بسم الله الرحمن الرحيم

چهار چیز بر امت من لازم است:

شنیدن دانش و حفظ آن

و انتشار دادن و به کار بستن آن

«حضرت محمّد (ص)»

تقدیم به اساتید عزیزمان که همراه با

علم و دانش، تواضع و فروتنی را به

ما آموختند!

مقدمه:

« تجربه هر فرد گنجینه‌ای است برای همگان!»

دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی پس از پشت سرگذاشتن کنکور سراسری، در دانشگاه‌ها مشغول به تحصیل در رشته‌های گوناگون می‌شوند. بسیاری از رشته‌های دانشگاهی نیاز به اطلاعات و مهارت‌هایی از ریاضیات دارند. برای کسب این اطلاعات و مهارت‌ها، برای دانشجویان این رشته‌ها، معمولاً دروسی تحت عنوان ریاضیات عمومی در نظر گرفته می‌شود که پیش نیاز بسیاری از دروس دیگر آنان نیز می‌باشند. یعنی اگر دانشجویی در ریاضیات عمومی نمره قبولی کسب نکند، آنگاه نمی‌تواند بسیاری از دروس دیگر را انتخاب کند. بنابراین کسب موفقیت در ریاضیات عمومی، اهمیت ویژه‌ای دارد.

دلایل زیادی برای عدم موفقیت در ریاضیات عمومی وجود دارد. بسیاری از دانشجویان با نحوهٔ برخورد صحیح با این درس آشنا نمی‌باشند، و برخی نیز قدرت حل مسئله را در خود تقویت نکرده‌اند. عدم آشنایی با نحوهٔ صحیح مطالعهٔ ریاضیات عمومی و فراهم نساختن شرایط مورد نیاز برای این امر، از دلایل عمدهٔ عدم موفقیت در درس ریاضیات عمومی می‌باشند. در فصل اول، راه‌کارهایی برای مطالعهٔ مؤثر ریاضی ارائه خواهیم کرد. از جمله، نکاتی راجع به مهارت حل مسئلهٔ جورج پولیا، وجه تمایز حقیقت‌ها و مهارت‌ها، استفادهٔ بهینه از جلسات درس و جلسات حل تمرین، یادداشت‌برداری مؤثر، کسب آمادگی برای امتحان و حضور کارآمد در جلسهٔ امتحان ارائه می‌کنیم.

نحوه ارزیابی دانش‌آموزان در کنکور کارشناسی، آنان را متمایل به رویکردهای تستیِ حل مسائل کرده و مسائل اثباتی را از دایرهٔ توجه آنان خارج ساخته است. در حالیکه در دروس ریاضیات عمومیِ دانشگاهی از دانشجویان خواسته می‌شود تا مسائل را تشریحی حل کنند. عدم آشنایی دانشجویان با اثبات مطالب و گزاره‌های ریاضی یکی دیگر از دلایل مهم عدم موفقیت در دروس ریاضیات عمومی است. در فصل دوم توضیحاتی در مورد «اثبات کردن» و روش‌های اثبات، از جمله اثبات مستقیم و اثبات غیرمستقیم ارائه خواهیم کرد. این روش‌ها برای سادگی، در مورد نظریه مجموعه‌ها به‌کار برده می‌شوند؛ امّا می‌توان آنها را در هر زمینهٔ دیگر ریاضی نیز به‌کار برد.

شاید بتوان گفت یادگیری بدون اشتباه کردن امری محال است. البته زمانی اشتباه کردن به یادگیری منجر می‌شود که ما متوجه آن اشتباه شده و دیگر آن اشتباه را تکرار نکنیم. برای پی بردن به اشتباهات، طبیعی است که باید به ریشهٔ به وجود آمدن آنها توجه نمود. عدم آشنایی

دانشجویان با عوامل و ریشه‌های اشتباهاتشان، یکی دیگر از دلایل عدم موفقیت در ریاضیات عمومی است. در فصل سوم به بررسی اشتباهات و ریشه‌های آنها می‌پردازیم. امیدواریم پس از مطالعه این کتاب، دانشجویان مرتکب اشتباهات جدید؛ یعنی اشتباهاتی که در این جا به آنها نپرداخته‌ایم، شوند!

در عصر کنونی، تکنولوژی خود را بر تمامی عرصه‌ها تحمیل کرده است و امر آموزش نیز از این قاعده مستثنی نمی‌باشد. تکنولوژی آموزشی پیشرفت‌های زیادی کرده است. در این راستا، به‌کارگیری نرم‌افزارهای ریاضی در امر آموزش ریاضیات می‌تواند بسیار راهگشا باشد. یکی از نرم‌افزارهای قوی و کارآمد در ریاضی، نرم افزار Maple می‌باشد. در فصل چهارم، ضمن معرفی مختصر Maple، دستورات مقدماتی Maple را که می‌توان در تدریس ریاضیات عمومی به‌کار برد، ارائه می‌دهیم.

از آنجاییکه ریاضیات عمومی در سطح جهانی مخاطبین بسیاری دارد، سایت‌های اینترنتی فراوانی در این زمینه مشغول به فعالیت می‌باشند. در ضمیمهٔ کتاب، آدرس برخی از سایت‌های آموزش ریاضی ارائه خواهد شد.

در تهیه این کتاب، افراد بسیاری نقش داشته‌اند؛ دانشجویان زیادی از دانشگاه‌های امیرکبیر، تفرش، شاهد، قم و آزاد (واحد پرند) با مطالعهٔ پیش‌نویس کتاب و ارائه نقطه نظرات خود موجب ارتقا این کتاب شدند. ذکر نام همگی این عزیزان فهرستی بسیار طولانی خواهد شد و ناچار از آن در می‌گذریم. دراینجا فرصت را مغتنم می‌شماریم و از صمیم قلب آرزوی موفقیت روز افزون برای این عزیزان داریم. پیشنهادهای ارزنده آقای دکتر نصر آزادانی و آقای دکتر اکبری تتکابنی و تلاش‌های آقای میثم نقی‌لو در تدوین کتاب قابل تقدیر و سپاس‌گزاری است.
از آقای مختاری مسئول محترم انتشارات جهاد دانشگاهی امیرکبیرو سرکار خانم کوهستانی که صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند نیز سپاسگذاریم.

مسلماً این کتاب خالی از اشکال نیست. لذا از صمیم قلب کلیه نظرات و راهنمائی‌های لازم از طرف کلیه اساتید و دانشجویان گرامی را با منت پذیرا بوده، انشاءا... در قدمهای آتی مد نظر خود قرار خواهیم داد.

درپایان، شایان ذکر است دانشجویان عزیز می‌توانند اشکالات خود در زمینه موضوعات مطرح شده در این کتاب را از طریق E-mail با مولفین درمیان بگذارند.

اکبر طیبی — akbar_tayebi@aut.ac.ir
بهزاد نجفی — najafi@shahed.ac.ir

پاییز ۱۳۸۶

فهرست:

فهرست مطالب

فصل اول

چگونه ریاضی را مطالعه کنیم؟

«ریاضیات ۵۰ درصد از فرمول، ۵۰ درصد از اثبات
و۵۰ درصد از تخیل تشکیل شده است.»

۱-۱) چگونه ریاضی را مطالعه کنیم؟

شکی نیست که هر کس به شیوه‌ای خاص موضوعات مختلف را مطالعه می‌کند و نمی‌توان یک شیوه را برای مطالعه ریاضی به همه توصیه نمود. در این فصل توصیه‌های زیادی ارائه شده است. این کاملاً طبیعی است که شما با بعضی از آنها موافق نبوده و یا به جهت کمبود وقت قادر به انجام دادن همه آنها نباشید. تنها چیزی که از شما انتظار می‌رود این است که تا حد امکان سعی و تلاش کنید. هدف ما این است که با ارائه این توصیه‌ها به شما کمک کنیم که با توجه به کمبود وقت، بیشترین بهره را از تلاش خود داشته باشید.
کسانی که این فصل را می‌خوانند به دو دسته تقسیم می‌شوند، برای این دو دسته توصیه‌های زیادی در این فصل بیان شده است:

- دسته اول کسانی می‌باشند که از وضعیت ریاضی خود راضی هستند ولی علاقه‌مند هستند بدانند در این فصل چه گفته شده است. اگر شما یک سبک مطالعهٔ مؤثر دارید و نمرات خوبی در درس ریاضی می‌گیرید، این فصل برای شما نیز ممکن است جالب باشد. حتی اگر نیازی نباشد که سبک مطالعاتی خود را تغییر دهید. مقایسه سبک مطالعاتی خود با توصیه‌های ارائه شده در این فصل، ممکن است برای شما مفید باشد.
- دسته دوم کسانی هستند که از وضعیت ریاضی خود ناراضی‌اند و می‌خواهند بدانند چگونه می‌توانند ریاضی خود را تقویت کنند.

اغلب کسانی که در ریاضی ضعیف هستند، متعلق به یکی از سه گروه زیر هستند:

۱- اولین و بزرگ‌ترین گروه، متشکل از کسانی است که سبک مطالعاتی خوبی ندارند و واقعاً نمی‌دانند چگونه باید ریاضی را مطالعه نمود. دانشجویان این گروه توصیه‌های ارائه شده در این فصل را بسیار مفید خواهند یافت. حتی اگر نتوانند به تمام توصیه‌ها عمل کنند، امیدواریم با پیروی از برخی از آنها سبک مطالعهٔ ریاضی خود را بهبود بخشند.

۲- دومین گروه متشکل از کسانی است که روزانه چندین ساعت ریاضی مطالعه می‌کنند، امّا احساس می‌کنند که دچار کمبود وقت هستند و در این درس به خوبی عمل نمی‌کنند. امیدواریم دانشجویان این گروه نیز با پیروی از این توصیه‌ها و تغییر در سبک مطالعهٔ خود، در استفادهٔ بهینه از زمان موفق شوند؛ زیرا با مؤثرتر شدن مطالعه، زمان کمتری برای این کار نیاز خواهند داشت.

۳- گروه سوم کسانی هستند که وقت کافی برای مطالعه ریاضی صرف نمی‌کنند. دلایل متفاوتی برای این امر وجود دارد. بعضی از دانشجویان کار می‌کنند و یا مشکلات خانوادگی باعث می‌شود تا آنها زمان لازم برای کسب موفقیت در ریاضی را صرف آن نکنند. صادقانه بگوییم برای این دسته، هیچ توصیه علمی نداریم جز اینکه امیدوار باشیم پس از مطالعهٔ کل این فصل به سبک مطالعهٔ مؤثری دست یابند. متأسفانه بخش عمده‌ای از دانشجویانی که به این گروه تعلق دارند خودشان متوجه این امر نیستند و در جای اشتباه به دنبال راه‌حل می‌گردند.

بعضی از دانشجویان نمی‌دانند چه مقدار وقت برای مطالعهٔ ریاضی نیاز دارند و بسیاری دیگر نمی‌خواهند برای آن وقت صرف کنند و در عوض به موضوعات دیگری که برای آنها در زندگی مهم‌تر است، می‌پردازند. این شما هستید که باید تصمیم بگیرید، ولی باید متوجه باشید که اگر بخواهید درس ریاضی خود را با موفقیت پشت سر بگذارید، چاره‌ای به جز صرف وقت برای آن ندارید.

۱-۲) چند توصیهٔ روانشناسان برای آموختن ریاضیات:

در طول یک درس مواردی که انتظار می‌رود شما بیاموزید، عبارتند از:

۱- حقیقت‌ها[۱] (دانستن چه چیزی)

۲- مهارت‌ها[۲] (دانستن چگونه)

به‌طورمثال درست بودن رابطهٔ مثلثاتی $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ یک حقیقت است و یافتن سینوس زاویه ۷۵ درجه به کمک این رابطهٔ مثلثاتی یک مهارت است. حل کردن هم‌زمان دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ نیز یک مهارت می‌باشد و دستور کِرامِر، یعنی $x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$ و $y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$ برای حل این دستگاه یک حقیقت است.

۱. Facts

۲. Skills

آموختن حقیقت‌ها:

- به عنوان یک انسان، یک و فقط یک راه قابل اعتماد برای یاد گرفتن حقایق داریم. ***آنها را با حقایق و موضوعات دیگر ارتباط دهیم.*** برخی از این ارتباط‌ها عبارتند از:

الف) کشیدن تصاویر.

ب) ساختارهای منطقی (به دنبال کلمات «و»، « نه»، «اگر... آنگاه»، «هر / همه» ، «وجود دارد» باشید).

ج) ایده‌های ریاضی دیگر.

نوع دوم و سوم بیشتر توصیه می‌شوند. زیرا کمک می‌کنند که حقایق بعداً بهتر مورد استفاده قرار گیرند.

- اگر فقط سعی کنید یک حقیقت را یاد بگیرید، بهره‌ای نخواهید برد. کافی است آن حقیقت را با حقایق بیشتری ارتباط دهید. در این صورت آن حقیقت را سریع‌تر و عمیق‌ترخواهید آموخت. به‌طورمثال معادله درجه یک $ax = b$ را با دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ارتباط دهید. اگر قرار دهیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$، در این صورت این دستگاه را می‌توان به کمک ضرب ماتریس‌ها به فرم $AX = B$ بیان کرد. با توجه به شباهت و ارتباطی که $ax = b$ و $AX = B$ دارند، هر اطلاعاتی در مورد یکی را می‌توان در مورد دیگری نیز به‌کار برد. بدین ترتیب به درک بهتری از این دو نوع معادله خواهیم رسید.

به عنوان مثالی از یک ارتباط عمیق‌تر، به کمک اعداد مختلط بین مثلثان معمولی (دایره‌ای) و مثلثات هذلولوی ارتباط برقرار کنیم. چون $\sin(ix) = i\sinh(x)$ و $\cos(ix) = \cosh(x)$، بنابراین اگر در یک اتحاد مثلثاتی به جای $\sin(x)$ و $\cos(x)$ به ترتیب قرار دهیم $i\ \sinh(x)$ و $\cosh(x)$، در این صورت به یک اتحاد مثلثات هذلولوی می‌رسیم. به طور مثال اتحاد $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ تبدیل به اتحاد $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ می‌شود زیرا داریم $i^2 = -1$.

- جلسات درسی مملو از حقایق می‌باشند. البته بسیاری از این حقایق به منظور آموختن در همان مقطع زمانی نیستند و شما در جلسات و یا حتی در ترم‌های بعدی

آنها را به طور کامل درک خواهید کرد. بنابراین هیچگاه سعی نکیند کل مطالب یک جلسهٔ درسی را به خاطر بسپارید. کافی است تعاریف و قضایا را به خاطر بسپارید.

آموختن مهارت‌ها:

در آموختن یک مهارت دو مرحله وجود دارد:

مرحله اول: ***داشتن یک دسته قوانین برای الگو قرار دادن***. مثال‌ها در یک جلسهٔ درسی برای تمرینِ الگو قرار دادنِ قوانین کلّیِ ارائه شده در کلاس، مطرح می‌شوند.

مرحله دوم: ***به کار بردن آن قوانین بدون نیاز به مراجعه به آنها در هر قدم***. باید همواره به دنبال رسیدن به مرحله دوم بود. زیرا که بخش‌های بیشتری از مغز را به نسبت مرحله اول به کار می‌گیرد. راننده‌ای را تصور کنید که اولین جلسهٔ رانندگی خود را تجربه می‌کند. قوانین کلّی به او آموخته شده است. چنین شخصی در ابتدا برای تعویض دنده معمولاً خم شده و به کلاج و دنده ماشین نگاه می‌کند. امّا پس از اینکه در رانندگی مهارت پیدا کرد، بدون نگاه کردن به کلاج و دنده رانندگی می‌کند. برای عبور از مرحله اول به مرحله دوم باید به این توصیه توجه داشت: ***«هر چه می‌توانید مثال‌های بیشتری حل کنید. به مثال‌هایی که در جلسه درس مطرح می‌شوند، بسنده نکنید.»***

حل مسائل توسط دیگران و مشاهده نمودن آن و کپی‌برداری از آنها به هیچ وجه به یادگیری یک مهارت کمک نمی‌کند. در بهترین حالت، این امر صورت قوانین را در ذهن شما تثبیت می‌کند و یا اینکه برای شما روشن می‌سازد که در کدام مرحله از حل مسئله اشتباه کرده‌اید. امّا هرگز شما را به مرحله دوم نزدیک نمی‌کند.

معمولاً هر مهارتی بر اساس یک مهارت قبلی و ساده‌تر بنا می‌شود. اگر نمی‌توانید مهارتی را بیاموزید، ممکن است به این دلیل باشد که یکی از مراحل مورد نیاز را نمی‌دانید و یا بر آن تسلط کافی ندارید و یا اینکه نمی‌دانید چگونه تمام مراحل را یک‌جا کنار هم قرار دهید.

۱-۳) توصیه‌ها:

حال به توصیه‌ها می‌پردازیم. سعی شده است توصیه‌ها در قالب موضوعات خاصی مانند انجام دادن تکالیف، آماده شدن برای یک امتحان و ... ارائه شوند. می‌توان توصیه‌ها را در سه عنوان کلّی زیر دسته‌بندی نمود:

۱- ریاضی تماشای یک مسابقهٔ ورزشی نیست.

شما نمی‌توانید صرفاً با رفتن به کلاس ریاضی، نگاه کردن و گوش دادن به سخنرانی معلم، ریاضی را یاد بگیرید. برای یادگیری ریاضی باید به‌طورفعال در فرایند یادگیری شرکت کنید. باید در کلاس حضور داشته باشید و یادداشت‌های مناسبی از تدریس معلم بردارید. تمرینات را حل کنید حتی اگر معلم آنها را تحویل نگیرد. شما باید به‌طورمنظم ریاضی بخوانید. نه اینکه فقط شب امتحان مشغول به مطالعهٔ ریاضی شوید. به عبارت دیگر باید خودتان را در فرایند یادگیری درگیر کنید. واقعیت این است که بیشتر افراد برای کسب موفقیت در امتحان ریاضی، نیاز دارند تلاش فراوان کنند. معمولاً کسب موفقیت در درس ریاضی نیاز به تلاش بیشتری در مقایسه با کسب موفقیت در دروس غیر ریاضی دارد. اگر بخواهید فقط با صرف چند ساعت برای مطالعه، آن هم در روز قبل از امتحان، در دروس ریاضی نمره قبولی بگیرید، خودتان متوجه خواهید شد که این امر بسیار مشکل خواهد بود. اگر نخواهید خود را چه در کلاس و چه در بیرون از کلاس در یادگیری ریاضی درگیر کنید، نخواهید توانست در هیچ درس ریاضی نمره خوبی بگیرید.

۲- سعی کنید تا اصول کلّی را دریابید.

شاید بتوان با حفظ کردن مجموعه‌ای از تاریخ‌ها، اسامی و رواديدها در درس تاریخ موفق بود. امّا برای کسب موفقیت در ریاضی علاوه بر نیاز به حفظ کردن برخی از فرمول‌ها، باید بفهمیم که چگونه می‌توان از این فرمول‌ها استفاده نمود. برخی از فرمول‌ها تحت شرایط خاصی برقرارند و برای بکارگیری درست آنها باید این شرایط را در نظر داشت. به‌طورمثال برای تعیین شیب یک خط راست ابتدا باید آن را به صورت استاندارد $y = mx + h$ بنویسید و سپس بگویید ضریب x ، شیب این خط است. بدون در نظر گرفتن این شرط ممکن است شیب خط $2x + 2y = 2$ را برابر 2 بنویسید، در حالیکه جواب درست، برابر -1 است. بنابراین یا این فرمول و تعریف را به خاطر می‌سپارید و یا اینکه جواب اشتباه به‌دست می‌آورید!

برخی از فرمول‌ها از اجزای زیادی تشکیل شده‌اند و شما باید به درستی تشخیص دهید که در مسئله شما هر جزئی از فرمول، برابر چیست. اگر متوجه نشوید که چگونه باید از فرمول استفاده کنید و اصل کلّی حاکم بر فرمول چیست، اغلب مشکل است که فرمول را به درستی استفاده کنید. برای مثال در درس ریاضی عمومی به خاطرسپاری فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء کار ساده‌ای است. امّا اگر ندانید چگونه باید از این فرمول

استفاده کنید و اجزاء را به‌طورمناسب انتخاب نکنید، متوجه خواهید شد که حفظ بودن فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء به تنهایی هیچ ارزشی ندارد.

۳- مطالب ریاضی به هم پیوسته‌اند.

باید همواره به خاطر داشت که دروس ریاضی به هم پیوسته‌اند. تقریباً هر کاری که در یک کلاس ریاضی انجام می‌دهید، مبتنی بر مطالبی است که قبلاً یاد گرفته‌اید. البته این موضوع فراتر از این است که بخش‌های قبلی همین درس را باید بدانید. در واقع باید توشه‌ای از ریاضیات دبیرستان، راهنمایی و یا حتی ابتدایی را با خود داشته باشید. اگر در اعمال جبری کسرها مشکل داشته باشید، به‌طورحتم در اعمال جبری توابع گویا هم مشکل خواهید داشت. اگر در مثلثات مشکل داشته باشید، نمی‌توانید در درس ریاضی عمومی و یا در هر درس ریاضی که از مثلثات استفاده می‌کند، موفق باشید.
حال با در نظر داشتن سه عنوان کلّی بالا، به موضوعات خاص می‌پردازیم. توجه داشته باشید که برخی از توصیه‌ها در چندین بخش آمده‌اند، این موضوع نشان دهنده اهمیت و چند جانبه بودن این گونه توصیه‌ها می‌باشد.

۱-۳-۱) توصیه‌هایی برای یادگیری بهتر ریاضیات:

توصیه‌های زیر یا به قدر کافی مهم بوده‌اند تا تحت یک عنوان مطرح شوند و یا امکان مطرح کردن آنها در هیچ یک از بخش‌های دیگر وجود نداشته است.

- **در کلاس حضور داشته باشید.** به خاطر داشته باشید که مطالب ریاضی به هم مرتبطند. بنابراین اگر جلسه‌ای را از دست بدهید، مطالب مهمی که در جلسات بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت را از دست خواهید داد.
- **سر وقت در کلاس حضور داشته باشید.** گاهی اوقات نکات مهم در همان چند دقیقهٔ اول کلاس مطرح می‌شوند.
- **در کلاس خوب گوش دهید و ببینید.** گاهی اوقات نکات مهم روی تخته نوشته نمی‌شوند و معلم فقط آنها را شفاهی بیان می‌کند. به نکاتی که معلم روی آنها تأکید بیشتری دارد و از نظر او مهم می‌باشند، توجه بیشتری داشته باشید. هر چه موضوعی از نظر معلم مهم‌تر باشد، همان قدر احتمال اینکه در امتحان از آن موضوع سؤال مطرح گردد، بیشتر می‌شود.
- **یادداشت‌های خوب و درست بردارید.** سعی کنید تمام نکاتی که معلم به آنها

اشاره می‌کند را یادداشت کنید، تا پس از کلاس آنها را پردازش و نکات مهم را از بین آنها استخراج کنید. شاید به نظر برسد چون معلم به سادگی مسائل را حل می‌کند، بنابراین مسائل، ساده هستند. امّا وقتی نوبت به شما می‌رسد که مسئله‌ای را حل کنید متوجه درجه دشواری آنها می‌شوید. مجموعه‌ای از یادداشت‌های خوب به شما کمک می‌کند تا به خاطر آورید چگونه این مسائل حل می‌شوند. برای برخی از معلمین نوشتن تمام جزئیات حل مسئله دشوار است. در چنین مواردی باید تا آنجا که ممکن است یادداشت بردارید. البته هم‌زمان گوش دادن و یادداشت برداشتن کار سختی است (سخته ولی ممکنه!). می‌توانید با تمرین کردن و وضع قراردادهای شخصی بر این مشکل غلبه کنید. به‌طورمثال با استفاده از علائم ریاضی می‌توانید جملات را سریعتر یادداشت کنید و یا به‌طورمثال با خودتان قرار بگذارید «م» یعنی «مهم»، «م م» یعنی «خیلی مهم»، «؟» یعنی «نفهمیدم». باید در حین نوشتنِ نکات مهم، قادر به گوش کردن نیز باشید!

- **سؤال بکنید.** اگر چیزی را نفهمیدید از معلم بپرسید و از او بخواهید تا آن مطلب را بیشتر توضیح دهد. شما به خاطر همین امر در کلاس حضور دارید! در اغلب موارد شما یگانه کسی نیستید که آن مطلب را نفهمیده است. بنابراین با سؤال کردن، به دیگران نیز فرصت می‌دهید تا آن مطلب را بفهمند. البته با این امر به معلم خود نیز لطف کرده‌اید، زیرا او را متوجه کرده‌اید که آن مطلب را دانشجویان به‌طورکامل درک نکرده‌اند و نیاز به توضیح بیشتری دارد.
- **به سؤالات دیگران نیز گوش دهید.** زمانی که دانشجوی دیگری سؤال می‌کند، هم به سؤال او و هم به پاسخی که معلم به او می‌دهد، خوب گوش کنید. شاید آن سؤالی باشد که هیچگاه به ذهن شما خطور نکند و در عین حال مهم باشد.
- **یادداشت‌های خود را بعد از کلاس مرور کنید.** پس از هر جلسه درسی یادداشت‌های مربوط به آن جلسه را مرور کنید. موضوعاتی را که متوجه نمی‌شوید، یادداشت و آنها را در قالب چند سؤال مطرح کنید تا از معلم یا استاد حل تمرین خود بپرسید.
- **مجموعه‌ای از کارت‌های شاخص تهیه کنید.** بر روی کارت‌های کوچکی فرمول‌ها، مفاهیم، تعاریف و یا صورت قضایای مهم را بنویسید. این کارت‌ها را به همراه داشته باشید و در فرصت‌های آزاد که به‌دست می‌آورید، آنها را مرور کنید. با این روش فرمول‌ها و مفاهیم مهم را به خاطر بسپارید.

- **نمادگذاری‌های صحیح را بیاموزید.** معلمین فرض می‌کنند که شما نمادگذاری‌های صحیح را می‌دانید و اغلب روی این موضوع تأکید نمی‌کنند. به‌طورمثال $\{-2\}$ و $[-2]$ دارای دو معنی کاملاً متفاوت می‌باشند.
- **در یک گروه مطالعاتی عضو شوید.** اغلب، مطالعه در یک گروه برای دانشجویان مفید است. زیرا افراد از زوایای مختلفی به مسائل نگاه می‌کنند و ممکن است مسئله‌ای که برای شما سخت و دشوار به نظر می‌رسد، برای دیگری یک مسئله ساده باشد و یا به عکس.
- **تاریخ امتحانات و موعد تحویل تمرینات را در جایی یادداشت کنید که در معرض دید شما باشد.** این امر باعث می‌شود آنها را فراموش نکنید. دانشجویی به یک امتحان خود دیر رسید و به مراقب امتحان گفت: «ببخشید۱۰ دقیقه دیر رسیدم» و مراقب در جواب او گفت: «نه فرزندم تو ۲۴ ساعت و۱۰ دقیقه دیر آمده‌ای»!
- **زمان کافی برای مطالعه و حل تمرینات در نظر بگیرید.** به‌طورمعمول مطالعه ریاضی زمان بیشتری در مقایسه با مطالعه دروس دیگر به خود اختصاص می‌دهد. به خاطر داشته باشید که حل تمرینات زمان بیشتری از آنچه که تصور می‌کنید از شما خواهد گرفت. با در نظر داشتن این نکته، برای مطالعه دروس خود برنامه‌ریزی زمانی کنید.
- **تمرینات هر موضوع را پس از جلسه درسی آن موضوع حل کنید.** در پایان هر جلسه درسی، زمانی را برای نگاه کردن به صورت تمرینات آن بخش درس اختصاص دهید. سعی کنید برخی از آنها را حل کنید. بدین ترتیب فرصتی به‌دست می‌آورید تا متوجه شوید که آیا واقعاً موضوع آن جلسه را فهمیده‌اید یا نه. انجام دادن این کار را به دقایق آخرِ موعد تحویل تمرینات موکول نکنید. زیرا در این صورت حاصل کار یک مجموعه ناقص از حل تمرینات و همچنین یک مجموعه ناقص از مفاهیم است.
- **تمرینات را بدون استفاده از یادداشت‌هایتان و کتاب حل کنید.** پس از حل چند مسئله ابتدایی، کتاب و یادداشت‌هایتان را کنار بگذارید و سعی کنید تمرینات باقی‌مانده را بدون مراجعه به آنها حل کنید. در بیشتر امتحانات باید بدون کتاب و بدون هیچ اطلاعاتی دربارهٔ این که هر سؤال از کدام فصل انتخاب شده، به سؤالات پاسخ دهید. بنابراین سعی کنید به این موضوع عادت و خود را برای آن آماده کنید.
- **تمرین، تمرین، تمرین.** تمرینات بیشتری حل کنید. خودتان را محدود به تکالیف

تحویلی معلم نکنید. هر چه تمرینات بیشتری حل کنید، به همان میزان موفقیت شما در ریاضی بیشتر خواهد بود. یگانه راه یادگرفتن نحوه حل کردن مسائل، این است که تعداد زیادی از آنها را حل کنید و بدین ترتیب آمادگی بهتری برای امتحان کسب نمایید.

- **پشتکار داشته باشید.** ممکن است همه مباحث مطرح شده در یک جلسه را با یک بار مطالعه نفهمید. برای درک و فهم کامل برخی از مباحث باید تلاش بیشتری کرد. گاهی تا چند مسئله در ارتباط با آن مباحث حل نکنید و به آنها فکر نکنید، به درک واقعی آنها دست نخواهید یافت. گاهی پس از یک مدت کوتاه فکر کردن درباره مبحثی که گیج کننده به نظر می‌رسد، به ناگهان و به‌طورمعجزه آسایی آن مبحث روشن و ساده می‌شود.
- **تکالیف و امتحانات قدیمی را نگه دارید.** پس از اینکه معلم پاسخنامه امتحان و یا تکالیف بازبینی شده شما را تحویل داد، آنها را دور نریزید. زیرا اینها منبع خوبی برای سؤالات امتحان پایان‌ترم می‌باشند.
- **کتاب درسی خود را فراموش نکنید.** اگر می‌خواهید یکی از مباحث مطرح شده در کلاس را پیگیری کنید، فراموش نکنید که شما یک کتاب درسی دارید. به‌طورمعمول در کتاب درسی مثال‌های زیادی وجود دارد که ممکن است در کلاس به آنها پرداخته نشود و یا اینکه مثال‌های حل شده در کلاس با یک روش دیگر در کتاب درسی حل شده باشند.
- **رویکرد و روحیه خوبی داشته باشید.** همیشه به بهترین نحو کار خود را انجام دهید. فقط به گرفتن نمره قبولی فکر نکنید. زیرا این امر ممکن است برای شما مشکلاتی را ایجاد کند. به‌طورمثال کافی است با یک امتحان بد (به‌طورمثال امتحانی که در آن روی موضوعاتی که شما برای گرفتن نمره قبولی کافی دانسته‌اید، تأکید زیادی نشده باشد) مواجه شوید، در این صورت نتیجه کار رد شدن در آن درس خواهد بود. بنابراین سعی کنید برای بالاترین نمره، خود را آماده کنید.

۱-۳-۲) توصیه‌هایی درباره یادداشت‌برداری:

- **در کلاس خوب گوش کنید.** فقط به نوشتن نکاتی که معلم بر روی تخته می‌نویسد، اکتفا نکنید. برخی از نکات مهم را معلم فقط به صورت شفاهی بیان می‌کند و بر روی تخته نمی‌نویسد.

