگه		نام خانوادگی : [illegible]

مساله) ۶

حلقه‌ای نازک به جرم M و شعاع R داریم که آزادانه در فضای بدون اصطکاک و بدون گرانشی قرار دارد. دانه‌ی تسبیحی به جرم m روی حلقه قرار دارد. فرض کنید بین حلقه و دانه‌ی تسبیح نیز اصطکاکی وجود ندارد. مبدا مختصات ساکنی انتخاب می‌کنیم و مختصات مرکز حلقه را با x_1 و y_1، مختصات دانه‌ی تسبیح را با x_2 و y_2 و زاویه‌ی دانه‌ی تسبیح با راستای محور افقی را φ می‌گیریم. در لحظه‌ی $t = 0$ حلقه ساکن است و مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد. در این حالت $\varphi = 0$ است. در یک لحظه ضربه‌ای به دانه‌ی تسبیح وارد می‌کنیم تا با سرعت v_0 در جهت محور مثبت y شروع به حرکت کند. در اثر این ضربه حلقه سرعت نمی‌گیرد.



آ) با نوشتن معادلات حرکت انتقالی برای حلقه و دانه، φ را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله بیابید.

(۱ نمره)

ب) اندازه‌ی نیروی عمود بر سطح وارد بر حلقه را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله حساب کنید.(۲ نمره)

پ) $x_1(t)$، $y_1(t)$، $x_2(t)$ و $y_2(t)$ را بیابید. (۲ نمره)

ت) مسیر حرکت مرکز حلقه و دانه‌ی تسبیح را به طور کیفی رسم کنید. (۲ نمره)

ث) با توجه به جواب قسمت‌های قبل می دانیم حرکت در راستای افقی تکرار شونده است. دوره‌ی تناوب آن چقدر است و در یک دوره‌ی تناوب مرکز حلقه چه مسافتی را طی می کند؟(۱ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مساله) ۶

حال فرض کنید اصطکاک بین حلقه و جرم وجود دارد. ضریب اصطکاک μ است. حرکت را تا زمانی در نظر می‌گیریم که دانه و حلقه نسبت به هم می‌لغزند.

ج) با نوشتن دوباره‌ی معادلات حرکت برای حلقه و دانه معادله‌ای برای φ بدست بیاورید و با حل آن φ را بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله بیابید.(۳,۵ نمره)

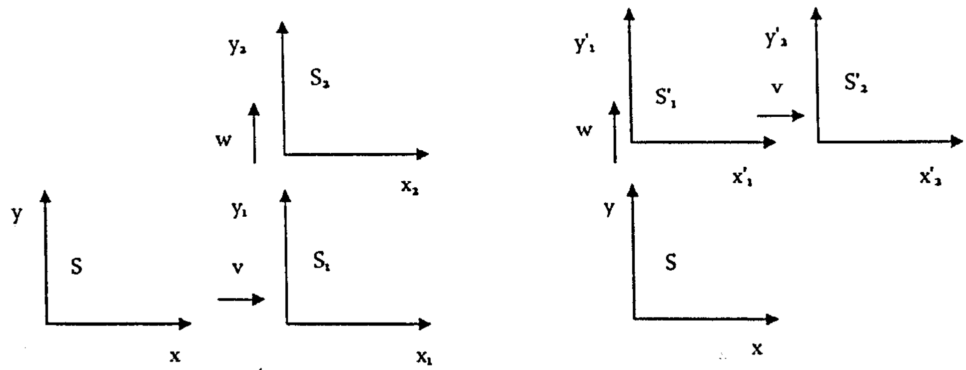
چ) اندازه‌ی نیروی عمود بر سطح وارد بر حلقه را در این حالت بر حسب زمان و دیگر پارامترهای مسئله حساب کنید.(۱,۵ نمره)

ح) حال فرض کنید μ کوچک است. جواب قسمت‌های ج و چ را تا مرتبه‌ی اول μ بازنویسی کنید. (۲ نمره)

طرح از آقای زوارکی

ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله) ۷



الف   ب

شکل ۱: بخش‌های الف و ب

<u>تبدیل لورنتز در پایان سوال آمده است.</u>

<u>بخش اول:</u>

سه دستگاه S، S_1 و S_2 را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۱ را ببینید. دستگاه S_1 با سرعت v در جهت x نسبت به دستگاه S حرکت می‌کند. دستگاه S_2 با سرعت w در جهت y_1 نسبت به دستگاه S_1 حرکت می‌کند.

الف) (۱.۵نمره) رویدادی با مختصات (t, x, y) در دستگاه S در نظر بگیرید. مختصات این رویداد در دستگاه S_2 را بر حسب مختصات در دستگاه S و سرعت‌ها بنویسید. این مختصات را (t_2, x_2, y_2) بنامید.

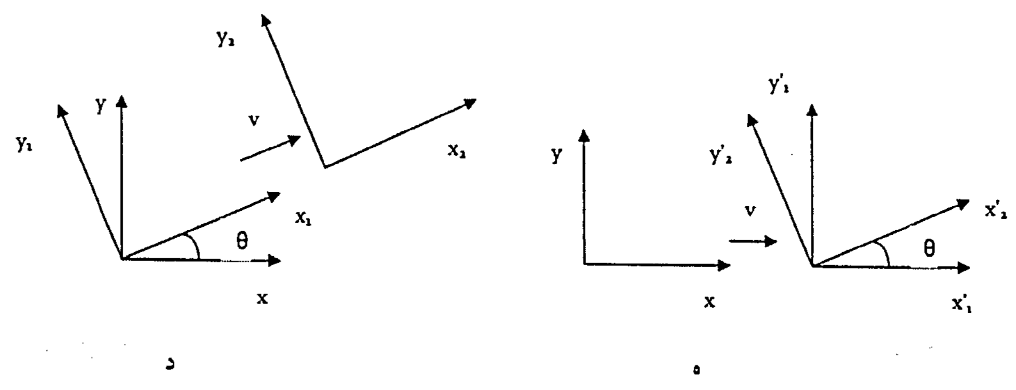
سه دستگاه S، S'_1 و S'_2 را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۱ را ببینید. دستگاه S'_1 با سرعت w در جهت y نسبت به دستگاه S حرکت می‌کند. دستگاه S'_2 با سرعت v در جهت x'_1 نسبت به دستگاه S'_1 حرکت می‌کند.

ب) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات (t, x, y) در دستگاه S در نظر بگیرید. مختصات این رویداد در دستگاه S'_2 را بر حسب مختصات در دستگاه S و سرعت‌ها بنویسید. این مختصات را (t'_2, x'_2, y'_2) بنامید.

