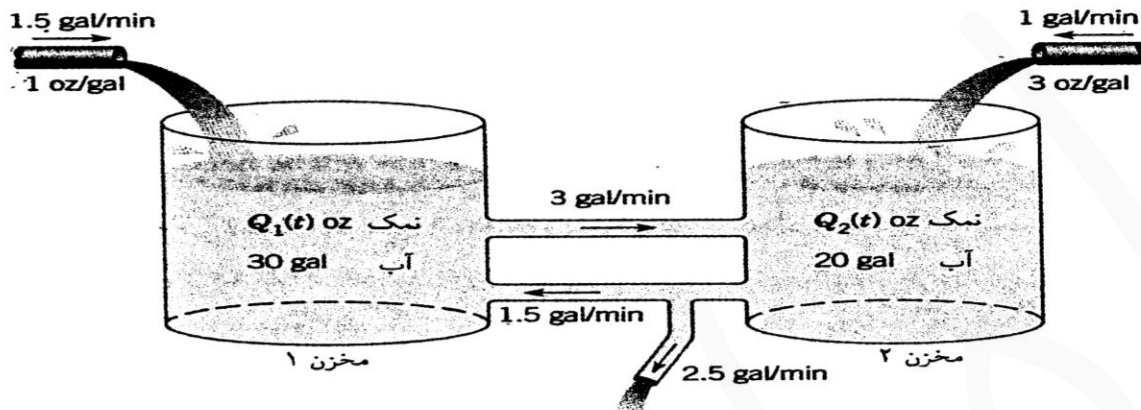


دو مخزن را در نظر بگیرید که مانند شکل به یکدیگر متصل شده‌اند. مخزن ۱ در ابتدا حاوی ۳۰ گالن آب و ۲۵ اونس نمک است و مخزن ۲ در ابتدا حاوی ۲۰ گالن آب و ۱۵ اونس نمک است. آبی که در هر گالن آن ۱ اونس نمک موجود است با نرخ $1.5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ وارد مخزن ۱ می‌شود. مایع مخلوط شده از مخزن ۱ با نرخ $3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن ۲ وارد می‌شود. آبی حاوی ۳ $\frac{\text{oz}}{\text{gal}}$ از نمک نیز با نرخ $1 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ (از خارج) به مخزن ۲ وارد می‌شود. محلول حاصل با نرخ $2.5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ از مخزن ۲ خارج می‌شود. بخشی از این مایع با نرخ $1.5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ به مخزن برمی‌گردد و بقیه آن از دستگاه خارج می‌شود.



شکل مخزنهای متصل

الف) فرض کنید $Q_1(t)$ و $Q_2(t)$ به ترتیب مقدار نمک در زمان t در هر مخزن باشند. معادله‌های دیفرانسیل و شرایط اولیه‌ای را بنویسید که روند این جریان را مدل می‌کنند. توجه کنید که دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرهمگن است.

پاسخ قسمت الف: متغیرهای Q_1 ، Q_2 مقدار نمک و متغیرهای V_1 ، V_2 حجم مخزن‌ها وابسته به متغیر مستقل زمان t با واحدهای مفروض در مسأله هستند و بنابر قانون اختلاط داریم:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = \left(1.5 * 1 + 1.5 * \frac{Q_2(t)}{V_2(t)} \right) - 3 * \frac{Q_1(t)}{V_1(t)} , & Q_1(0) = 25 \\ \frac{dQ_2}{dt} = \left(3 * 1 + 1.5 * \frac{Q_1(t)}{V_1(t)} \right) - (1.5 + 2.5) * \frac{Q_2(t)}{V_2(t)} , & Q_2(0) = 15 \end{cases}$$

از طرفی با توجه به آنکه نرخ ورودی مایع با نرخ خروجی مایع در هر دو مخزن برابر است، بنابراین مقدار حجم مایع در هر زمان همان مقدار اولیه در هر مخزن است. به‌طور دقیق‌تر این مطلب را در ذیل می‌بینیم.

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= (1.5 + 1.5) - 3 = 0 , & V_1(0) &= 30 \Rightarrow \forall t \geq 0 : V_1(t) = 30 \\ \frac{dV_2}{dt} &= (3 + 1) - (1.5 + 2.5) = 0 , & V_2(0) &= 20 \Rightarrow \forall t \geq 0 : V_2(t) = 20 \end{aligned}$$

اکنون به جای متغیرهای وابسته Q_1 و Q_2 به ترتیب از متغیرهای وابسته x و y استفاده می‌کنیم. از این‌رو دستگاه معادلات دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه ذیل به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(1.5 * 1 + 1.5 * \frac{y(t)}{20} \right) - 3 * \frac{x(t)}{30} , & x(0) = 25 \\ \frac{dy}{dt} = \left(3 * 1 + 1.5 * \frac{x(t)}{30} \right) - (1.5 + 2.5) * \frac{y(t)}{20} , & y(0) = 15 \end{cases}$$

پس از ساده و مرتب کردن به دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه اول غیرهمگن همراه با شرایط اولیه ذیل می‌رسیم.

$$\begin{cases} x' = -0.1x + \frac{3}{40}y + 1.5 , & x(0) = 25 \\ y' = \frac{1}{20}x - 0.2y + 3 , & y(0) = 15 \end{cases}$$