- **تذکرات توضیحی را یادداشت کنید.** مطمئن شوید که تمام تذکرات توضیحی معلم را نوشته‌اید. معمولاً این تذکرات را معلم نمی‌نویسد و فقط برای توجیه استفاده از یک فرمول یا روش خاص برای حل یک مسئله و یا توضیح نحوه برخورد با یک دسته خاص از مسائل بیان می‌کند.
- **فرمول‌ها و مفاهیم مهم را یادداشت کنید.** اگر معلم روی یک فرمول یا مفهوم خاص تأکید نمود، با قرار دادن یک علامت در کنار آن، این اهمیت را برجسته کنید. سپس در مطالعات بعدی، سعی کنید خودتان دلیل اهمیت آن فرمول یا مفهوم خاص را دریابید.
- **از معلم خود بخواهید.** اگر قسمتی از نکات نوشته شده بر روی تخته واضح نیست، از معلم بخواهید تا آن قسمت را توضیح دهد.
- **مطالبی را که متوجه نمی‌شوید، علامت‌گذاری کنید.** اگر با مطلبی که معلم دارد بیان می‌کند، مشکل دارید، آن را در یک جا یادداشت کنید و یا حداقل کلمات کلیدی آن را یادداشت کنید. چند خط در جزوه خالی بگذارید تا پس از اینکه آن قسمت را متوجه شدید، در آن فضای خالی بنویسید.
- **یادداشت‌های خود را مرور و اصلاح کنید.** هر چه سریع‌تر پس از کلاس به یادداشت‌های خود مراجعه کنید. به دنبال اشتباهات و جا افتادگی‌ها باشید. مطالبی را که در کلاس به جهت کمبود وقت جا افتاده اند، بنویسید.
- **به‌طورمنظم یادداشت‌هایتان را مرور کنید.** در بازه‌های زمانی منظم یادداشت‌های خودتان را مرور کنید، بدین ترتیب مطالب را آموخته و در ذهن خواهید داشت. به خاطر داشته باشید که همین مطالب است که در نهایت از شما خواسته می‌شود. بنابراین بهتر است، هر چه زودتر آنها را بیاموزید.

۱-۳-۳) کمک گرفتن:

هنگامی که با یک موضوع ریاضی مشکل دارید، کمک گرفتن یکی از مهم‌ترین مواردی است که در این زمینه می‌توانید انجام دهید. در این قسمت توصیه‌هایی برای کمک گرفتن ارائه می‌شود.

- **اگر احساس کردید نیاز به کمک دارید، کمک بخواهید.** اگر با کلاس ریاضی خود مشکل دارید چندین انتخاب دارید که می‌توانید از آنها بهره ببرید. می‌توانید در ساعات رفع اشکال به معلم خود مراجعه کنید (*توجه داشته باشید که ساعات رفع اشکال برای همین منظور در نظر گرفته شده است.*) و یا یک معلم خصوصی بگیرید.

- **به موقع کمک بخواهید.** کمک گرفتن را به آخرین دقیقه موکول نکنید. زمانی که درگیر حل یک مسئله هستید، بهترین زمان برای کمک گرفتن در مورد آن مسئله است. به خاطر داشته باشید که مطالب ریاضیات به هم پیوسته‌اند. اگر به موقع کمک نگیرید، کار را برای یادگیری مطالب بعدی دشوارتر می‌کنید.
- **سؤالات خوبی بکنید.** گفتن اینکه: «من این قسمت را نفهمیدم» راه خوبی برای کمک گرفتن نیست. ممکن است آن قسمت از چندین بخش تشکیل شده باشد. باید دقیقاً مشخص کنید کدام بخش را نفهمیده‌اید. آیا تمام بخش‌ها را نفهمیده‌اید و یا اینکه یک بخش خاص را نفهمیده‌اید؟ سؤال خود را به‌طور روشن در مورد آن بخش یا بخش‌هایی که نفهمیده‌اید، مطرح کنید.
- **تشخیص و درک مسئله نصف راه‌حل آن است.** زمانی که شما از کسی برای حل مسئله‌ای کمک می‌خواهید، باید سؤال شما اینگونه باشد: «چرا زمانی که من قوانین را به این شکل پی می‌گیرم به جواب غلط می‌رسم؟» هرگز اینگونه نپرسید: «من هنوز هم نمی‌توانم این نوع مسئله را حل کنم؛ لطفاً چند مثال دیگر در این زمینه برای من حل کنید.»
- **دست نوشته‌های خودتان را همراه خود داشته باشید.** به هنگام گرفتن کمک درباره یک سؤال دست نوشته‌های خود را که شامل راه‌حل‌هایی است که پی‌گرفته‌اید ولی به جواب نرسیده‌اند را به همراه داشته باشید. این امر به معلم کمک می‌کند که روی مواردی که شما اشتباه کرده‌اید، متمرکز شود.

۱-۳-۴) انجام دادن تکالیف:

در این قسمت توصیه‌های کلّی در ارتباط با بهره‌گیری بیشتر از تکالیف ارائه می‌شود و در بخش بعدی توصیه‌هایی در ارتباط با حل مسئله ارائه خواهد شد.

- **هدف از تعیین تکالیف را درک کنید.** معلمان برای تیره و تار ساختن زندگی شما، تکالیف را در نظر نمی‌گیرند. بلکه تکالیف را برای کمک به شما در یادگیری موضوعات مطرح شده در کلاس تعیین می‌کنند. با انجام دادن تکالیف، قدرت استدلال و مهارت حل مسئلهٔ شما تقویت می‌شود. به خاطر داشته باشید که زمانیکه معلم مسائل را حل می‌کند، ممکن است به نظر برسد که مسائل بسیار ساده‌اند. امّا

زمانی که خودتان برای حل همان مسائل اقدام کنید، متوجه دشواری آنها خواهید شد.

- **تکالیفی که معلم معین کرده است را حل کنید.** برخی از دانشجویان به اشتباه تمرینات دیگری از کتاب را حل می‌کنند. این یکی از اشتباهات رایج است. به‌طورمثال اگر معلم تمرینات با شماره زوج را برای تکلیف در نظر گرفته است، مطمئن شوید که شماره تمرینات را رعایت کرده‌اید و تمرینات فرد را به او تحویل نداده‌اید. اگرچه حل تمرینات بیشتر، یکی از راه‌های کسب مهارت در ریاضیات است، تحویل دادن تمریناتی به غیر از آنچه معلم برای تکلیف تعیین کرده‌است، ممکن است نشان‌دهنده بی‌دقتی شما باشد. در ضمن موعد تحویل تکالیف را نیز در نظر داشته باشید و سعی کنید قبل از آن موعد، تکالیف را تحویل دهید.
- **هر چه سریعتر تکالیف را انجام دهید.** پس از هر جلسهٔ درسی در اولین فرصت، تکالیف را انجام دهید. زیرا مطالب هنوز در ذهن شما می‌باشند. انجام دادن تکالیف را به دقایق آخر موکول نکنید.
- **مجهز باشید.** به هنگام انجام دادن تکالیف تمام موارد مورد نیاز از قبیل جزوه، کتاب درسی و خودکار و ... را در کنار خود داشته باشد.
- **مرور کنید.** به جزوه درسی هر جلسه مراجعه کنید و مثال‌هایی که معلم حل کرده‌است را مرور کنید و مطمئن شوید که ایده اصلی هر بخش را فهمیده‌اید. به اشتباهات رایجی که معلم اشاره کرده است، توجه داشته باشید. همین موارد را با کتاب درسی خودتان انجام دهید.
- **از نرم‌افزارهای ریاضی استفاده کنید.** سعی کنید در انجام دادن تکالیف محاسباتی، از نرم‌افزارهای ریاضی مانند ***میپل*** استفاده کنید.
- **تمیز بنویسید.** این امر به معلم در تصحیح تکالیف تحویلی شما کمک می‌کند.
- **تمام جزئیات راه‌حل خودتان را ذکر کنید.** فقط به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید، بسیاری از معلمین چنین پاسخنامه‌هایی را قبول نمی‌کنند. همچنین ذکر تمام جزئیات راه‌حل به شما در مرور مطالب برای امتحان پایان‌ترم کمک خواهد کرد.
- **راه‌حل‌های خود را بازبینی کنید.** همیشه برگردید و راه‌حل‌های خودتان را بررسی کنید و مطمئن شوید هیچ اشتباهی از قبیل اشتباهات محاسبه‌ای، استدلالی و ... مرتکب نشده‌اید.

۱-۳-۵) مهارت حل مسئله:

در این بخش توصیه‌هایی برای تقویت مهارت حل مسئله ارائه می‌گردد. فرایند حل مسئله متشکل از مراحل زیر می‌باشد. این رویکرد ۴ مرحله‌ای منسوب به ریاضی‌دان مشهور ***جرج پولیا*** می‌باشد که عبارت است از:

۱- خواندن و فهمیدن صحیح مسئله به منظور درک آنچه که مورد سؤال است.

۲- به‌کار بردن یک یا چند استراتژی حل مسئله در مرحله آغازین حل مسئله. برخی اوقات با اتخاذ یک روش، ممکن است به جواب نرسیم. در این حالت باید سعی کنیم مأیوس نشویم. این مرحله یکی از مراحل حساس و زمان‌گیر است.

۳- نوشتن دقیق راه‌حل‌ها پس از حل شدن مسئله. مطمئن شدن از اینکه می‌توانیم این راه‌حل‌ها را به روشنی و بدون ابهام با دیگران به مباحثه بگذاریم.

۴- برگشتن به عقب و بررسی کارهایی که انجام داده‌ایم. باید مطمئن شویم که جواب ما صحیح است. (به روش‌های ابتکاری برای بررسی آن فکر کنید) همچنین در این مرحله باید به ارائه راه‌حل‌های دیگر مسئله و امکان تعمیم نتایج به‌دست آمده نیز پرداخت.

استراتژی‌های حل مسئله ما ممکن است شامل موارد زیر باشد:

- ترسیم یک نمودار یا یک شکل.
- بررسی موارد خاص و مثال‌های ساده‌تری از مسئله.
- بررسی مسائل مرتبط با مسئله.
- بررسی الگوهای مناسب.
- ترسیم جدولی برای داده‌ها و آنچه که درباره مسئله می‌دانیم.
- نامگذاری مجهولات مسئله و تبدیل شرایط آن به صورت معادلاتی بر حسب این مجهولات و یا به‌طورکلّی‌تر، به‌کارگیری ابزارهای ریاضی که در جبر یا درسهای دیگر آموخته‌ایم.
- تعیین زیر اهداف (من می‌توانم این مسئله را حل کنم، اگر بتوانم چنین و چنان کنم).
- استفاده از روش آزمون و خطا که معمولاً روش «حدس بزن و سپس چک بکن» نامیده می‌شود.
- استفاده از روش استدلال برعکس و به دنبال مثال نقض گشتن. اگر این مسئله غلط باشد، آنگاه چه اتفاقی می‌افتد؟

- کنار گذاشتن روشهای معمول در حوزه آن مسئله و امتحان کردن روشی کاملاً متفاوت. (به‌طورمثال کنار گذاشتن روش حذفی و به‌کار بردن روش کرامر، روش معکوس ماتریس و یا حتی یک روش ابتکاری دیگر برای حل دستگاه معادلات خطی).
- کنار گذاشتن مسئله برای مدتی و سپس مراجعه به آن.

مطالب بالا در مورد فرایند حل مسئله را هر چند وقت یکبار مرور کنید.

حال به ارائه مثالی در مورد نحوه به‌کارگیری فرایند بالا در مورد حل مسئله‌ای در ریاضیات می‌پردازیم.
فرض کنید بخواهیم تعداد مربع‌های با اندازه‌های دلخواه را در یک صفحه شطرنج بیابیم. یعنی تمام ۶۴ مربع کوچک، همچنین مربع‌های ۲×۲ و مربع‌های ۳×۳ تا بزرگ‌ترین مربع یعنی مربع ۸×۸ (خود صفحه شطرنج). باید تصویری کشید تا متوجه بشویم که چه اتفاقی در حال جریان است. در اینجا بهتر است مسئله را با یک حالت کوچک‌تر یعنی صفحه شطرنجی که ۲×۲ باشد، شروع کنیم. بدیهی است که در این حالت ۴ مربع کوچک و یک مربع کلّی وجود دارد و در نتیجه ۱+۴=۵ مربع وجود دارد. حال صفحه شطرنجی را در نظر می‌گیریم که ۳×۳ باشد. در این حالت ۹ مربع کوچک، ۴ مربع ۲×۲ و یک مربع ۳×۳ وجود دارد و در نتیجه ۱+۴+۹=۱۴ مربع وجود دارد. به نظر می‌رسد که الگویی در حال استخراج می‌باشد، یعنی با جمع کردن اعداد مربع کامل جواب به‌دست می‌آید. بنابراین حدس می‌زنیم که برای صفحه شطرنج ۴×۴ تعداد مربع‌های موجود عبارت است از: ۱+۴+۹+۱۶=۳۰. حال یک صفحه شطرنج ۴×۴ می‌کشیم و این حدس خود را بررسی می‌کنیم. در واقع می‌توانیم ببینیم چه اتفاقی در حال جریان است. نحوه قرار گرفتن مربع K×K بالایی در سمت چپ و در گوشه صفحه شطرنج ۴×۴، با انتخاب هر یک از ۵-K ردیف اول و ۵-K ستون از صفحه به ازای K=۱،۲،۳،۴ به‌دست می‌آید. بنابراین $(5-K)^2$ مربع K×K در یک صفحه شطرنجی ۴×۴ وجود دارد و در نتیجه تعداد کل مربع‌های موجود عبارت خواهد بود از $1^2+2^2+3^2+4^2=30$. بنابراین مسئله حل شده است و می‌توانیم یک جواب به همراه علت درستی آن ارائه دهیم. یعنی تعداد کل مربع‌های موجود در صفحه شطرنج عبارت خواهد بود از $1^2+2^2+3^2+\ldots+8^2=204$. در مرحله برگشتن به عقب (مرحله چهارم) متوجه می‌شویم که برای یک صفحه شطرنج n×n تعداد مربع‌های موجود عبارت است از $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

برای ادامه دادن و عمومی‌تر کردن نتایج راه‌حل به‌دست آمده، ممکن است سؤالاتی از این قبیل مطرح کنیم: تعداد مستطیل‌های موجود در صفحه شطرنج را بیابیم و یا اینکه به جای در نظر گرفتن صفحه شطرنج مربعی، صفحه شطرنجی مستطیل شکل را در نظر بگیریم و یا تعداد مثلث‌ها را در یک صفحه شطرنج مثلثی شکل بیابیم. و یا حتی به فضای ۳- بعدی برویم و تعداد مکعب‌ها را در یک مکعب بزرگ‌تر بشماریم.

۱-۳-۶) آماده شدن برای امتحان:

در این قسمت توصیه‌هایی برای کسب آمادگی برای امتحان ارائه می‌شود.

- **از همان روز اول به فکر باشید.** همواره باید برای امتحان بعدی آماده بود. هر روز کمی وقت برای این امر اختصاص دهید. حداقل ۲ یا ۳ روز قبل از روز امتحان مطالعه جدی خود را شروع کنید و منتظر شب امتحان نباشید.
- **شب قبل از امتحان به خوبی استراحت کنید.** سرحال بودن در روز امتحان برای کسب موفقیت در آزمون ضروری است.
- **نرفتن به سراغ مهارت جدید.** در زمان مرور نهایی جهت آماده شدن برای امتحان، نباید سعی کرد مهارت جدیدی را آموخت. مهارت‌هایی را که آموخته‌اید تمرین کنید، تا سرعت و اعتماد به نفس شما افزایش یابد.
- **لیستی از مفاهیم و فرمول‌های مهم تهیه کنید.** یادداشت‌های خود را مرور کنید و یک لیست کامل و دقیق از مفاهیم و فرمول‌های مهم بسازید. مطمئن شوید این فرمول‌ها را فهمیده‌اید و از آن مهم‌تر، اینکه می‌توانید آنها را به‌کار برید.
- **تکالیف را مجدداً حل کنید.** فقط به روخوانی جواب تکالیف و مسائل بسنده نکنید. بلکه از اول آنها را حل کنید. راه‌حل‌ها را به چندین مرحله تقسیم کنید تا به خاطرسپاری و یادگرفتن آنها ساده‌تر شود. مطمئن شوید که بدون نگاه کردن به راه‌حل‌ها می‌توانید آنها را حل کنید.
- **مثال‌های جزوه و کتاب را مجدداً حل کنید.** توجه داشته باشید که در اکثر کتاب‌ها در بخش پایانی هر فصل، یک قسمت خلاصه‌بندی آن فصل وجود دارد. معمولاً در این قسمت سؤالات زیادی وجود دارد. در ضمن در طول ترم معلم نیز سؤالاتی را در هر جلسه مطرح کرده‌است. این سؤالات را مجدداً خودتان حل کنید.
- **ویژگیهای مشترک مسائل را بیابید.** به هنگام انجام دادن تکالیف در طول ترم، می‌دانید که هر سؤال از کدام بخش کتاب یا جزوه طرح شده است. این امر به شما

کمک می‌کند تا سرنخ‌هایی از راه‌حل‌ها به‌دست بیاورید. در حالیکه در یک امتحان، از چنین کمکی محروم هستید. بنابراین در هنگام مرور مسائل سعی کنید وجه مشترک سؤالات را بیابید تا در امتحان آنها را تشخیص دهید.

- **الگوهای کلّی را بیابید.** نکات ارائه شده در جلسات درسی را به عنوان یک واحد کلّی در نظر بگیرید. به شباهت‌ها و تفاوت‌های مباحث ارائه شده دقت کنید و به دنبال الگوهای کلّی باشید که کدام بخش به بخش‌های دیگر وابسته است. مثلاً آیا ارتباطی بین مشتق و انتگرال وجود دارد؟ البته الگوهایی که شما خودتان یافته‌اید، بیشترین کمک را به شما خواهند کرد.
- **یک امتحان آزمایشی برگزار کنید.** مجموعه‌ای از سؤالات را جمع آوری کنید و به عنوان یک امتحان، در مدت زمانی معین، بدون استفاده از کتاب یا جزوه به آنها پاسخ دهید.
- **ساختار کلّی اثبات را بیاموزید.** گاهی در امتحانات از شما خواسته می‌شود تا اثبات ارائه شده در جلسات درسی را بازنویسی کنید. برای انجام دادن بهتر این کار، باید به این نکته توجه کنید: *«سعی نکنید یک اثبات را حرف به حرف یاد بگیرید بلکه سعی کنید ساختار کلّی اثبات را بیاموزید و سپس به تدریج به جزئیات برسید».* البته این روش، زمان بیشتری می‌گیرد. معمولاً در جلسات درسی معلم به این ساختارهای کلّی اشاره می‌کند. امّا این مهم است که خودتان ساختارهای کلّی را بیابید و درک کنید. زیرا در این صورت این ساختارها را به راحتی و به درستی به‌کار خواهید برد. همانطوریکه به مرور به تجربه شما افزوده می‌شود، ساختارهای کلّی مطرح شده در مورد موضوعات را نیز بهتر درک خواهید کرد.

۱-۳-۷) جلسه امتحان:

شرکت در جلسه امتحان یکی از مهم‌ترین کارهایی است که در یک کلاس ریاضی انجام می‌دهید و باید به بهترین نحو ممکن در آن ظاهر شوید. در این قسمت چندین توصیه برای با موفقیت پشت سرگذاشتن جلسه امتحان ارائه می‌کنیم.

- **راحت و آسوده باشید.** این اولین قدم برای کسب موفقیت در امتحان می‌باشد. در عین حال متأسفانه این امر یکی از سخت‌ترین کارهایی است که باید انجام دهید. هرچه مضطرب‌تر باشید، به همان میزان احتمال فراموش کردن فرمول‌ها و مفاهیم مهم، بالاتر می‌رود. بدترین حالت این است که از امتحان وحشت داشته باشید.

- **برنامه‌ریزی شده به سؤالات پاسخ دهید.** باید سه بار برگه سؤالات را بازبینی کنید. در بار اول به سراغ مسائلی بروید که مطمئن هستید جواب آنها را می‌توانید به‌دست آورید. در بار دوم باید مسائلی را در نظر بگیرید که فکر می‌کنید می‌توانید آنها را حل کنید، امّا از این موضوع مطمئن هم نیستید. در بار آخر به سراغ سؤالات باقی‌مانده بروید. بدین ترتیب تمام امتیاز و نمره ممکن را به‌دست می‌آورید.
- **از زمان استفاده بهینه کنید.** به ساعت خود نگاه کنید. سعی نکنید نمره کامل یک سؤال را با صرف وقت زیاد و نامتعارف (مثلاً کل وقت امتحان را فقط به یک سؤال فکر کنید) روی آن سؤال به‌دست آورید! زیرا در این حالت زمان کافی برای پاسخگویی به مسائل دیگر در اختیار ندارید و بدین ترتیب فرصت حل کردن سؤالات ساده بعدی را از دست می‌دهید.
- **مسئله را برای مدتی کنار بگذارید.** اگر در حل کردن یک مسئله دچار مشکل شدید، نتایج کارتان را تا همان مرحله مرتب و تمیز بنویسید و مسئله را رها کنید. به مسئله دیگری بپردازید. مجدداً به آن مسئله قبلی مراجعه کنید و آن را کامل کنید.
- **تمام جزئیات راه‌حل را در برگه پاسخنامه بیاورید.** تا حد ممکن تصحیح برگه امتحانی خودتان را برای معلم ساده کنید تا او دقیق‌تر شما را ارزیابی کند. در استدلال‌های خود دقت کنید. حتی اگر پاسخ شما غلط باشد، معمولاً معلم برای قسمتهای جزئی و درست راه‌حل شما نمره‌ای در نظر می‌گیرد. تشخیص اینکه آیا شما مسئله و جواب را فهمیده‌اید یا نه را به حدس معلم وا نگذارید، تمام جزئیات راه‌حل خودتان را بنویسید.
- **هیچ سؤالی را بدون پاسخ نگذارید.** حتی اگر پاسخ کامل را نمی‌دانید، هر آنچه را که از سؤال فهمیده‌اید، بنویسید. زیرا ممکن است معلم برای همین جواب ناقص نیز نمره‌ای قائل شود. امّا مطمئناً به سؤال بی‌پاسخ، هیچ نمره‌ای داده نخواهد شد.
- **مسئله را خوب بخوانید.** قبل از اینکه شروع به پاسخگویی کنید. مطمئن شوید که صورت سؤال را خوب خوانده‌اید. اگر معلم از شما خواسته است جواب‌ها را به یک صورت خاصی بنویسید، مطمئن شوید که این کار را کرده‌اید.
- **قبل از تحویل دادن برگه پاسخنامه، جواب‌های خود را مجدداً بررسی کنید.**

برای مطالعه بیشتر در زمینه نحوه مطالعه ریاضیات عمومی، توصیه می‌شود مرجع [۴] در فهرست منابع در انتهای کتاب را نیز مطالعه کنید.

فصل دوم

چگونه اثبات کنیم؟

«تراژدی ریاضیات زمانی است که یک حدس زیبا

با یک واقعیت زشت خراب شود.»

راهنمایی برای ارائه اثبات:

اگرچه هیچ الگوریتمی برای اثبات قضایا وجود ندارد، این به آن معنا نیست که ارائه اثبات کاملاً یک هنر محسوب می‌شود، بطوریکه فقط کسانی که دارای استعداد، نبوغ و درک عالی باشند، احتمالاً قادر به انجام دادن آن هستند. اثبات‌هایی که در دروس مقدماتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود، معمولاً در یکی از دسته‌های شناخته شده قرار دارند. هر دسته‌ای رویکرد سیستماتیک خاص خود را دارد که می‌توان آن را تشریح نمود. این رویکردها قابل پیروی کردن می‌باشند و به تدریج می‌توان در آنها ماهر شد. در اینجا برخی از این دسته‌ها و تاکتیک‌های به‌کارگرفته شده در آنها را ارائه می‌دهیم. مطالب ارائه شده با هدف کمک به شما در جهت آغاز به خلق نمودن اثبات‌های خود و همچنین درک بهتر اثبات‌های دیگران می‌باشد.

۲-۱) جبر گزاره‌ها و استنتاج

یکی از آفت‌های آموزشی دانشجویان در بدو ورود به دانشگاه رویکرد حفظی و تستی به مسائل می‌باشد، بطوریکه اثبات کردن درستی یک گزاره، امری ناآشنا و غیر متعارف برای آنان شده است. قبل از اینکه به روش‌های اثبات بپردازیم، مختصری دربارهٔ واژهٔ «استنتاج» بحث می‌کنیم. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که می‌تواند درست و یا نادرست باشد، یک گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروفی مانند p ، q و r نمایش می‌دهیم. گزاره‌ای که همواره درست باشد را یک توتولوژی می‌نامیم. گزاره‌ای که ارزش آن دقیقاً عکس گزاره p باشد را نقیض گزاره p می‌نامیم و آن‌را با نماد $\neg p$ نمایش می‌دهیم. با در دست داشتن دو گزاره مانند p و q می‌توانیم گزاره‌های مرکبی مانند $p \wedge q$ (ترکیب عطفی)، $p \vee q$ (ترکیب فصلی)، $p \to q$ (ترکیب شرطی) و $p \leftrightarrow q$ (ترکیب دو شرطی) بسازیم. ارزش درستی و نادرستی این گزاره‌های مرکب بر اساس ارزش درستی و نادرستی گزاره‌های p و q بر اساس جدول زیر بیان می‌شود:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

با توجه به ستون سوم جدول بالا نتیجه می‌گردد که ترکیب عطفی فقط زمانی درست است که تک‌تک مؤلفه‌های آن درست باشند. می‌توان این موضوع را با بستن سری دو کلید برق متناظر نمود. زیرا در دو کلید برق که سری شده‌اند، لامپ فقط زمانی روشن است که هر دو کلید متصل باشند. همچنین با توجه به ستون چهارم جدول بالا نتیجه می‌گردد که ترکیب فصلی فقط زمانی نادرست است که تک‌تک مؤلفه‌های آن نادرست باشند. می‌توان این موضوع را با بستن موازی دو کلید برق متناظر نمود. زیرا در دو کلید برق که موازی شده‌اند، لامپ فقط زمانی خاموش است که هر دو کلید قطع باشند. تناظرهای بالا مبنای کاربرد جبرگزاره‌ها در مبحث مدارهای الکتریکی می‌باشند.

با استفادهٔ مجدد از ترکیب‌های بالا می‌توان گزاره‌های مرکب پیچیده‌تری مانند $(p \wedge q) \vee p$، $\neg(p \vee q)$ و $\neg p \wedge \neg q$ ساخت. به عنوان یک تمرین ساده می‌توانیم نشان دهیم که ستون‌های آخر جدولِ ارزشیِ $\neg(p \vee q)$ و $\neg p \wedge \neg q$ یکی می‌باشند. در حالت کلّی اگر ستون‌های آخر جدول ارزشی دو گزاره مرکب P و Q با هم یکی باشند، می‌گوییم آن دو گزاره *هم‌ارز* می‌باشند و می‌نویسیم $P \equiv Q$. در دنیای گزاره‌ها، دو گزارهٔ هم‌ارز مانند دو برادر دو قلو می‌باشند که از هم تشخیص داده نمی‌شوند. بنابراین هر یک را می‌توان به جای دیگری به‌کاربرد.

برخی از هم‌ارزی‌های مهم در جبر گزاره‌ها عبارتند از:

الف) قوانین دمورگان: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ و $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

ب) قانون عکسِ نقیض: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

در واقع قانون عکسِ نقیض می‌گوید اینکه « اگر p اتفاق افتد، آنگاه q اتفاق می‌افتد.» معادل است با اینکه « اگر q اتفاق نیفتد، آنگاه p اتفاق نیفتاده‌است».

به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) اگر باران ببارد، آنگاه زمین خیس می‌شود. باران باریده‌است. بنابراین زمین خیس خواهد بود.

ب) اگر به میزان کافی و صحیح درس بخوانم، آنگاه قبول می‌شوم. به میزان کافی و صحیح درس خوانده‌ام. بنابراین قبول خواهم شد.

آیا چیز مشترکی در (الف) و (ب) وجود دارد؟ اگر در (الف) «باران می‌بارد.» و «زمین خیس می‌شود.» را به ترتیب p و q بنامیم، آنگاه (الف) را می‌توانیم به فرم زیر بنویسیم.

$$«((p \to q) \wedge p) \to q»$$

به‌طورمشابه (ب) نیز به همین فرم بیان می‌شود. به عنوان یک تمرین ساده می‌توان نشان داد که $((p \to q) \wedge p) \to q$ یک توتولوژی است، یعنی در ستون آخر جدول ارزشی آن فقط «د» می‌باشد. به عبارت دیگر صرف نظر از اینکه ارزش p و q چه باشند، همواره ارزش $((p \to q) \wedge p) \to q$ درست می‌باشد. در این حالت می‌گوییم گزاره q از گزاره‌های $p \to q$ و p نتیجه می‌شود و می‌نویسیم $(p \to q) \wedge p \mapsto q$ و آن‌را یک استنتاج معتبر می‌نامیم. توجه کنید که معتبر بودن این استنتاج به این معنا است که استدلال صورت گرفته در (الف) و (ب) از لحاظ منطقی صحیح می‌باشد. ***بعلاوه هر استدلال دیگری که به صورت استنتاج $(p \to q) \wedge p \mapsto q$ بیان شود، نیز صحیح خواهد بود.*** یعنی به نوعی یک صرف‌جویی در ارائه اثبات برای استدلال‌های مشابه با (الف) به‌دست آمده است. نقش و اهمیت استنتاج‌ها در ریاضیات، همین صرف‌جویی در ارائه و بررسی صحت اثبات‌ها است. استنتاج‌های معروف و پرکاربرد عبارتند از:

انتزاع مقدم: $(p \to q) \wedge p \mapsto q$ ادخال فاصل: $p \mapsto p \vee q$

حذف عاطف: $p \wedge q \mapsto p$ قیاس: $(p \to q) \wedge (q \to r) \mapsto p \to r$

رفع مؤلفه: $(p \vee q) \wedge \neg p \mapsto q$ نقیض انتزاع مقدم: $(p \to q) \wedge \neg q \mapsto \neg p$

این قوانین کاملاً طبیعی هستند. به‌طورمثال قانون استنتاج رفع مؤلفه می‌گوید: «اگر بدانیم $p \vee q$ درست است و p درست نباشد، آنگاه q درست خواهد بود». البته به کمک جدول ارزشی نیز می‌توان به صحت این استنتاج‌ها اطمینان پیدا کرد. به‌طورمثال جدول ارزشی قانون استنتاج رفع مؤلفه عبارت است از:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

۲-۲) سورها:

اگر در یک جمله خبری یک متغیر موجود باشد، بطوریکه درستی و نادرستی آن جمله خبری با تغییر آن متغیر، تغییر کند، آنگاه آن جمله خبری را یک *گزاره‌نما* می‌نامیم. به‌طورمثال «x یک عدد زوج است.» یک گزاره‌نما با متغیر x و «x از y کوچکتر است.» یک گزاره‌نما با متغیرهای x و y می‌باشند. در گزاره‌نمای «x یک عدد زوج است.» اگر $x = 4$ باشد، آنگاه آن تبدیل به گزارهٔ درست و اگر $x = 5$ باشد، آنگاه آن تبدیل به گزارهٔ نادرست می‌شود. معمولاً گزاره‌نماها را با نمادهایی مانند $P(x)$ و یا $Q(x, y)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ای که متغیرهای یک گزاره‌نما در آن تغییر می‌کنند را *عالم‌سخن* آن گزاره‌نما می‌نامیم. به‌طورمثال عالم‌سخن گزاره‌نمای «x یک عدد زوج است.» را می‌توانیم مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد صحیح در نظر بگیریم.

