$\frac{101}{A}$ $Z+2\bar{Z}=\frac{2-i}{1+3i}$ — جواب معادله برحسب Z کدام است؟

$$x+iy+2x-2iy=\frac{2-i}{1+3i}$$

$$3x-iy=\frac{2-i}{1+3i}\times\frac{1-3i}{1-3i}\rightarrow\cdots\begin{cases}x=-\frac{1}{30}\\ y=0/7=\frac{7}{10}\end{cases}$$

اگر $|z_i|=1$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، $\sum_{i=1}^{n} z_i=0$ حاصل $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}=?$

$$z_i\bar{z}_i=|z_i|^2=1$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i\bar{z}_i}{z_i}=\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i=\overline{\sum_{i=1}^{n}z_i}=0$$

$$(2i+1)Z+(2i-1)\bar{Z}=10i$$

$$\rightarrow(2i+1)(x+iy)+(2i-1)(x-iy)=10i$$

$$\rightarrow\boxed{2x+y=5}$$

$z=x+iy$ | $\frac{\bar{Z}}{Z}=a+ib$ $\quad$ $a^2+b^2=?$

$$a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$$

$$\frac{\bar{Z}}{Z}\quad\overline{\left(\frac{\bar{Z}}{Z}\right)}\rightarrow\frac{\bar{Z}}{Z}\times\frac{Z}{\bar{Z}}=\boxed{1}$$

$$\rightarrow a^2+b^2=1$$

$\sqrt{-2i} = a+ib \quad \to \quad -2i = 2iab \to ab=-1$

$a^2-b^2=0$

$a+b=?$

به توان $\to$ $-2i = a^2-b^2+2iab \quad \to ab=-1$

$a^2-b^2=0 \quad a^2=b^2 \to a=\pm b$

a و b مختلف العلامه اند پس جمعشان صفر می شود

$a+b=0$

چند رابطه:

$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z| = |\bar{z}|$

$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2)$

$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

$|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$

$Z^2+Z+1=i$

اگر Z_1, Z_2 جواب های معادله روبرو باشند

$|Z_1-Z_2|=?$

$\cancel{Z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1-4}) \Rightarrow Z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad Z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$Z=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1-4(1-i)}\right) = \frac{-1}{2}\pm\sqrt{4i-3} = \frac{-1}{2}\pm\sqrt{i-\frac{3}{4}}$

$Z_1-Z_2 = 2\sqrt{i-\frac{3}{4}}$

$$|i-\tfrac{3}{4}| = \sqrt{\tfrac{9}{16}+1} = \tfrac{5}{4}$$

$$\to |z_1-z_2| = 2\sqrt{|i-\tfrac{3}{4}|} = 2\sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{2}{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Z_1 ؛ Z_2 اعداد مختلطند کدام یک از روابط زیر غیر قابل تعریف است؟

$z_1 = z_2$ $\qquad$ $z_1 \neq z_2$ $\qquad$ $\underline{z_1 > z_2}$ $\qquad$ $|z_1| < |z_2|$

فاصله از مرکز قابل مقایسه می‌باشد

اعداد مختلط زوج مرتب هستند پس رابطه بزرگتری یا کوچکتری برای آنها معنا ندارد

عدد Z در رابطه زیر صدق می‌کند $|z| = ?$

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

$$z^2 - z + 1 = 0$$

$$z = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4}) = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

$$\to |z| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1$$

رابطه:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ |e^{i\theta}| = 1 \end{cases}$$