ج) (۲ نمره) اختلاف آنچه در بخش‌های الف) و ب) به دست آوردید $(t'_2 - t_2, x'_2 - x_2, y'_2 - y_2)$ را تا رتبه‌ی دوم از سرعت‌ها بسط دهید. فرض کنید $\frac{v}{c}$ و $\frac{w}{c}$ هم رتبه هستند. تبدیل بین دستگاه S_2 و S'_2 را تا رتبه‌ی دوم از

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مساله ۷)



شکل ۲: بخش‌های د و ه

$\frac{v}{c}$ و $\frac{w}{c}$ بنویسید. این تبدیل چه تبدیلی است؟

بخش دوم:

سه دستگاه S، S_1 و S_2 را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۲ را ببینید. دستگاه S_1 نسبت به دستگاه S حول محور z به اندازه‌ی θ چرخیده است. دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 و در جهت محور x_1 با سرعت v حرکت می‌کند.

د) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات (t, x, y) در دستگاه S در نظر بگیرید. مختصات آن در دستگاه S_2 را بر حسب مختصات در دستگاه S و پارامترهای v و θ حساب کنید. این مختصات را (t_2, x_2, y_2) بنامید.

سه دستگاه S، S'_1 و S'_2 را در نظر بگیرید که در لحظه‌ی صفر مبداهای آن‌ها روی هم قرار دارد. شکل ۲ را ببینید. دستگاه S'_1 نسبت به دستگاه S با سرعت v در جهت محور x حرکت می‌کند. دستگاه S'_2 نسبت به دستگاه S'_1 به اندازه‌ی θ حول محور z چرخیده است.

ه) (۱.۵ نمره) رویدادی با مختصات (t, x, y) در دستگاه S در نظر بگیرید. مختصات آن در دستگاه S_2 را بر حسب مختصات در دستگاه S و پارامترهای v و θ حساب کنید. این مختصات را (t'_2, x'_2, y'_2) بنامید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مساله) ۷

و) (۲ نمره) اختلاف آنچه در بخش‌های د) و ه) به دست آوردید $(t'_2 - t_2, x'_2 - x_2, y'_2 - y_2)$ را تا رتبه‌ی دوم از v و θ بسط دهید. فرض کنید $\frac{v}{c}$ و θ هم رتبه هستند. تبدیل بین دستگاه S_2 و S'_2 را تا رتبه‌ی دوم از $\frac{v}{c}$ و θ بنویسید. این تبدیل چه تبدیلی است؟

تبدیل لورنتز:

اگر دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت v در جهت x در حرکت باشد تبدیل بین دو دستگاه چنین است:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$

$$y' = y \tag{2}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \tag{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

طرح از آقای مهیایه

ادامه سوالات در صفحه بعد

مساله ۸)

دو فرستنده‌ی A و B را در نظر بگیرید. فرستنده‌ی A در مبدأ مختصات ناظر O قرار دارد و فرستنده‌ی B، در دستگاه مختصات ناظر O، روی محور x و در $x = l$ واقع شده است. فرستنده‌ی A در زمان‌های $t = nT$، که n عددی طبیعی است، ذراتی به جرم m_A و انرژی نسبیتی E_A را تولید و در جهت محور x ارسال می‌کند. فرستنده‌ی B نیز در همان زمان‌های $t = nT$، ذراتی به جرم m_B انرژی نسبیتی E_B را تولید و در خلاف جهت محور x ارسال می‌کند. یک آشکار ساز که توانایی آشکار کردن هر دو نوع ذره را دارد، در مبدأ مختصات ناظر O' قرار دارد و با سرعت u در جهت $\hat{x}$ نسبت به دو فرستنده در حال حرکت است. یک لامپ در آشکارساز قرار دارد که آشکارساز هنگام دریافت ذرات از نوع A، در صورت خاموش بودن لامپ، آن را روشن می‌کند. همچنین در هنگام دریافت ذرات از نوع B، در صورت روشن بودن لامپ، آن را خاموش می‌کند. دو ناظر، زمانی که مبدأ مختصاتشان بر هم منطبق می‌شود، زمان‌هایشان را در $t = t' = 0$ تنظیم می‌کنند. در $t' = 0$، لامپ آشکارساز خاموش است. به مسئله در چارچوب نسبیت خاص پاسخ دهید.

الف) از دید ناظر O، آشکارساز در چه زمان‌هایی ذرات B را دریافت می‌کند؟ (۱ نمره)

ب) در نموداری که محور عمودی آن نشان دهنده‌ی خاموش یا روشن بودن لامپ و محور افقی، نشان دهنده‌ی زمان از دید ناظر O است، وضعیت لامپ را بر حسب زمان از دید ناظر O نشان دهید. مقادیر زمان‌های گذار را بر روی نمودار مشخص کنید. (۲ نمره)

پ) از دید ناظر O'، آشکارساز در چه زمان‌هایی ذرات B را دریافت می‌کند؟ (۱/۵ نمره)

ت) در نموداری که محور عمودی آن نشان دهنده‌ی خاموش یا روشن بودن لامپ و محور افقی، نشان دهنده‌ی زمان از دید ناظر O' است، وضعیت لامپ را بر حسب زمان از دید ناظر O' نشان دهید. مقادیر زمان‌های گذار را بر روی نمودار مشخص کنید. (۲ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مساله ۸)

حال فرض کنید ذرات A و B به ترتیب دارای عمرهای مشخص τ_A و τ_B هستند؛ به این معنی که از دید ناظری که ذرات نوع A (B) را در حال سکون می‌بینند، ذرات پس از گذشت زمان مشخص τ_A (τ_B) از زمان تولید توسط فرستنده‌ی A (B) به ذرات دیگری واپاشیده می‌شوند که دیگر توسط آشکارساز قابل مشاهده نیستند.

ث) با در نظر گرفتن فرض اضافه شده، نمودار بخش «ت» را مجدداً رسم کنید. در صورت لزوم، حالت‌های مختلف ممکن را در نظر بگیرید و شرط لازم برای رخ دادن هر حالت را بر حسب پارامترهای مسئله مشخص کنید. (۳/۵ نمره)

یادآوری: تبدیل لورنتز از دستگاه O به O′ با معادلات زیر داده می‌شود.