با تعیین محدوده‌ای از عالم‌سخنِ یک گزاره‌نما با «سورها» می‌توان آن گزاره‌نما را تبدیل به یک گزاره نمود. سورهای متداول عبارتند از:

سور یگانه	سور صفر	سور وجودی	سور عمومی	:نام
$\exists!$	$\nexists$	$\exists$	$\forall$	:علامت
یک و فقط یک	هیچ یک	برخی، بعضی	هر، همه	:نحوه تلفظ

سور عمومی:

گزاره $\forall x P(x)$ می‌گوید تمام اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را دارند. طبیعی است که $\forall x P(x)$ زمانی درست باشد که واقعاً تمام اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را داشته باشند. به‌طورمثال گزاره $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$ یک گزاره درست می‌باشد. امّا $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 > 0$ نادرست است، زیرا یک عضو از عالم‌سخن؛ یعنی صفر، خاصیت مثبت بودن را ندارد. بنابراین اگر حتی یکی از اعضای عالم‌سخن نیز خاصیت P را نداشته باشد، آنگاه گزاره $\forall x P(x)$ نادرست خواهد بود.

سور وجودی:

گزاره $\exists x P(x)$ می‌گوید برخی از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را دارند. طبیعی است که $\exists x P(x)$ زمانی درست باشد که دست‌کم یکی از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را داشته باشد. به‌طورمثال گزاره $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 - 2 = 0$ یک گزاره درست می‌باشد. امّا $\exists x \in \mathbb{Q} \ x^2 - 2 = 0$ نادرست است، زیرا هیچ عدد گویایی در

معادله $x^2-2=0$ صدق نمی‌کند. بنابراین اگر هیچ یک از اعضای عالم‌سخن خاصیت P را نداشته باشد، آنگاه گزاره $\exists x P(x)$ نادرست خواهد بود.

سور عمومی را با نماد « $\forall$ » نمایش می‌دهند که از واژه انگلیسی «ALL» به معنای (همه، هر) گرفته شده است. سور وجودی را با نماد « $\exists$ » نمایش می‌دهند که از واژه انگلیسی «Exist» به معنای «وجود دارد» گرفته شده است.
با این نمادها گزارهٔ «برای هر عدد مثبت a یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که a از آن کوچک‌تر است» به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall a>0\ \exists b>0 \quad b>a$$

همچنین گزارهٔ «یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که هر عدد مثبت a از آن کوچک‌تر است.» به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists b>0\ \forall a>0 \quad b>a$$

سور صفر:
گزاره $\nexists x P(x)$ می‌گوید هیچ یک از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را ندارد. طبیعی است که $\nexists x P(x)$ زمانی درست باشد که واقعاً هیچ یک از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را نداشته باشد. به‌طورمثال گزاره $\nexists x \in \mathbb{R}\ \ x^2<0$ یک گزاره درست می‌باشد. امّا $\nexists x \in \mathbb{R}\ \ x^2 \le 0$ نادرست است، زیرا یک عضو از عالم‌سخن؛ یعنی صفر، خاصیت نامثبت بودن را دارد. بنابراین اگر حتی یکی از اعضای عالم‌سخن نیز خاصیت P را داشته باشد، آنگاه گزاره $\nexists x P(x)$ نادرست خواهد بود.

سور یگانه:
گزاره $\exists! x P(x)$ می‌گوید یک و فقط یکی از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را دارد. طبیعی است که $\exists! x P(x)$ زمانی درست باشد که دقیقاً یک و فقط یکی از اعضای عالم‌سخن گزاره‌نمای $P(x)$ خاصیت P را داشته باشد. به‌طورمثال گزاره $\exists! x \in \mathbb{R}\ \ x-2=0$ یک گزاره درست می‌باشد. امّا $\exists! x \in \mathbb{R}\ \ x^2-2=0$ نادرست است، زیرا دو عدد حقیقی در معادله $x^2-2=0$ صدق می‌کنند. بنابراین اگر هیچ یک از اعضای عالم‌سخن خاصیت P را نداشته باشد، و یا بیش از یکی از اعضای عالم‌سخن خاصیت P را داشته باشند، آنگاه گزاره $\exists! x P(x)$ نادرست خواهد بود.

تمرینات زیر را حل کنید:

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\quad x \le y$

ب) $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\quad x \le y$

ج) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad \le \delta \le \varepsilon$

د) $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\quad \le \delta \le \varepsilon$

ه) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}\quad y = x^3$

و) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists! x \in \mathbb{R}\quad y = x^2$

ز) $\nexists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\quad y < x$

ح) $\forall y \in \mathbb{N}\ \nexists x \in \mathbb{N}\quad y < x$

ط) $\forall x > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\quad nx > 1$

ی) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! k \in Z\ k \le x < k+1$

۲- گزاره‌های زیر را به زبان سورها بیان کنید:

الف) هر عدد حقیقی حداقل از یک عدد حقیقی دیگر بزرگ‌تر است.

ب) یک عدد حقیقی وجود دارد که از هر عدد حقیقی دیگر بزرگ‌تر است.

ج) یک و فقط یک عدد صحیح بین ۳/۵ و۲/۶ قرار دارد.

د) هر عدد طبیعی از هر عدد صحیح منفی بزرگ‌تر است.

ه) بین هر دو عدد حقیقی، یک عدد گویا وجود دارد.

و) برای هر عدد حقیقی مثبت وجود دارد یک عدد طبیعی که حاصل‌ضرب آنها از یک بزرگ‌تر است.

ز) بین هر دو عدد گویا، یک عدد گنگ وجود دارد.

ط) اگر یک عدد حقیقی از پنج بزرگ‌تر باشد، آنگاه از چهار نیز بزرگ‌تر است.

ی) اگر یک عدد حقیقی از هر عدد حقیقی مثبت کوچکتر باشد، آنگاه آن عدد برابر صفر است.

قبل از اینکه به روش‌های اثبات بپردازیم، یک نکته دیگر را ذکر می‌کنیم. در ادامه برای روشن شدن مباحث مطرح شده، آنها را در مورد نظریه مجموعه‌ها که قابل فهم‌تر و عمومی‌تر است، به‌کار می‌بریم. امیدواریم در موارد مشابه و در زمینه‌های دیگر دانشجویان خود بتوانند از این رویکردهای اثبات، به درستی استفاده کنند.

۲-۳) استنتاج احکامی به فرم «برای هر x اگر $P(x)$، آنگاه $Q(x)$».

در ریاضیات برای تعریف نمودنِ بسیاری از مفاهیم ریاضی از ساختار $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ استفاده می‌شود که نمایش دهندهٔ این ایده می‌باشد که «همه Pها Q هم هستند.» برخی از تعاریف به این فرم، عبارتند از:

(i) مجموعه A یک زیرمجموعهٔ مجموعه B است اگر و فقط اگر $\forall x[(x \in A) \to (x \in B)]$ که با نماد $A \subseteq B$ نمایش داده می‌شود و به صورت «A یک زیرمجموعهٔ B است اگر و فقط اگر برای هر x، اگر x عضو A باشد، عضو B نیز باشد» خوانده می‌شود. به عبارت دیگر A یک زیرمجموعه B است اگر و فقط اگر هر عضو A یک عضو B نیز باشد.

(ii) تابع f یک به یک است اگر و فقط اگر برای هر x_1 و x_2 در دامنه f اگر $f(x_1) = f(x_2)$، آنگاه $x_1 = x_2$.

(iii) رابطه R روی مجموعه A متقارن است اگر و فقط برای هر $x, y \in A$ اگر $(x, y) \in R$ آنگاه $(y, x) \in R$.

بسیاری از گزاره‌های ریاضی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا آنها را اثبات کنند، دارای حکمی می‌باشند که در آن یک تعریف به صورت بالا وجود دارد. به عنوان مثال:

(a) ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $A \subseteq A \bigcup B$.

(b) ثابت کنید برای مجموعه‌های X، Y و Z اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$.

(c) ثابت کنید هر تابعی که دامنه و برد آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد و اکیداً صعودی باشد، یک به یک است.

(d) ثابت کنید اشتراک دو رابطهٔ متقارن R_1 و R_2 روی مجموعه A، نیز یک رابطهٔ متقارن می‌باشد.

توجه کنید که حکم خواسته شده در هر یک از گزاره‌های (a) تا (d) عبارتی بر حسب یکی از تعاریف ارائه شده در (i) تا (iii) می‌باشد. بعلاوه گزاره‌های (b)، (c) و (d) هر یک دارای یک فرض می‌باشند که ما اجازه داریم آن را درست تلقی کنیم و طبیعی است که این درست تلقی نمودن فرض گزاره‌ها، نقش مهمی در رسیدن به حکم آنها ایفا کند. حال با پرداختن به روش «اثبات مستقیم» که روشی معمول و پر کاربرد می‌باشد، بحث خود را در مورد شیوه‌های ارائه اثبات آغاز می‌کنیم.

۲-۳-۱) *اثبات مستقیم.*

استدالالی که در آن، گزاره به فرم بیان اولیه‌اش اثبات گردد، اثبات به روش مستقیم نامیده می‌شود. در این بخش چند راهکار برای ایجاد و خلق اثبات‌ها به روش مستقیم ارائه می‌کنیم. معمولاً در اولین تلاش برای اثبات درستی یک گزاره، سعی در ارائه نوعی از اثبات مستقیم می‌کنیم. در مقایسه با اثبات مستقیم ما در اثبات غیرمستقیمِ یک گزاره، در واقع یک فرم هم‌ارزِ منطقی آن گزاره را ثابت می‌کنیم. راهکارهای مربوط به ارائه اثبات غیرمستقیم در بخش بعدی، مطرح خواهند شد.

۲-۳-۱-۱) *گزاره‌هایی که هیچ فرضی ندارند.*

اثبات مستقیم گزاره‌هایی شبیه (a) که هیچ فرضی ندارند، دارای ساختار ساده‌تری در مقایسه با اثبات‌های مورد نیاز برای گزاره‌های (b) تا (d) است. مثال‌های ۱و۲ را برای روشن ساختن اثبات‌ها در این حالتِ ساده در نظر گرفته‌ایم.

مثال ۱. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $A \subseteq A \bigcup B$.

جواب: فرض کنیم مجموعه‌های A و B دلخواه باشند. برای اثبات $A \subseteq A \bigcup B$، فرض می‌کنیم x یک عنصر دلخواه انتخاب شده از A باشد. یعنی فرض می‌کنیم که $x \in A$. باید نشان دهیم $x \in A \bigcup B$. با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه، این بدین معناست که باید ثابت کنیم «$x \in A$ یا $x \in B$». از آنجاییکه بنا به فرض می‌دانیم $x \in A$، در نتیجه حکم مطلوب $x \in A$ یا $x \in B$ بی‌درنگ به‌دست می‌آید.
اجازه دهید اثبات ارائه شده در مثال را تشریح کرده و آنچه را که انجام داده‌ایم، تحلیل کنیم. نقطه شروع ما یعنی «... فرض کنیم $x \in A$...» یک استفاده عملی از یکی از رویکردهای پر کاربرد و رایج برای ارائه اثبات می‌باشد که مشهور به «*روش عضوگیری*» است. رویکرد مقدماتی برای استنتاج حکمی به فرم $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ عبارت است از انتخاب یک شیء دلخواه که به آن یک اسم خاص مثل x می‌دهیم و بعلاوه فرض اینکه $P(x)$ درست باشد. هدف این است که نشان دهیم در این صورت $Q(x)$ نیز باید درست باشد. در مثال ۱، $P(x)$ عبارت است از $x \in A$ و $Q(x)$ حکم مطلوب، یعنی $x \in A \bigcup B$ می‌باشد.

نکات زیر در این اثبات مشهود می‌باشند:

الف) شیء x در روند اثبات، ثابت می‌باشد. امّا در ابتدای اثبات به‌طوردلخواه هر عضوی از عالم‌سخنِ گزاره‌نماهای $P(x)$ و $Q(x)$ می‌تواند انتخاب شود و هیچ مقدار خاصی به x اختصاص داده نمی‌شود. ترجیحاً برای هر شیء که در شرط P صدق می‌کند نام x را قرار داده‌ایم و این اسم را برای دنبال کردن شیء مذکور در طول روند اثبات به‌کار می‌بریم. قدرت این رویکرد در این است که هر نتیجه‌ای را که درباره این x به‌دست می‌آید، می‌توان برای هر شیء a که برای آن P درست باشد، نیز به‌کار برد.

ب) مرحله اول اثبات، مرحله «چارچوب‌بندی اثبات» نامیده می‌شود. در این مرحله یک x انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $P(x)$ درست باشد و آنچه که به معنای درستی $Q(x)$ می‌باشد را با جزئیات بیشتری می‌نویسیم (در مثال ۱؛ برای اثبات $x \in A \bigcup B$ باید ثابت کنیم $x \in A$ یا $x \in B$).

آموختن روند مرحله چارچوب‌بندی یک اثبات، یک شروع تقریباً استاندارد، قابل پیش‌بینی و نسبتاً ماشین‌وار بوده و مقدمه‌ای است برای اثبات مستقیمی که پس از این مرحله ارائه می‌شود. بعلاوه هرگاه این جزئیات را نوشته باشیم مابقی اثبات، یعنی مسیر رسیدن از $P(x)$ به حکم مطلوب $Q(x)$، گاهی بدیهی می‌باشد.

ج) در اثبات ارائه شده برای مثال ۱، مسیر بین آنچه که ما فرض کردیم (یعنی $x \in A$) و حکم ما (یعنی $x \in A \bigcup B$) بدیهی بود. در اثبات، این نکته را با لفظ «بی‌درنگ» بیان کردیم. امّا در واقع چه چیزی برای توجیه این نتیجه‌گیری بکار رفته است؟ بله، قانون استنتاجِ $p \to p \vee q$. در حقیقت قانون «ادخال فاصل» ابزار منطقی پس زمینه‌ای می‌باشد که به این مرحله اعتبار بخشیده است. در اثبات‌های نمونه‌ای که در ادامه ارائه خواهیم داد، به‌طورصریح به قوانین استنتاجی که به‌کار برده می‌شوند اشاره خواهیم کرد (با پیچیده‌تر شدن اثبات‌ها این اشاره‌ها را کمتر خواهیم نمود). البته شیوه رایج، به‌کاربردن قوانین استنتاج به‌طورغیر صریح و بدون اشاره‌ای خاص به آنها می‌باشد.

برای کسب مهارت بیشتر در ارائه اثبات‌ها نیاز دارید تا بدانید چگونه و چه زمانی این قوانین استنتاج را به‌کار ببرید.

مثال ۲. ثابت کنید برای مجموعه‌های X و Y داریم $X \bigcap (Y \bigcup X^c) \subseteq Y$ که در آن X^c متمم مجموعه X می‌باشد.

بحث و جواب: فرض کنیم X و Y مجموعه‌های دلخواهی باشند. برای اثبات $X\bigcap(Y\bigcup X^c)\subseteq Y$ فرض می‌کنیم a یک عضو دلخواه انتخابی از $X\bigcap(Y\bigcup X^c)$ باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم $a\in X\bigcap(Y\bigcup X^c)$. باید نشان دهیم $a\in Y$. در واقع چارچوب اثبات طراحی شد. حال باید بفهمیم چگونه می‌توان از فرض به حکم رسید. برای این منظور با تحلیل آنچه که فرض ما معنی می‌دهد، آغاز می‌کنیم.

از آنجائیکه $a\in X\bigcap(Y\bigcup X^c)$، بنابراین طبق تعریف اشتراک دو مجموعه، $a\in Y$ و $a\in Y\bigcup X^c$ که دومی به این معناست که «$a\in Y$ یا $a\in X^c$»؛ یا به عبارت دیگر«$a\in Y$ یا $a\notin X$». توجه کنید که $a\in Y$ همان حکم ما می‌باشد. حال آیا می‌توانیم از «$a\in Y$ یا $a\notin X$» حکم یعنی $a\in Y$ را نتیجه بگیریم؟ این امر نیازمند برقراری قانون استنتاجی به صورت $p\vee q\to p$ (عکس قانون ادخال فاصل) می‌باشد. امّا این استنتاج برقرار نیست؛ یعنی $p\vee q\to p$ یک توتولوژی (یعنی یک گزاره همیشه درست) نمی‌باشد. زیرا اگر گزاره p نادرست و گزاره q درست باشد، آنگاه ارزش گزاره $p\vee q\to p$ نادرست خواهد بود. بنابراین رویکرد مذکور محکوم به شکست است.

توجه کنید که با توجه به مفروضات مسئله، نه تنها «$a\in Y$ یا $a\notin X$» درست است بلکه $a\in X$ نیز درست می‌باشد. بنابراین آنچه که از مفروضات می‌دانیم به فرم $(p\vee q)\wedge\neg q$ می‌باشد که در آن p عبارت است از $a\in Y$ و q عبارت است از $a\notin X$ و در نتیجه $\neg q$ عبارت خواهد بود از $a\in X$. آیا حکم ما از این مقدمات به‌دست می‌آید؟ بله. قانون رفع مولفه، یعنی $[(p\vee q)\wedge\neg q]\to p$ ما را قادر می سازد تا به نتیجه p یعنی $a\in Y$ برسیم که حکم مطلوب ما می‌باشد.

حال اثبات بالا را با حذف توضیحات اضافی بازنویسی می‌کنیم. آنچه که می‌ماند نمایشگر یک اثبات می‌باشد که معمولاً در کتاب‌های درسی مشاهده می‌کنیم:

« فرض کنیم مجموعه‌های X و Y دلخواه باشند. برای اثبات $X\bigcap(Y\bigcup X^c)\subseteq Y$ فرض می‌کنیم $a\in X\bigcap(Y\bigcup X^c)$. باید ثابت کنیم $a\in Y$. بنا به فرض می‌دانیم که $a\in X$ و $a\in Y\bigcup X^c$. بنابراین $a\in X$ و «$a\in Y$ یا $a\in X^c$». از آنجائیکه $a\in X$، بنابراین $a\in X^c$ نادرست می‌باشد. بنابراین $a\in Y$ درست است.»

در این مرحله، توصیه می‌شود که تمرین زیر را در این زمینه حل کنید و اصول مطرح شده در مثال‌های ۱و۲ را به‌کار ببرید.

۱- ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $A\bigcap B\subseteq A$.

۲-۳-۱-۲) *گزاره‌هایی که یک یا چند فرض دارند.*

در طی مراحل مختلف یک اثبات، ابزارهای در دسترس ما، برای رسیدن به حکم مطلوب عبارتند از:

الف) فرض‌هایی که در ابتدای مرحله چارچوب‌بندی اثبات عنوان می‌کنیم.

ب) اصول موضوعه (یعنی احکامی که در یک شاخه از علم خودمان آنها را وضع می‌کنیم و به جهت بدیهی بودن، آنها را بدون اثبات می‌پذیریم) و در صورت وجود، قضایایی که قبلاً اثبات کرده‌ایم.

ج) قوانین استنتاج از قبیل $p \to p \vee q$ که در مثال ۱ به‌کار بردیم و $\left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \to p$ که در مثال ۲ به‌کار بردیم.

د) فرض‌هایی که در خود گزاره عنوان شده و انتظار داریم که به عنوان بخشی از استدلال و اثبات به‌کار برده شوند.

مثال بعدی اولین نمونه از گزاره‌هایی می‌باشد که در آنها یک فرض برای به‌دست آوردن حکمی به فرم $\forall x\left[P(x) \to Q(x)\right]$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۳. ثابت کنید برای مجموعه‌های X، Y و Z اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$.

اثبات: فرض کنیم X، Y و Z مجموعه‌های دلخواهی باشند بطوریکه $X \subseteq Y$. برای اثبات حکم یعنی $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$ فرض می‌کنیم $b \in X \bigcap Z$. باید ثابت کنیم $b \in Y \bigcap Z$ و یا به عبارت دیگر «$b \in Y$ و $b \in Z$». در این جا مرحله چارچوب‌بندی اثبات به اتمام می‌رسد. حال باید به فرض گزاره و مفروضات بالا برگردیم و به تحلیل معنای آنها بپردازیم تا دریابیم چه اطلاعاتی را می‌توانیم از آنها استنتاج کنیم. بنا به فرض‌های بالا می‌دانیم که $b \in X$ و $b \in Z$ به ویژه $b \in Z$، یعنی یکی از دو حکم مطلوب ما به‌دست می‌آید. بعلاوه چون $b \in X$ (بخشی از فرض‌های بالا) و از طرف دیگر بنا به فرضِ گزاره، $X \subseteq Y$ (اینجا برای اولین بار از فرض گزاره استفاده می‌شود)، نتیجه می‌گیریم که $b \in Y$، یعنی حکم مطلوب دیگر ما و در نتیجه حکم اصلی ما به‌دست می‌آید.

نکات زیر در این اثبات مشهود می‌باشند:

الف) ما در مرحله چارچوب‌بندی اثبات، روش «عضوگیری» را روی حکم اعمال کرده‌ایم و نه روی فرض گزاره. بنابراین عبارت آغازین ما «... فرض کنیم $b \in X \bigcap Z$...» بود. یک اشتباه

متداول در بین دانشجویان مبتدی شروع کردن استدلال با عبارتی به صورت «...فرض کنیم $b \in X$...» است. یعنی به اشتباه در ابتدای اثبات روی فرض گزاره متمرکز می‌شوند در حالیکه باید این امر روی حکم گزاره صورت بگیرد. توجه کنید که ما فرض گزاره را تقریباً در انتهای اثبات به‌کارگرفته‌ایم!

ب) در آخرین جمله اثبات، از اینکه $b \in X$ و $X \subseteq Y$ نتیجه گرفتیم که $b \in Y$. اجازه دهید ببینیم چرا استنتاج $(b \in X) \to (b \in Y)$ درست می‌باشد (توجه کنید که b همان شیء معین است که ما در طول اثبات با آن کار می‌کنیم). از آنجائیکه $b \in X$ درست است و همچنین گزاره شرطی $b \in X \to b \in Y$ نیز درست می‌باشد، بنابراین $b \in Y$ نیز درست خواهد بود. امّا استنتاج اخیر نیز بنا به قانون استنتاج انتزاع مقدم؛ یعنی $(p \to q) \wedge p \mapsto q$ معتبر است. توجه کنید که این بار هم یک قانون استنتاج، اگر چه به‌طورضمنی، نقش مهمی را در اثبات ما ایفا نموده است.

اصول و قواعد بحث شده در اثبات بالا را می‌توان برای اثبات هر گزاره‌ای به فرم منطقی $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ به‌کار برد و هدف فقط اثبات کردن اینکه مجموعه‌ای زیرمجموعه یک مجموعه دیگر است، نمی‌باشد. مثال‌های ۴و۵ روشنگر همین نکته می‌باشند.

مثال ۴. ثابت کنید هر تابع خطی غیر ثابت $f(x) = Ax + B$ با شرط $A \neq 0$، یک به یک است.

اثبات: فرض کنیم A یک عدد حقیقی غیرصفر باشد و همچنین فرض کنیم x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $f(x_1) = f(x_2)$. باید ثابت کنیم $x_1 = x_2$. از آنجاییکه داریم $f(x_1) = Ax_1 + B$ و $f(x_2) = Ax_2 + B$، نتیجه می‌گیریم که $Ax_1 + B = Ax_2 + B$. با توجه به قوانین جمع و ضرب اعداد حقیقی خواهیم داشت $x_1 = x_2$، همانطوریکه می‌خواستیم.

مثال ۵. ثابت کنید اشتراک دو رابطه متقارن R_1 و R_2 روی مجموعه A، یعنی $R_1 \bigcap R_2$ نیز روی A متقارن است.

اثبات: فرض می کنیم A یک مجموعه دلخواه، R_1 و R_2 دو رابطه متقارن روی آن باشند. برای اثبات متقارن بودن رابطه $R_1 \bigcap R_2$ فرض می‌کنیم x و y دو عنصر دلخواه A باشند، بطوریکه

$(x,y)\in R_1\bigcap R_2$. باید ثابت کنیم $(y,x)\in R_1\bigcap R_2$ یعنی $(y,x)\in R_1$ و $(y,x)\in R_2$ [پایان مرحله چارچوب‌بندی اثبات]. حال از آنجائیکه بنا به مفروضات بالا $(x,y)\in R_1\bigcap R_2$، بنابراین $(x,y)\in R_1$ و $(x,y)\in R_2$. حال بنا به فرض گزاره R_1 متقارن می‌باشد و چون $(x,y)\in R_1$، بنابراین $(y,x)\in R_1$. لذا یکی از دو حکم مطلوب ما به‌دست می‌آید. از طرف دیگر بنا به فرض گزاره R_2 نیز متقارن می‌باشد و چون $(x,y)\in R_2$، بنابراین $(y,x)\in R_2$. لذا یکی دیگر از دو حکم مطلوب ما و در نتیجه حکم اصلی به‌دست می‌آید.

حال برای کسب مهارت در به‌کارگیری قواعد مثال‌های ۳ تا ۵ سعی کنید مسائل زیر را حل کنید.

۱- ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B اگر $A\bigcap B=A$، آنگاه $A\subseteq C$.
۲- ثابت کنید برای مجموعه‌های A، B و C اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\subseteq C$.
۳- ثابت کنید تابع حقیقی $g(x)=x^3$ یک به یک است.

۲-۳-۱-۳) *رد کردن گزاره‌های غلطی که حکمی به فرم $\forall x[P(x)\to Q(x)]$ دارند.*

گاهی اوقات با مسائلی مواجه می‌شویم که در آن باید گزاره‌ای را ثابت یا رد کنیم و این در شرایطی است که از قبل به ما گفته نمی‌شود که آیا آن گزاره درست است یا نه. البته اگر آن گزاره غلط باشد، ارائه یک اثبات صحیح برای آن ناممکن خواهد بود. ممکن است این صرف زمان و تلاش برای اثبات یک گزارهٔ غلط جنبه‌های آموزنده‌ای نیز داشته و در پیدا کردن مثال نقضی برای آن گزاره الهام‌بخش باشد، امّا نمی‌تواند سرانجام منجر به ارائه یک اثبات معتبر شود. ***مثال نقض*** یعنی یک مثال خاص و ویژه که درستی گزاره‌ای را نقض کند. در مثال ۶ نحوه برخورد با چنین مسائلی را روشن می‌سازیم.

مثال ۶. اثبات یا رد کنید: برای مجموعه‌های X، Y و Z اگر $X\bigcap Z\subseteq Y\bigcap Z$، آنگاه $X\subseteq Y$. (با مثال ۳ مقایسه کنید.)

بحث و جواب: فرض کنید ابتدا سعی کنیم مانند مثال‌های قبل با این مسئله برخورد کنیم. مرحله چارچوب‌بندی اثبات ما عبارت خواهد بود از: «فرض کنیم X، Y و Z مجموعه‌های دلخواهی باشند بطوریکه $X\bigcap Z\subseteq Y\bigcap Z$. برای اثبات $X\subseteq Y$، فرض کنیم $w\in X$. باید

ثابت کنیم $w \in Y$». در این مرحله باید به فرض گزاره برگردیم و از خود بپرسیم که آیا از ترکیب و کنار هم قرار دادن آن با فرض $w \in Y$ می‌توانیم به حکم $X \subseteq Y$ برسیم یا نه. اگر ما می‌توانستیم نتیجه بگیریم که w در $X \bigcap Z$ قرار دارد، آنگاه به کمک فرض گزاره، یعنی $w \in Y \bigcap Z$ بلافاصله حکم مورد نظر، یعنی $w \in Y$ را نتیجه می‌گرفتیم. امّا با توجه به مفروضات بالا فقط شرط $w \in X$ را داریم و برای اینکه $w \in Y \bigcap Z$ برقرار باشد، نیاز به $w \in Z$ داریم که لزوماً برقرار نیست!

به این ترتیب، تلاش ما برای نوشتن و ارائه یک اثبات مستقیم با شکست مواجه می‌شود. در چنین شرایطی دو حالت پیش روی ما قرار می‌گیرد:

الف) راه دیگری برای اثبات وجود دارد.

ب) گزاره‌ای که درصدد اثبات آن هستیم، غلط می‌باشد.

اگر ما از درستی یا نادرستی یک گزاره مطلع نباشیم و تلاش‌های اولیهٔ ما برای ارائه اثبات برای آن به شکست منجر شوند، آنگاه باید آزمایشاتی انجام دهیم تا ببینیم که آیا می‌توانیم برای آن یک مثال نقض بیابیم یا نه. قبل از اینکه ما بتوانیم این کار را انجام دهیم، باید نقیض آن گزاره را به دقت فرمول‌بندی کنیم.

به‌طورمنطقی نقیض گزاره‌ای به فرم «برای هر x، اگر $P(x)$ آنگاه $Q(x)$» عبارت است از «وجود دارد x بطوریکه $P(x)$ امّا نه $Q(x)$». به‌طورنمادین، $\neg \forall x[P(x) \to Q(x)]$ معادل است با $\exists x[P(x) \wedge \neg Q(x)]$. در این مثال، نقیض گزاره عبارت است از:

«وجود دارند مجموعه‌های X، Y و Z بطوریکه $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$ امّا X زیرمجموعه Y نیست.»

آیا می‌توانیم مجموعه‌های خاص X، Y و Z را چنان بیابیم که در گزاره بالا صدق کنند؟ مجموعه‌های زیرا در نظر می‌گیریم:

$$X = \{4,7,8,11\} \text{ ، } Y = \{2,7,8,9,11,12\} \text{ و } Z = \{1,7,8,9,10,11,12\}$$

در نتیجه $Y \bigcap Z = \{7,8,9,11,12\}$ و $X \bigcap Z = \{7,8,11\}$. بنابراین $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$ ولی X به وضوح زیرمجموعهٔ Y نمی‌باشد. بنابراین یک مثال نقض ارائه کرده‌ایم. در نتیجه گزاره مورد بحث نادرست است!

به نکات زیر در این اثبات توجه کنید:

الف) *صرفاً با ارائه یک مثال نقض، می‌توان نادرستی یک گزاره کلّی را اثبات نمود.* مثال نقض در مقایسه با تمامی ابزار مورد نیاز جهت اثبات یک گزاره، خصوصاً زمانیکه دامنهٔ بحث وسیع و نامتناهی باشد، از جایگاه حساس‌تری برخوردار است؛ زیرا نمی‌توانیم جهت اثبات درستی آن گزارهٔ کلّی به اثبات درستی تک‌تک مثال‌های موجود بپردازیم. به‌طورمثال برای اثبات اینکه به ازای هر عدد طبیعی مانند n، عدد طبیعی $n(n+1)$ زوج است، نمی‌توانیم برای تک‌تک اعداد طبیعی این ادعا را بررسی کنیم. بعلاوه تعدادی متناهی مثال خاص که درستی گزاره‌ای را تأیید می‌کنند، به‌طورکلّی برای ارائه یک اثبات برای آن گزاره کافی نمی‌باشند و برای این منظور باید یک اثبات کلّی ارائه دهیم.

ب) در آخرین جمله از بحث ارائه شده در مثال ۶، گفتیم که X به وضوح زیرمجموعه Y نمی‌باشد. چگونه این ادعا را به‌طورمنطقی توجیه کنیم؟ به‌خاطر داریم که $X \subseteq Y$ بوسیله $\forall w[(w \in X) \to (w \in Y)]$ تعریف می‌شود. بنابراین نقیض این گزاره؛ یعنی $\exists w[(w \in X) \wedge (w \notin Y)]$ متناظر است با «X زیرمجموعهٔ Y نیست». برای مجموعه‌های $X = \{4,7,8,11\}$ و $Y = \{2,7,8,9,11,12\}$ توجه داریم که با انتخاب $w = 4$ خواهیم داشت $4 \in X$ امّا $4 \notin Y$. همین مثال خاص، تمام آن چیزی است که نیاز داریم تا نتیجه بگیریم X زیرمجموعهٔ Y نیست.

ج) توجه داشته باشید که این انتخاب خاص برای w که برای اثبات $X \not\subset Y$ به‌کار برده شد، دارای این ویژگی نیز می‌باشد که $w \notin Z$. انتخاب $w = 4$ تصادفی نیست. زیرا در تلاش اولیه‌مان برای اثبات درستی این گزارهٔ غلط، مانع اصلی برای اتمام اثبات این بود که عضو دلخواه انتخابی $w \in X$ لزوماً عضو Z نمی‌باشد.

تمرین‌های زیر در رابطه با مباحث برخاسته از مثال ۶ و پاراگراف‌های بعد از آن می‌باشند.