---

if: $|e^{-2z}| < 1$

1) $y<0$ $\qquad$ 2) $x<0$ $\qquad$ 3) $y>0$ $\qquad$ 4) $x>0$ ✓

$$|e^{-2z}| = |e^{-2x-2iy}| = |e^{-2x}||e^{-2iy}| = |e^{-2x}| = e^{-2x} < 1$$

$$\frac{1}{e^{2x}} < 1$$

$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$ در معادله مقابل کوچکترین مقدار $|Z|$ کدام است؟

$$Z = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{-3-4i}\right)$$

$$\sqrt{-3-4i} = \sqrt{(1-2i)^2} = 1-2i$$

$$\longrightarrow Z = \frac{1}{2}\left(3 \pm (1-2i)\right)$$

$$Z_1 = 2 - i \longrightarrow \sqrt{5}$$

$$Z_2 = 1 + i \longrightarrow \sqrt{2} \longrightarrow |Z|$$ کوچکترین مقدار

کدام است؟ $Z^2 - (7+i)Z + 24 + 7i = 0$ جواب: کوچکترین

$$Z = \frac{1}{2}\left((7+i) \pm \underbrace{\sqrt{-(48+14i)}}\right)$$

$$\sqrt{-(49 + 14i + i^2)} = \sqrt{-(7+i)^2} = i(7+i)$$

$|Z-Z_0|=R$ دایره به مرکز Z_0 و شعاع R

$|Z-Z_1|+|Z-Z_2|=c$ بیضی به کانونهای Z_1 و Z_2

$|Z-Z_1|-|Z-Z_2|=c$ هذلولی به کانونهای Z_1 و Z_2

$|Z-Z_1|=|Z-Z_2|$ عمود منصف پاره خط Z_1Z_2

$\left|\frac{Z-Z_1}{Z-Z_2}\right|=c>0$, $c\neq 1$ دایره به مرکز روی خط Z_1Z_2 و شعاع $\frac{c}{|c^2-1|}|Z_1-Z_2|$

- مکانی که Z آن صدق می‌کند کدام است؟

$$\left|\frac{Z+i}{Z-i}\right|=\sqrt{2}$$

$$|x+i(y+1)|=\sqrt{2}\,|x+i(y-1)|$$

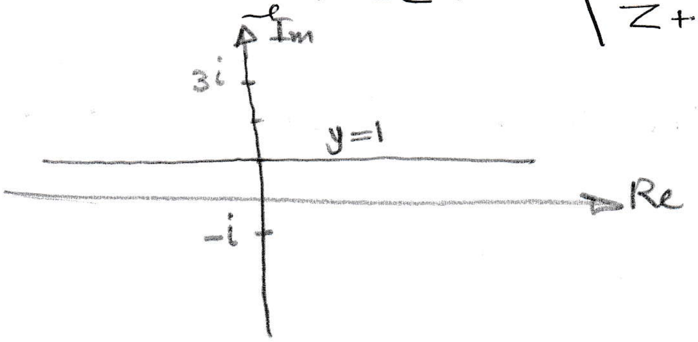
$$x^2+(y+1)^2=2\left(x^2+(y-1)^2\right)$$

$$x^2+y^2-6y+1=0 \rightarrow x^2+(y-3)^2=(2\sqrt{2})^2$$

دایره مرکز $(0,3)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

مکان تابع زیر کدام است. $1\leq|Z-i|\leq 2$ ← نقاط بین دو دایره

$\left|\frac{Z-3i}{Z+i}\right|=1$ در صفحه Z ها معرف چیست ← $y=1$ ← عمود منصف پاره خط



$z\bar{z} = 36$ ← معرف یک دایره است.

$$z\bar{z} + (1+i)z + \overline{(1+i)z} + 1 = 0$$

$$x^2+y^2+2(x-y)+1=0 \longrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=1 \longrightarrow \text{دایره}$$

$$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} = b\bar{b}$$

$$\bar{z}(z-a) - \bar{a}(z-a) = b\bar{b}$$

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (z-a)\overline{(z-a)} \longrightarrow |z-a|^2 = |b|^2$$

$$\longrightarrow |z-a| = |b| \longrightarrow \text{دایره}$$

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \geq 2$$ —— محیط و داخل دایره

$$|z-(2+i)| - |z+3+4i| = 75 \longrightarrow \text{تهی}$$

$$|z-1| + |z+1| = 1 \longrightarrow \text{تهی}$$

مکان.