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$$

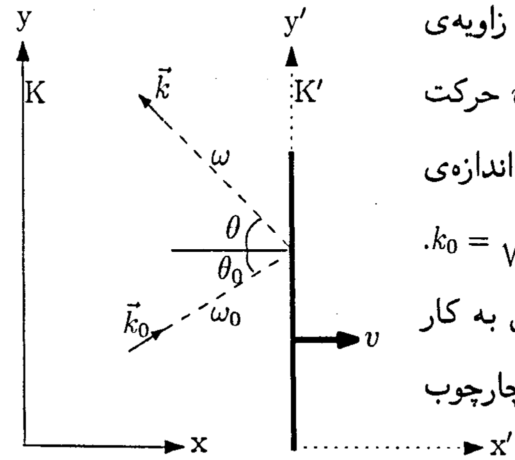
$$y' = y$$

$$z' = z$$

طرح از آقای اختراچیان

ادامه سوالات در صفحه بعد

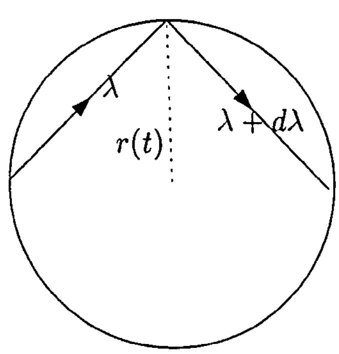
مساله ۹) آ) یک پرتو نور که در چارچوب مرجع K دارای بسامد زاویه‌ای ω_0 و بردار موج $\vec{k_0}$ است مطابق شکل با زاویه‌ی θ_0 به آینه‌ای که در جهت محور x با سرعت v حرکت می‌کند، می‌تابد. رابطه‌ی بین بسامد زاویه‌ای و اندازه‌ی بردار موج $\omega_0 = c\,k_0$ است که $k_0 = \sqrt{k_{0_x}^2 + k_{0_y}^2 + k_{0_z}^2}$. قوانین تابش و بازتابی که برای آینه‌ی ساکن به کار می‌بریم اکنون در دستگاه سکون آینه یعنی در چارچوب مرجع K' قابل کاربرد اند.



بسامد زاویه‌ای و بردار موج از یک چارچوب به چارچوب دیگر مانند یک چاربردار تبدیل می‌شوند که در انتهای سوال آمده است. زاویه‌ی بازتاب θ و بسامد زاویه‌ای ω پرتو را پس از بازتاب از روی آینه‌ی متحرک، در چارچوب مرجع K به دست آورید. (۴ نمره)

ب) جواب‌های قسمت آ) را تا مرتبه‌ی اول $\beta = v/c$ بنویسید. (۱ نمره)

پ) یک پوسته‌ی کروی مطابق شکل در نظر بگیرید که شعاع‌اش به آرامی و با سرعت $\frac{dr}{dt}$ افزایش می‌یابد. در نتیجه چنان که در قسمت قبل دیدیم یک پرتو نور در داخل پوسته، که در اثر برخورد به سطح متحرک پوسته بازتاب می‌شود طول موج‌اش $\lambda = 2\pi/k$ تغییر می‌کند. با استفاده از جواب قسمت ب)، $\frac{d\lambda}{dt}$ را بر حسب λ، $r(t)$ و $\frac{dr}{dt}$ بنویسید. (۲ نمره)



اکنون تابش گرمایی داخل کاواکی که برای راحتی آن را کره‌ای با دیواره‌های کاملاً بازتابان فرض می‌کنیم در نظر بگیرید. یک تحول بی‌دررو برگشت‌پذیر در نظر بگیرید که طی آن با افزایش شعاع کاواک حجم کاواک افزایش می‌یابد. مشخصه‌ی این تحول بی‌دررو برگشت‌پذیر این است که از رابطه‌ای که در قسمت قبل به دست آوردید می‌توانید استفاده کنید.

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مساله ۹)

می‌دانیم که تابش گرمایی داخل کاواک شامل همه‌ی طول موج‌ها است. اگر دمای دیواره‌ها و داخل کاواک T باشد $u(\lambda,T)d\lambda$ را به عنوان چگالی انرژی داخل کاواک که ناشی از تابش‌هایی با طول موج بین λ و $\lambda+d\lambda$ است تعریف می‌کنیم. آن بخشی از فشار داخل کاواک که مربوط به تابش‌های با طول موج بین λ و $\lambda+d\lambda$ است را با $P(\lambda,T)$ نشان می‌دهیم که رابطه‌اش با $u(\lambda,T)$ به صورت $P(\lambda,T)=\frac{1}{3}u(\lambda,T)d\lambda$ است.

ت) از توضیحات فوق استفاده کنید و تا جایی که امکان دارد رابطه‌ی $u(\lambda,T)$ را با λ و T به دست آورید. **(۳ نمره)**

راهنمایی: تبدیل $(\vec{k},\omega/c)$ از چارچوب مرجع K به $(\vec{k}',\omega'/c)$ در چارچوب مرجع K' که با سرعت v در راستای x نسبت به K حرکت می‌کند به صورت زیر است.

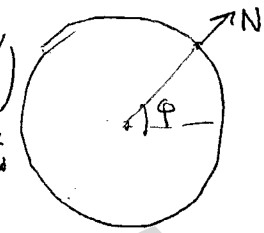
$$\begin{aligned} k'_x &= \gamma(k_x-\beta\omega/c)\\ k'_y &= k_y\\ k'_z &= k_z\\ \omega'/c &= \gamma(\omega/c-\beta k_x)\end{aligned}$$

طرح از دکتر سعادت

«موفق باشید».

مسئلهٔ ⑥ فاینال دوم :

آ)
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + R\cos\varphi \\ y_1 + R\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x_2 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x_1 - R\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot y_1 + R\cos\varphi\,\dot\varphi \end{pmatrix} \quad (\mathrm{I})$$



(اگر نیروی وارد به حلقه در راستای شعاعی بود، آن را مثبت می‌گیریم)

$$\begin{cases} M\begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot y_1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\[2ex] m\begin{pmatrix} \ddot x_2 \\ \ddot y_2 \end{pmatrix} = -N\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot x_1 + m\ddot x_2 = 0 \Rightarrow M\dot x_1 + m\dot x_2 = cte = 0 \xRightarrow{(\mathrm{I})} (m+M)\dot x_1 = mR\sin\varphi\,\dot\varphi \\ M\ddot y_1 + m\ddot y_2 = 0 \Rightarrow M\dot y_1 + m\dot y_2 = cte = mv_0 \Rightarrow (m+M)\dot y_1 + mR\cos\varphi\,\dot\varphi = mv_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x_1 \\ \dot y_1 \end{pmatrix} = \frac{m}{m+M}\begin{pmatrix} R\sin\varphi\,\dot\varphi \\ -R\cos\varphi\,\dot\varphi + v_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x_2 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-M}{m+M}R\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \frac{M}{m+M}R\cos\varphi\,\dot\varphi + \frac{m}{m+M}v_0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\frac{mR}{m+M}\dot\varphi^2 + \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}\frac{mR}{m+M}\ddot\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \ddot x_2 \\ \ddot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\frac{-MR}{m+M}\dot\varphi^2 + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}\frac{MR}{m+M}\ddot\varphi$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\ddot y_1}{\ddot x_1} = \frac{-\ddot\varphi\cos\varphi + \dot\varphi^2\sin\varphi}{\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow -\ddot\varphi\cos^2\varphi + \dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi = \ddot\varphi\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot\varphi = 0 \Rightarrow \dot\varphi = const = \dot\varphi(0) = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \frac{v_0}{R}t}$$