گزاره‌های زیر را رد یا ثابت کنید:

۱. برای مجموعه‌های X، Y و Z داریم $X \bigcup (Y \bigcap Z) \subseteq (X \bigcup Y) \bigcap Z$.
۲. برای مجموعه‌های X، Y و Z اگر $X \subseteq Z$ آنگاه $X \bigcup (Y \bigcap Z) \subseteq (X \bigcup Y) \bigcap Z$.
۳. هر تابع حقیقی پیوسته و یک به یک معکوس‌پذیر است.
۴. هر دنباله کرانداری همگراست.
۵- هر گاه z یک عدد مختلط باشد به طوریکه $|z| < 1$، آنگاه $-1 < z < 1$.

۲-۳-۱-۴) *تاکتیک تفکیک*

به هنگام ارائه استدلال پس از مرحله چارچوب‌بندی اثبات، با پیچیده‌تر شدن گزاره‌هایی که قرار است آنها را ثابت کنیم، باید ابزارهای موجود و مؤثر برای رسیدن به حکم مطلوب را توسعه دهیم. «روش عضوگیری» که در مثال‌های ۷و ۸ به‌کار برده می‌شود، بیانگر ابزار جدیدی است که مشهور به ***تاکتیک تفکیک*** می‌باشد و در برخی از اثبات‌ها مفید واقع می‌شود.

مثال ۷. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)\subseteq A$ که در آن B^c متمم مجموعه B می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند. برای اثبات $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)\subseteq A$ فرض می‌کنیم $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)$. باید ثابت کنیم $x\in A$. با توجه به مفروضات بالا، $x\in A\bigcap B$ یا $x\in A\bigcap B^c$. یعنی اینکه «$x\in B$ و $x\in A$» یا «$x\notin B$ و $x\in A$». توجه کنید که نمی‌دانیم که کدام یک از دو حالت برقرار است. امّا می‌دانیم که حداقل یکی از این دو حالت باید برقرار باشد. بنابراین در این مرحله، استدلال خود را به دو حالتِ ممکنِ موجود تقسیم‌بندی می‌کنیم:

حالت ۱: فرض می‌کنیم $x\in B$ و $x\in A$ برقرار است. بنابراین بنا به قانون استنتاج حذف عاطف، یعنی $(p\wedge q)\to p$ نتیجه می‌شود $x\in A$ و حکم مورد نظر به دست آمده است.

حالت ۲: فرض کنیم $x\notin B$ و $x\in A$ برقرار است. مجدداً بنا به قانون استنتاج حذف عاطف، نتیجه می‌گردد $x\in A$.

در نتیجه در هر یک از دو حالت ممکن بالا، حکم $x\in A$ به‌دست می‌آید و در نتیجه حکم مطلوب به‌دست آمده است.

مثال ۸. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $A\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)$.

اثبات: فرض کنیم A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند. برای اثبات $A\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)$ فرض می‌کنیم $x\in A$. حال باید نشان دهیم $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B^c)$. برای این منظور باید ثابت کنیم $x\in A\bigcap B$ یا $x\in A\bigcap B^c$. یعنی «$x\in B$ و $x\in A$» یا «$x\in B^c$ و $x\in A$».

به‌خاطر داشته باشید که فرض ما عبارت است از $x \in A$. در این فرض فقط مجموعه A نقش دارد. مسئله‌ای که باید حل شود این است که چگونه باید ارتباط بین عضو x و مجموعه B را وارد بحث کنیم. می‌دانیم که بنا به توتولوژی $p \vee \neg p$، گزارهٔ «$x \notin B$ یا $x \in B$» همیشه درست است. با توجه به این نکته، دو حالت جامع و کلّی زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض می‌کنیم $x \in B$. از طرفی بنا به فرض $x \in A$، بنابراین داریم $x \in B$ و $x \in A$. یعنی یکی از دو حکم مطلوب به دست می‌آید.

حالت ۲. فرض می‌کنیم $x \notin B$ یا به‌طورمعادل $x \in B^c$. در این صورت چون بنا به فرض $x \in A$، بنابراین داریم $x \in B^c$ و $x \in A$. یعنی حکم مطلوب دیگر به‌دست می‌آید.

نکات زیر در اثبات مثال ۸ حائز اهمیت می‌باشند:

الف) اثبات‌های ارائه شده در مثال‌های ۷و ۸ را مقایسه کنید، هر دوی آنها براساس تاکتیک تفکیک بنا شده‌اند. اثبات دوم در مقایسه با اثبات اول از خلاقیت بیشتری برخوردار است و نقش ما در آن با به بازی وارد کردن توتولوژی $p \vee \neg p$ کمی پر رنگ‌تر می‌باشد. برای ارائه بسیاری از اثبات‌های پیچیده، نیاز است که برخی ایده‌های خلاقانه را از خارج چارچوب مقدماتی استدلال، وارد آن کنیم. این جنبه از ارائه اثبات، ماشین‌وار نیست و لذا فراگیری آن نیازمند به تجربه و علاقه‌مندی به دانستن و یافتن جوابی برای چراها در ریاضیات می‌باشد. با بالا بردن قدرت استدلال در خودمان، ما نیز می‌توانیم اثبات‌های خلاقانه ارائه دهیم. برای این منظور در رابطه با یک مسئله، ابتدا باید سعی کنیم مسائل و احکام مرتبط با آن را هر چه بیشتر بیابیم. سپس باید سعی کنیم از این ارتباط‌ها تا زمانی که یک یا چند تا از آنها با هم در مورد آن مسئله کارگشا باشند، استفاده کنیم. بدین ترتیب می‌توانیم قدرت استدلال خود را ارتقا بخشیم.

ب) کارایی و صحت ایدهٔ تاکتیک تفکیک به حالت‌های ممکن و جامع در ارائه اثبات‌ها، امری کاملاً مشهود و غیر قابل انکار است. تنها مشکل آن برای یک دانشجوی مبتدی که در حال آموختن شیوه نوشتن اثبات می‌باشد، این است که به این ایده تسلط یابد و بتواند از آن به خوبی استفاده کند.

گزاره‌های زیر را با تاکتیک تفکیک اثبات کنید.

۱- برای مجموعه‌های X، Y و Z اگر $X \subseteq Z$ و $Y \subseteq Z$ ، آنگاه $X \bigcup Y \subseteq Z$.

۲- برای مجموعه‌های A، B و C اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A \bigcup C \subseteq B \bigcup C$.

۳- برای مجموعه‌های X، Y و Z داریم $X \subseteq Y$، هرگاه $X \bigcap Z \subseteq Y \bigcap Z$ و $X \bigcap Z^c \subseteq Y \bigcap Z^c$.

۲-۳-۱-۵) *اثبات تساوی مجموعه‌ها*

به سه رویکرد برای اثبات تساوی مجموعه‌ها اشاره می‌کنیم که عبارتند از «شمول هم‌زمان»، «استفاده از جبر گزاره‌ها» و «استفاده از اتحادهای مجموعه‌ای».

رویکرد اول: ***شمول هم‌زمان***.

اولین رویکرد کاربرد بیشتری دارد. بعلاوه قابل بیان برحسب مطالب قبلی می‌باشد. بنابراین در این جا روی آن تأکید بیشتری می‌کنیم.

بیان رسمی تعریف تساوی مجموعه‌ها عبارت است از:

$A = B$ اگر و فقط اگر $\forall x\big[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)\big]$

که معادل است با:

$$\forall x\big[(x \in A) \rightarrow (x \in B)\big] \wedge \forall x\big[(x \in B) \rightarrow (x \in A)\big]$$

به عبارت دیگر $A = B$ اگر و فقط اگر $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$. بنابراین برای اثبات تساوی دو مجموعه می‌توانیم نشان دهیم هر یک از مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ دیگری است. این رویکرد را در مثال‌های ۹و۱۰ تشریح می‌کنیم.

مثال ۹. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم $A = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B^c)$.

اثبات: به کمک شمول هم‌زمان، تساوی دو مجموعه بالا را اثبات می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم هر یک از مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ دیگری است. شمول $A \subseteq (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B^c)$ دقیقاً مطلبی است که در مثال ۷ اثبات کردیم و شمول دیگر $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B^c) \subseteq A$ نیز در مثال ۸ اثبات شده است. با نوشتن اثبات‌های ارائه شده در مثال‌های ۷ و ۸ اثباتی برای حکم مطلوب به‌دست می‌آید.

حکم مثال ۱۰، تساوی مجموعه‌ها ولی مشروط به یک فرض اولیه می‌باشد.

مثال ۱۰. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A \bigcup B = B$.

اثبات: فرض کنیم مجموعه‌های A و B دلخواه باشند بطوریکه $A \subseteq B$. برای اثبات تساوی $A \bigcup B = B$ ثابت می کنیم $B \subseteq A \bigcup B$ و $A \bigcup B \subseteq B$.

۱. $B \subseteq A \bigcup B$ در مثال ۱ قبلاً اثبات شد. توجه داشته باشید که در اثبات این قسمت، نیازی به استفاده از فرض گزاره نمی‌باشد.

۲. برای اثبات $A \bigcup B \subseteq B$ با توجه به فرضِ $A \subseteq B$ و با استفاده از «روش عضوگیری» فرض می‌کنیم $x \in A \bigcup B$ و نشان می‌دهیم $x \in B$. با توجه به فرض $x \in A \bigcup B$ می‌دانیم که $x \in A$ یا $x \in B$. از آنجاییکه نمی‌دانیم کدام یک از این دو حالت برقرار است، بنابراین از تاکتیک تفکیک استفاده می‌کنیم:

حالت ۱: فرض می‌کنیم $x \in A$. در این صورت بنا به فرض $A \subseteq B$، حکم یعنی $x \in B$ نتیجه می‌شود. توجه کنید که در این قسمت از قانون استنتاج انتزاع مقدم استفاده کرده‌ایم.

حالت ۲: فرض می‌کنیم $x \in B$. از آنجاییکه این همان حکم مطلوب می‌باشد بنابراین حکم در این حالت به‌طوربدیهی برقرار است.

بنابراین در هر دو حالتِ ممکن داریم $x \in B$؛ همانطوریکه می‌خواستیم.

رویکرد دوم: *استفاده از جبر گزاره‌ها.*

یکی از راه‌های یادگیری یک حقیقت و مهارت ارتباط دادن آن با حقایق و مهارت‌های دیگر است. در این بخش به یکی از این گونه ارتباطات اشاره می‌کنیم. اعمال اشتراک و اجتماع در دنیای مجموعه‌ها به نوعی همان اعمال ترکیب عطفی و ترکیب فصلی در دنیای گزاره‌ها می‌باشند. به‌طورمثال هم‌ارزی $p \wedge q \equiv q \wedge p$، در دنیای مجموعه‌ها به صورت اتحاد مجموعه‌ای $A \bigcap B = B \bigcap A$ ترجمه می‌شود. منظور از اتحاد مجموعه‌ای این است که تساوی مذکور به ازای هر دو مجموعه A و B برقرار است. ارتباط بین جبر گزاره‌ها و جبر مجموعه‌ها بسیار عمیق می‌باشد. در واقع به کمک جدول زیر می‌توانیم هر جمله و یا اتحاد گزاره‌ای از دنیای گزاره‌ها را به متناظر آن در دنیای مجموعه‌ها ترجمه کنیم:

دنیای مجموعه‌ها	دنیای گزاره‌ها
$A \bigcap B$	$p \wedge q$
$A \bigcup B$	$p \vee q$
M	T
A^c	$\neg p$
ϕ	F

به طورمثال متناظر قوانین دمورگان از جبر گزاره‌ها در جبر مجموعه‌ها عبارتند از $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$ و $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$. همچنین متناظر اتحاد گزاره‌ای $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ عبارت است از $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
بنابراین در این رویکرد، اتحادهای گزاره‌ای تبدیل به اتحادهای مجموعه‌ای می‌شوند و برعکس.

رویکرد سوم: ***استفاده از اتحادهای مجموعه‌ای***.

در این رویکرد برای اثبات تساوی دو مجموعه از اتحادهای مجموعه‌ای که قبلاً درستی آنها را ثابت کرده‌ایم، استفاده می‌کنیم. فرض کنید اتحادهای مجموعه‌ای زیر اثبات شده‌اند:

۱) برای هر سه مجموعه A، B و C داریم $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

۲) برای هر مجموعه B داریم $B \bigcup B^c = M$ که در آن M نشان دهنده مجموعه مرجع می‌باشد.

۳) برای هر مجموعه C داریم $C \bigcap M = C$.

حال براساس اتحادهای مجموعه‌ای بالا، اثبات دیگری برای مثال ۹ ارائه می‌دهیم که از رویکرد شمول هم‌زمان استفاده نمی‌کند.

مثال ۱۱. برای مجموعه‌های A و B ثابت کنید $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B^c) = A$.

اثبات: فرض‌کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند. در این صورت داریم:

$(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap B^c) = A \bigcap (B \bigcup B^c)$ (بنا به (۱)).

$= A \bigcap M$ (بنا به (۲))

$= A$ (بنا به (۳))

توجه کنید که در بکارگیری (۱) ما از حالت خاص $C = B^c$ در این اتحاد استفاده کرده‌ایم. روش استفاده کردن از حالت خاص یک قضیه کلّی شناخته شده، ***تاکتیک تخصیص*** نامیده می‌شود. هرگاه در استنتاج از یک قضیه کلّی در روند یک اثبات اشاره به «به ویژه در حالت خاص» می‌کنید، درواقع در حال استفاده کردن از تاکتیک تخصیص می‌باشید، مشابه با تاکتیک تفکیک، تاکتیک تخصیص نیز می‌تواند ما را در راستای اثبات برخی احکام یاری کند.

۲-۳-۲) *اثبات غیرمستقیم.*

گاهی اوقات اثبات یک فرم ظاهراً متفاوت، امّا منطقاً هم‌ارز با گزاره اصلی مفید و حتی ضروری می‌باشد. در چنین حالتی اثبات ما اثبات غیرمستقیم نامیده می‌شود. سه صورت متداول که اثبات‌های غیرمستقیم برمبنای آنها ساخته می‌شوند، هم‌ارزی‌های منطقی زیر می‌باشند:

(۴) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

(۵) $(\neg p) \to (q \wedge \neg q) \equiv p$.

(۶) $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$.

هم‌ارزی (۴) مبنای یک روش اثبات غیرمستقیم می‌باشد که مشهور به «***اثبات به کمک عکس‌نقیض***» می‌باشد. هم‌ارزی (۵) نیز دلیل اعتبار روش دیگری برای ارائه اثبات غیرمستقیم می‌باشد که «***اثبات به کمک برهان‌خلف***» نامیده می‌شود. هم‌ارزی (۶) نیز مبنای رویکردی استاندارد برای به‌دست آوردن احکامی به صورت «$q \vee r$»می‌باشد.

۲-۳-۲-۱) *اثبات به کمک عکس‌نقیض.*

گاهی اوقات یافتن اثباتی برای گزاره‌ای به فرم $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ با شروع کردن از فرض درستی $P(x)$ مشکل است. اگر نتوانیم بفهمیم چگونه می‌توان از درستی $P(x)$ و دیگر فرض‌ها (در صورت وجود) به درستی $Q(x)$ رسید، چه باید کرد؟ گاهی اوقات در چنین شرایطی فرض درستی $\neg Q(x)$ هماهنگی و سازگاری بیشتری با دیگر فرض‌های موجود ایجاد می‌نماید و منجر به درستی $\neg P(x)$ می‌شود. استدلال به این صورت، در واقع نمونه‌ای از اثبات به کمک عکس‌نقیض است. مثال۱۲روشنگر این روش می‌باشد.

مثال ۱۲. ثابت کنید هر تابع f که دامنه و برد آن زیر مجموعه اعداد حقیقی بوده و به علاوه اکیداً صعودی باشد، یک تابع یک به یک است.

بحث و جواب: فرض می‌کنیم f یک تابع با شرایط بالا باشد. برای یک به یک بودن تابع f طبق تعریف تابع یک به یک، باید فرض کنیم x_1 و x_2 دو عدد حقیقی در دامنه f باشند بطوریکه $f(x_1) = f(x_2)$ و نشان دهیم $x_1 = x_2$. در این حالت، مرحلهٔ چارچوب‌بندی یک اثبات مستقیم را تکمیل کرده‌ایم، بدون اینکه راهی برای استفاده از فرض اکیداً صعودی بودن f (یعنی اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$) موجود باشد. توجه کنید که

فرض $f(x_2)=f(x_2)$ با قسمت شرط فرض اکیداً صعودی بودن f (یعنی اگر $x_1 < x_2$) سازگاری ندارد و اجازه استفاده از فرض برای تکمیل اثبات را به ما نمی‌دهد.

حال فرض کنید بخواهیم عکس‌نقیض تعریف یک به یک بودن را نتیجه بگیریم. در این رویکرد ما با فرض $x_1 \neq x_2$ شروع خواهیم نمود و هدف ما عبارت خواهد بود از اثبات $f(x_1) \neq f(x_2)$. حال به ترتیب زیر استدلال را پی می‌گیریم. از آنجاییکه بنا به فرض $x_1 \neq x_2$ است، بنابراین $x_1 < x_2$ یا $x_2 < x_1$. حال دو حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر $x_1 < x_2$، آنگاه چون f اکیداً صعودی است نتیجه می‌شود که $f(x_1) < f(x_2)$. بنابراین $f(x_1) \neq f(x_2)$.

حالت۲: اگر $x_2 < x_1$، آنگاه چون f اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود که $f(x_2) < (x_1)$. بنابراین $f(x_1) \neq f(x_2)$.

بدین ترتیب اثبات تکمیل می‌شود.
از دیگر مواردی که روش اثبات به کمک عکسِ‌نقیض می‌تواند در آن مثمرثمر واقع شود حالتی است که حکم گزاره دارای فرم منطقی ساده‌تری در مقایسه با فرض‌های گزاره باشد. در مثال بعدی این مطلب را روشن می‌سازیم.

مثال ۱۳. فرض کنید a عددی حقیقی باشد که در شرط $\forall M > 0 \quad |a| < M$ صدق می‌کند. در این صورت ثابت کنید $a = 0$.

بحث و جواب: به فرم سادهٔ حکم گزاره توجه کنید. بر خلاف حکم اغلب مثال‌های قبلی که شامل تعریف‌هایی به فرم «اگر... آنگاه...» بودند، حکم این گزاره عبارت ساده $a = 0$ می‌باشد. اگر سعی کنیم اثباتی مستقیم با هدف رسیدن به حکم مطلوب را آغاز کنیم، در این صورت جای مناسبی برای شروع پیدا نمی‌کنیم. هیچ مبنایی برای ارائه فرضی که برای ارائه اثبات مستقیم و موفقیت‌آمیز مورد نیاز است، وجود ندارد.
بنابراین از روش عکسِ‌نقیض استفاده می‌کنیم. در این رویکرد با فرض $a \neq 0$ شروع می‌کنیم و سعی می‌کنیم نقیض فرض گزاره را استنتاج کنیم. نقیض فرض عبارت است از: $\exists M > 0 \quad |a| \geq M$. بنابراین کافی است که عدد حقیقی مثبت M را چنان بیابیم که مقدار

آن از قدرمطلق عدد ناصفر a بیشتر نباشد. می‌توانیم قرار دهیم $M = |a|$. توجه داریم که این مقدار M به وضوح شرط $|a| \geq M$ را برآورده می‌سازد.

حال به مورد سومی که در آن اثبات به کمک عکس‌نقیض می‌تواند مناسب واقع گردد، می‌پردازیم. فرض کنید گزاره‌ای به فرم «اگر p و q آنگاه r» درست باشد و می‌خواهیم ثابت کنیم که p و نقیض r با هم، نقیض q را نتیجه می‌دهند. در این حالت همیشه می‌توانیم از روش اثبات به کمک عکسِ‌نقیض استفاده کنیم. فرض کنیم نقیض q نادرست باشد، یعنی q درست باشد. حال چون p نیز بنا به فرض درست می‌باشد، بنابراین هر دوی p و q درست می‌باشند. حال با توجه به درستی گزاره اولیه «اگر p و q آنگاه r» می‌توان نتیجه گرفت که r درست می‌باشد که با فرض درستی $\neg r$ در تناقص است.

در تمرین‌های زیر می‌توانید همین رویکرد را به‌کار ببرید.

۱. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B اگر $A \subseteq B$، آنگاه $B^c \subseteq A^c$.

۲. ثابت کنید اگر تابع خطی $f(x) = Ax + B$ یک به یک باشد، آنگاه $A \neq 0$.

۳. فرض کنید «مجموع و تفاضل هر دو عدد صحیح، یک عدد صحیح است.» درست باشد. با استفاده از این مطلب ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y اگر x و $x + y$ عدد صحیح باشند، آنگاه y نیز عدد صحیح است. همچنین ثابت کنید مجموع یک عدد صحیح و یک عدد غیرصحیح، عددی غیرصحیح است.

۴. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B، اگر $x \in A$ و $x \notin A \cap B$، آنگاه $x \notin B$.

۲-۳-۲-۲) *اثبات به کمک برهانِ‌خلف.*

ایدهٔ پنهان در هم‌ارزی $p \equiv (\neg p) \to (q \wedge \neg q)$ این است که ما می‌توانیم حکم p را با نشان دادن این مطلب که نقیض p منجر به تناقض؛ یعنی $q \wedge \neg q$ می‌شود، اثبات کنیم. توجه کنید که $q \wedge \neg q$ یک تناقض است زیرا بیان‌گر این است که گزاره‌ای هم باید درست و هم باید نادرست باشد. در واقع اثبات به کمک عکسِ‌نقیض، حالت خاصی از اثبات به کمک برهانِ‌خلف می‌باشد. زیرا در آن برای اثبات گزاره‌ای به فرم $p \to q$، ما درستی p را فرض می‌کنیم و سپس به کمک نقیض q، نقیض p و در نتیجه به تناقض $p \wedge \neg p$ می‌رسیم.

از دیگر مواردی که در آن اثبات به کمک برهانِ‌خلف رویکردی استاندارد می‌باشد، اثبات قضایایی در نظریه مجموعه‌ها می‌باشد که در آنها، حکم ادعا می‌کند که مجموعه‌ای خاص برابر مجموعه تهی می‌باشد.

مثال ۱۴. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A \bigcap B^c = \phi$.

بحث و جواب: فرض کنید در رویکرد مستقیم برای اثبات تساوی $A \bigcap B^c = \phi$، از روش شمول هم‌زمان استفاده کنیم. در این صورت شمول $\phi \subseteq A \bigcap B^c$ بر اساس این که تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است، درست می‌باشد. حال شمول طرف دیگر یعنی $A \bigcap B^c \subseteq \phi$ را در نظر می‌گیریم. برای اثبات این شمول رویکرد «فرض کنیم $x \in A \bigcap B^c$... حال باید ثابت کنیم $x \in \phi$.» قابل بررسی نیست و محکوم به شکست است. زیرا حکم $x \in \phi$ قابل دسترسی نمی‌باشد. چگونه می‌توان نتیجه گرفت که x عضو مجموعه تهی است؟

از آنجاییکه قادر به ارائه اثبات مستقیم بر اساس روش شمول هم‌زمان نمی‌باشیم، روش برهانِ‌خلف را پی می‌گیریم. فرض‌کنیم A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند بطوریکه $A \subseteq B$. فرض کنید $A \bigcap B^c \neq \phi$. بنابراین چیزی مثل x وجود دارد بطوریکه عضو $A \bigcap B^c$ می‌باشد. یعنی $x \in A \bigcap B^c$. در نتیجه $x \in A$ و $x \in B^c$. از طرف دیگر چون $x \in A$ و بنا به فرضِ گزاره، $A \subseteq B$ درست است. بنابراین $x \in B$. لذا $x \in B$ و $x \in B^c$. یعنی هم $x \in B$ و هم $x \notin B$ که تناقضی به فرم $q \wedge \neg q$ می‌باشد. از آنجاییکه فرض درستی $A \bigcap B^c \neq \phi$ به تناقض انجامید، بنابراین نمی‌تواند درست باشد. بنابراین $A \bigcap B^c = \phi$ درست است و اثبات ما تکمیل شده است.

حال چند تمرین در این مورد ارائه می‌کنیم:

۱- ثابت کنید برای هر مجموعه A داریم: $A \bigcap A^c = \phi$.

۲- ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B اگر $(B \bigcap A^c) \bigcup (B^c \bigcap A) = B$، آنگاه $A = \phi$.

۳- ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم:

$$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup B^c) \bigcap (A^c \bigcup B^c) \bigcap (A^c \bigcap B) = \phi$$

۴- به کمک اتحادهای مجموعه‌ای برای مثال ۱۴ یک اثبات مستقیم ارائه دهید.

۵- ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a اگر $a > 0$، آنگاه $\frac{1}{a} > 0$.

۶- ثابت کنید $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است.

۲-۳-۲-۳) استنتاج احکامی به شکل « q یا r»

هم‌ارزی $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$ درهنگام نوشتن اثبات برای احکامی به فرم « q یا r» به‌کار می‌آید. برای حکمی به این فرم ممکن است نتوان شرایطی را یافت که تحت آن شرایط مطمئن شویم کدام یک از r یا q درست می‌باشند. آنچه می‌دانیم این است که تحت هر شرایطی که فرض‌های گزاره برآورده شوند، حداقل یکی از r یا q درست می‌باشد. بر همین اساس ما قادر به چارچوب‌بندی برای اثباتی مستقیم مبتنی بر حکم q یا مبتنی بر r نمی‌باشیم (در واقع معمولاً ارائه چنین اثباتی امکان‌پذیر نیست).

خوشبختانه یک رویکرد غیرمستقیم بر اساس هم‌ارزی $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$ وجود دارد که ما را قادر می‌سازد تا این مشکل را برطرف سازیم. به جای تلاش برای استنتاج مستقیم « q یا r» از p، مسئله را تبدیل به مسئله نشان دادن استنتاج r از p و $\neg q$ می‌کنیم. البته همچنین می‌توانیم نشان دهیم q از p و $\neg r$ نتیجه می‌شود. درستی‌هر کدام را نشان دهیم، حکم اثبات می‌شود.

یک مثال کلاسیک از اثباتی در این دسته، عبارت است از قضیه‌ای در جبر مقدماتی که می‌گوید: «برای هر دو عدد حقیقی x و y اگر $xy = 0$، آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$». به وضوح می‌توانیم اثبات را با فرض اینکه x و y دو عدد حقیقی با شرط $xy = 0$ می‌باشند، شروع کنیم. امّا در این مرحله هیچ نشانه‌ای از راهی برای رسیدن به صفر بودن x یا y وجود ندارد. راه فرار از این مشکل عبارت است از اضافه کردن فرض $x \neq 0$ به منظور نشان دادن اینکه در این حالت باید $y = 0$. از آنجاییکه $x \neq 0$، بنابراین معکوس آن یعنی $\frac{1}{x}$ وجود دارد و لذا زنجیری از معادلات به صورت زیر خواهیم داشت:

$$y = 1.y = (\frac{1}{x}.x)y = \frac{1}{x}.(xy) = \frac{1}{x}.0 = 0$$

بنابراین $y = 0$، همانطوریکه می‌خواستیم. توجه کنید که در این زنجیرهٔ معادلات، ازخاصیت شرکت‌پذیری ضرب اعداد حقیقی و اینکه حاصل‌ضرب هر عدد حقیقی در صفر، برابر صفر است، استفاده شده است.

مورد دیگری که این رویکرد در آن قابل استفاده می‌باشد، عبارت است از آن دسته از مسائل نظریه مجموعه‌ها که در آنها حکم، نشان دهندهٔ این است که مجموعه‌ای خاص، زیر مجموعهٔ اجتماع دو مجموعه دیگر می‌باشد. این مطلب را در مثال ۱۵ تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۵. ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B داریم: $A \subseteq B \bigcup (A \bigcap B^c)$.

اثبات: فرض‌کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند. برای اثبات $A \subseteq B \bigcup (A \bigcap B^c)$ فرض می‌کنیم $x \in A$. حال باید ثابت کنیم $x \in B \bigcup (A \bigcap B^c)$. یعنی $x \in B$ یا $x \in A \bigcap B^c$. از آنجاییکه حکم ما به فرم « q یا r» می‌باشد، رویکرد پیشنهادی بر اساس هم‌ارزی $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$ را به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم $x \notin B$. حال بر اساس این فرض اضافی، هدف ما تبدیل می‌شود به اثبات $x \in A \bigcap B^c$ یعنی «$x \in A$ و $x \in B^c$». با توجه به فرض ابتدایی ما $x \in A$ و چون $x \in B^c$، بنابراین بی‌درنگ $x \in A \bigcap B^c$ نتیجه می‌گردد.

اگر حکم ما بیش از دو جایگزین داشته باشد، آنگاه رویکرد پیشنهادی هم‌ارزی $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$ را می‌توانیم به ترتیب زیر تعمیم دهیم. فرض می‌کنیم نقیض تمام جایگزین‌ها به غیر از یکی از آنها درست باشند و سعی می‌کنیم درستی جایگزین باقی‌مانده را اثبات کنیم. در مثال ۱۶ به تشریح این مطلب می‌پردازیم.

مثال ۱۶. ثابت کنید برای هر دو مجموعه A و B اگر $A \times B = B \times A$ آنگاه $A = \phi$ یا $B = \phi$ یا $A = B$.

طرح کلّی اثبات: فرض می‌کنیم A و B دو مجموعه باشند بطوریکه $A \times B = B \times A$. بعلاوه فرض می‌کنیم $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$. با اضافه کردن این دو فرض، هدف ما تبدیل می‌شود به اثبات درستی جایگزین سوم یعنی $A = B$. ادامه اثبات را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

تمرین‌های زیر برای کسب مهارت در رویکرد پیشنهادی هم‌ارزی $(p \wedge \neg q) \to r \equiv p \to (q \vee r)$ در نظر گرفته شده‌اند.

۱- اثبات مثال ۱۶ را تکمیل کنید.

۲- ثابت کنید اگر A، B و C مجموعه‌های دلخواهی باشند بطوریکه $A \times B = A \times C$

در اینصورت $A=\phi$ یا $B=C$.

۳- ثابت کنید اگر A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند بطوریکه $A\times B=\phi$، در اینصورت $A=\phi$ یا $B=\phi$.

۴- ثابت کنید اگر A، B و C مجموعه‌های دلخواهی باشند، آنگاه $(A\bigcup B)\bigcap C\subseteq A\bigcup(B\bigcap C)$.

۲-۴) یادداشت‌هایی بر روش های دیگر اثبات.

در بخش قبل گزاره‌هایی به فرم $\forall x[P(x)\to Q(x)]$ را بررسی نمودیم، امّا بسیاری از گزاره‌هایی که ما قصد اثبات آنها را داریم، حکمی به این فرم ندارند. امّا در هر حال دانشجویان مبتدی که قادر به نوشتن اثبات‌های صحیح برای تمرینات بخش قبل باشند، به خوبی خواهند توانست با مباحث جدید در رابطه با اثبات گزاره‌های جدید کنار بیایند. یکی از دلایل این امر این است که بسیاری از تاکتیک‌ها (مثال تفکیک و تخصیص) و بسیاری از استراتژی‌ها (مثل روش عضوگیری و اثبات غیرمستقیم) که در بخش قبل معرفی و بررسی شدند، کاربردهایی فراتر از اثبات گزاره‌هایی با حکم به فرم $\forall x[P(x)\to Q(x)]$ دارند. در این بخش به‌طورخلاصه دو نوع دیگر از گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

۲-۴-۱) استنتاج احکامی به فرم «برای هر x وجود دارد y بطوریکه $P(x,y)$»

در ریاضیات برای تعریف بسیاری از مفاهیم از دو فرم زیر استفاده می‌کنیم:

* $\exists xP(x)$
* $\forall x\exists yP(x,y)$

برخی از این تعاریف اولیه عبارتند از:

(i) فرض می‌کنیم m و n عدد صحیح باشند. می‌گوییم n بر m بخش‌پذیر است اگر فقط اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد بطوریکه $n=mk$.