نرم قطبی اعداد مختلط:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2) = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$$

۱۰۷
A

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, cis(-\theta)$

$cis(\theta) : \cos\theta + i\sin\theta$

$(\cos\ i\ \sin)(\theta)$

$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$\rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \rightarrow$ فرمول دموآور

رابطه دموآور :

---

r شعاع، z_0 دایره ای به مرکز $\leftarrow$ $z = z_0 + re^{i\theta}$

$|z - z_0| = re^{i\theta}$

$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$ $\quad$ $r_1 = r_2 = 2$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, cis(\theta_1 - \theta_2)$

$(cis\,\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\pi/3$

$\longrightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$

$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10} = \cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

اگر a و b ریشه های $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند حاصل:

$a^n + b^n + ab = ?$

$\downarrow$

$1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$

$a = 1 + i\sqrt{3} \qquad r_1 = 2 \qquad \theta_1 = \pi/3$

$a^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$b = 1 - i\sqrt{3} \qquad r_2 = 2 \qquad \theta_2 = -\pi/3$

$b^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$a^n+b^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

$$ab=1+3=4$$

$$|ze^{i\pi/3}-z|=|z|\,|e^{i\frac{\pi}{3}}-1|=|z|\,|\cos\pi/3-1+i\sin\frac{\pi}{3}|$$

$$|z|\,\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=|z|\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=|z|$$

$$(-1+i\sqrt{3})^{24}\qquad r=2\qquad \theta=2\pi/3$$

$$=2^{24}\left(\cos\frac{48\pi}{3}+i\sin\frac{48\pi}{3}\right)=2^{24}$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}Z_m=?$$

$$Z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$Z_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$Z_n=e^{i\frac{\pi}{2^n}}$$

$\prod_{m=1}^{\infty}\longrightarrow$ حاصل ضرب اعداد

$$\prod_{m=1}^{\infty}Z_m=e^{i\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}}$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}Z_m=Z_1\times Z_2\times Z_3\times\cdots$$

$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\longrightarrow$ سری هندسی، جمله اول $\frac{1}{2}$، قدر نسبت $1/2$

$$\longrightarrow\frac{1/2}{1-1/2}=1\qquad S_\infty=\frac{a_1}{1-q}$$

$$e^{i\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}}=e^{i\pi}=-1$$

$$e^{i\pi}=\underbrace{\cos\pi}_{-1}+i\underbrace{\sin\pi}_{0}=-1$$

$\frac{109}{A}$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$$

$1+i\sqrt{3} \longrightarrow 2\ ,\ \pi/3$

$1-i \longrightarrow \sqrt{2}\ ,\ \theta=-\pi/4$

جواب : $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$

$$2^{20}\left(\cos\frac{70\pi}{3}+i\sin\frac{70\pi}{3}\right)$$

$$2^{20}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Z=2+5\pi i \longrightarrow e^{Z}=?$$

$$e^{2+5\pi i}=e^{2}(\underbrace{\cos 5\pi}_{-1}+i\underbrace{\sin 5\pi}_{0})=-e^{2}$$

$$Re(e^{-3Z})=?$$

$$e^{-3x-3iy}=e^{-3x}\cdot e^{-3iy}=e^{-3x}(\cos 3y-i\sin 3y)$$

$$Re(e^{-3Z})=e^{-3x}\cos 3y$$

$$Z=1+i\sqrt{3} \qquad \frac{Z^{7}}{Z\bar{Z}}=?$$

$$\begin{cases} r=2 \\ \theta=\pi/3 \end{cases}$$

$$\frac{Z^{7}}{Z\bar{Z}}=\frac{1}{4}\times 2^{7}\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)=2^{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2^{4}\underbrace{(1+i\sqrt{3})}_{Z}=2^{4}Z$$

$Z=\cosh(2+it)$

$t\in R$

ریشه n ام عدد مختلط:

$Z^{\frac{1}{n}}=Z_0$

$Z=Z_0^n$

$r(\cos\theta+i\sin\theta)=r_0^n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)$