{از پایستگی انرژی هم می‌توان به نتیجه فوق رسید}

ب)
$$\cancel{\sqrt{\dot x_1^2 + \dot y_1^2} \neq \frac{mR}{m+M}} \quad M\begin{pmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot y_1 \end{pmatrix} = \frac{MmR}{m+M}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{N = \frac{mM}{m+M}\left(\frac{v_0^2}{R}\right)}$$

ج)
$$\begin{cases} \dot x_1 = \frac{m}{m+M}v_0\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ \dot y_1 = -\frac{mv_0}{m+M}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) + v_0\frac{m}{m+M} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mR}{m+M}\left\{1 - \cos\left(\frac{v_0}{R}t\right)\right\} \\ \frac{mv_0 t}{m+M} - \frac{mR}{m+M}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{pmatrix}}$$

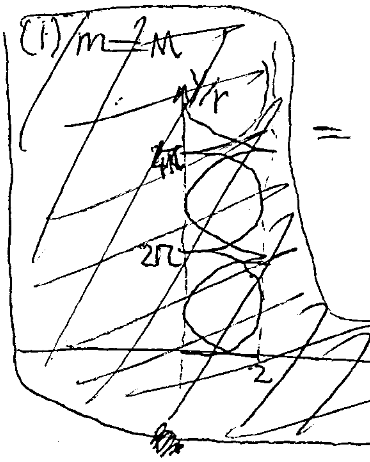
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{mR}{m+M} \begin{pmatrix} 1-\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ \left(\frac{v_0}{R}t\right) - \sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1/R + \cos\varphi \\ y_1/R + \sin\varphi \end{pmatrix} = \boxed{R \begin{pmatrix} \frac{m}{m+M} + \frac{M}{m+M}\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \\ \frac{m}{m+M}\left(\frac{v_0}{R}t\right) + \frac{M}{m+M}\sin\left(\frac{v_0}{R}t\right) \end{pmatrix}}$$

ب) $\cancel{\begin{pmatrix} x_1/R \\ y_1/R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+M}(1-\cos\varphi) \\ \varphi - \frac{m}{m+M}\sin\varphi \end{pmatrix}}$

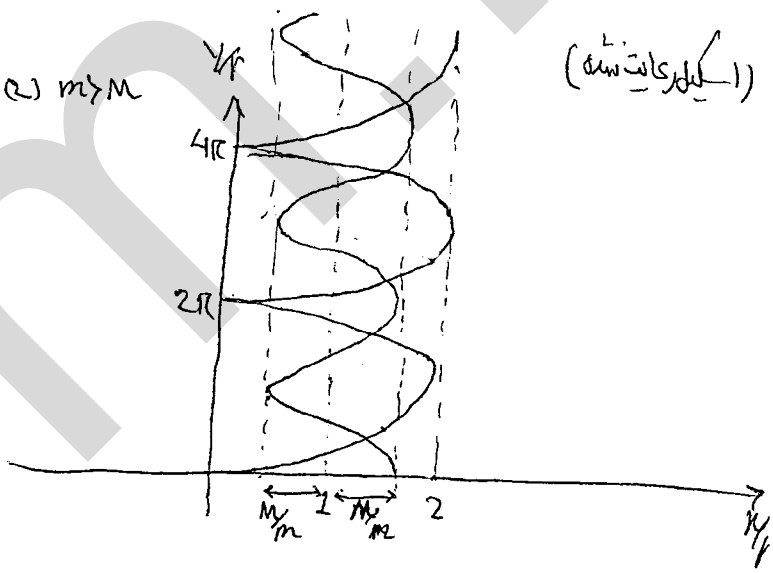
$$\begin{pmatrix} \frac{x_1}{mR}\,m+M \\ \frac{y_1}{mR}\,m+M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos\varphi \\ \varphi - \sin\varphi \end{pmatrix} \leftarrow \text{سیکلوئید}$$

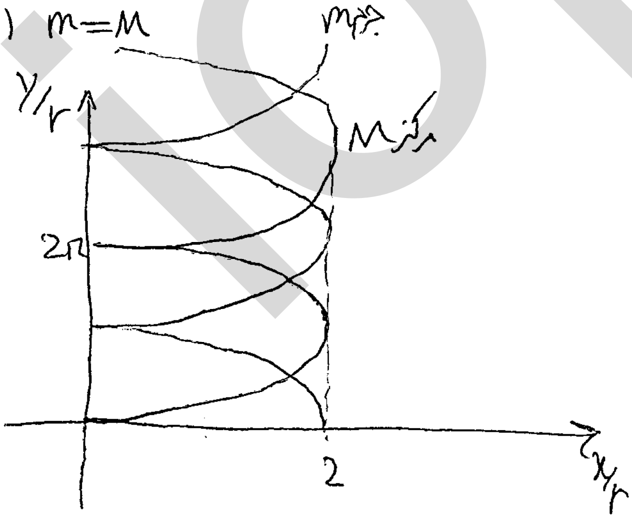
$$\begin{pmatrix} \frac{x_2}{mR}\cdot m+M \\ \frac{y_2}{mR}\cdot m+M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{M}{m}\cos\varphi \\ \varphi + \frac{M}{m}\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad r := \frac{m}{m+M}R$$

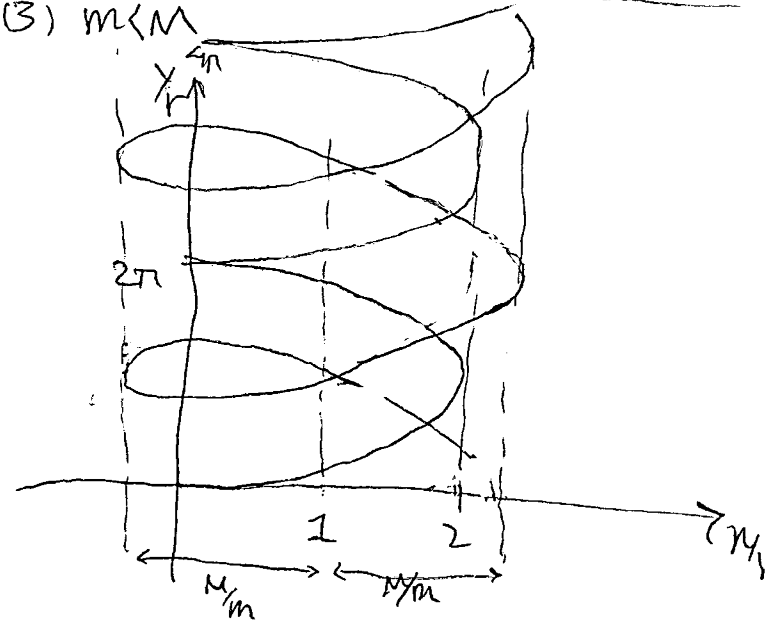


$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{M}{m}\cos(\varphi-\pi) \\ (\varphi-\pi)-\frac{M}{m}\sin(\varphi-\pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