(ii) تابع f را پوشا می‌نامیم اگر و فقط اگر برای هر y در هم‌دامنهٔ f، x در دامنه f وجود داشته باشد بطوریکه $f(x)=y$.

(iii)عدد حقیقی x را گویا می‌نامیم اگر و فقط اگر اعداد صحیح p و q وجود داشته باشند بطوریکه $q \neq 0$ و $x = \frac{p}{q}$.

در احکام بسیاری از گزاره‌های مهم ریاضیات، معمولاً عباراتی وجود دارند که شامل تعاریفی به فرم‌های بالا می‌باشند. به‌طورمثال:

الف) فرض می‌کنیم m، n و p عدد صحیح باشند بطوریکه nو p بر m بخش‌پذیر باشند، آنگاه $n + p$ نیز بر m بخش‌پذیراست.

ب) اگر توابع حقیقی f و g پوشا باشند، آنگاه ترکیب آنها $f \circ g$ نیز پوشا می‌باشد.

ج) اگر xو y عدد گویا باشند، آنگاه xy و $x + y$ نیز گویا هستند.

مبحث جدیدی که در اثبات گزاره‌هایی شبیه به (الف) تا (ج) مطرح می‌شود، ***مبحث وجود***، نام دارد. نکتهٔ کلیدی اثبات اینگونه گزاره‌ها عبارت است از *تولید یا تعریف یک شیء مناسب، از آن نوعی که وجودش در حکم گزاره ادعا شده است*. در انجام دادن این امر نکتهٔ مهم؛ درک این مسئله است که معمولاً در اثبات حکمی به فرم $\forall x \exists y P(x, y)$ آن y که در اثبات ارائه می‌شود، به x وابسته می‌باشد. بنابراین انتظار می‌رود که y قابل تعریف بر حسب خود x ویا اشیائی باشد که آنها قابل تعریف برحسب x می‌باشند. در مثال‌های ۱۷و۱۸ این مطالب را تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۷. ثابت کنید اگر x و y عدد گویا باشند، آنگاه xy نیز گویا می‌باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم x و y عدد گویا باشند. برای اثبات گویا بودن xy باید نشان دهیم اعداد صحیح pو q وجود دارند بطوریکه $q \neq 0$و $xy = \frac{p}{q}$. بنابراین کاری که ما در این اثبات باید انجام دهیم ارائه یا ساختن اعداد صحیح pو q با شرایط بالا می‌باشد. مانند اغلب اثبات‌ها به محض اینکه مرحله چارچوب‌بندی اثبات تمام شد، باید ببینیم چه چیزی برای رسیدن به حکم در دسترس ما قرار دارد.

در یک اثبات وجودی باید از خود بپرسیم: «آیا آنچه که در دست داریم شرایط ساختن چیزی را فراهم می‌کند یا نه؟».

تمام آنچه که در دسترس ما می‌باشد این است که x و y عدد گویا می‌باشند. یعنی اینکه اعداد صحیح p_1 و q_1 وجود دارند بطوریکه $q_1 \neq 0$ و $x = \frac{p_1}{q_1}$. به همین ترتیب p_2 و q_2 وجود دارند بطوریکه $q_2 \neq 0$ و $y = \frac{p_2}{q_2}$. بنابراین $xy = \frac{p_1}{q_1}.\frac{p_2}{q_2}$ و به کمک قوانین ضرب اعداد حقیقی خواهیم داشت $xy = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$. توجه داریم که $p_1 p_2$ و $q_1 q_2$ دو عدد صحیح می‌باشند و بعلاوه $q_1 q_2 \neq 0$(چرا؟) بنابراین کافی است قرار دهیم $p = p_1 p_2$ و $q = q_1 q_2$، در این صورت p و q همان اعداد صحیح مورد نیاز می‌باشند.

مثال۱۸. ثابت کنید اگر f و g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع حقیقی پوشا باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز پوشا است.

اثبات: فرض می‌کنیم توابع حقیقی f و g پوشا باشند. برای اثبات پوشایی $g \circ f$، فرض می‌کنیم z یک عدد حقیقی دلخواه باشد. باید ثابت کنیم $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $(g \circ f)(x) = z$. حال با توجه به آنکه g پوشا می‌باشد، بنابراین وجود دارد عدد حقیقی y وابسته به z بطوریکه $g(y) = z$ و با توجه به اینکه f پوشاست، بنابراین عدد حقیقی w وابسته به y وجود دارد، بطوریکه $f(w) = y$. توجه کنید که در این حالت خواهیم داشت $z = g(y) = g(f(w)) = (g \circ f)(w)$ بنابراین انتخاب عدد حقیقی مطلوب ما، یعنی x روشن شد. یعنی کافی است قرار دهیم $x = w$.

تمرین های زیر را به منظور کسب مهارت درارائه اثبات‌های وجودی در نظر گرفته‌ایم.

۱- ثابت کنید برای هرعدد صحیح n، عدد صحیح m وجود دارد بطوریکه $m < n$.

۲- ثابت کنید اگر y, x دو عدد گویا باشند، آنگاه $x - y$ نیز گویاست.

۳- ثابت کنید اگر f و g دو تابع حقیقی باشند و $f \circ g$ پوشا باشد، آنگاه f نیز پوشاست.

۲-۴-۲) *اثبات به کمک استقرای ریاضی.*

برای اثبات گزاره‌هایی که حکم آنها به فرم $\forall n \; P(n)$ است که در آن n یک عدد صحیح مثبت (گاهی عدد صحیح نامنفی) می‌باشد. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. بنابراین استقرای ریاضی یک ابزار مناسب برای گزاره‌ای با سور عمومی می‌باشد که عالم‌سخن آن مجموعه اعداد طبیعی باشد.

هر اثبات به کمک استقرای ریاضی برای $\forall n \; P(n)$ از دو مرحلهٔ زیر تشکیل می‌شود:

۱) مرحلهٔ پایه استقرا $P(1)$ و در صورت نیاز $P(2)$.

۲) مرحلهٔ استقرا $(\forall n[P(n) \to P(n+1)])$

از آنجاییکه در مرحله استقرا، گزاره‌ای به فرم $\forall n[P(n) \to Q(n)]$ مطرح می‌باشد که در آن $Q(n)$ همان $P(n+1)$ است. بنابراین رویکرد اساسی که در این مرحله باید به‌کار ببریم همان رویکرد معرفی شده در بخش قبل، یعنی روش «عضوگیری» است. با فرض اینکه n یک عدد طبیعی دلخواه می‌باشد که برای آن $P(n)$ درست است، شروع می‌کنیم و بر اساس این فرض و هر چیز دیگری که در دسترس باشد (مثل فرض‌های گزاره) باید ثابت کنیم $P(n+1)$ نیز درست است.

فصل سوم

مرتکب چه اشتباهاتی نشویم؟

«یادگیری بدون اشتباه کردن محال است،

در عین حال ما زمانی یادگرفته‌ایم که دیگر اشتباهات قبلی را تکرار نکنیم.»

اشتباهات رایج در ریاضیات عمومی:

در این فصل برخی از اشتباهاتی که معمولاً دانشجویان کارشناسی مرتکب می‌شوند و همچنین دلایل این امر و راهکارهایی برای اجتناب از آنها ارائه می‌گردد. امیدواریم از این پس شاهد اشتباهات جدید؛ یعنی اشتباهاتی غیر از آنهایی که در این‌جا به آنها اشاره می‌شود، باشیم!

۳-۱) خطاهای ارتباطی:

۳-۱-۱) ***مغرور بودن معلم و برخورد غیر دوستانه او و خجالت کشیدن دانش آموز.***

یکی از اشتباهات بزرگ معلمان، نفرت داشتن از مورد سؤال واقع شدن توسط دانشجویان است. در نظر نگرفتن دانشجویان به عنوان دشمن و سعی در تدریس بهتر، احساس راحتی بیشتری به معلمان خواهد داد. بنابراین معلم باید به سخن دانشجویان گوش کند و آنها را تشویق کند تا سؤال‌هایشان را بپرسند. اگر معلمی صرفاً سخنرانی کند و مشوق دانشجویان به امر پرسش نباشد، شاید بهتر باشد یک کتاب یا یک فیلم آموزشی را جایگزین او نمود. برای ارائه یک تدریس مؤثر باید دید که آیا دانشجویان مطلب را درک کرده‌اند یا نه. مؤثرترین روش برای به‌دست آوردن جواب این سؤال گوش دادن به حرف‌های آنها و نگاه کردن به چهره‌های آنها می‌باشد. شاید معلم در این مورد فقط دانشجویان ممتاز خود را لحاظ کند، زیرا آنها زیبایی مطالبی که تدریس می‌کند را بهتر درک می‌کنند. امّا باید توجه داشت که دانشجویان دیگر نیاز بیشتری به کمک معلم دارند و البته این امر حق مسلم آنها می‌باشد.

یکی از خصایص نفرت آور معلم، صفت غرور و تکبر است. طبیعی است که معلم نیز مرتکب اشتباه می‌شود، در واقع اشتباهاتی که به آنها اشاره خواهد شد، ممکن است توسط معلم نیز رخ دهند و طبیعی است در این مواقع او به این امر اعتراف کند. امّا ممکن است غرور او مانع این امر شود و به تدریس خود ادامه دهد. برخی از معلمان به جای اینکه اشتباه خود را بپذیرند در این مواقع می‌گویند: «خوب؛ دانشجویان عزیز ادامه استدلال بدیهی است!» اگر معلم مغرور بوده و رفتار دوستانه‌ای با دانشجویان نداشته باشد، دانشجویان نمی‌توانند با او ارتباط سازنده‌ای برقرار کنند.

اگر فکر می‌کنید معلم مرتکب اشتباه شده است، خجالت نکشیده و به کلّ دانشجویان کلاس لطف کرده و آن را اعلام کنید. البته این موضوع را با معلم خود به صورت سؤالی مطرح کنید. به‌طورمثال به جای اینکه بگویید: «آن ۵ باید ۷ باشد» بگویید: «آیا آن ۵، نباید۷ باشد؟» همچنین این سؤال خود را بلافاصله پس از اینکه معلم مرتکب اشتباه شد، بپرسید. معلم ترجیح می‌دهد پس از اتمام جلسه درسی، دانشجویان با یادداشت‌هایی بدون اشتباه از کلاس خارج شوند.

۳-۱-۲) *جمله‌بندی مبهم.*

زبانهای رایج بشری برای بیان ریاضیات در نظر گرفته نشده‌اند. ریاضیات زبان خاص خود را دارد، امّا برای بیان آن از زبان‌های رایج بشری نیز استفاده می‌کند و این خود مشکلاتی را در پی دارد. زیرا ممکن است چندین تعبیر مختلف برای یک واژه یا اصطلاح موجود باشد. اگر معلم در انتخاب واژه‌های خود دقت نداشته باشد، ممکن است از واژه‌هایی با چندین تعبیر مختلف استفاده کند و دانشجو آن معنای مورد نظر معلم را برداشت نکند. انتخاب واژه یا اصطلاح دقیق، یک هنر است که می‌توان با تمرین آن را ارتقا بخشید. به مثال زیر از آنالیز ترکیبیات توجه کنید:

چند کلمهٔ متفاوت ۵ حرفی را می‌توان از ۷ حرف نقطه‌دار و ۴ حرف بی‌نقطهٔ متمایز ساخت بطوریکه دو حرف نقطه‌دار یا بی‌نقطه با هم نیایند و تکرار نیز مجاز نباشد؟ اگر تکرار مجاز باشد چطور؟

در بخش اول این سؤال «... با هم نیایند...» مبهم است. آیا منظور این است که آن دو حرف به‌طورمتوالی نباشند و یا اینکه یک در میان نباشند؟ آیا منظور دو حرف متمایز است؟ تعبیر این شرط بستگی به خواننده دارد، و بر اساس هر تعبیری یک جواب صحیح برای این مسئله ارائه خواهد شد.

در مورد بخش دوم این سؤال، دانشجویان باید به این نکته توجه داشته باشند که اگر یک سؤال در ادامه سؤال قبلی مطرح گردد، یعنی تمام شرایط مسئلهٔ قبل برقرارند، مگر شرایطی که در سؤال دوم تغییر می‌کنند.

گاهی این ابهام و عدم تفاهم، به واسطه قراردادهای متفاوتی است که در بین ریاضیدانان رایج می‌باشد. به‌طورمثال برخی از ریاضیدانان اثر تابع f روی متغیر x را با $f(x)$ و برخی دیگر با xf نمایش می‌دهند. حال اگر دانشجو از معلم قبلی خود قرارداد اول را آموخته باشد و معلم

جدید بر اساس قرارداد دوم عمل کند، یک نوع عدم تفاهم بین معلم و دانشجو به وجود می‌آید و گاهی هر دو نیز از ریشهٔ این اختلاف آگاه نیستند. (مثال‌های بیشتری را در بخش ترتیب عملگرها ارائه خواهیم کرد).

گاهی این ابهام به واسطه بی‌توجهی به قراردادهای وضع شده در خود ریاضیات ایجاد می‌شود. به‌طورمثال $5\times3+2$ را می‌توان به دو معنای متفاوت $5\times(3+2)$ و $(5\times3)+2$ در نظر گرفت که طبق قرارداد، دومی مد نظر می‌باشد.

۳-۱-۳) *دست‌خط بد.*

دست‌خط بد یکی از موانع ایجاد ارتباط صحیح با دیگران و حتی با خود می‌باشد. اگر چه تعداد کمی از معلمان برای دست‌خط بد نمره منفی در نظر می‌گیرند، امّا نوشتهٔ بد خط ممکن است شما را به جواب نادرست برساند. به‌طورمثال دانشجویی حاصل $\int(5x^4+2)dx$ را x^5+7x+c به‌دست آورد. دلیل این اشتباه این بود که ۲ را شبیه ۷ نوشته بود. نوشتهٔ شما باید آن قدر تمیز باشد که خودتان و یا هر شخص دیگر به راحتی بتوانید تفاوت حروف و کاراکترهای به‌کار برده شده را تشخیص دهید. یکی از اشتباهات رایج در این زمینه، اشتباه گرفتن علامت « + » و حرف «t» به جای یکدیگر است.

۳-۱-۴) *نخواندن دقیق دستورالعمل‌ها.*

دانشجویان گاهی دستورالعمل سؤال را به درستی نمی‌خوانند، بنابراین جواب درست، به یک سؤال نادرست می‌دهند!

۳-۱-۵) *ندیدن و ننوشتن پرانتزها.*

در حین یک محاسبه، اگر نیاز به قرار دادن یک جفت پرانتز باشد و شما به دلیل تنبلی و یا کمبود وقت آنها را قرار ندهید، ممکن است در مرحلهٔ بعدیِ محاسبه مرتکب اشتباه شوید. به‌طورمثال:

$$3\int(5x^4+7)dx=3x^5+7x+c$$

باید به صورت:

$$3\int(5x^4+7)dx=3(x^5+7x)+c=3x^5+21x+c$$

باشد.

همچنین به‌کاربردن پرانتزهای نامتقارن یکی دیگر از اشتباهات رایج نوشتاری است. به‌طورمثال «$3(5x^4+2x+7)$)» بی معنی است، زیرا تعداد پرانتزهای باز شده با تعداد پرانتزهای بسته شده برابر نیست. برای برقراری تقارن پرانتزها می‌توانیم به دو صورت مختلف $3(5x^4+2x+7)$ و یا $3(5x^4+2x)+7$ عمل کنیم، بنابراین باید در این مورد نیز دقت لازم را به‌کار برد که کدام یک مورد نظر است.

۳-۱-۶) *جملاتی که در علامت سه نقطه از دست می‌روند.*

علامت سه نقطه (...) طبق قرار داد به معنای «الگو را ادامه دهید.» می‌باشد و برای نوشتن لیست‌های طولانی به‌کار می‌رود. برای مثال ۱،۲،۳،...,۱۰۰، برای نمایش اعداد طبیعی از ۱تا ۱۰۰ به‌کار می‌رود.

گاهی استفاده از علامت سه نقطه (...) نه تنها یک قرارداد، بلکه یک ضرورت است. به‌طورمثال $1,2,3,...,n$ برای نمایش اعداد طبیعی از ۱ تا عدد n به‌کار می‌رود و بدون استفاده از علامت سه نقطه، بیان آن ممکن نیست.

علامت سه نقطه برخی از جملات لیست را پنهان می‌کند. از این قرارداد باید زمانی استفاده نمود که تعداد جملات باقی‌مانده به اندازه‌ای باشد که الگوی به‌کاربرده شده را آشکار سازند.

به‌طورمثال ۱,...,۶۴ مبهم است و می‌توان آن را به صورت‌های مختلف زیر تعبیر کرد:

الف) اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۴: ۱،۲،۳،۴,...,۶۴

ب)توانهای ۲: .. ۱،۲،۴،۸،۱۶،۳۲،۶۴

ج) اعداد مربع کامل بین ۱ تا ۶۴: ۱،۴،۹،۱۶،۲۵،۳۶،۴۹،۶۴

البته ممکن است با توجه به زمینهٔ مورد بحث که ۱,...,۶۴ در آن ظاهر شده است بتوان تشخیص داد کدام یک از تعبیرهای بالا مورد نظر است. همچنین تعداد جملات مورد نیاز برای آشکارسازی الگوی به‌کار برده شده نیز یک امر نسبی است و از فردی به فرد دیگر ممکن است فرق کند.

به‌کارگیری نادرست علامت سه نقطه می‌تواند در اثبات‌های استقرایی ایجاد مشکل کند. به‌طورمثال فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\forall n \in I\!N \;\; 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حکم برای $n=1$ برقرار است. فرض می‌کنیم برای یک n نامعین حکم برقرار است و ثابت می‌کنیم برای $n+1$ نیز حکم برقرار است. به دو طرف تساوی برای حالت n، عدد $2n+1$ را

اضافه می‌کنیم. یعنی: $1^2+2^2+\cdots+n^2+2n+1=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2n+1$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2n+1$$

که غلط است. حال اگر دچار یک اشتباه جبری نیز بشویم و از تساوی آخر به نتیجهٔ درست زیر برسیم. آنگاه به اشتباه قبلی خود پی نخواهیم برد.

$$1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

امّا اشتباه چیست؟ در واقع داریم:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+2n+1=1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+(n+1)^2$$

بنابراین جمله n^2 در علامت سه نقطه حذف شده است و عبارت حاصل، خواست مسئله ما نیست.

۳-۲) *اشتباهات جبری*:

۳-۲-۱) *خطای علامت*.

خطاهای علامت، رایج‌ترین اشتباه جبری می‌باشند و نشان دهندهٔ بی‌دقتی و عدم توجه دانشجویان هستند. اگر چه دانشجویان خطاهای علامت را بی‌اهمیت می‌دانند، امّا توجه داشته باشید که یک علامت منفیِ اشتباه در محاسبات یک مهندس، ممکن است موجب فرو ریختن یک پل یا یک ساختمان شود.

دلایل زیربنایی گوناگونی برای خطاهای علامت وجود دارند. یکی از دلایل، همان «ندیدن پرانتزها» می‌باشد که در بخش قبل بحث شد. دلیل دیگر این است که برخی از دانشجویان ناخودآگاه به این نکتهٔ اشتباه باور دارند که «علامت منفی به معنای یک عدد منفی است.» شاید ریشه این باور این باشد که ما «$-x$» را به صورت (منفی x) می‌خوانیم و این امر باعث شده که برخی از دانشجویان تصور کنند که حاصل باید یک عدد منفی باشد. اینکه آیا «$-x$» یک عدد منفی است، بستگی به خود x دارد. اگر x مثبت باشد، آنگاه $-x$ منفی است. امّا اگر x منفی باشد، آنگاه $-x$ مثبت است. به‌طورمثال اگر $x=-6$ ، آنگاه $-x=+6$ یک عدد مثبت است.

عدم درک صحیح علامت عدد «$-x$» خود باعث اشتباهات بعدی می‌شود. به‌طورمثال درک

تابع قدرمطلق نیز دچار مشکل خواهد شد. به‌طورهندسی معنای $|x|$ فاصله بین x و مبدأ مختصاتِ محور اعداد حقیقی می‌باشد و فاصله، یک کمیت نامنفی است. به لحاظ جبری $|x|$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تعریف پیچیده است و مبتدیان را دچار مشکل می‌کند.

۳-۲-۲) *همه چیز جمعی است.*

در ریاضیات پیشرفته تابع یا عملگر f را جمعی می‌نامند، هرگاه به ازای هر xو y در شرط زیر صدق کند:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

برخی از عملگرهای ریاضی جمعی می‌باشند. به‌طورمثال:

الف) حد مجموع برابر است با مجموع حدها.
ب) مشتق مجموع برابر است با مجموع مشتق‌ها.
ج) انتگرال مجموع برابر است با مجموع انتگرال‌ها.

امّا باید توجه داشت که *بسیاری از عملگرها و توابع ریاضی*، جمعی *نیستند*. علیرغم این موضوع برخی از دانشجویان هنوز شرط جمعی را برای آنها در نظر می‌گیرند. بطورمثال بر خلاف انتظار برخی از دانشجویان داریم:

الف) $\sin(x+y)$ برابر با $\sin(x)+\sin(y)$ نیست.
ب) $(x+y)^2$ برابر با x^2+y^2 نیست.
ج) $\sqrt{x+y}$ برابر با $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ نیست.
د) $\frac{1}{x+y}$ برابر با $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ نیست.

البته باید توجه داشت که ممکن است برای مقادیر خاصی از xو y (به‌طورمثال $x=y=0$ در (الف) تا (ج)) تساوی برقرار شود. امّا این به معنای اینکه برای هر xو y تساوی برقرار باشد، نیست.

در مورد $\sin(x+y)$ شاید ریشه اشتباه این باشد که دانشجویان پرانتزها را مشاهده نموده و با

تابع sin مانند یک ضرب مثل ۶ در تساوی $6(x+y)=6x+6y$ برخورد می‌کنند.

۳-۲-۳) *همه چیز جابجایی است.*

در ریاضیات پیشرفته دو عملگر یا تابع f و g را جابجایی می‌نامیم، هرگاه ترتیب ترکیب آنها مهم نباشد به عبارت دیگر $f\circ g=g\circ f$. بر خلاف تصور دانشجویان بسیاری از عملگرها و یا توابع با هم جابجا نمی‌شوند. به‌طورمثال:

الف) $1og(\sqrt{x})$ برابر با $\sqrt{1og(x)}$ نیست.

ب) $\sin(3x)$ برابر با $3\sin(x)$ نیست.

اشتباه رایج دیگر در این زمینه این است که فرض کنیم عمل ضرب با عمل مشتق‌گیری جابجا می‌شود. یعنی به اشتباه $(f.g)'$ را برابر با $f'.g'$ در نظر بگیریم. لایبنیتز در ابتدا مرتکب این اشتباه شد و سپس فرمول صحیح $(f.g)'=f'.g+f.g'$ را اثبات نمود و این خاصیت مشتق، در حال حاضر به خاصیت لایبنیتزی مشتق معروف است. اشتباه مشابه دیگر، جابجایی ضرب با عمل انتگرال‌گیری است. یعنی به اشتباه $\int f(x)g(x)dx$ را برابر با $\int f(x)dx\int g(x)dx$ در نظر بگیریم.

۳-۲-۴) *همه چیز شرکت‌پذیر است.*

جمع و ضرب اعداد حقیقی شرکت‌پذیر است. یعنی به ازای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a.(b.c)=(a.b).c$$

برخی از دانشجویان به اشتباه تصور می‌کنند که تمام اعمال ریاضی شرکت‌پذیرند، در حالیکه بسیاری از اعمال ریاضی خاصیت شرکت‌پذیری ندارند. به‌طورمثال اعمال تفریق و تقسیم این ویژگی را ندارند.

۳-۲-۵) *حذف کردن غیرپخشی.*

اشتباه رایج دیگر «قرار دادن پرانتزهای زائد» است. توابع کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x):=\frac{(x+7)(x+1)+x^2+1}{(x+7)(x^2+5)}$$

$$g(x) := \frac{(x+7)[(x+1)+x^2+1]}{(x+7)(x^2+5)}$$

با حذف عامل مشترک صورت و مخرج تابع g یعنی $x+7$ (البته با شرط ناصفر بودن آن) داریم:

$$g(x) = \frac{(x+1)+x^2+1}{x^2+5}$$

برخی از دانشجویان صورت تابع کسری f را با در نظر گرفتن پرانتزهای زائد، به اشتباه $(x+7)[(x+1)+x^2+1]$ تصورمی‌کنند، بنابراین به نتیجهٔ غلط $f = g$ می‌رسند.

شاید ریشه این اشتباه دانشجویان، در عدم آگاهی آنان از برخی مفاهیم پایه‌ای کسرها باشد. در این زمینه به ذکر چند قاعدهٔ پایه‌ای بسنده می‌کنیم:

الف) ضرب اعداد حقیقی خاصیت جابجایی دارد، یعنی $xy = yx$. بنابراین بسیاری از قوانین عمل ضرب، متقارن است. به‌طورمثال ضرب هم از چپ و هم از راست در جمع پخش می‌شود، یعنی:

$$y(x_1+x_2) = yx_1 + yx_2 \quad \text{و} \quad (x_1+x_2)y = x_1y + x_2y$$

ب) عمل تقسیم اعداد حقیقی خاصیت جابجایی ندارد، یعنی در حالت کلّی $\frac{x}{y}$ با $\frac{y}{x}$ برابر نیست. بنابراین قوانین عمل تقسیم (برخلاف تصور بعضی از دانشجویان) متقارن نیست. بطورمثال اگرچه قانون $\frac{x_1+x_2}{y} = \frac{x_1}{y} + \frac{x_2}{y}$ برقرار است، $\frac{y}{x_1+x_2} = \frac{y}{x_1} + \frac{y}{x_2}$ در حالت کلّی برقرار نیست (کافی است قرار دهیم $y = x_1 = x_2 = 1$).

ج)در یک کسر، پرانتزها اهمیت بسیاری دارند. به‌طورمثال $\frac{a+b}{c+d}$ بیانگر $(a+b)/(c+d)$ می‌باشد و حذف پرانتزها معنای متفاوتی به این عبارت کسری می‌بخشد.

۳-۲-۶) اشتباهات ابعادی.

بیشتر اشتباهات اشاره شده در این کتاب کارهایی است که نباید انجام دهیم، امّا تحلیلِ ابعادی[۱] کاری است که باید انجام دهیم. اگرچه تحلیل ابعادی، جواب درست را به ما نمی‌دهد، بلافاصله جواب‌های غلط را مشخص می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

---

۱ Dimensional analysis

الف) فرض کنید که از شما خواسته شده که حجم ناحیه‌ای را به دست آورید. اگر جوابتان بر حسب سانتی‌متر مربع به دست آمده باشد. آنگاه بی‌شک جواب غلط است. زیرا بُعد (واحد) حجم از قبیل سانتی‌متر مکعب است. در این گونه اشتباهات، تبدیل سانتی‌متر به سانتی‌متر مکعب چارهٔ کار نیست، بلکه باید کل محاسبات را مجدداً بازبینی نمود.

ب) فرض کنید از شما خواسته شده است که حجم و یا مساحت ناحیه‌ای را به دست آورید. اگر جوابتان یک عدد منفی باشد، آنگاه بی‌شک جواب غلط است. در این مورد نیز فقط به عوض کردن علامت بسنده نکنید.

ج) اگر تعیین مساحت یک سکه ۵۰ تومانی از شما خواسته شده باشد و جواب شما مثلاً ۵ کیلومترمربع باشد، علیرغم درست بودن بُعد (واحد) جواب، به نظر می‌رسد که در محاسبات اشتباهی صورت گرفته است.

د) فرض کنید فرمول مساحت کره‌ای به شعاع r را فراموش کرده‌اید. با توجه به اینکه با کوچکتر شدن شعاع، مساحت نیز کوچکتر می‌شود به‌طورحتم این فرمول نمی‌تواند $\pi(r^2-2r)$ باشد.

ه) معادله $2n^2+4n=1385$ در اعداد صحیح جواب ندارد؛ زیرا سمت چپ یک عدد زوج است در حالیکه سمت راست یک عدد فرد است.

و) فرض کنید n یک عدد طبیعی است. فرمول $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots\sqrt{n}=\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ نمی‌تواند صحیح باشد؛ زیرا سمت چپ یک عدد گنگ است در حالیکه سمت راست یک عدد گویا است.

حال سعی کنید اشتباه استدلال زیرا بیابید:

سانتی‌متر را با cm و متر را با m نمایش می‌دهیم. حال داریم:

$$1m=100cm=(10cm)^2=(0.1m)^2=0.01m=1cm$$

۳-۳) *ابهام در نمادها:*

۳-۳-۱) ***معکوس تابع یا معکوس عدد.***

مشکلات دانشجویان در یادگیری زبان ریاضیات نیاز به توجه بیشتری دارد. اگرچه زبان ریاضی دقیق و سازگار می‌باشد، برخی از ناسازگاری‌ها نیز در آن دیده می‌شود. به‌طورمثال $\sin^n(x)$ برحسب اینکه n چیست، معنای متفاوتی دارد. در حالیکه $\sin^2(x)=\sin(x)\sin(x)$ امّا $\sin^{-1}(x)=\arcsin(x)$. یعنی $\sin^n(x)$ بر حسب مقادیری که n می‌گیرد، تغییر معنا می‌دهد.

این امر بعضی از دانشجویان را به اشتباه می‌اندازد و آنها را به نتیجهٔ نادرست $\arcsin(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ می‌رساند. در واقع ریشهٔ این اشتباه در این است که نمادگذاری a^{-1} برای دو منظور متفاوت به‌کار برده می‌شود: معکوس ضربی عدد حقیقی ناصفر a و همچنین معکوس تابعی تابع وارون‌پذیر a.

۳-۳-۲) *جذر اعداد*.

هر عدد حقیقی مثبت b دارای دو جذر می‌باشد. نماد $\sqrt{b}$نشان دهندهٔ جذر نامنفی b می‌باشد. دو جذر عدد حقیقی مثبت b را به صورت $\pm\sqrt{b}$ نشان می‌دهند. برخی از دانشجویان $\sqrt{b}$ را برای هر دو جذر عدد حقیقی مثبت b به‌کار می‌برند، یعنی برای آن دو مقدار در نظر می‌گیرند. شاید ریشه این اشتباه در این باشد که برخی از معلمان وقتی روی تختهٔ کلاس می‌نویسند: « $\sqrt{b}$» آن را می‌خوانند «جذر b»، در حالیکه باید گفت: «جذر نامنفی b».

۳-۳-۳) *ترتیب عملگرها*.

برای ترتیب عملگرها و اولویت آنها قراردادهایی وضع شده است تا از استفادهٔ بیش از حد پرانتزها جلوگیری شود. پرانتزها برای جلوگیری از ابهام به‌کار می‌روند، امّا تعداد بیش از حد پرانتزها در یک عبارت، خود می‌تواند ابهام ایجاد کند. به‌طورمثال $6a + 5$ یعنی $(6 \times a) + 5$ و نه $6 \times (a + 5)$. به عبارت دیگر عمل ضرب بر عمل جمع اولویت دارد. شاید ریشه این امر این باشد که در حالت‌های خاص، ضرب ساده‌نویسی جمع است. به‌طورمثال 3×4 یعنی $4 + 4 + 4$.

برخی از دانشجویان از اولویت‌بندی صحیح عملگرها آگاه نیستند. به‌طورمثال -3^2 چند است؟ بسیاری از دانشجویان این عدد را به صورت $(-3)^2$ در نظر می‌گیرند، بنابراین به جواب ۹ می‌رسند. امّا جواب صحیح ۹- می‌باشد، زیرا طبق قرار داد عمل «به توان رساندن» اولیت بیشتری نسبت به عمل «قرینه‌سازی» دارد.