$r_0=\sqrt[n]{r}$ $\qquad \theta_0=\frac{2k\pi+\theta}{n}$

$k=0,1,\dots,n-1$

کدام عدد مختلط یکی از ریشه‌های چهارم 8i نیست؟

$8i$

$r=8$

$\theta=\pi/2$

$r_0=\sqrt[4]{8}$

$\theta_0=\frac{2k\pi+\pi/2}{4}$

$\boxed{1)\ \frac{11\pi}{8}}$ $\qquad 2)\ \frac{13\pi}{8}$ $\qquad 3)\ \frac{5\pi}{8}$ $\qquad 4)\ \frac{9\pi}{8}$

$k=0 \rightarrow \theta_0=\pi/8$

یکی از ریشه‌های عدد $Z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ کدام است (ریشه سوم؟)

$(1-i)^2=1+i^2-2i=-2i$

$Z=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{2i}{2}=i \longrightarrow$ ریشه سوم i کدام است

$Z=i \rightarrow r=1,\ \theta=\pi/2$ $\qquad r_0=1,\ \theta_0=\frac{2k\pi+\pi/2}{3}$

- یکی از جذرهای $\frac{-۲}{i}$ کدام است؟

$$\frac{-۲}{i}\times\frac{i}{i}=۲i \longrightarrow \begin{array}{l} r=۲ \\ \theta=\pi/۲ \end{array}$$

$$r_0=\sqrt{۲} \qquad \theta_0=\frac{۲k\pi+\pi/۲}{۲} \qquad k_0=۰,۱$$

$$k=۰ \longrightarrow \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۱+i$$

کعبهای: (ریشه سوم) $Z=\frac{۲i}{-۱+i}$ کدام است. یکی از θهاش کدام است!

$$Z=\frac{۲i}{-۱+i}\times\frac{-۱-i}{-۱-i}=\frac{۲-۲i}{۲}=۱-i$$

$$\theta=-\pi/۴$$

$$\theta_0=\frac{۲k\pi-\pi/۴}{۳} \quad ---$$

Matrix:

سطر n
ستون m

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ماتریس n در m

ماتریس صفر

$$O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\times n} \end{bmatrix}$$

قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix} \qquad tr(A)=-۳$$

$tr(A) =$ مجموع عناصر روی قطر اصلی

ماتریس قطری: تمام عناصری که روی قطر (قطر اصلی) نیستند صفر هستند

ماتریس یکه: ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر یک است (ماتریس همانی) : I

ترانهاده: A^T: جای سطر و ستونها عوض می‌شود

ماتریس متقارن: $A=A^T$ یا $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall(i,j)$:متقارن

ماتریس شبه متقارن $a_{ij}=-a_{ij}$ یا $A=-A^T$, $a_{ii}=0$ شبه متقارن

ضرب: در ضرب ماتریسها ستونهای اولی با سطرهای دومی باید برابر باشد

$$A_{n\times m}\times B_{m\times r}=C_{n\times r}$$

ماتریس در ضرب خاصیت جابجایی ندارد

$$AB=0 \not\Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

$$A^2=A\times A$$

$$A^n=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{\text{n تا}}$$

if $A^2=A \rightarrow$ ماتریس هم توان یا خودتوان است

$$A=\begin{bmatrix}0 & k\\ k & 0\end{bmatrix} \qquad A^n=\begin{bmatrix}k^n & 0\\ 0 & k^n\end{bmatrix} \qquad A^n=\begin{bmatrix}0 & k^n\\ k^n & 0\end{bmatrix}$$

n زوج است — n فرد است

$$A=\begin{bmatrix}0 & k\\ r & 0\end{bmatrix} \qquad A^n=\begin{bmatrix}(kr)^{n/2} & 0\\ 0 & (kr)^{n/2}\end{bmatrix} \qquad A^n=\begin{bmatrix}0 & k^{\frac{n+1}{2}}.r^{\frac{n-1}{2}}\\ k^{\frac{n+1}{2}}.r^{\frac{n-1}{2}} & 0\end{bmatrix}$$

n زوج است

تذکر - اگر A یک ماتریس قطری باشد، A^n عناصر روی قطر به توان n می‌رسند

- اگر A , B قطری باشند AB هم قطری است.