(۱ــ کلیه حالات مشابه)







ث) $\frac{x_1}{r}=1-\cos\left(\frac{v_0}{R}t\right) \Rightarrow \boxed{T=2\pi\frac{R}{v_0}}$

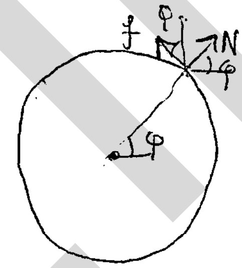
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\end{pmatrix}=\frac{mv_0}{m+M}\begin{pmatrix}\sin\frac{v_0}{R}t\\ -\cos\frac{v_0}{R}t+1\end{pmatrix} \Rightarrow v_1=\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2}=\frac{mv_0}{m+M}\sqrt{2-2\cos\frac{v_0}{R}t}=\frac{2mv_0}{m+M}\left|\sin\frac{v_0t}{2R}\right|$$

$$\Rightarrow dS=\frac{2mv_0}{m+M}\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|dt \Rightarrow S=\frac{2mv_0}{m+M}\int_0^{2\pi\frac{R}{v_0}}\left|\sin\frac{v_0}{2R}t\right|dt=4\frac{mv_0}{m+M}\int_0^{\pi\frac{R}{v_0}}\sin\left(\frac{v_0}{2R}t\right)dt$$

$$\Rightarrow S=\frac{4mv_0}{m+M}\times\frac{2R}{v_0}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\, d\varphi=\boxed{\frac{8mR}{m+M}}$$

ج)

$$\begin{cases}M\ddot{x}_1=N\cos\varphi-\mu|N|\sin\varphi\\ M\ddot{y}_1=N\sin\varphi+\mu|N|\cos\varphi\end{cases}$$



$$\begin{cases}m\ddot{x}_2=-N\cos\varphi+\mu|N|\sin\varphi\\ m\ddot{y}_2=-N\sin\varphi-\mu|N|\cos\varphi\end{cases}$$

پایستگی تکانه برقرار است

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\sin\varphi\,\dot{\varphi}\\ -R\cos\varphi\dot{\varphi}+v_0\end{pmatrix}\frac{m}{m+M},\quad \begin{pmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{M}{m+M}R\sin\varphi\,\dot{\varphi}\\ \frac{M}{m+M}R\cos\varphi\,\dot{\varphi}+\frac{m}{m+M}v_0\end{pmatrix}$$

تمام نخ کشش آ)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{y}_1\end{pmatrix}=\frac{mR\dot{\varphi}^2}{m+M}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}+\frac{mR\ddot{\varphi}}{m+M}\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1\cos\varphi+\ddot{y}_1\sin\varphi=\frac{mR\dot{\varphi}^2}{m+M}=\frac{N}{M} \Rightarrow N=\frac{mMR}{m+M}\dot{\varphi}^2\\ \ddot{y}_1\cos\varphi-\ddot{x}_1\sin\varphi=-\frac{mR\ddot{\varphi}}{m+M}=\mu\left|\frac{N}{M}\right| \Rightarrow |N|=\frac{-1}{\mu}\cdot\frac{mMR}{m+M}\ddot{\varphi}=\frac{mMR}{m+M}|\dot{\varphi}^2|\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}=-\mu|\dot{\varphi}^2|=-\mu\dot{\varphi}^2=\frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi} \Rightarrow \frac{d\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^2}=-2\mu d\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}^2=\dot{\varphi}_0^2e^{-2\mu\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{v_0}{R}e^{-\mu\varphi}=\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{v_0}{R}dt=e^{\mu\varphi}d\varphi \Rightarrow \frac{v_0}{R}t=\frac{e^{\mu\varphi}-1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi=\frac{1}{\mu}\ln\left[1+\frac{\mu v_0}{R}t\right]} \Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{v_0/R}{1+\frac{\mu v_0}{R}t}$$

چ) $N=\frac{mMR}{m+M}\dot{\varphi}^2=$ ~~$\frac{mM}{m+M}\ldots$~~ $=\boxed{\frac{mM}{m+M}\cdot\frac{(v_0^2/R)}{\left[1+\mu v_0/R\,t\right]^2}}$

ζ) $\varphi = \frac{1}{\mu}\ln\left[1+\mu\frac{v_0}{R}t\right] = \frac{1}{\mu}\left[\mu\frac{v_0}{R}t - \frac{\mu^2 v_0^2}{2R^2}t^2\right] = \boxed{\frac{v_0}{R}t\left(1-\frac{\mu v_0}{2R}t\right)}$

$$N = \frac{mM}{m+M}\cdot\frac{\left(v_0^2/R\right)}{\left[1+\mu\frac{v_0}{R}t\right]^2} \approx \boxed{\frac{mM}{m+M}\left(v_0^2/R\right)\left(1-2\mu\frac{v_0}{R}t\right)}$$

مسئله ⑦ — فاینال دوم :

الف)
$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - vt) \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\left(t_1 - \dfrac{w y_1}{c^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) - \dfrac{wy/c^2}{\sqrt{1-w^2/c^2}} \\ x_2 = x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - vt) \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}(y_1 - w t_1) = \dfrac{y}{\sqrt{1-w^2/c^2}} - \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} t_1' = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\left(t - \dfrac{wy}{c^2}\right) \\ x_1' = x \\ y_1' = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}(y - wt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t_1' - \dfrac{v x_1'}{c^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \dfrac{wy}{c^2}\right) - \dfrac{vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x_2' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x_1' - v t_1') = \dfrac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \dfrac{v}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \dfrac{wy}{c^2}\right) \\ y_2' = y_1' = \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}(y - wt) \end{cases}$$

ج)

تقریب اول

$$\begin{cases} t_2' - t_2 = \dfrac{\frac{v}{c}x - \frac{w}{c}y}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\dfrac{1}{c} + \dfrac{\frac{w}{c}y}{c\sqrt{1-w^2/c^2}} - \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\frac{v}{c}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0 \\ x_2' - x_2 = \dfrac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\right) + \dfrac{\frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c}}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\,y = \frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c}\,y \\ y_2' - y_2 = \dfrac{wt}{\sqrt{1-w^2/c^2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) - \dfrac{\frac{w}{c}\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-w^2/c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}\,x = -\frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c}\,x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_2' = t_2 \\ x_2' = x_2 + \frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c}\,y_2 \\ y_2' = y_2 - \frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c}\,x_2 \end{cases} \qquad \varepsilon = \frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varepsilon = \frac{v}{c}\cdot\frac{w}{c} \\ \cos\varepsilon = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_2' \\ x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