اولویت‌بندی‌های رایج برای ترتیب عمل‌ها عبارتند از:

الف)«پتضجم» عبارت‌های داخل پرانتز، تقسیم، ضرب، جمع و منها. بنابراین $3/5x$ یعنی $(3/5)x$.

ب) «پضتجم» عبارت‌های داخل پرانتز، ضرب، تقسیم، جمع و منها. بنابراین $3/5x$ یعنی $3/(5x)$.

ج) طبق قرارداد مورد استفاده در زبان برنامه نویسی کامپیوتر FORTRAN و برخی دیگر از زبان‌های برنامه نویسی، عمل ضرب و عمل تقسیم اولویت یکسانی دارند و اگر در یک عبارت کنار هم آمده باشند، آنکه در سمت چپ قرار دارد در اولویت است. بنابراین $3/5x$ یعنی $(3/5)x$.

یکی از دلایل به دست آوردن نتایج متفاوت برای یک عبارتِ یکسان توسط ماشین‌حساب‌های الکترونیکی متفاوت، این است که آنها از اولویت‌بندی‌های متفاوتی برای عمل‌ها استفاده می‌کنند. به‌طورمثال ماشین‌حساب T۱۸۵ برای عبارت 2^{3^4} عدد ۴۰۹۶ را ارائه می‌دهد، در حالیکه ماشین‌حساب T۱۹۵ برای همین عبارت عدد ۲،۴۱۷۸۵۱۶۳۹۲۳ E۲۴ (نمایش علمی) را ارائه می‌دهد. ریشه این اختلاف این است که اولی این عبارت را به صورت $(2^3)^4$ و دومی به صورت $2^{(3^4)}$ تعبیر می‌کند.

از آنجاییکه یک موافقت عمومی بر روی اولویت‌بندی‌های عمل‌ها وجود ندارد، برای جلوگیری از ابهام به جای عبارت‌هایی مانند $3/5x$ بهتر است از عبارت‌های نامبهمی مانند $(3/5)x$ ، $\frac{3}{5}x$، یا $3/(5x)$ استفاده نمود.

۳-۳-۴) *طوفانی از نمادهای بی معنی.*

برخی از دانشجویان برای محاسبهٔ مشتق سوم x^4+7x^2-5 به طریق زیر عمل می‌کنند:

$$x^4+7x^2-5=4x^3+14x=12x^2+14=24x$$

اگرچه در نهایت جواب صحیح $24x$ را ارائه می‌دهند، راه‌حل آنان از لحاظ ریاضی بی‌معنی است. در واقع آنان از نماد تساوی «=» به جای نماد نتیجه گیری $(\Rightarrow)$ استفاده می‌کنند. بیان صحیح محاسبه بالا به این صورت است:

$$\begin{aligned}
&y=x^4+7x^2-5\\
&\Rightarrow y'=4x^3+14x\\
&\Rightarrow y''=12x^2+14\\
&\Rightarrow y'''=24x
\end{aligned}$$

۳-۴) *خطا در استدلال:*

۳-۴-۱) ***با دقت بازبینی نکردن استدلال از ابتدا تا انتهای آن.***

متأسفانه بیشتر کتاب‌های درسی و برخی از معلمان توجهی به بازبینی کارها و تکالیف دانشجویان ندارند. شاید ریشه این امر وجود نداشتن یک تئوری فراگیر برای نحوهٔ ارزیابی کارهای دانشجویان باشد. برخی از دانشجویان به این باور می‌رسند که نیازی به ارزیابی کارهای آنان در طول ترم نمی‌باشد. فقط یک بار تکالیف را می‌نویسند و امیدوارند که آنها را درست حل کرده باشند. امّا همهٔ ما گاهی اشتباه می‌کنیم و با آگاهی یافتن نسبت به آنها و تمرین برای از بین بردن آنها مطالب جدید را می‌آموزیم.

در ریاضیات، بازبینی کارهایی که انجام داده‌اید، یکی از قسمت‌های مهم فرایند یادگیری است. سعی کنید پس از اینکه تکالیف شما تصحیح و برگردانده شد، تمام اشتباهات خود را بیاموزید. منظور از بازبینی، یعنی سعی کنید درستی نتیجهٔ به دست آمده را از روشهای دیگر بررسی کنید. به‌طورمثال اگر معادله‌ای را حل کرده‌اید، در پایان ببینید که آیا جواب‌های به دست آمده در معادله صدق می‌کنند یا نه. برای مسائل دیگر نیز باید روش‌های دیگری برای بررسی درستی جواب بیابید. اگر روشی نیافتید، مسئله حل شده را برای مدتی کنار بگذارید و سپس با همان روش قبلی بدون نگاه کردن به برگه پاسخنامه قبلی، مسئله را حل کنید و ببینید آیا جواب یکسانی به دست آمده است یا نه. این روش وقت زیادی را از شما خواهد گرفت. ***امّا چگونه می‌توان بدون پی بردن به اشتباهات در درس ریاضی نمره خوبی گرفت؟***

روش دیگر برای بازبینی تکالیفی که انجام داده‌اید، مقایسه کردن آنها با تکالیف دیگر دانشجویان است. اگر برای یک مسئله جواب‌های متفاوتی به دست آورید، با دقت بیشتری راه‌حل خودتان را بررسی کنید.

برخی از اشتباهات به دلیل عجله کردن و صرف وقت کم برای حل تمرینات به وجود می‌آیند.گاهی برای یافتن و تصحیح این دسته از اشتباهات باید وقت بیشتری صرف کنید و این بهایی است که برای بی‌دقتی خودتان باید بپردازید.

۳-۴-۲) ***بی‌توجهی به اینکه برخی از مراحل، برگشت‌پذیر نیستند و بررسی نکردن جواب‌های مجازی.***

اگر عمل یکسانی را روی دو طرف یک معادله انجام دهیم، یک معادله دیگر به دست خواهیم آورد. فرض کنید روی دو طرف یک معادله که برخی از مقادیر مجهول x در آن صدق

می‌کنند، عمل یکسانی را انجام دهیم. آنگاه همان مقادیر مجهول x در این معادلهٔ جدید نیز صدق می‌کنند. به عبارت دیگر معادلهٔ جدید جواب‌های معادلهٔ قدیم را خواهد داشت، امّا *ممکن است که برخی جواب‌های جدید را نیز داشته باشد.*

برخی از اعمال برگشت‌پذیرند، یعنی ما مجموعه جواب مشابهی قبل و بعد از عمل داریم. به‌طورمثال:

الف) عملِ «ضرب دو طرفه معادله در یک عدد ناصفر» برگشت‌پذیر است. برای مثال، مجموعهٔ جواب معادله $x^2 - 3x - 2 = -4$ با مجموعهٔ جواب معادله $2x^2 - 6x - 4 = -8$ یکی است. در واقع برای خنثی کردن عمل انجام شده، کافی است دو طرف معادلهٔ جدید را در معکوس آن عدد ناصفر ضرب کنیم.

ب) عملِ «تفریق یک عدد از دو طرف معادله» برگشت‌پذیر است. برای برگشت به معادله اول، کافی است تا دو طرف معادلهٔ جدید را با قرینهٔ آن عدد جمع کنیم.

برخی اعمال برگشت‌پذیر نیستند و معادله جدید، ممکن است جواب‌های جدیدی نیز داشته باشد. به‌طورمثال:

الف) عملِ «مجذورکردن دو طرف معادله» برگشت‌پذیر نیست. مثلاً معادله $x = -3$ فقط یک جواب دارد، امّا وقتیکه دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، معادله $x^2 = 9$ را به دست می‌آوریم که دو جواب دارد.

ب) عملِ «ضرب دو طرف معادله در $x - a$» برگشت‌پذیر نیست. معادله حاصل، همه جواب‌های معادلهٔ قبلی را خواهد داشت، در ضمن $x = a$ نیز یک جواب جدید آن است.

یک روش رایج برای حل معادلات این است:

ساختن یک دنباله از معادلات، رفتن از یک معادله به معادلهٔ دیگر با انجام دادن عملی مشابه روی دو طرف یک معادله، سعی در ساده‌تر کردن معادله قبلی و در نهایت رسیدن به چیزی شبیه $x = 5$ از معادله اولیه.

این روش برای کشف جواب‌های معادله بد نیست. *امّا در ضمن قابل اعتماد نیز نمی‌باشد.* برای قابل اعتماد ساختن این روش باید یک قانون دیگر در نظر گرفت:

اگر حتی یکی از مراحل برگشت‌پذیر نباشد، در انتهای محاسبات باید جواب‌های به دست آمده را برای تعیین جواب‌های مجازی احتمالی بررسی نمود.

به همین دلیل است که در انتهای فرایند محاسبات، نه تنها جواب (یا جواب‌های) مسئلهٔ اولیه

به دست می‌آید، بلکه احتمالاً برخی جواب‌های دیگر نیز وجود دارند که در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کنند. چگونه آنها را امتحان کنیم؟ کافی است هر یک از جواب‌ها را در معادلهٔ اولیه قرار دهیم تا ببینیم که آیا در آن صدق می‌کنند یا نه. بسیاری از دانشجویان این مرحله آخر را حذف می‌کنند. برای روشن شدن این مبحث، دو مثال می‌آوریم:

مثال اول: معادله $\sqrt{2x+12}-2=x$ را در نظر می‌گیریم. در ابتدا با اضافه کردن ۲ به دو طرف معادله (یک مرحله برگشت‌پذیر) داریم: $\sqrt{2x+12}=x+2$. حال با به توان ۲ رساندن دو طرف معادله (یک مرحله برگشت ناپذیر) داریم: $2x+12=x^2+4x+4$. با جمع و تفریق مناسب در دو طرف معادله (یک مرحله برگشت‌پذیر) داریم: $x^2+2x-8=0$ حال این معادلهٔ درجه دوم را با استفاده از روش متداول حل معادلات درجه دوم حل می‌کنیم و جواب‌های $x=-4$ و $x=2$ را به دست می‌آوریم.
بسیاری از دانشجویان در این مرحله توقف نموده و فکر می‌کنند که کار را به پایان رسانده‌اند و می‌نویسند $\{2,-4\}$ مجموعه جواب معادله است. از آنجاییکه یکی از مراحل برگشت ناپذیر بود، باید احتمال وجود جواب‌های مجازی را بررسی کنیم. لذا هر یک از جواب های $x=-4$ و $x=2$ را در معادلهٔ اولیه قرار می دهیم. با قرار دادن $x=-4$ در معادلهٔ اولیه به رابطهٔ نادرست $0=4$ می‌رسیم، بنابراین $x=-4$ یک جواب مجازی معادلهٔ اولیه می‌باشد. با قرار دادن $x=2$ در معادلهٔ اولیه، نتیجه می‌شود که مجموعه جواب $\{2\}$است.

مثال دوم: معادله $\frac{x^3-3}{x}+\frac{3x^2+x+7}{x}=1+\frac{4}{x}$ را در نظر می‌گیریم. با جمع و تفریق مناسب در دو طرف معادله (یک مرحله برگشت‌پذیر) داریم: $\frac{x^3+3x^2}{x}=0$. با فاکتورگیری (یک مرحله برگشت‌پذیر) داریم: $\frac{x^2(x+3)}{x}=0$. یک xرا از معادله حذف می‌کنیم (یک مرحله برگشت ناپذیر) داریم: $x(x+3)=0$ که جواب‌های آن عبارتند از $x=0$و $x=-3$.
برخی از دانشجویان در این مرحله می‌ایستند. امّا یکی از مراحل برگشت‌ناپذیر است. با بررسی جواب‌ها نتیجه می‌شود که $x=0$ یک جواب مجازی است.

صرف نظر از موضوع جواب‌های مجازی، دلیل دیگر برای بررسی کردن جواب‌ها، یافتن اشتباهات محاسباتی است. در یک آزمون با موضوع «معادله‌ها و جواب‌های مجازی آنها» به

دانشجویان هشدار داده شد که وجود یک جواب مجازی در جواب‌ها، نصف نمره را از بین می‌برد. با این حال در حدود یک سوم از دانشجویان از بررسی جواب‌های خود غفلت کردند.

۳-۴-۳) *اشتباه گرفتن یک گزاره شرطی با عکس آن.*

گزاره‌های $A \to B$ و $B \to A$ را عکس یکدیگر می‌نامیم. نماد ریاضی«$\to$» برای «نتیجه می‌دهد» به‌کار برده می‌شود. بنابراین گزاره «A، B را نتیجه می‌دهد» را با $A \to B$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف عکس گزارهٔ $A \to B$، گزارهٔ $B \to A$ می‌باشد. معمولاً این دو گزاره هم‌ارز نمی‌باشند. به‌طورمثال فرض کنیم گزاره شرطی «اگر من به مراسم عروسی بروم، آنگاه چلومرغ می‌خورم»، یک گزاره درست باشد، در این صورت عکس آن، یعنی «اگر من چلومرغ خورده باشم، آنگاه من به مراسم عروسی رفته‌ام» لزوماً درست نخواهد بود، زیرا در مراسم عزاداری نیز ممکن است چلومرغ بدهند. اگر چه در این مثال تشخیص معادل نبودن گزاره و عکس آن ساده است، امّا در مثال‌های ریاضی تشخیص این موضوع کار ساده‌ای نیست.

اگر گزارهٔ شرطی $A \to B$ و عکس آن $B \to A$ هر دو درست باشند، به عبارت دیگر گزارهٔ دو شرطی $A \leftrightarrow B$ درست باشد، در این صورت گزاره‌های A و B را ***معادل*** می‌نامند. توجه کنید که معادل بودن دو گزاره، دقیقاً به معنای هم‌ارز بودن آن دو می‌باشد. به‌طورمثال فرض کنید که p، q و r طول اضلاع یک مثلث باشند و r طول ضلع بزرگ‌تر باشد، گزاره دو شرطی «$p^2 + q^2 = r^2$ اگر و فقط اگر مثلث مورد نظر یک مثلث قائم الزاویه باشد»، درست است.

قسمت «اگر» از گزاره دو شرطی فوق به قضیه فیثاغورث معروف است، و قسمت «فقط اگر» عکس آن است و معروفیت آن کمتر از اولی است.

برخی از دانشجویان یک گزارهٔ شرطی را با عکس آن اشتباه می‌گیرند. این شاید از این موضوع نشأت بگیرد که در بسیاری از موقعیتهای غیر ریاضی یک عبارت با عکس آن معادل است و معمولاً در زندگی روزمره، «اگر» را با مفهوم «اگر و فقط اگر» قابل معاوضه دانسته و استفاده می‌کنیم.

ریاضیدان‌ها نیز در موقع تعریف یک مفهوم جدید «اگر» را طبق قرار داد معادل «اگر و فقط اگر» در نظر می‌گیرند. این امر کار را برای کسانی که با زبان ریاضی آشنا نیستند سخت‌تر می‌کند. معمولاً مفهومی که تعریف می‌گردد به صورت شکسته و با حروف درشت نوشته

می‌شود و در واقع نقش یک میان‌بر شفاهی را برای آن مفهوم بازی می‌کند. به تعریف «گزاره‌های معادل» که در صفحه قبلی ارائه شد، توجه کنید.

برای روشن شدن بحث تعریف پیوستگی یک تابع حقیقی f را ارائه می‌دهیم:

f پیوسته است اگر برای هر عدد حقیقی a و هر عدد مثبت ε یک عدد مثبت δ (که شاید به a و ε وابسته باشد) چنان وجود داشته باشد که برای هر عدد حقیقی x اگر $|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

در این تعریف «اگر» به معنای «اگر و فقط اگر» می‌باشد و برای تعریف «پیوستگی» به‌کار برده شده است.

۳-۴-۴) *استدلال برعکس*.

یک روش غیر قابل اعتماد برای اثبات که بوسیلهٔ برخی از دانشجویان به‌کار گرفته می‌شود، *استدلال برعکس* است. فرض کنید می‌خواهیم درستی گزاره A را اثبات کنیم. استدلال برعکس یعنی شروع استدلال با فرض درستی A، (یعنی آنچه که باید درستی آن را اثبات کنیم)، سپس سعی در رسیدن به یک گزاره که درستی آن مثل درستی ۱=۱ واضح باشد. از درستی این نتیجهٔ واضح، برخی از دانشجویان بدون توجه به برگشت‌ناپذیری بعضی از مراحلِ رسیدن به آن نتیجهٔ واضح، نتیجه می‌گیرند که گزاره A نیز درست است.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که ریشه سوم ۳ از ریشه دوم ۲ بزرگ‌تر است. در استدلال برعکس، با فرض درستی $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ کار را شروع می‌کنیم. سپس هر دو طرف را به توان ۶ می‌رسانیم. در نتیجه $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 > \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6$. حال با توجه به قانون $(a^b)^c = a^{bc}$ برای توان‌ها داریم $3^2 > 2^3$، یا به عبارت دیگر $9 > 8$. این همان نتیجه واضح است که به دنبال آن بودیم. برخی از دانشجویان به اشتباه تصور می‌کنند که $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ اثبات شده است. این یک اثبات نیست.

نباید یک اثبات را با فرض درستی چیزی شروع کنید که می‌خواهید آن را اثبات کنید.

در مثال بالا همهٔ مراحل استدلال برگشت‌پذیرند. بنابراین با عکس کردن مراحل می‌توان یک اثبات برای مسئله ارائه داد. نتیجهٔ واضح $9 > 8$ را به صورت $3^2 > 2^3$ بازنویسی می‌کنیم. با توجه به قانون $(a^b)^c = a^{bc}$ برای توانها آن را به صورت $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 > \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6$ می‌نویسیم. حال از هر دو طرف ریشه ششم می‌گیریم. و در نهایت داریم $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که ریشه سوم ۳ از ریشه دوم ۲ بزرگ‌تر است.

همانطوریکه در مثال قبل توضیح داده شد، استدلال برعکس می‌تواند یک روش خوب برای کشف اثبات‌ها باشد. بااین وجود در استفاده از آن باید احتیاط کنیم، زیرا یک روش غیر قابل قبول برای ارائه اثبات است. *البته بین کشف یک اثبات (که می‌تواند غیراتفاقی، غیر رسمی و غیر منطقی) باشد و ارائه آن که باید دقیق و منطقی باشد، تفاوت بسیاری است.*
اگر به کمک استدلال برعکس ایده یک اثبات کشف شد، برای ارائه و تکمیل اثبات، باید گزاره‌هایی شرطی مانند $A \to B$ را تبدیل به $B \to A$ کنیم و همانطوریکه قبلاً بحث شد، همیشه مجاز به این کار نیستیم. دانشجویان مبتدی هنگام استفاده از استدلال برعکس، به برگشت‌ناپذیری برخی از مراحل توجه نمی‌کنند. به‌طورمثال به استدلال زیر توجه کنید:

فرض کنیم $x > \sqrt{x^2 - 1}$ برای تمامی اعداد حقیقی x بر قرار است. $\sqrt{x^2 - 1}$ به معنی جذر نامنفی $x^2 - 1$ است و چون x بزرگ‌تر از آن است، بنابراین آن نیز نامنفی است. حال می‌توانیم هر دو طرف نامساوی را به توان۲ برسانیم که با توجه به نامنفی بودن هر دو طرف، یک مرحله برگشت‌پذیر است. بنابراین داریم: $x^2 > x^2 - 1$. با کم کردن x^2 از دو طرف داریم: $0 > -1$ که صرف نظر از مقدار x، یک نتیجه درست و واضح است. بنابراین $x > \sqrt{x^2 - 1}$ برای همه اعداد حقیقی x برقرار است! امّا به ازای $x = -2$ نامساوی بالا تبدیل به $-2 > \sqrt{3}$ می‌شود که به وضوح نادرست است!!

سعی کنید اشتباه صورت گرفته را پیدا کنید.

۳-۴-۵) *مشکلاتی با سورها*.

همانطوریکه در فصل قبل توضیح دادیم، سورها عباراتی مانند «وجود دارد» یا «برای هر» هستند. بسیاری از دانشجویان در مورد نحوه استفاده و فهم سورها دچار مشکلاتی هستند. به‌طورمثال در دستگاه اعداد حقیقی کدام یک از این دو عبارت درست می‌باشند؟

الف) برای هر عدد مثبت a یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که a از آن کوچکتر است.

ب) یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که هر عدد مثبت a از آن کوچکتر است.

شاید دلیل سختی درک سورها پیچیده‌تر بودن جملات ریاضی در مقایسه با جملات غیرریاضی، از لحاظ دستوری باشد. به‌طورمثال: « تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی کل خط حقیقی، پیوسته است، اگر برای هر نقطه a و هر عدد اپسیلون بزرگ‌تر از صفر، یک عدد دلتای بزرگ‌تر از صفر چنان وجود داشته باشد که برای هر نقطه x اگر فاصله a تا x کوچکتر از دلتا باشد، آنگاه فاصله $f(a)$ تا $f(x)$ کمتر از اپسیلون باشد». در این تعریف چندین عبارت سوردار و تو در تو به‌کار برده شده است:

الف) برای هر نقطه a... ب) برای هر عدد اپسیلون ...

ج) وجود دارد دلتایی که ... د) برای هر نقطه x ...

درگرامر زبان‌های غیرریاضی، جملات ساخته شده از تعداد زیادی عبارت‌های تو درتو، و همچنین سخت‌گیری زیاد نسبت به ترتیب لغات، رایج نمی‌باشد.

سورها را به عنوان مدارکی در نظر بگیرید که در یک دادگاه قانونی هر یک از دو طرف محاکمه ارائه می‌دهند. به‌طورمثال فرض کنید حریف شما می‌خواهد پیوستگی تابع f روی خط حقیقی را اثبات کند. بدون اهمیت دادن به آنچه که شما برای نقطه a و عدد اپسیلون تعیین می‌کنید، حریف باید یک عدد مثبت دلتا را چنان ارائه دهد که بدون اهمیت دادن به نقطهٔ x انتخابی شما، اگر فاصله x از a کمتر از دلتای حریف باشد، آنگاه او باید ثابت کند که فاصله $f(x)$ و $f(a)$ کمتر از اپسیلون شما می‌باشد. بنابراین پیوستگی یک تابع حقیقی مقدار f روی خط $\mathbb{R}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

چهار سور تو در تو که در این نحوهٔ بیان به وضوح دیده می‌شود، نشان دهنده پیچیدگی تعریف پیوستگی است.

۳-۴-۶) *راه‌حل‌های اشتباهی که در چند مورد خاص به نتیجهٔ درست رسیده‌اند.*

گاهی اوقات یک روش غلط بر حسب اتفاق به یک نتیجهٔ درست منجر می‌شود و برخی از دانشجویان آن روش را کلّی و قابل قبول تلقی می‌کنند. به‌طورمثال، برای ساده کردن کسر

$\frac{16}{64}$، اگر عدد ۶ را از صورت و مخرج حذف کنیم، به جواب درست $\frac{1}{4}$ می‌رسیم. ممکن است برخی از دانشجویان به اشتباه این روش ساده کردن را یک قانون کلّی تصور کنند و ساده شدهٔ کسر $\frac{36}{64}$ را برابر با $\frac{3}{4}$ بنویسند!

به مثال دیگری که در برگه امتحانی یکی از دانشجویان نوشته شده است، توجه کنید:

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = \frac{\sin x}{x}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2\pi} - \frac{\sin 0}{0} = \sin - \sin = 0$$

نکته جالب این است که این دانشجو انتظار گرفتن بخشی از نمرهٔ سؤال را داشت، زیرا جواب نهایی او درست بوده است.

۳-۴-۷) *اطمینان بیش از حد به ماشین‌حساب.*

بسیاری از دانشجویان ایمان دارند که ماشین‌حساب‌هایشان همواره درست عمل می‌کنند، امّا این درست نیست. هر ماشین‌حسابی محدودیت خاص خود را دارد و تحت برخی شرایط جواب نادرست خواهد داد. (***همانطوریکه معلمان و کتاب‌های ریاضی، گاهی جواب نادرست می‌دهند!***)

شاید بیشترین اشتباه ماشین‌حساب‌ها تفاوت قائل نشدن بین «***درجه***» و «***رادیان***» باشد. در کلاس‌های مهندسی از واحد درجه برای اندازه‌گیری زاویه‌ها استفاده می‌شود و در کلاس‌های ریاضیات عالی و محاسبات پیشرفته واحد رادیان برای این منظور به‌کار گرفته می‌شود؛ زیرا فرمول‌های توابع مثلثاتی بر حسب رادیان ساده‌تر بیان می‌شوند. به‌طورمثال در فرمول مشتق‌گیری $(\sin x)' = \cos x$، متغیر x بر حسب رادیان می‌باشد و اگر x بر حسب درجه باشد، آنگاه این فرمول به صورت $(\sin x)' = \frac{\pi}{180}\cos x$ بازنویسی می‌شود. حال خود قضاوت کنید که کدام یک ساده‌تر بیان شده است؟

۳-۵) *تعمیم دادن های بدون پشتوانه*:

۳-۵-۱) *خطای جذر اویلر*:

برخی از دانشجویان یک فرمول یا یک نماد از یک شاخهٔ ریاضی را در شاخه‌های تعمیم یافتهٔ آن شاخه، بدونِ در نظر گرفتنِ معنای آن فرمول یا نماد در آن شاخه‌ها به‌کار می‌گیرند. به مثال زیر توجه کنید:

هر عدد مثبت حقیقی دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی. نماد $\sqrt{b}$ فقط وقتی به‌کار گرفته می‌شود که b یک عدد حقیقی مثبت باشد و به معنی «ریشه دوم نامنفی b» می‌باشد. نماد $\sqrt{b}$ برای اعداد مختلط نیز به‌کار برده می‌شود. امّا در مورد اعداد مختلط هر عدد مختلط ناصفر b دو ریشهٔ دوم دارد که هر دو را با $\sqrt{b}$ نمایش می‌دهند. *بنابراین معنای نماد $\sqrt{b}$ در دنیای اعداد حقیقی و دنیای تعمیم یافتهٔ آن؛ یعنی اعداد مختلط کاملاً متفاوت است.* عدم توجه به این تفاوت ممکن است ایجاد مشکل کند. به‌طورمثال فرمول $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ برای اعداد حقیقی نامنفی a و b درست است و برای اعداد مختلط نادرست است. عدم توجه به این نکته ما را به تناقض زیر می‌رساند:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=i\times i=-1$$

ریاضیدان بزرگ «لئونارد اویلر» در دوران نوجوانی‌اش شبیه به همین اشتباه را در سال ۱۷۷۰ در یک کتاب در زمینه تئوری اعداد مختلط، منتشر کرده است.

۳-۵-۲) *مشتق* x^x.

مشتق x^x چیست؟ برخی از دانشجویان با اعتقادی راسخ جواب می‌دهند: $x.x^{x-1}$ و پس از ساده کردن x^x تعدادی از آنها می‌گویند: «چه جالب! مشتق x^x با خودش یکی است!» البته این دانشجویان بعد از حدود یک نیم سال باید به جواب درست زیر برسند:

$$\frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\ln x)$$

ریشه این اشتباه در این است که دانشجویان بدون در نظر گرفتن شرایط درستی فرمول مشتق $\frac{d}{dx}(x^k)=kx^{k-1}$، آن را به خاطر می‌سپارند. در حقیقت این فرمول زمانی درست است که k یک مقدار ثابت بوده و هر دو طرف آن تعریف شده باشند. به‌طورمثال اگر $k=\frac{1}{2}$، آنگاه

باید x مثبت باشد. توجه کنید که فرمول تغییری نمی‌کند، امّا شرایط درستی آن را باید مدّ نظر داشت.
بسیاری از معلمان به شرط ثابت بودن k اهمیت چندانی نداده و به آن اشاره نیز نمی‌کنند. زیرا در ذهن معلم این سنت رایج (که در هیچ جایی هم نوشته نمی‌شود) وجود دارد که x همواره به معنی یک متغیر و k به معنی یک ثابت است. حروف k و x در اینجا برای منظورهای مختلفی به‌کار برده می‌شوند. معلم ریاضی در استفاده از زبان ریاضی روان می‌باشد، درحالیکه برای اکثر دانشجویان، زبان ریاضی یک زبان خارجی است.

به نظر اکثر دانشجویان شرط ثابت بودن k مهم نمی‌باشد. زیرا در تمام مثال‌های ارائه شده برای آنان k یک مقدار ثابت است. موقعی که هیچ امکان دیگری برای k وجود ندارد، چرا دانشجو باید به خود زحمت داده و شرط ثابت بودن k را به خاطر بسپارد؟ امّا حذف همین شرط در آینده، دانشجو را دچار مشکل می‌کند؛ زیرا او از این فرمول در جایی هم که درست نیست، استفاده می‌کند. در واقع:

هر فرمول ریاضی را باید در کنار شرایط درستی آن به خاطر سپرد.

شاید ریشهٔ عدم توجه دانشجویان به شرایط درستی فرمول‌ها، این است که برای اکثر دانشجویان، ریاضیات یک زبان خارجی محسوب می‌شود و دانشجویان روی فرمول‌ها که به نظرشان بیگانه‌ترند، متمرکز می‌شوند. معمولاً شرایط درستی فرمول‌ها به زبان غیرریاضی و برحسب جملات فارسی بیان می‌شود. از آنجاییکه جملات فارسی برای دانشجویان آشنا است، روی این قسمت تمرکز کمتری می‌کنند. دلیل دیگر این است که دانشجویان کارشناسی به تمرکز روی محاسبات گرایش دارند و از لحاظ ریاضی هنوز به اندازهٔ کافی رشد نکرده‌اند که قادر باشند درباره ایده‌های نظری و مجرد به سادگی فکر کنند.
معلمی در ابتدای نیم سال تحصیلی به دانشجویان گفت که مشتق x^x برابر x^x نیست، بلکه جواب صحیح $x^x(1+\ln x)$ است و به آنها خاطر نشان کرد که این مسئله در امتحان پایان‌ترم خواهد آمد. این موضوع را در حدود ده بار در طول ترم برای آنها تکرار کرد و در آخرین جلسهٔ درس نیز این مسئله را به آنها یادآوری کرد. با این وجود تقریباً یک سوم ازدانشجویان مسئله را در پایان‌ترم اشتباه حل کردند. دلیل این کار علیرغم سماجت‌های معلم برای یاد دادن این موضوع به آنها ***پافشاری و وفاداری آنها به فرمول اشتباهی است که یادگرفته‌اند***. بنابراین یا فرمولی را یاد نگیرید و یا اینکه آن را به‌طورصحیح و کامل یاد بگیرید.

۳-۶) *خطاهای رایج دیگر در حسابان:*

۳-۶-۱) *نتیجه‌گیری نادرست درباره بی‌نهایت.*

برخی مسئله های مربوط به نامتناهی، با استفاده از «حساب مقدماتی نامتناهی» حل می‌شوند. این امر برخی از دانشجویان را به این نتیجهٔ اشتباه می‌رساند که همهٔ مسائل مربوط به نامتناهی از «حساب مقدماتی نامتناهی‌ها» حل می‌شوند.

یک مثال از «حساب مقدماتی» این است که با کمی اغماض می‌توانیم بگوییم که $\frac{1}{\infty}=0$.

البته شاید بهتر باشد که برای کمتر به اشتباه افتادن از نماد $\frac{1}{\infty}\to 0$ استفاده کنیم. معنای درست این قانون این است که اگر شما یک عدد متناهی را بگیرید و آن را بر یک عدد بسیار بزرگ تقسیم کنید، یک عدد بسیار نزدیک به صفر به دست می‌آید. به‌طورمثال، می‌توانیم از این قاعده استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که حدّ $\frac{3}{x^2}$ زمانیکه $x\to\infty$ برابر با صفر است، بنابراین $\frac{1}{\infty}$ برابر صفر است.