$$(A^T)^T=A$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

$$(AB)^T=B^T.A^T$$

از تساوی ماتریسی

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مقدار $a+b$ کدام است؟

$a+2c=1$ $\qquad$ $b+2d=0$

$3a+7c=0$ $\qquad$ $3b+7d=1$

$\longrightarrow \underline{a+b=5}$

از تساوی

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35\\ -4\end{bmatrix}$$

$x+y=12$

اگر دترمینان ماتریسی (A) عدد ۱ باشد A^n هم دترمینانش یک می شود

ماتریس A کدام است؟

$$\underset{1\times 2}{A}\times\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & -5\end{pmatrix}}=(1,-1)$$

$\longrightarrow A=(a,b)$

$$|A|=\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}.a_{ij}\,|M_{ij}|$$

M_{ij}: ماتریس کهاد

دستور ساروس:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2\end{array}\right|$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-(c_1b_2a_3+c_2b_3a_1+c_3b_1a_2)$$

$$|A|=|A^T|$$

اگر جای دو سطر یا دو ستون عوض شود دترمینان آن در یک $(-)$ منفی ضرب می شود

اگر دو سطر یا دو ستون برابر باشند دترمینان صفر می شود

اگر یک سطر یا یک ستون بر عددی ضرب یا تقسیم شود مقدار دترمینان در آن عدد ضرب یا تقسیم می شود

در ضرب یک عدد در دترمینان ← یک سطر یا یک ستون در آن ضرب می‌شود

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b & c \\ a_1'+a_2' & b' & c' \\ a_1''+a_2'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a_1' & b' & c' \\ a_1'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b & c \\ a_2' & b' & c' \\ a_2'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$$|rA| = r^n |A|$$

$$|A^m| = |A|^m$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اگر به جای $x=2$ بگذاریم دو سطر یکی می‌شود
و جواب آن صفر خواهد شد

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad |AA^T| = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix} \rightarrow 26 \times 5 - 1 = 129$$

اگر حاصل دترمینان $|A|=0$ باشد . $m+n=?$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2m+n & m-n & 2 \\ 0 & 2 & -n & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$-n=2 \rightarrow n=-2$

$2m+n=m-n$

$\rightarrow m=-2n=+4$

$\underline{m+n=2}$

معکوس ماتریس:

از شرایط معکوس پذیری: $|A|\neq 0$ A منفرد نباشد.

$AB=BA=I \qquad \underline{B=A^{-1}}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \qquad (A^{-1})^{-1}=A$

$(A^{-1})^{n}=A^{-n}=(A^{n})^{-1} \qquad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1} \qquad (rA)^{-1}=\frac{1}{r}A^{-1}$

if $|A|\neq 0 \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$

$\operatorname{adj}A$ ماتریس مربعی است که اعضای آن همسازه‌های دترمینان ماتریس A^{T} می‌باشد

مثال: $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{T}=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2$

$A_{12}=(-1)^{3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-18$

$\rightarrow \operatorname{adj}A=\begin{pmatrix} 2 & -18 & 10 \\ 31 & -4 & -10 \\ -7 & 8 & 20 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

اگر A یک ماتریس قطری باشد معکوس A (A^{-1}) یک ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن معکوس عناصر اولیه است

ماتریس متعامد: $A^{-1}=A^{T}$

خواص ماتریس متعامد: $|A|=\pm 1$

A متعامد است اگر و فقط اگر سطرها (ستونها) را به عنوان بردار فرض کنیم دارای طول یک و دو به دو بر هم عمود باشند

روش الحاق کردن ماتریس:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

* هرگاه این ماتریس همانی شد طرف مقابل معکوس آن است

عنصر سطر اول ستون دوم A^{-1} کدام است؟

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{T}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2\times 2\times 2 = 8$$

$$M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$\frac{1}{8}\times 2=\frac{1}{4}$$