{ در تقریب $y = y_2$, $x = x_2$ }

تبدیل دوران حول z به اندازه $(-\varepsilon)$

د)
$$\begin{cases} t_1 = t \\ x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y_1 = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} ,\quad \boxed{\begin{cases} t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t_1 - \frac{v x_1}{c^2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{1}{c}\cdot\frac{v}{c}\cdot\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x_1 - v t_1) = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y_2 = y_1 = \text{———} = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}}$$

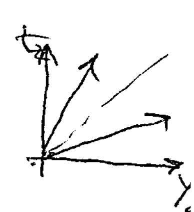
ه)
$$\begin{cases} t_1' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - vt) \\ y_1' = y \end{cases} ,\quad \boxed{\begin{cases} t_2' = t_2 = \text{———} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{1}{c}\cdot\frac{v}{c}\,\frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ x_2' = x_1'\cos\theta + y_1'\sin\theta = \frac{(x-vt)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + y\sin\theta \\ y_2' = -x_1'\sin\theta + y_1'\cos\theta = \frac{-(x-vt)\sin\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + y\cos\theta \end{cases}}$$

و)
$$\begin{cases} t_2' - t_2 = \frac{1}{c}\cdot\frac{v}{c}\cdot\frac{\overbrace{x(\cos\theta-1)}^{\text{مرتبه دو}} + y\sin\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \boxed{\frac{y}{c}\cdot\frac{v}{c}\theta} \\ x_2' - x_2 = y\sin\theta\left(\overbrace{\frac{-1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + 1}^{\text{مرتبه دوم}}\right) + \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\overbrace{(1-\cos\theta)}^{\text{مرتبه دوم}} = \boxed{0} \\ y_2' - y_2 = x\sin\theta\left(\overbrace{1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}^{\text{مرتبه دوم}}\right) + \frac{vt\sin\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \boxed{ct\cdot\frac{v}{c}\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct_2' = ct_2 + \theta\frac{v}{c}\,y_2 \\ x_2' = x_2 \\ y_2' = y_2 + \theta\frac{v}{c}\,ct_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct_2' \\ x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & 0 & \sin\varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon & 0 & \cos\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \varepsilon := \theta\frac{v}{c} \\ \sin\varepsilon = \theta\frac{v}{c} \\ \cos\varepsilon = 1 \end{cases}$$

(تا مرتبه صفرم $t = t_2,\ y = y_2$)

این تبدیل، غیر لورنتسی با سرعت θv است



مسئله ⑧ فانوس دوم :

الف) $E=\gamma mc^2 \Rightarrow \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 = 1-v^2/c^2 \Rightarrow v = c\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$

$$\Rightarrow v_A = c\sqrt{1-\left(\frac{m_Ac^2}{E_A}\right)^2} \quad , \quad v_B = c\sqrt{1-\left(\frac{m_Bc^2}{E_B}\right)^2}$$

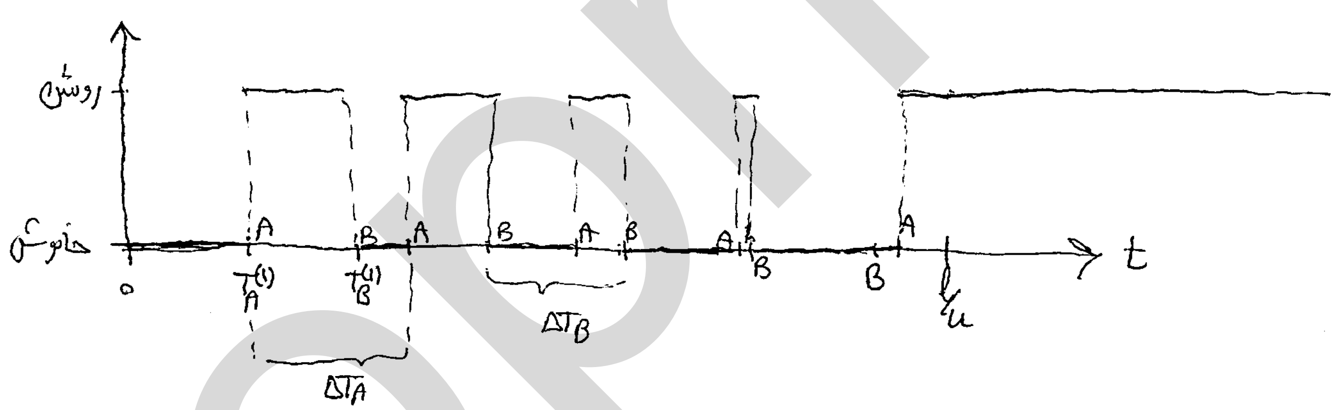
زمان رسیدن اولین ذره B: $T_B^{(1)} = T + \frac{l-uT}{u+v_B} = \frac{l+v_BT}{u+v_B}$, $\Delta T_B = \frac{v_BT}{u+v_B}$ زمان رسیدن دو ذره متوالی B

زمان رسیدن n امین ذره B $\Rightarrow T_B^{(n)} = T_B^{(1)} + (n-1)\Delta T_B = \boxed{\frac{l+nv_BT}{u+v_B}}$

ب) $\cancel{T_A^{(1)} = T + \frac{uT}{u+v_B} = \frac{v_B+2u}{u+v_B}T \quad , \quad \Delta T_A = v_A}$

$$T_A^{(1)} = T + \frac{uT}{v_A-u} = \frac{v_AT}{v_A-u} \quad , \quad \Delta T_A = \frac{v_AT}{v_A-u}$$

$$\Rightarrow T_A^{(n)} = T_A^{(1)} + (n-1)\Delta T_A = \frac{nv_AT}{v_A-u}$$

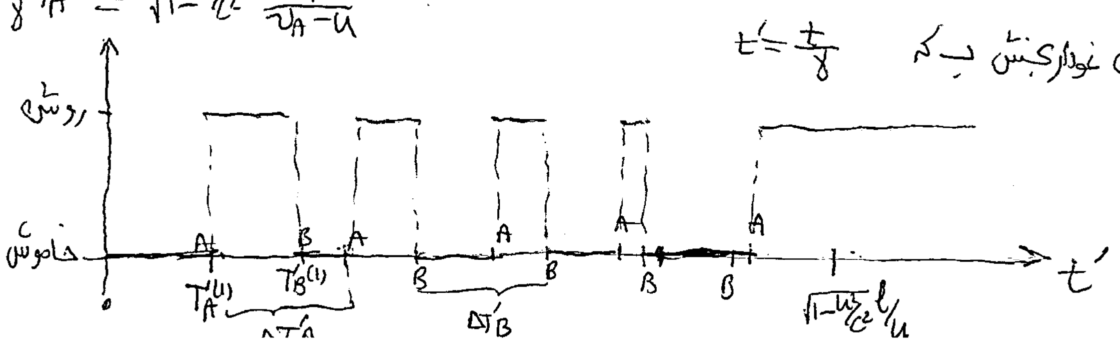


ج) $x'=0 \Rightarrow t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) = \gamma t' \Rightarrow t' = \frac{t}{\gamma} = \sqrt{1-v^2/c^2}\; t$

$$\Rightarrow \boxed{T_B'^{(n)} = \sqrt{1-v^2/c^2}\;\frac{l+nv_BT}{u+v_B}}$$

د) $T_A'^{(n)} = \frac{1}{\gamma}T_A^{(n)} = \sqrt{1-v^2/c^2}\;\frac{nv_AT}{v_A-u}$