در مورد $\infty-\infty$، وضعیت کاملاً متفاوت است. زیرا دارای یک جواب نیست، بنابراین آن را مبهم می‌نامیم. به این معنی که رفع ابهام هر مسئله به شکل $\infty-\infty$ و تعیین مقدار دقیق آن، نیازمند یک آنالیز و تحلیل جداگانه است. مسائل متفاوتی از این دست، جواب های متفاوتی دارند. به‌طورمثال حدّ توابع $\sqrt{x^2+x}-x$، x^3-x و $[x^2+\frac{1}{x}]-x^2$ در بی‌نهایت به ترتیب برابر «$\frac{1}{2}$»، «بی‌نهایت» و «صفر» است. به‌طورمشابه $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ نیز مانند $\infty-\infty$ مبهم بوده و نیازمند یک تحلیل پیچیده و جداگانه برای هر مسئله هستند.

اشتباه رایج دیگر دانشجویان این است که فکر می‌کنند حدّ $(1+\frac{1}{n})^n$ زمانیکه $n\to\infty$ برابر یک می‌باشد؛ زیرا زمانیکه $n\to\infty$، داریم $1+\frac{1}{n}\to 1$ و حدّ 1^n زمانیکه $n\to\infty$ برابر یک می‌باشد. این گونه استدلال کردن، ناشی از کم‌تجربگی است. شما مجبورید تا با هر دو n ظاهر شده در $(1+\frac{1}{n})^n$ همزمان سروکار داشته باشید. زیرا آنها هر دو همزمان به سمت بی‌نهایت حرکت می‌کنند. نمی‌توانید این طور تجسم کنید که یکی از آن دو به سمت بی‌نهایت میل کند

و سپس دیگری به بی‌نهایت میل کند. روش‌های آسان و مقدماتی برای محاسبهٔ این حدّ کارساز نیستند. به کمک روش‌های پیشرفته‌تر ثابت می‌شود که مقدار این حدّ، عددی است که به ۲/۷۱۸ نزدیک است و یکی از ثابت‌های بسیار مهم در ریاضیات است که به عدد نپر معروف است و با «e» نمایش داده می‌شود.

مسئله دیگر 0^0 است که باعث نگرانی و موجب زحمت بسیاری برای دانشجویان شده است. در واقع 0^0 نیز مبهم بوده و یک تعریف دقیق برای آن نداریم. توجه کنید که:

الف)وقتی که x یک عدد مثبت است، آنگاه $x^0 = 1$.

ب)وقتی که y یک عدد مثبت است، آنگاه $0^y = 0$.

حال اگر در (الف) x را به صفر میل دهیم، حاصل برابر یک می‌شود؛ در حالیکه اگر در (ب) y را به صفرمیل دهیم، حاصل برابر صفر می‌شود. برای درک بهتر مسئله بهتر است مقادیر تابع دو متغیرهٔ x^y را برای مقادیر کوچکی مانند ...,۰,۰۲۵,۰,۰۵,۰,۱,۰,۲,۰,۴ محاسبه کنیم. *طبیعی است برای تعریف 0^0، زمانی که x و y هر دو هم‌زمان از سمت راست به صفر میل کنند، می توان از حد تابع x^y استفاده نمود.* امّا این حد وجود ندارد! زیرا روی مسیرهای مختلف در صفحه مختصات، مقادیر متفاوتی برای آن به دست می‌آید. به‌طورمثال، روی مسیر $y = x$ در صفحه، به کمک فرمول $x^x = e^{x\ln x}$ که برای تمام مقادیر حقیقی مثبت برقرار است و همچنین با به‌کارگیری قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود که حد راست x^x در صفر برابر «یک» است.

۳-۶-۲) *مشکلاتی با سری‌ها*.

بیشترین اشتباه دانشجویان در مورد سری‌ها این است که: «اگر $a_1, a_2, a_3, ...$» یک دنباله همگرا به صفر باشد، آنگاه سری $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ نیز همگرا می‌باشد؛ اگر چه عکس این حکم همواره برقرار است. شاید ریشه این اشتباه در این است که در اکثر مثال‌هایی که آنها دیده‌اند، این حکم درست است. ساده‌ترین مثال نقض برای این حکم، سری هارمونیک، یعنی سری $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ است که در اثبات واگرایی آن از ریاضیات پیشرفته‌ای استفاده می‌شود.

مشکل دیگر دانشجویان این است که با سری‌ها مانند جمع‌های متناهی برخورد می‌کنند. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری عددی باشد. قرار می‌دهیم $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. حال اگر دنباله S_n همگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum a_n$ همگراست. برخی از دانشجویان سری با جملهٔ

عمومی $a_n := (-1)^n$ را همگرا تلقی می‌کنند. توجیه آنان این است که $\sum_{n=0} a_n = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$. در این مثال داریم:

$$S_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

و این دنباله همگرا نیست، بنابراین سری مذکور نیز همگرا نیست.

۳-۶-۳) *در نظر نگرفتن یا استفاده نادرست از ثابت انتگرال.*

«ثابت انتگرال‌گیری» در انتگرال نامعین یک تابع، موجب سر در گمی بسیاری از دانشجویان می‌شود. زیرا در نماد $\int f(x)dx$ اشاره‌ای به آن نمی‌شود. *در واقع عبارتی شبیه به* $3x^2 + 5x + c$ *برای نمایش یک دسته نامتناهی از توابع، از قبیل* $3x^2 + 5x + 4$، $3x^2 + 5x - 9$ *و ... به‌کار می‌رود که مشتق همهٔ آنها برابر* $6x + 5$ *است.*

مشکل دیگر این است که در یک مسئله، ثابت انتگرال‌گیریِ چندین انتگرال نامعینِ موجود در آن مسئله را با یک حرف «c» نمایش می‌دهیم. درحالیکه برای مشخص کردن ثابت‌ها، باید برای هر یک از آنها از نمادهای متمایز مثل c_1، c_2 و ... استفاده نمود. با یک مثال اهمیت این نکته را روشن می‌سازیم. فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء در کوتاه‌ترین شکل آن، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int udv = uv - \int udv$$

و با جزئیات بیشتر عبارت است از:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

حال فرض کنید $u(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = x$، با جایگذاری این توابع در فرمول بالا داریم:

$$\int (\frac{1}{x})(1)dx = (\frac{1}{x})(x) - \int (-\frac{1}{x^2})(x)(dx)$$

و در نتیجه:

$$\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$$

حال با حذف کردن $\int \frac{1}{x}dx$ از دو طرف تساوی بالا به تناقض $1=0$ می‌رسیم!! چطور ممکن است این اتفاق بیفتد؟؟ با دقت بیشتر، متوجه خواهید شد که $\int \frac{1}{x}dx$ در دو طرف تساوی آخر، یکسان نیست. در واقع تساوی آخر، با انتخاب مقادیر مناسب برای ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر است:

$$\ln|x| + c_1 = 1 + \ln|x| + c_2$$

به بیان دیگر، دو عبارت $\ln|x| + c_1$ و $1 + \ln|x| + c_2$ توابعی منحصر به فرد را نمایش نمی‌دهند، بلکه هر یک، مجموعه ای از توابع را نمایش می‌دهند:

الف) عبارت $\ln|x| + c_1$ مجموعه همه توابعی بر حسب x را نشان می‌دهد که می‌توانند با شروع از تابع $\ln|x|$ و سپس با اضافه کردن یک ثابت مانند c_1 به دست آیند.

ب) عبارت $1 + \ln|x| + c_2$ مجموعه همه توابعی بر حسب x را نشان می‌دهد که می‌توانند با شروع از تابع $\ln|x|$ و سپس با اضافه کردن یک ثابت مانند $1 + c_2$ به دست آیند.

علیرغم ظاهر متفاوت، این دو عبارت در واقع یک مجموعه توابع یکسان بر حسب x را تعیین می‌کنند. کافی است در (ب) قرار دهیم $c_2 = c_1 - 1$ و یا در (الف) قرار دهیم $c_1 = c_2 + 1$. به بیان دیگر، این دو عبارت از لحاظ مجموعه‌ای با هم برابر می باشند.

برخی دیگر از دانشجویان در انتگرال معین، از رابطه درست $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$ شروع می‌کنند و به رابطه نادرست $\int_a^b \frac{1}{x}dx = 1 + \int_a^b \frac{1}{x}dx$ می‌رسند. ریشه این اشتباه در این است که فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء برای انتگرال‌های معین به این صورت است:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

به بیان دیگر $u(x)v(x)$ در گذر از نامعین به معین با $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ جایگزین می‌شود. حال با قرار دادن $u(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = x$ در فرمول بالا خواهیم داشت:

$$\int_a^b (\frac{1}{x})(1)dx = (\frac{1}{b})(b) - (\frac{1}{a})(a) - \int_a^b (-\frac{1}{x^2})(x)dx$$

که با فرض اینکه صفر متعلق به بازه $[a,b]$ نباشد، به تساوی بدیهی زیر تبدیل می‌شود:

$$\ln|b| - \ln|a| = 1 - 1 - (-\ln|b| + \ln|a|)$$

۳-۶-۴) کامل ننوشتن دیفرانسیل‌ها.

این مورد، هم در مشتق‌گیری و هم در انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود. «کامل ننوشتن دیفرانسیل‌ها» شباهت زیادی به بحث « ننوشتن و ندیدن پرانتزها» دارد که قبلاً در همین فصل در مورد آن بحث کردیم و ریشه هر دو، نگارش و نمادگذاری نامرتب و ناقص است.

در ابتدای آموزش مشتق‌گیری به دانشجویان، آنان همواره نسبت به متغیری مشابه و به‌طورمعمول بر حسب x مشتق می‌گیرند. بطوریکه نیازی به بیان آن متغیر احساس نمی‌شود. نمادهای معمول برای مشتق تابع $y = f(x)$ عبارتند از: $\frac{dy}{dx}$، Dy ،y' و $f'(x)$. در واقع داریم $\frac{dy}{dx} = f'(x)$، بنابراین $dy = f'(x)dx$.

نماد اشتباه $dy = f'(x)$ که با حذف dx به دست آمده، ممکن است در ذهن دانشجو تفاوت چندانی ایجاد نکند و این حذف بی قید و بند به صورت یک عادت برای او درآید. امّا بعدها همین عادت بد موجب بروز مشکلات فراوانی خواهد شد. می توان با ملزم کردن دانشجویان مبتدی به استفاده از نماد $\frac{dy}{dx}$ برای مشتق، از مشکلات آتی پیش‌گیری نمود.

مشکل نمادگذاری نامناسب برای مشتق، در قاعده زنجیره‌ای خود را بهتر آشکار می‌کند. زمانی که سؤالاتی از قبیل: «مشتق y نسبت به x چیست؟ مشتق y نسبت به u چیست؟ و این دو مشتق چگونه به هم مربوط می‌شوند؟» مطرح می‌شوند. دانشجویانی که به تفاوت قائل نشدن بین $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dy}{du}$ عادت کرده‌اند، در درک قاعده زنجیره‌ای دچار مشکلات فراوانی خواهند شد.

همین امر باعث بروز مشکلاتی در قاعده تغییر متغیر در انتگرال‌ها خواهد شد که همان قاعده زنجیره‌ای است که به یک قاعده در مورد انتگرال‌ها تبدیل شده است. به‌طور مثال، در جدول زیر لیستی از اشتباهات دانشجویان در امتحانات ارائه شده است:

جواب درست	جواب اشتباه	مسئله
$\arctan(x) + c$	$\ln(1+x^2) + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$
$\frac{-1}{2}x^{-2} + c$	$\ln(x^3) + c$	$\int \frac{dx}{x^3}$
$\ln\|\sec x + \tan x\| + c$	$\ln(\cos x) + c$	$\int \frac{dx}{\cos x}$

$\int \sin^2 x dx$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\sin^3 x + c$ $\qquad$ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

دلایل این اشتباهات چیست؟

الف) برای سه مسئله اول، دانشجویان از فرمول درست $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$ به‌طور نادرست استفاده کرده‌اند. زیرا آن‌را به صورت نادرست $\int \frac{1}{u} = \ln|u| + c$ یادگرفته‌اند. عبارت $u = 1 + x^2$ یا $u = x^3$ یا $u = \cos x$ را داخل فرمول قرار داده و سه جواب نادرست به‌دست آورده‌اند. عبارات $\int \frac{1}{u} du$ و $\int \frac{1}{u} dx$ معانی بسیار متفاوتی دارند، و اگر هر دوی آنها را به شکل $\int \frac{1}{u}$ بنویسید، در مورد آنها دچار اشتباه خواهید شد.

شاید بهتر باشد این فرمول را به صورت طولانی امّا دقیق زیر بنویسیم:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + c$$

ب) برای مسئله آخر، دانشجویان قصد دارند که از فرمول درست $\int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c$ استفاده کنند. امّا آن‌را به صورت نادرست $\int u^2 = \frac{1}{3}u^3 + c$ به خاطر سپرده‌اند و در نتیجه به جواب اشتباه رسیده‌اند. عبارات $\int u^2 du$ و $\int u^2 dx$ معانی بسیار متفاوتی دارند.

همانطوریکه در هر عبارت ریاضی باید هر پرانتز باز «(» متناظر با یک پرانتز بسته «)» باشد، همراه با یک علامت انتگرال « $\int$ » نیز باید یک علامت دیفرانسیل از قبیل « dx »، یا « du » به‌کاربرده شود. عبارت $\int \frac{1}{u}$ غیر متعادل، مبهم و بی‌معنی است و باید از آن پرهیز نمود.

در ضمن با تغییر متغیر $u = 1 + x^2$ در $\int \frac{1}{u} du$ به انتگرال $\int \frac{2x}{u} dx$ می‌رسیم که کاملاً متفاوت از $\int \frac{1}{u} dx$ است.

نکته دیگر اینکه، برخی از دانشجویان در این که آیا $\int \frac{1}{u} du$ باید $\ln|u|+c$ و یا $\ln(u)+c$ باشد، دچار اشتباه می‌شوند. انتگرال $\int \frac{1}{u} du$ همواره با $\ln|u|+c$ برابر است. امّا باید به این نکته توجه داشت که در ریاضیات ترجیح می‌دهیم جواب‌هایمان را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسیم و گاهی روی این موضوع پافشاری هم می‌کنیم. به یاد آورید که در دوران ابتدایی از ما خواسته می‌شد تا جواب جمع و یا تفریق کسرها را تا حد امکان ساده کنیم. حال اگر بدانیم تابع u فقط مقادیر مثبت را اختیار می‌کند، آنگاه $\int \frac{1}{u} du$ را می‌توانیم به صورت $\ln(u)+c$ بنویسیم. البته گاهی اوقات به دلیل اینکه می‌توان در صورت نیاز، دامنه تعریف تابع u را کوچکتر کرد به‌طوریکه فقط مقادیر مثبت را اختیار کند، علامت قدر مطلق را حذف می‌کنیم. امّا اگر u هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار کند، آنگاه $\int \frac{1}{u} du$ را باید به صورت $\ln|u|+c$ بنویسیم.

۳-۷) بیست خطای دانشجویان در جبر گزاره‌ها و مجموعه‌ها.

۱- اشتباه در بیان ریاضی و نمادین جملات شرطی.

اشتباهات زیادی از این نوع وجود دارند. به‌طورمثال مشکلاتی در نحوه به‌کارگیری کلمه «یا» وجود دارد. مطمئن شوید که بین «یای فاصل» و «یای مانعه الجمع» تفاوت قائل شده‌اید. علی یا محمد بیاید، یعنی اگر هم علی و هم محمد آمدند، اشکالی ندارد. امّا در یای مانعه الجمع فقط علی و یا فقط محمد باید بیاید. اغلب کاربرد «یا» به صورت «یای فاصل» می‌باشد، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

۲- اشتباهی نقیض کردن جملات مرکب بدون استفاده از قوانین دمورگان، یعنی اینکه $\neg(P \vee Q)$ را به‌طورمنطقی با $\neg P \vee \neg Q$ هم ارز گرفتن و یا اینکه $\neg(P \vee Q)$ را به‌طورمنطقی با $\neg P \vee \neg Q$ هم ارز گرفتن.

به‌طورمثال اگر جملهٔ «علی امروز شطرنج بازی می‌کند یا به پارک می‌رود» غلط باشد، آنگاه «علی شطرنج بازی نمی‌کند و به پارک نمی‌رود» درست خواهد بود. بنابراین $\neg(P \vee Q)$ به‌طورمنطقی با $\neg P \wedge \neg Q$ هم ارز می‌باشد و همچنین $\neg(P \wedge Q)$

به‌طورمنطقی هم ارز با $\neg P \vee \neg Q$ می‌باشد. این اشتباه نمونه‌ای از این مطلب است که ما فرض می‌کنیم که هر عملی روی هر عمل دیگری خاصیت بخشی دارد.

۳- اشتباهی متمم گرفتن از مجموعه‌ها بدون استفاده از قوانین دمورگان یعنی به اشتباه روابط $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcup B^c$ و $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcap B^c$ را درست فرض می‌کنیم.

این اشتباه نیز نمونه‌ای دیگر از این مطلب است که ما فرض می‌کنیم هر عملی روی هر عمل دیگری پخش می‌شود. اینجا فرض کرده‌ایم که عمل متمم‌گیری روی اشتراک (یا اجتماع) پخش می‌شود.

۴- اشتباه در بیان نمادی عبارت $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ به صورت $\exists x(A(x) \rightarrow B(x))$.

به عنوان مثال بیان نمادین جمله «وجود دارد یک عدد زوج که اول باشد.» عبارت است از $\exists x(E(x) \wedge P(x))$ و نه $\exists x(E(x) \rightarrow P(x))$ که در آن $E(x)$ یعنی « x زوج است» و $P(x)$ یعنی « x اول است». به عنوان یک قاعده می‌توان گفت معمولاً سورهای وجودی با ترکیب‌های عطفی همراه می‌باشند.

۵- اشتباه در بیان نمادی عبارت $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ به صورت $\forall x(A(x) \wedge B(x))$.

به عنوان مثال بیان نمادین جملهٔ «هر عدد فردی اول است.» عبارت است از $\forall x(O(x) \rightarrow P(x))$ و نه $\forall x(O(x) \wedge P(x))$ که در آن $O(x)$ یعنی « x فرد است» و $P(x)$ یعنی « x اول است». به عنوان یک قاعده می‌توان گفت معمولاً سورهای عمومی با ترکیب‌های شرطی همراه می‌باشند.

۶- عدم توانایی در تغییر سورها در نقیض کردن گزاره‌های سوردار به ویژه در بیان فارسی آنها.

به طور مثال، نقیض گزارهٔ «بعضی گربه‌ها جگر دوست دارند.»، گزارهٔ «بعضی گربه‌ها جگر دوست ندارند.» نمی‌باشد. بلکه نقیض آن عبارت است از «همهٔ گربه‌ها جگر دوست ندارند.» یا «هیچ گربه‌ای نیست که جگر دوست داشته باشد».

۷- اشتباه گرفتن مفهوم عضو و مفهوم مجموعه وقتی که با مجموعه توانی یک مجموعه کار می‌کنیم.

مجموعهٔ توانی مجموعه S که با نماد $P(S)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ای متشکل از تمام زیرمجموعه‌های S. اگر A یک زیر مجموعه S باشد آنگاه A عضوی از $P(S)$

است. به طور مثال اگر $S = \{p,r\}$ باشد آنگاه $\{p,r\} \subseteq S$ و $\{p,r\} \in P(S)$ و از طرف دیگر $\{p,r\} \not\subset P(S)$ و $\{p,r\} \notin S$. همچنین توجه کنید که $\phi \notin S$ امّا $\phi \in P(S)$.

۸- نمایش دادن مجموعه تهی به صورت $\{\phi\}$.

یک دلیل برای اینکه $\{\phi\}$ نمی‌تواند مجموعه تهی باشد این است که این مجموعه یک عضو دارد. نمادگذاری صحیح برای مجموعه تهی عبارت است از $\{\ \}$ یا ϕ که مجموعه‌ای بدون عضو می‌باشد.

۹- حذف اشتباه پرانتزها در عبارت شامل اجتماع اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها.

اگر یک ترتیب برای عملگرها در نظر نگرفته باشیم، آنگاه عبارتی مانند $A \bigcap B \bigcup C$ مبهم خواهد بود. زیرا می‌تواند به معنای $(A \bigcap B) \bigcup C$ و یا به معنای $A \bigcap (B \bigcup C)$ باشد که کاملاً با هم متفاوتند. بنابراین قرار دادن پرانتزها در مکان مناسب، در انتقال مقصود شما به خوانندگان امری مهم می‌باشد.

۱۰- عدم توانایی تشخیص تفاوت بین مفهوم تابع و مفهوم عضو یا زوج مرتب.

نماد $f : A \to B$ یعنی f یک فرایند یا یک قاعده است که باید روی هر یک از اعضای A اعمال شود و نتیجه در هر بار، عضوی از B باشد. به‌طورمثال اگر f تابعی از $\{1,2,3\}$ به اعداد طبیعی با ضابطه $f(x) = x^2$ باشد، آنگاه f فرایندی است که ۱ را به ۱، ۲ را به ۴ و ۳را به ۹ می‌برد. بنابراین تابع f عدد ۹ و یا حتی زوج مرتب (۹و۳) نمی‌باشد.

۱۱- عدم بررسی دقیق تعاریف به هنگام ارائه یک اثبات.

به عنوان مثال اگر بخواهم مطلبی را در مورد رابطه بخش‌پذیری اعداد صحیح اثبات کنیم، آنگاه مهم است که معنای این رابطه به درستی در یک یا چند مرحله از اثبات استفاده شود.

۱۲- به اشتباه درستی $P(x)$ برای تعدادی متناهی یا نامتناهی از اعضای عالم سخن را مبنی بر اثبات درستی گزاره $\forall x\ P(x)$ در نظر گرفتن.

فرض کنید $P(x)$ عبارت باشد از: «x از ۲ کوچکتر است.» دراین صورت اگر a یک عدد حقیقی کوچکتر از ۲ باشد، آنگاه $P(a)$ درست است. بنابراین گزاره‌نمای $P(x)$ به ازای نامتناهی عدد حقیقی درست می‌باشد. امّا گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$ نادرست است، زیرا به‌طورمثال $P(3)$ نادرست است.

برای روشن‌تر شدن موضوع، یک مثال دیگر می‌آوریم. چندجمله‌ای $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-m)$ را در نظر بگیرید که در آن $m = 10^6$ و فرض کنید

$P(n)$ عبارت باشد از: « n یک ریشهٔ $f(x)$ است.» در این صورت $P(n)$برای یک میلیون عدد طبیعی نخست، یعنی $1,2,3,\cdots,10^6$ درست است. اولین عدد طبیعی n که به ازای آن $P(n)$ نادرست می‌باشد، عدد یک میلیون و یک است!

۱۳- تعمیم دادن یک ویژگی خاص در یک مثال خاص به تمامی مثال‌ها و حالت‌ها.

به‌طورمثال فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر عدد صحیح x باقی‌ماندهٔ x^2 بر ۸ همواره برابر یک می‌باشد. اگر با فرض $x = 2n+1$ به ازای یک عدد صحیح n اثبات را شروع کنیم و حکم را در این حالت به اثبات برسانیم، آنگاه حکم اصلی را فقط برای اعداد فرد ثابت کرده‌ایم و اثبات ناقص است. برای تکمیل اثبات باید حکم را برای اعداد زوج نیز به اثبات برسانیم. برقراری حکم برای اعداد فرد به برقراری حکم برای تمام اعداد صحیح قابل تعمیم نیست. اگرچه ممکن است الهام بخش ایده اثبات برای اعداد زوج باشد.

۱۴- فراموش کردن مرحله پایه استقرا ریاضی.

اثبات گزاره $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ به کمک استقرای ریاضی از دو مرحله تشکّیل شده است: مرحله پایه استقرا $P(1)$و مرحله استقرا $\forall n \in \mathbb{N}[P(n) \to P(n+1)]$. به‌طور مثال اگر بخواهیم با استقرا ثابت کنیم $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n = n+1$،آنگاه مرحله استقرا برقرار است. زیرا اگر $n = n+1$ آنگاه $n+1 = n+2$. امّا به وضوح حکم بالا نادرست می‌باشد و علت این امر در واقع این است که پایه استقرا برقرار نیست زیرا $1 \neq 1+1$.

۱۵- اشتباه گرفتن جمع‌بندی با تابع گزاره‌ای $P(n)$ در یک اثبات استقرایی.

به‌طورمثال در اثبات اتحاد $\forall n \in \mathbb{N}\ 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ به کمک استقرا، $P(n)$ کل معادله می‌باشد نه فقط سمت چپ این معادله.

۱۶- نوشتن نادرست $P(n+1)$ در یک اثبات استقرایی.

هرگاه $P(n)$ به‌طورصریح فرمول‌بندی شده باشد، معمولاً برای نوشتن $P(n+1)$ کافی است ماشین‌وار، n را با $n+1$ جایگزین کنیم. به‌طورمثال اگر:

$$P(n): \qquad 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$$

باشد، آنگاه $P(n+1)$ عبارت خواهد بود از:

$$2+4+\cdots+2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

۱۷- مرتکب اشتباه در محاسبات جبری شدن، به ویژه در ساده کردن عبارت‌ها در یک اثبات استقرائی.

به‌طورمثال ممکن است از تساوی $2^n + 2^n = 2^{2n}$ استفاده کنید و یا برای ساده کردن $(n+1)^3 + 5(n+1)^2$ به جای فاکتورگیری از بسط دادن تک‌تک جملات استفاده کنید. هرگاه احساس کردید که در مرحله استقرا دچار مشکل هستید، باید به دقت محاسبات جبری خود را مجدداً بررسی کنید.

۱۸- شمارش بیش از یک بار به خاطر عدم به‌کارگیری اصل رد و شمول.

به‌طورمثال اگر در یک دانشگاهی ۲۶ دانشجوی کامپیوتر و ۳۴ دانشجوی ریاضی کاربردی وجود داشته باشند، آنگاه تعداد دانشجویان این دانشگاه که کامپیوتر یا ریاضی کاربردی می‌خوانند لزوماً ۶۰ دانشجو نمی‌باشد. زیرا ممکن است برخی از دانشجویان هم‌زمان در دو رشتهٔ کامپیوتر و رشتهٔ ریاضی کاربردی مشغول به تحصیل باشند. برای به‌دست آوردن تعداد صحیح باید تعداد دانشجویانی را که هم‌زمان در رشتهٔ کامپیوتر و رشتهٔ ریاضی کاربردی مشغول به تحصیل می‌باشند، از ۶۰ کم نمود.

۱۹- عدم توجه به شمارش بیش از یک بار و نداشتن معیاری برای پرهیز از این امر.

به‌طورمثال اگر بخواهیم تعداد دست دادن‌های افراد حاضر در یک جلسه به هنگام سلام دادن را بشماریم باید توجه داشته باشیم که هر دست دادنی دوبار حساب می‌شود. یک بار برای هر یک از دو طرف دست دهنده. بنابراین در نهایت باید تعداد به دست آمده را بر۲ تقسیم کنیم.

۲۰-اشتباه کردن درعلامت های مثبت و منفی در فرمول اصل رد و شمول.

توجه داشته باشید که علامت‌ها با زیاد شدن تعداد مجموعه‌های مورد بحث بیشتر تغییر می‌کنند:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A - C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

فصل چهارم

نرم افزار Maple و ریاضیات عمومی

نرم‌فزار مِیپِل (Maple) را دانشگاه واترلو در سال ۱۹۸۰ به دنیا معرفی کرد. از آن سال تاکنون این نرم‌افزار در حال گسترش است. اطلاعات راجع به میپل را می‌توان در سایت زیر دریافت کرد:

www.maplesoft.com

این فصل، بر اساس مِیپِل نسخهٔ ۹/۵ تنظیم شده است. اگر از نسخه‌های پایین‌تر استفاده کنید، ممکن است بعضی از دستوراتی که در این‌جا به آنها اشاره شده است، کارکرد مورد نظر را نداشته باشد. امّا در نسخه‌های بالاتر چنین مشکلی بروز پیدا نمی‌کند.

در این نرم‌افزار علاوه بر محاسبات عددی، محاسبات نمادی نیز صورت می‌گیرد. خانوادهٔ بزرگی از توابع کتابخانه‌ای، برنامه‌نویسی در میپل را آسان کرده است. تسهیلات گرافیکی ۲ و ۳-بعدی در این نرم‌افزار در نظر گرفته شده‌اند،که برای تشریح و بیان ویژگی‌های نموداری توابع بسیار کارآمد می‌باشند.

هدف ما در این فصل، معرفی مختصر میپل و ارائه کاربردهای آن در تدریس ریاضیات عمومی است. البته در میپل برای آموزش ریاضیات عمومی تمهیداتی در نظر گرفته شده است. برای استفاده از این نکته‌های آموزشیِ میپل، در پنجره Tools گزینهٔ Tutors و سپس گزینهٔ Calculus-single Variable را انتخاب کنید.

۴-۱) ***اعمال جبری و توابع ریاضی در میپل***:

نمادهای +، - ، *، / و ^ به ترتیب برای عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و به توان رساندن به‌کار برده می‌شوند. به طور مثال برای محاسبه عبارت عددی $\frac{2}{7}+4^2-5\times 6$ باید دستور زیر را وارد کنیم:

```
> ۲/۷+۴^۲-۵*۶;
```

$$\frac{-96}{7}$$

برای اینکه نتیجهٔ محاسباتِ یک دستور، نمایش داده شود در انتهای آن از علامت « ; » و در صورتیکه نیازی به نمایش نتیجهٔ محاسبات نباشد از علامت « : » در انتهای آن استفاده می‌کنیم. برای اینکه حاصل محاسبه تا ۱۰ رقم اعشار نمایش داده شود، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> evalf(۲/۷+۴^۲-۵*۶);
```

-13.71428571

اگر مثلاً به ۲۰ رقم اعشاری نیاز داشته باشیم، باید دستور زیر را وارد کنیم:

```
> Digits:=۲۰:
> evalf(۲/۷+۴^۲-۵*۶);
```

-13.714285714285714286

ثابت‌ها و نمادهای مهم ریاضی از قبیل π، e، $\sqrt{-1}$ و ∞ به ترتیب به صورت Pi، $\exp(1)$، I و $infinity$ نمایش داده می‌شوند. به طور مثال برای نمایش عدد e(عدد اویلر) تا ۱۰ رقم اعشار دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> evalf(exp(۱));
```

2.718281828

برای محاسبه عدد مختلط $\dfrac{2+6i}{3-4i}$ دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> (۲+۶*I)/(۳-۴*I);
```

$$-\frac{18}{25}+\frac{26}{25}I$$

برخی از توابع معروف ریاضی در میپل:

نمایی	**exp**
لگاریتم طبیعی	**ln**
قدر مطلق	**abs**
جذر نامنفی	**sqrt**
فاکتوریل	**factorial**
توابع مثلثاتی	**sin, cos,tan ,cot**
معکوس توابع مثلثاتی	**arcsin, arcos, arctan ,arccot**

توابع مثلثاتی هذلولوی **sinh, cosh,tanh ,coth**

معکوس توابع مثلثاتی هذلولوی **arcsinh,arccosh, arctanh,arccoth**

برای ساده کردن نتیجه محاسبات نمادی، از دستور **simplify** استفاده می‌کنیم. به طور مثال برای محاسبه عبارت مثلثاتی $\sin^2(x)+\cos^2(x)$، دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> simplify(sin(x)^۲+cos(x)^۲);
```

$$1$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

```
> simplify(tan(x)*cot(x));
```

$$1$$

```
> simplify(tan(x)+cot(x));
```

$$\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$$

در میپل برای اختصاص دادن مقدار خاص به یک متغیر از علامت **=:** استفاده می‌کنیم. (توجه کنید که هیچ فاصله‌ای بین **:** و **=** نباید قرار دهیم). برای تخصیص مقدار ۵ به متغیر x از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> x:=۵;
```

$$x := 5$$

در این صورت خواهیم داشت:

```
> (۲*x+۷)^۲;
```

$$289$$

تا زمانیکه میپل خاموش نشود و یا مقدار جدیدی به متغیر x اختصاص ندهیم، مقدار قبلی برای آن در نظر گرفته خواهد شد. برای حذف مقدار اختصاص یافته به این متغیر، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> x:='x';
```

$$x := x$$

بدین ترتیب x دیگر هیچ مقدار خاصی ندارد. به طور مثال اگر دستور آمده در دو خط قبل را تکرار کنیم، به نتیجهٔ زیر خواهیم رسید:

```
> (۲*x+۷)^۲;
```

$$(2\,x+7)^2$$

۴-۲) *جبر مجموعه‌ها و توابع در میپل*:

برای معرفی مجموعه‌ها در میپل از علامت آکولاد استفاده می‌کنیم. به طور مثال برای معرفی دو مجموعه A و B به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

```
> A:={۲،۴،۶،۸};
```

$$A := \{2, 4, 6, 8\}$$

```
> B:={۱،۳،۵،۷،۹،۶};
```

$$B := \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

برای بررسی عضویت ۳ در مجموعه A از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> member(۳,A);
```

false

خروجی *false* به این معناست که ۳ عضو مجموعه A نیست.

اجتماع این دو مجموعه با دستور زیر به دست می‌آید:

```
> A union B;
```

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

و برای یافتن اشتراک آنها دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> A intersect B;
```

$$\{6\}$$

برای یافتن تفاضل آنها دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> A minus B;
```

$$\{2, 4, 8\}$$

یکی از قابلیت‌های مفید میپل، گرفتن کمک از خود میپل می‌باشد. به طور مثال اگر بخواهیم بدانیم که آیا در میپل مطلبی دربارهٔ نمودارِ ونِ مجموعه‌ها وجود دارد یا نه، کافی است دستور زیر را وارد کنیم:

```
> ? Venn
```

در این صورت تمام اطلاعاتی که در میپل در مورد نمودار ون موجود است، نمایش داده می‌شود. حال می‌توانیم از بین این اطلاعات ارائه شده، مطلب مورد نیاز و مناسب خودمان را پیدا کنیم و به کار بگیریم.

آیا A زیرمجموعه B است یا نه، توسط دستور مقابل بررسی می‌شود:

```
> A subset B;
```

$$false$$

خروجی $false$ به این معناست که A زیرمجموعه B نیست. به مثال زیر نیز توجه کنید:

```
> {۱،۲،۳} subset {۱،۲،۳،۴};
```

$$true$$

برای پیدا کردن تفاضل متقارن A و B یعنی $(A-B)\bigcup(B-A)$ از دستور زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

```
> (A minus B) union (B minus A);
```

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

اگر بخواهیم تابع $f(x)=x^2$ روی تمام اعضای مجموعه A عمل کند، ابتدا تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

```
> f:=x->x^۲;
```

$$f := x ® x^2$$

سپس دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> map(f,A);
```

$$\{4, 16, 36, 64\}$$

برای محاسبه تابع f در یک نقطه خاص مانند $x=5$ دستور **f(۵)** را به‌کار می‌بریم.