جواب $\frac{1}{4}$

$\frac{117}{A}$

فرض کنید A یک ماتریس وارون پذیر ۳×۳ باشد و $8A^2 - A^{-1} = 0$

کدام رابطه صادق است؟

$\xrightarrow{\times A} 8A^3 = I \rightarrow |۲A| = ۱ \xrightarrow{\text{۳ مرتبه ماتریس}} ۲^۳|A| = ۱ \rightarrow |A| = \frac{۱}{۸}$

$|۲A|^۳ = |I| = ۱ \rightarrow |A| = \frac{۱}{۸}$

$(\det ۲A)^۳ = ۱ \rightarrow ۸\det A = ۱ \rightarrow \underline{\det A = \frac{۱}{۸}}$

به ازای کدام مقدار A می‌تواند متعامد باشد؛

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & k \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ k & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

به ازای هیچ مقدار k زیرا دو ستون متعامد نیستند چون

$۰ \times k - ۱\times۱ + ۱\times(-۱) = \underline{-۲} \neq ۰$

به ازای کدام مقدار m ماتریس

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & m+۱ \\ ۱ & ۳ & ۲m \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

وارون پذیر نیست

$m+۱ = ۰ \rightarrow \underline{m = -۱}$

به ازای $m=-۱$ دو سطر هم برابر می‌شوند و دترمینان آن صفر می‌شود

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{pmatrix}$$

$\cancel{\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴}{۴} = ۱}$

به ازای کدام مقدار a ماتریس زیر معکوس پذیر است؟

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ -2 & 0 & 3 \\ -a & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس شبه متقارن از مرتبه فرد دترمینانش صفر می‌شود

پس به ازای هیچ مقدار a معکوس پذیر نیست.

نکته:

$$|A^T|^{-1} = |A^{-1}|$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

$$AX = Y = \lambda X \qquad X \neq 0$$

$(A-\lambda I)X = 0 \longrightarrow$ که دستگاه همگن است که ماتریس ضرایب $(A-\lambda I)$ است. و می‌دانیم شرط آنکه یک دستگاه همگن دارای جواب غیر صفر باشد آن است که $|A-\lambda I| = 0$ باشد از طرفی اگر A یک ماتریس مرتبه n باشد

$$|A-\lambda I| = \lambda^n + \underbrace{a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n}= 0$$

معادله مشخصه $\longrightarrow$ ریشه‌های آن مقادیر ویژه

هر λ ای را در معادله $(A-\lambda I)X = 0$ قرار دهیم بردار ویژه متناظر با آن مقدار ویژه بدست می‌آید

هر ماتریس $n \times n$ دارای n مقدار ویژه است

$$A_{n\times n} \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$A^P \longrightarrow \lambda_1^P , \lambda_2^P , \cdots , \lambda_n^P \longrightarrow \underline{A^P}$ مقادیر ویژه

اگر V بردار ویژه متناظر با λ_i در A باشد

آنگاه : V بردار ویژه متناظر با λ_i^P در A^P می‌باشد

$A^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\lambda_1} , \frac{1}{\lambda_2} , \cdots \frac{1}{\lambda_n}$: A^{-1} مقادیر ویژه

V بردار ویژه متناظر با λ_i در A است

آنگاه: V بردار ویژه متناظر با $\frac{1}{\lambda_i}$ در A^{-1} است

مقادیر ویژه A^T همان مقادیر ویژه A است

اگر ماتریس مثلثی باشد مقادیر روی قطر مقادیر ویژه ماتریس‌اند

اگر A متقارن باشد تمام مقادیر ویژه حقیقی هستند و بردارهای ویژه مستقل و دو به دو بر هم عمودند

اگر A شبه متقارن باشد مقادیر ویژه یا صفرند یا موهومی محض‌اند

if $\lambda_i \neq \lambda_j$ و V_i , V_j بردارهای ویژه متناظرند $\longrightarrow$ V_i , V_j مستقل خطی‌اند