همان نمودار بخش ب که $t'=\frac{t}{\gamma}$



ت)

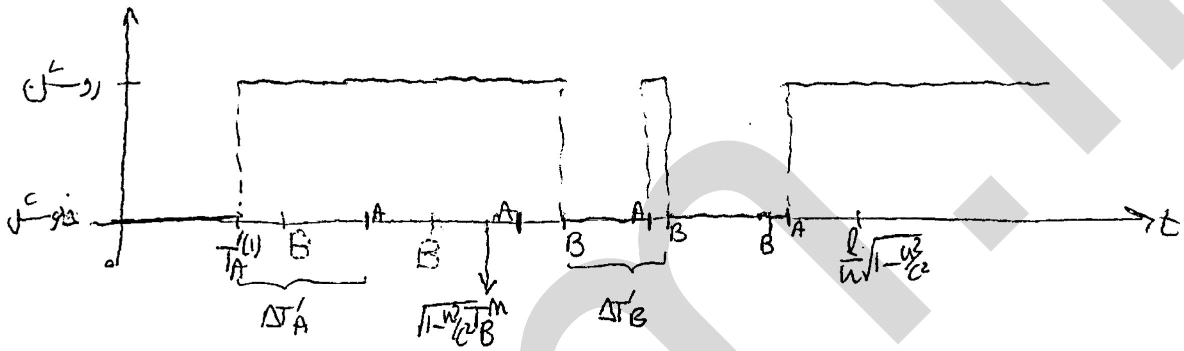
از دید ناظر O : $\tau_A^O = \gamma_{v_A}\tau_A = \frac{E_A}{m_A c^2}\tau_A$, $\tau_B^O = \frac{E_B}{m_B c^2}\tau_B$

$$\Rightarrow x_A^{max} := v_A \tau_A^O = c\sqrt{1-\left(\frac{m_A c^2}{E_A}\right)^2}\cdot\frac{E_A}{m_A c^2}\tau_A = c\sqrt{\left(\frac{E_A}{m_A c^2}\right)^2-1}\;\tau_A \quad , \quad x_B^{max} := v_B \tau_B^O$$

$T_A^M := \frac{x_A^{max}}{u}$, $T_B^M := \frac{l - x_B^{max}}{u}$ درواقع نمودار را برای O رسم کرده ولی t را $\frac{1}{\gamma}$ برابر می‌کنیم!

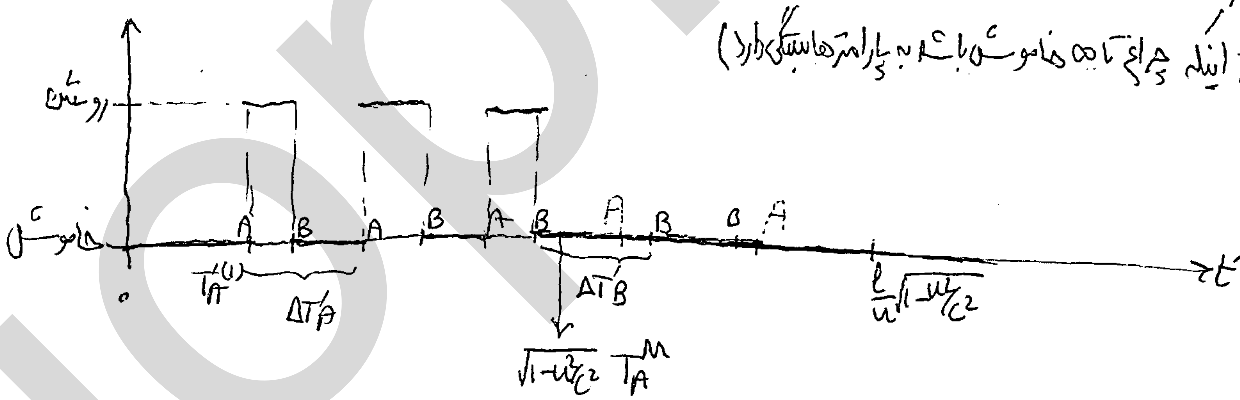
I) $x_A^{max}, x_B^{max} > l \Rightarrow$ همان نمودار بخش ت

II) $x_A^{max} > l$, $x_B^{max} < l$ {مکان A ها، B ها همان مکان آنها در نمودار (ت) است تنها از B های $\frac{1}{\gamma}T_B^M$ به بعد وجود ندارد}

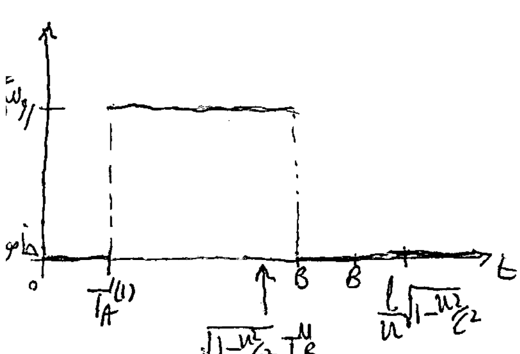


III) $x_A^{max} < l$, $x_B^{max} > l$ {مکان B ها همان نمودار "ت" و A ها همان نمودار "ت" است که از $\frac{1}{\gamma}T_A^M$ به بعد وجود ندارد}

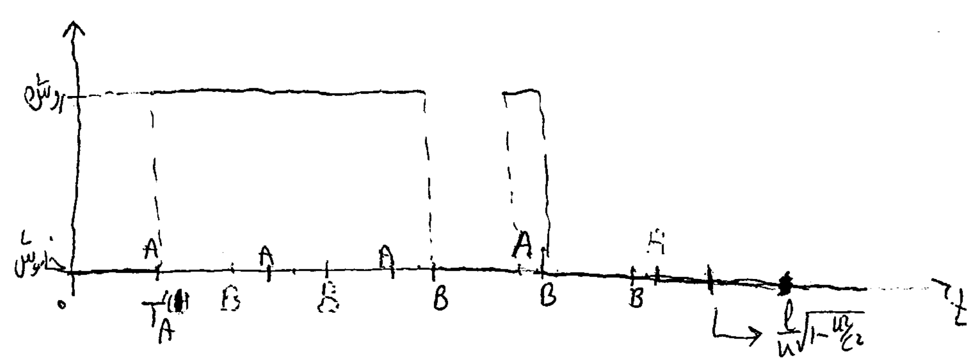
(البته اینکه چراغ تا ابد خاموش باشد به پارامترها بستگی دارد)