اگر تابع $g(x)=x+2$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

```
> g:=x->x+۲;
```

$$g := x ® x+2$$

در این صورت ترکیب تابع f و تابع g، یعنی $f\circ g(x)=f(g(x))$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

```
> f(g(x));
```

$$(x+2)^2$$

همچنین داریم:

```
> g(f(x));
```

$$x^2+2$$

برای رسم نمودار تابع f دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> plot(f(x),x=-۱..۱):
```

۳-۴) *اعداد مختلط در میپل*:

برای معرفی عدد مختلط $z = 3 - 5i$ از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> z:=۳+۵*I;
```

$$z := 3 + 5\,I$$

قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط z به ترتیب با دستورهای **Re(z)** و **Im(z)** به دست می‌آیند. برای محاسبه مزدوج z دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> conjugate(۳+۵*I);
```

$$3 - 5\,I$$

و برای محاسبه طول یا اندازه آن از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> abs(z);
```

$$\sqrt{34}$$

برای تبدیل این عدد مختلط به صورت قطبی از دستور **polar(z)** استفاده می‌کنیم.

۴-۴) *جبر چندجمله‌ای‌ها در میپل*:

چندجمله‌ای‌های $h(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ و $g(x) = x^2 - 5x + 4$ را در نظر می‌گیریم:

```
> h:=x^۳-۵*x^۲+۵*x-۱:
> g:=x^۲-۵*x+۴:
```

در این صورت مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم این دو چندجمله‌ای به ترتیب با دستورهای **h+g**، **h-g**، **h*g** و **h/g** به دست می‌آیند. برای تجزیه چندجمله‌ای h از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> factor(h);
```

$$(x - 1)\,(x^2 - 4\,x + 1)$$

برای یافتن صفرهای چندجمله‌ای h دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> solve(h=۰,x);
```

$$1, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$$

اگر بخواهیم تقریبی از صفرهای به دست آمده، تا ۱۰ رقم اعشار داشته باشیم، به طریق زیر عمل می‌کنیم:

```
> fsolve(h=۰,x);
```

0.2679491924, 1.000000000, 3.732050808

۴-۵) حد در میپل:

برای محاسبهٔ حد تابع $y = f(x)$ در $x = a$ از دستور **limit(f(x),x=a)** استفاده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

```
> limit(tan(x)/x,x=۰);
```

1

```
> limit((۲*x^۳+x)/(x^۳+۲*x+۱),x=infinity);
```

2

```
> limit(exp(x),x=-infinity);
```

0

```
> limit(۱/(x-۱),x=۱);
```

undefined

حدهای یک‌طرفه:

برای محاسبهٔ حد راست شرط *right* و برای محاسبهٔ حد چپ شرط *left* را باید اضافه کنیم. به طور مثال:

```
> limit(۱/(x-۱),x=۱,right);
```

∞

```
> limit(۱/(x-۱),x=۱,left);
```

$-\infty$

حد چپ تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

```
> limit(x-floor(x),x=۰, left);
```

1

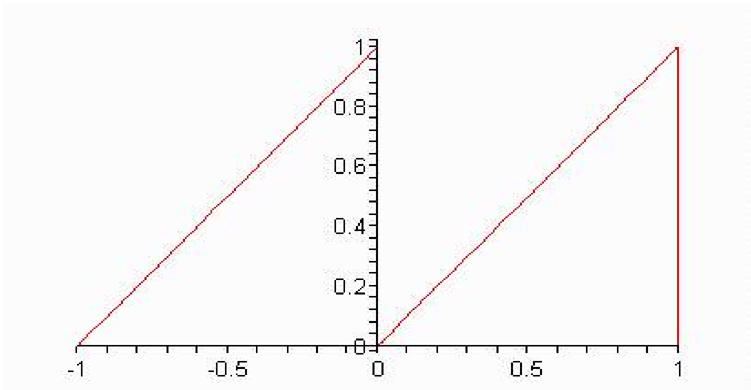
و حد راست آن عبارت است از:

```
> limit(x-floor(x),x=۰, right);
```

0

بنابراین تابع $f(x)=x-[x]$ در $x=0$ پیوسته نمی‌باشد. البته می‌توانیم این موضوع را به کمک رسم نمودار تابع در فاصله $[-1,1]$ بهتر درک کنیم:

```
> plot(x-floor(x),x=-۱..۱);
```



۴-۶) *بررسی پیوستگی تابع*:

برای بررسی پیوستگی تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ از دستور **iscont(f(x),x=a..b)** استفاده می‌کنیم. به طور مثال:

```
> iscont(۱/x,x=۱..۲);
```

true

امّا تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ روی بازهٔ $[-1,2]$ پیوسته نیست:

```
> iscont(۱/x,x=-۱..۲);
```

false

۴-۷) *مشتق در میپل*:

برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=f(x)$ از دستور **diff(f(x),x)** استفاده می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

```
> diff(sin(x)*x^۴,x);
```

$$\cos(x)\,x^4+4\sin(x)\,x^3$$

برای محاسبهٔ مشتق دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

```
> diff(sin(x)*x^۴,x,x);
```

$$-\sin(x)\,x^4 + 8\cos(x)\,x^3 + 12\sin(x)\,x^2$$

اگر مشتق پنجم را بخواهیم، باید به صورت زیر عمل کنیم:

```
> diff(sin(x)*x^۴,x$۵);
```

$$\cos(x)\,x^4 + 20\sin(x)\,x^3 - 120\cos(x)\,x^2 - 240\sin(x)\,x + 120\cos(x)$$

مشتق $f(x)=x^x$ عبارت است از:

```
> diff(x^(x),x);
```

$$x^x(\ln(x)+1)$$

برای محاسبهٔ مشتق $f(x)=\arctan(x)$ در $x=1$ به کمک تعریف، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

```
> limit((arctan(x)-arctan(۱))/(x-۱),x=۱);
```

$$\frac{1}{2}$$

البته روش دیگر عبارت است از:

```
> diff(arctan(x),x);
```

$$\frac{1}{1+x^2}$$

```
> subs(x=۱,%);
```

$$\frac{1}{2}$$

در میپل برای ارجاع به نتیجهٔ دستور یک خط قبل، از علامت % (درصد) استفاده می‌شود. یعنی دستور **subs(x=۱,%)** در این‌جا معادل است با **subs(x=۱,diff(arctan(x),x))**.

۴-۸) *تعیین صعودی و نزولی بودن تابع به کمک مشتق آن:*

فرض کنید مشتق تابع $y=f(x)$ را تابع $g(x)$ بنامیم؛ یعنی $g(x)=f'(x)$. برای تعیین ناحیه‌ای که تابع $y=f(x)$ در آن صعودی است باید نامعادلهٔ $f'(x)>0$ را حل کنیم. برای این منظور دستور **solve(g(x)>۰,x)** را وارد می‌کنیم. به طور مشابه برای تعیین ناحیه‌ای که تابع $y=f(x)$ در آن نزولی است باید نامعادلهٔ $f'(x)<0$ را حل کنیم. برای این منظور نیز دستور **solve(g(x)<۰,x)** را وارد می‌کنیم. به طور مثال جهت

تغییرات $f(x)=x^3+3x^2-9x$ را تعیین می‌کنیم؛ یعنی مشخص می‌کنیم که تابع f درچه ناحیه‌هایی صعودی و در چه ناحیه‌هایی نزولی است.

```
> f:=x^۳+۳*x^۲-۹*x;
```

$$f:=x^3+3\,x^2-9\,x$$

```
> g:=diff(f,x);
```

$$g:=3\,x^2+6\,x-9$$

```
> solve(g>۰,x);
```

$$\mathrm{Re}\,alRange(-\infty,\ Open(-3)), \mathrm{Re}\,alRange\,(Open(1),\infty)$$

بنابراین تابع f در ناحیه $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ صعودی است.

```
> solve(g<۰);
```

$$RealRange(Open(-3),\ Open(1))$$

درنتیجه تابع f در ناحیه $(-3,1)$ نزولی است. با توجه به جهت تغییرات این تابع، نتیجه می‌گیریم که f در $x=-3$ یک ماکزیمم نسبی و در $x=1$ یک مینیمم نسبی دارد. این اطلاعات را می‌توانیم در جدول زیر خلاصه کنیم:

x	$-\infty$ -3	1	$+\infty$
y'	+	−	+
جهت تغییرات	صعودی	نزولی	صعودی

۹-۴) *سری‌ها در میپل*:

برای بررسی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ در میپل از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
> sum(۱/n^۲,n=۱..infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

در نتیجه این سری، یک سری همگراست، بعلاوه به مقدار $\frac{\pi^2}{6}$ همگراست.

امّا در مورد سری هارمونیک؛ یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ داریم:

```
> sum(۱/n,n=۱..infinity);
```

$$\infty$$

بنابراین سری هارمونیک، یک سری واگراست.

برای به‌دست آوردن دنبالهٔ مجموع جزییِ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم:

```
> Ps:=n->sum(a_k,k=۱..n);
```

بنابراین اگر حد $Ps(n)$ زمانیکه $n \to +\infty$ موجود و متناهی باشد، آنگاه سری همگراست و در غیر این صورت سری واگراست.

به طور مثال برای سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ داریم:

```
> Ps:=n->sum(۱/k^۲,k=۱..n);
```

$$Ps := n \to \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

```
> limit(Ps(n),n=infinity);
```

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$:

```
> Ps:=n->sum((k+۱)/k^۲,k=۱..n);
```

$$Ps := n \to \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2}$$

```
> limit(Ps(n),n=infinity);
```

$$\infty$$

در نتیجه این سری، یک سری واگراست.

سری تلسکوپی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$:

```
> Ps:=n->sum(۱/(k*(k+۱)),k=۱..n);
```

$$Ps:=n\to\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

```
> limit(Ps(n),n=infinity);
```

$$1$$

سری هندسی با قدر نسبت $\frac{3}{4}$؛ یعنی $\sum_{n=1}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$:

```
> Ps:=n->sum((۳/۴)^k,k=۱..n):
```

```
> limit(Ps(n),n=infinity);
```

$$3$$

۴-۱۰) *انتگرال در میپل*:

برای استفاده از دستورات انتگرال‌گیریِ میپل، ابتدا دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> with(student):
```

به این ترتیب توابع کتابخانه‌ای موجود در بسته **student** فعال خواهند شد و ما می‌توانیم از آنها استفاده کنیم.

برای محاسبه مجموع چپ و راست ریمان تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ به ترتیب از دستورهای

rightsum(f(x),x=a..b,n) و **leftsum (f(x),x=a..b,n)**

استفاده می‌کنیم. حدِ در بی‌نهایتِ مجموع چپ و راست ریمانِ تابع $f(x)$ را به ترتیب انتگرال‌بالایی و پایینی تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ می‌نامیم و به ترتیب با نمادهای $\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$ و $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx$ نمایش می‌دهیم. به طور مثال انتگرال بالایی و پایینی تابع $f(x)=x^2$ را در بازه $[0,2]$ محاسبه می‌کنیم:

```
> L:=n->leftsum (x^۲,x=۰..۲,n);
```

$$L := n \to leftsum(x^2, x = 0..2, n)$$

```
> R:=n->rightsum(x^۲,x=۰..۲,n);
```

$$R := n \to rightsum(x^2, x = 0..2, n)$$

```
> limit(L(n),n=infinity);
```

$$\frac{8}{3}$$

```
> limit(R(n),n=infinity);
```

$$\frac{8}{3}$$

از آنجاییکه انتگرال‌بالایی و پایینی تابع $f(x) = x^2$ در بازه $[0,2]$ با هم برابر می‌باشد، این تابع در این بازه انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$.

برای تقریب زدن مقدار $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

```
> L:=n->leftsum (exp(-x^۲),x=۰..۲,n):
> evalf(L(٦));
```

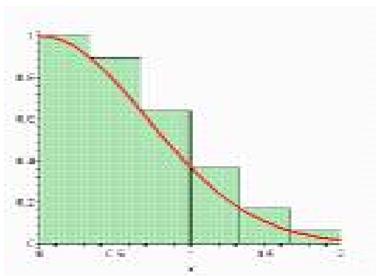
$$1.045029662$$

```
> R:=n->rightsum(exp(-x^۲),x=۰..۲,n):
> evalf(R(٦));
```

$$0.7178015416$$

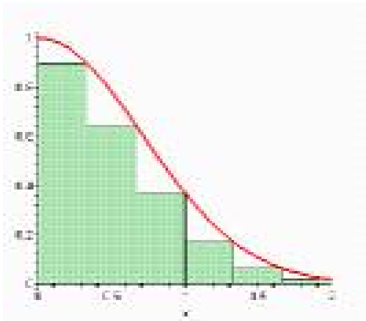
برای به دست آوردن تقریب‌های بهتر کافی است به جای عدد ۶ در **L(٦)** یا **R(٦)** عدد طبیعی بزرگتری قرار دهیم. بدین ترتیب خواهیم دید که اختلاف این دو عدد نیز کمتر می‌شود. برای درک بهتر نحوه محاسبه **L(٦)** می‌توانیم دستور زیر را وارد کنیم:

```
> leftbox (exp(-x^۲),x=۰..۲،٦);
```



و برای درک بهتر نحوه محاسبه **R(٦)** می‌توانیم دستور زیر را وارد کنیم:

```
> rightbox (exp(-x^٢),x=٠..٢،٦);
```



برای محاسبه انتگرال تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ از دستور **int(f(x),x=a..b)** استفاده می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

```
> int(x*sin(x),x=٠..Pi);
```

$$\pi$$

```
> int(x*sin(٢*x),x=٠..Pi);
```

$$-\frac{1}{2}\pi$$

```
> int(x*sin(٣*x),x=٠..Pi);
```

$$\frac{1}{3}\pi$$

با توجه به سه مثال بالا، به نظر می‌رسد که یک ارتباطی بین حاصل انتگرال $\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx$ و مقدار k وجود دارد. با کمی دقت، حدس می‌زنیم که $\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{k}$. حال می‌توانیم حدس خودمان را در حالت کلی بررسی و اثبات کنیم. ***این مهم است که به کمک میپل، بعضی از قضایای ریاضی را کشف کنیم.***

با توجه به مثال‌های زیر سعی کنید حاصل $\int xe^{kx}dx$ را حدس بزنید:

```
> int(x*exp(x),x);
```

$$(-1+x)\,e^{x}$$

```
> int(x*exp(٢*x),x);
```

$$\frac{1}{4}(-1+2x)\,\mathbf{e}^{(2x)}$$

```
> int(x*exp(۳*x),x);
```

$$\frac{1}{9}(-1+3x)\,\mathbf{e}^{(3x)}$$

انتگرال $\int xe^{2x}dx$ را به کمک روش انتگرال‌گیری جزء به جزء به طریق زیر محاسبه می‌کنیم:

```
> intparts(Int(x*exp(۲*x),x),x);
```

$$\frac{1}{2}xe^{(2x)}-\int\frac{1}{2}e^{(2x)}dx$$

```
> value(%);
```

$$\frac{1}{2}x\,\mathbf{e}^{(2x)}-\frac{1}{4}\mathbf{e}^{(2x)}$$

روش کسرهای پاره‌ای را برای محاسبه انتگرال توابع گویا، به طور مثال برای محاسبه انتگرال $\int\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2}dx$، به صورت زیر به کار می‌بریم:

```
> f:=(x+۱)/((x+۲)*(x^۲+۱)^۲);
```

$$f:=\frac{1+x}{(x+2)\,(x^2+1)^2}$$

```
> convert(f,parfrac,x);
```

$$\frac{3+x}{5\,(x^2+1)^2}+\frac{x-2}{25\,(x^2+1)}-\frac{1}{25\,(x+2)}$$

```
> int(%,x);
```

$$\frac{6x-2}{20\,(x^2+1)}+\frac{11}{50}\arctan(x)+\frac{1}{50}\ln(x^2+1)-\frac{1}{25}\ln(x+2)$$

همچنین می‌توانیم در میپل انتگرال‌های ناسره را محاسبه کنیم. به طور مثال:

```
> int(exp(-x^۲),x=۰..infinity);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

۴-۱۱) *بسط تیلور و مک‌لورن در میپل*:

برای به دست آوردن بسط تیلور تابع $y = f(x)$ حول $x = a$ و تا مرتبه n از دستور زیر استفاده می‌کنیم: **taylor(f(x),x=a,n+۱)**. به طور مثال برای یافتن بسط تیلور تابع $f(x) = e^x$ حول $x = 2$ تا مرتبه سوم، دستور زیر را وارد می‌کنیم:

```
> taylor(exp(x),x=٢،٤);
```

$$e^2 + e^2 (x-2) + \frac{1}{2} e^2 (x-2)^2 + \frac{1}{6} e^2 (x-2)^3 + O((x-2)^4)$$

اگر نقطه‌ای تعیین نکنیم، میپل بسط تیلور حول $x = 0$؛ یعنی بسط مک‌لورن تابع را به عنوان خروجی نمایش می‌دهد. به طور مثال:

```
> taylor(exp(x),x,٤);
```

$$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + O(x^4)$$

نماد $O(x^4)$ در بسط بالا نشان‌دهنده جملات حذف شده می‌باشد که همگی از درجه بزرگتر یا مساوی ۴ می‌باشند. برای به دست آوردن چندجمله‌ای مک‌لورن درجه ۳ تابع $f(x) = e^x$، پس از اینکه دستور **taylor(exp(x),x,٤)** را وارد کردیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

```
> convert(%,polynom);
```

$$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

برای مثال چندجمله‌ای مک‌لورن درجه ۵ تابع $f(x) = \sin(\cos(x))$ را می‌یابیم:

```
> taylor(sin(cos(x)),x,٦):
> convert(%,polynom);
```

$$\sin(1) - \frac{1}{2}\cos(1)x^2 + (\frac{-1}{8}\sin(1) + \frac{1}{24}\cos(1))x^4$$

توجه کنید که تابع $f(x) = \sin(\cos(x))$ یک تابع زوج است، بنابراین در چندجمله‌ای‌های مک‌لورن آن توان‌های فرد ظاهر نمی‌شوند.

تمرین‌های زیر را به کمک میپل حل کنید.

۱- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\sin(x) = x^3$ ب) $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$ ج) $\cosh(x) = x^2 + 1$

۲- فرض کنید $a = 3 + 4i$ و $b = 4 - 3i$ دو عدد مختلط باشند، حاصل $\frac{a}{b} + \frac{\overline{a}}{b^2}$ را به دست آورید.

۳- مقدار عددی عبارت $\ln(\sqrt{\cosh(2)} + |\sin(\frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{\pi}{8})|)$ را تا بیست رقم اعشار به دست آورید.

۴- حد توابع زیر را در نقطه داده شده بیابید:

الف) $\frac{-x^3 + 2x + 6}{x^3 + 1}$؛ $x = +\infty$ ب) $(\sin(x))^{\tan(x)}$؛ $x = 0$.

۵- کدام یک از توابع زیر در فاصله $[-2,3]$ پیوسته است؟ این موضوع را با رسم نمودار این توابع نیز بررسی کنید:

الف) $x - [2x]$ ب) $\frac{x+1}{x^2 - 3x}$.

۶- مشتق مرتبه پنجم تابع $y = x^2 e^{3x}$ را در $x = 1$ محاسبه کنید. سپس نشان دهید که این تابع در معادله دیفرانسیل $y''' - 6y'' + 9y' - 6\frac{y}{x^2} = 0$ صدق می‌کند. تعیین کنید این تابع در چه ناحیه‌هایی صعودی و یا نزولی می‌باشد، سپس با رسم نمودار تابع در نواحی به دست آمده صحت جواب خود را بررسی کنید.

۷- سری $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{3}{4})^n$ را در نظر بگیرید و دنباله مجموع جزیی آن را با S_n نمایش دهید. اگر مقدار همگرایی این سری را با a نمایش دهیم، در این صورت مقدار $|a - S_{80}|$ را بیابید.

۸- با محاسبه انتگرال بالایی و پایینی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[0,2]$، نشان دهید این تابع در این بازه انتگرال‌پذیر است.

۹- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $\int xe^{4x}dx$ ب) $\int_0^1 xe^{4x}dx$

ج) $\int \sin x \cos 2x dx$ د) $\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x dx$

۱۰- با محاسبه مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(lx)dx$ به ازای چند مقدار خاص k و l، فرمول کلّی برای انتگرال بالا بر حسب k و l بیابید. همین امر را در مورد انتگرال $\int_0^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx$ انجام دهید.

۱۱- بسط تیلور تابع‌های زیر را در نقطه داده شده بیابید:

الف) $y = e^{\sin x}$ ؛ $x = 1$ ب) $y = \sin(e^x)$ ؛ $x = 0$.

۱۲- فرض کنید چندجمله‌ای درجه پنجم مک‌لورن تابع $y = \sqrt{x+1}$ برابر $p(x)$ باشد. مطلوبست $p(0)$ و $p'(0)$.

ضمائم

آدرس سایت‌های آموزش ریاضیات عمومی

واژه نامه

منابع

آدرس سایتهای آموزش ریاضیات عمومی:

۱- سایت Stewart: http://www. Stewatrcalculus.come

مسائل مبارز طلب، تاریخچه نمادها، اصطلاحات ریاضی و اشتباهات ماشین‌حساب را در این سایت خواهید یافت.

۲- سایت Visual Calculs: http://archives.math.utk.edu/visual.calculs

هدف عمده سایت نشان دادن نقش تکنولوژی به ویژه کامپیوتر در آموزش حسابان است. سؤالاتی نیز برای ارزیابی اطلاعات حسابان کاربران در نظر گرفته شده است.

۳- سایت DR.Math: http://matforum.org/dr.math/

می‌توانید سؤالات خودتان را در این سایت مطرح نموده و پاسخ آنها را دریافت کنید. همچنین به سؤالات مطرح شده توسط دیگران دسترسی دارید و می‌توانید به آنها جواب بدهید. از سال ۱۹۹۴ آغاز به‌کارکرده است. بیش از ۳۰۰ دانشجوی دکتری به طور داوطلب به سؤالات پاسخ می‌دهند. مسائل مبارزطلبی در شاخه‌های مختلف ریاضی عمومی در آن موجود است.

۴- S.O.Smath: http://www.sosmath.com/calculus/calculus.htm۱

۵- سایت Karls Calculs Tutor: http://www.karlscalculus.org/

از سال ۱۹۹۶ شروع به کار کرده و تمامی سر فصل‌های ریاضی عمومی پوشش داده شده است. سؤالات بسیاری در آن، مرحله به مرحله حل شده است. در صورت نیاز می‌توانید سؤالات خودتان را بپرسید. یک اتاق مباحثه نیز در آن وجود دارد.

۶- سایت Calculus Ideas: http://www.hoye.net/

۷- سایت History of Mathematics:

httpp://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

زندگی‌نامه ریاضی‌دانان و تاریخچه مفاهیم ریاضی را در این سایت خواهید یافت.

۸- سایت دانشگاه MIT: http://ocw.mit.edu/index.html

در مورد رشته‌های مختلف دانشگاهی مطالب جالب و مفیدی وجود دارد. آزمون‌های برگزار شده در این دانشگاه به همراه پاسخ آنها موجود است. گروه مباحثه نیز وجود دارد.

۹- سایت Integral Wolform: http://integral.Wilrorm. com/index.jsp

هدف عمده این سایت، محاسبه انتگرال‌های مختلف و تاریخچه انتگرال است.

۱۰- سایت Function Wolform: http://function.wolform.com /index.jsb

هدف عمده، بررسی توابع و تاریخچه آنها می‌باشد. بیش از ۸۷ هزار نکته در مورد توابع در این سایت موجود است.

۱۱- http://mathforms.org

تمرین‌ها و پیوند به مطالب و موضوعات مختلف ریاضی در این سایت وجود دارد.

۱۲- http://illuminations.nctm.org/mathlest/index.html

نرم افزارهایی برای ارزیابی اطلاعات حسابان موجود است.

۱۳- http://develpment.shodor.org/interactivate/activities/#fun

در این سایت بازی‌هایی بر اساس موضوعات ساده و پیشرفته ریاضی وجود دارد.

۱۴- http://math.rich.edu/~lanius/Lessons/index.html

این سایت، در واقع جزوه درسی پروفسور C.Lanius می‌باشد.

این بخش را با ارائه یک واژه‌نامه تخصصی ریاضی که در آن اصطلاحات و عبارات ریاضیات عمومی گردآوری شده است، به پایان می‌بریم. از این واژه‌نامه برای استفاده بهتر از این سایت‌های آموزشی می‌توانید استفاده کنید.

Absolute Convergence همگرایی مطلق
Acceleration شتاب
Alternating Series سری متناوب
Alternating Series Test آزمون همگرایی سری‌های متناوب
Antiderivative of a Function پاد مشتق یک تابع
Area below a Curve مساحت زیرمنحنی
Area between Curves مساحت بین منحنی‌ها
Area of an Ellipse مساحت یک بیضی
Average Value of a Function مقدار میانگین یک تابع
Bounded Function تابع کراندار
Bounded Sequence دنباله کراندار
Bounds of Integration کرانهای انتگرال
Calculus حسابان
Chain Rule قاعده زنجیره‌ای
Comparison Test آزمون مقایسه
Conditional Convergence همگرایی‌مشروط
Constant Term جمله ثابت
Continuous Function تابع پیوسته
Converge همگرا
Convergence Tests آزمونهای همگرایی
Convergent Sequence دنباله همگرا
Convergent Series سری همگرا
Critical Point نقطه بحرانی
Critical Value مقدار بحرانی
Decreasing Function تابع نزولی
Definite Integral انتگرال معین
Derivative مشتق
Differentiable مشتق‌پذیر
Discontinuous Function تابع ناپیوسته
Divergent Sequence دنباله واگرا
Divergent Series سری واگرا
Extreme Value Theorem قضیه مقدار اکسترمم
First Derivative مشتق اول
First Derivative Test آزمون مشتق اول
Fundamental Theorem of Calculus قضیه اساسی حسابان
Global Maximum ماکزیمم مطلق
Global Minimum مینیموم مطلق
Harmonic Series سری هارمونیک
Higher Derivative مشتقات مراتب بالاتر
Hyperbolic Trigonometry مثلثات‌هذلولوی
Implicit Differentiation مشتق ضمنی
Integration by Parts انتگرال جز به جز
Intermediate Value Theorem قضیه مقدار میانی
Interval of convergence بازه همگرایی
Improper Integral انتگرال ناسره
Increasing Function تابع صعودی
Indefinite Integral انتگرال نامعین
Infinite Geometric Series سری هندسی
Infinity بی‌نهایت
Integrable Function تابع انتگرال‌پذیر
Integral Rules دستورات انتگرال
Integral Test آزمون انتگرال
L'Hôpital's Rule قاعده هوپیتال
Limit حد
Limit Comparison Test آزمون مقیسهحدی
Limit from the Left حد چپ
Limit from the Right حد راست
Local Maximum ماکزیمم نسبی
Local Minimum مینیموم نسبی
Mean Value Theorem قضیه مقدار میانگین
Mean Value Theorem for Integrals قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها
nth Degree Taylor Polynomial n-امین چندجمله‌ای تیلور
nth Derivative سری تیلور
nth Partial Sum n-امین مجموع جزیی

p-series	p-سری‌ها
Parametric Derivative Formulas	مشتق پارامتری
Partition of an Interval	افراز یک بازه
Polar Derivative Formulas	فرمول مشتق قطبی
Power Series	سری‌های توانی
Radius of Convergence	شعاع همگرایی
Ratio Test	آزمون نسبت
Rolle's Theorem	قضیه رل
Root Test	آزمون ریشه
Sandwich Theorem	قضیه ساندویچ
Second Derivative	مشتق دوم
Second Derivative Test	آزمون مشتق دوم
Tangent Line	خط مماس
Taylor Polynomial	چندجمله‌ای تیلور
Taylor Series	سری تیلور

منابع:

۱- ناصر بروجردیان، ***مبانی ریاضیات***، انتشارات امیرکبیر واحد تفرش، ۱۳۷۷.

۲- جورج پولیا، ***چگونه مسئله را حل کنیم؟***، ترجمه احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ هفتم، ۱۳۸۵.

۳- جورج پولیا، ***خلاقیت ریاضی***، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، چاپ اول، ۱۳۷۲.

۴- رویا درودی، ***مسائلی در ریاضیات عمومی***، نشر آمون، چاپ اول، ۱۳۷۲.

۵- پرویز شهریاری، ***خلاقیت در ریاضیات و مهندسی***، انتشارات پژوهنده، ۱۳۸۰.

۶- ریچارد کورانت و هربرت رابینز، ***ریاضیات چیست؟***، ترجمه سیامک کاظمی، تهران نشر نی، ۱۳۷۹.

۷- امیر نادری، ***حساب دیفرانسیل و انتگرال با میپل***، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران ۱۳۸۳.

۸- مهدی نفر، ***مسائلی از انتگرال‌ها***، انتشارات جهاد دانشگاهی (ماجد)، چاپ سوم، ۱۳۷۲.

۹- Don Potter, Common mistakes, ۲۰۰۵,
www.cs.uga.edu/~potter/dismath/ .