IV) $x_A^{max} + x_B^{max} < l$



V) $x_A^{max}, x_B^{max} < l$, $x_A^{max} + x_B^{max} > l$



مسئله 9 فاینال دوم :

آ)

$$\begin{cases} K'_{0x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(K_0\cos\theta_0 - \dfrac{v}{c}\cdot\dfrac{\omega_0}{c}\right) \\ K'_{0y} = K_0 \sin\theta_0 \qquad \longleftarrow K' \\ \dfrac{\omega'_0}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{v}{c}K_0\cos\theta_0\right) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{پس از بازتاب}} \begin{cases} K'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\dfrac{v}{c}\cdot\dfrac{\omega_0}{c} - K_0\cos\theta_0\right) \\ K'_y = K_0\sin\theta_0 \qquad \longleftarrow K' \\ \dfrac{\omega'}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{v}{c}K_0\cos\theta_0\right) \end{cases}$$

$$K \Rightarrow \begin{cases} K_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(K'_x + \dfrac{v}{c}\cdot\dfrac{\omega'}{c}\right) = \dfrac{1}{1-v^2/c^2}\left(\dfrac{v}{c}\cdot\dfrac{\omega_0}{c} - K_0\cos\theta_0 + \dfrac{\omega_0}{c}\dfrac{v}{c} - \dfrac{v^2}{c^2}K_0\cos\theta_0\right) \\ K_y = K'_y = K_0\sin\theta_0 \\ \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\dfrac{\omega'}{c} + \dfrac{v}{c}K'_x\right) = \dfrac{1}{1-v^2/c^2}\left(\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{v}{c}K_0\cos\theta_0 + \dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{v}{c}K_0\cos\theta_0\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_x = \dfrac{2v/c}{1-v^2/c^2}\cdot\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}K_0\cos\theta_0 \\ K_y = K_0\sin\theta_0 \\ \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\dfrac{\omega_0}{c} - \dfrac{2v/c}{1-v^2/c^2}K_0\cos\theta_0 \end{cases} \xrightarrow{K_0 = \frac{\omega_0}{c}} \boxed{\omega = \omega_0\left[\dfrac{1+v^2/c^2 - 2v/c\cos\theta_0}{1-v^2/c^2}\right]}$$

$$\tan\theta = \frac{K_y}{-K_x} = \frac{\omega_0\sin\theta_0}{-\frac{2v/c}{1-v^2/c^2}\omega_0 + \frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\omega_0\cos\theta_0} = \boxed{\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2 - 2\frac{v}{c\cos\theta_0}}\tan\theta_0}$$

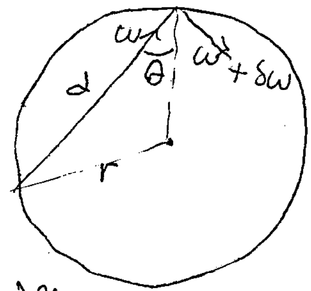
ب)

$$\omega = \omega_0\frac{1+\beta^2-2\beta\cos\theta_0}{1-\beta^2} = \boxed{\omega_0(1-2\beta\cos\theta_0)}$$

$$\tan\theta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2-\frac{2\beta}{\cos\theta_0}}\tan\theta_0 = \frac{\tan\theta_0}{1-\frac{2\beta}{\cos\theta_0}} = \left(1+\frac{2\beta}{\cos\theta_0}\right)\tan\theta_0 = \tan(\theta_0+\delta\theta) = \tan\theta_0 + \delta\theta\sec^2\theta_0$$

$$\Rightarrow \delta\theta = 2\beta\sin\theta_0 \quad\Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + 2\beta\sin\theta_0}$$

ب)
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-d\omega}{\omega}$$



$$d = 2r\cos\theta \Rightarrow \delta T = \frac{d}{c} = \frac{2r}{c}\cos\theta$$

$$\delta\omega = -2\omega\beta\cos\theta \Rightarrow \frac{-d\omega}{\omega} = 2\beta\cos\theta = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\Rightarrow d\lambda = 2\lambda\beta\cos\theta \Rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = \frac{2\lambda\beta\cos\theta}{\frac{2r}{c}\cos\theta} = \frac{\lambda\beta c}{r} = \frac{\lambda v}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda}{r}\frac{dr}{dt}}$$

ت)
$$dU = d(uV) = -PdV = -\frac{1}{3}u\,dV \Rightarrow \frac{d(uV)}{uV} = -\frac{dV}{3V}$$

$$\Rightarrow \ln uV = C - \frac{1}{3}\ln V \Rightarrow uV = cV^{-1/3} \Rightarrow u^3V^4 = cte \Rightarrow uV^{4/3} = cte$$

$$\Rightarrow ur^4 = cte$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{\lambda}{r} = cte$$

$$\Rightarrow u\lambda^4 = cte \quad (1)$$

در حالت کلی:
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \left(\frac{\partial (uV)}{\partial V}\right)_T \xrightarrow[\frac{\partial u}{\partial V}=0]{} u$$

$$\Rightarrow \frac{T}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V - \frac{u}{3} = u \Rightarrow T\frac{du}{dT} = 4u \Rightarrow \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{u}{T^4} = cte \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \lambda T = const \quad (3) \qquad \Rightarrow rT = cte$$

$$d(U_\lambda d\lambda) = -pdV = d(u_\lambda V d\lambda) \Rightarrow d(u_\lambda d\lambda)V + u_\lambda d\lambda\, dV = -\frac{1}{3}u_\lambda d\lambda\, dV$$

$$\Rightarrow \frac{d(u_\lambda d\lambda)}{u_\lambda d\lambda} = -\frac{4dV}{3V} = -4\frac{dr}{r} \Rightarrow u_\lambda d\lambda r^4 = cte$$

برای [illegible]: $\frac{\lambda}{r} = \frac{\lambda_0}{r_0} \Rightarrow d\lambda = \frac{r}{r_0}d\lambda_0 \Rightarrow d\lambda \sim r$

$$\Rightarrow u_\lambda r^5 = cte$$

$$\Rightarrow u_\lambda T^{-5} = const = f(\lambda T) \Rightarrow \boxed{u_\lambda = T^5 f(\lambda T)}$$