قضیه کلی هامیلتون: هر ماتریس جواب معادله مشخصه خودش است

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I = 0$$

ماتریس A معین مثبت است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه مثبت باشد

ماتریس A معین منفی است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه منفی باشد

A شبه معین منفی است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه کوچکتر یا مساوی صفر باشد

A نامعین است اگر نه معین منفی باشد نه معین مثبت $\Big\{$ یا بعضی از مقادیر ویژه مختلط‌اند / یا بعضی مثبت و بعضی منفی

بردارهای A ، $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... , $\vec{a}_n$ را در نظر می‌گیریم

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

اگر تمام c ها صفر باشند ← مستقل خطی اند

اگر حداقل یکی از c ها مخالف صفر باشد ← وابسته خطی اند

Rank صفر ندارم حداقل Rank 1 است ← تعداد سطرها یا ستونهای مستقل خطی Rank آن است

ماتریس قطری شدنی:

دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B را متشابه گوئیم هرگاه به ازای ماتریس معکوس پذیر دلخواه P در رابطه

$P^{-1}AB$ صدق کند

$$P^{-1}AP = B$$

اگر A و B متشابه باشند مقادیر ویژه اشان یکسان است

* ماتریس A را قطری شدنی گوئیم اگر ماتریس معکوس پذیر P و ماتریس قطری B وجود داشته باشد

بطوریکه:
$$P^{-1}AP = B$$

عناصر روی قطر اصلی B مقادیر ویژه A هستند و ستونهای B بردارهای ویژه مستقل خطی A اند

اگر مقادیر ویژه A متمایز باشند (غیرتکراری باشند) آنگاه A قطری شدنی است

* اگر A متقارن باشد قطری شدنی است.

$\frac{121}{A}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{\lambda=3}$

اگر $\lambda=3$ یک مقدار ویژه باشد بردار ویژه متناظر با آن کدام است ؟

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x-z=0 & \to z=-2x \\ x-y+z=0 & \to x=-y \\ 2x+2y=0 & \to x=-y \end{cases}$$

if $x=a$

$\to y=-a$

$z=-2a$

$$\to a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس ~~ویژه~~ بردار ویژه متقارن A کدام است

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ A متقارن است

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} \to$ دو به دو بر هم عمودند

اگر ۱, ۲ ~~مقادیر~~ مقادیر ویژه $A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ باشد b کدام است ؟

$3+b=3 \longrightarrow b=0$

یکی از مقادیر ویژه $\lambda=1$ ، $a=?$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A-I| = 2a-3=0 \to a=\frac{3}{2}$$

معادله مشخصه A: $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$ ماتریس A چگونه است؟

$\lambda=1,-1,-1 \longrightarrow$ A معکوس پذیر است

$$\det A = 1\times-1\times-1 = \underline{1} \neq 0$$

یکی از امتدادهای ویژه A کدام است؟

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda)-12=0$$

$$\underline{\lambda=1,9}$$

$$\lambda=9 \longrightarrow \underset{2\times2}{\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}=\underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$-6x+3y=0$$
$$4x-2y=0$$

$$\to \underline{y=2x}$$

توابع برداری:

هنگامی که به تابع عددی می‌دهیم حاصلش یک بردار است (بردار دو بعدی یا ۳ بعدی)

$$\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ یا } \mathbb{R}^3$$

دامنه

دو بعدی $\quad \vec{f}(t) = f_1(t)\,i + f_2(t)\,j$

۳ بعدی $\quad \vec{f}(t) = f_1(t)\,i + f_2(t)\,j + f_3(t)\,k$

توجه: برای محاسبه حد، مشتق و انتگرال از یک تابع برداری کافیست از مولفه‌های آن حد، مشتق و انتگرال

گرفت

$$\vec{f}(t) = (t^2+1)\,i + \tan^{-1}t\;j$$

$$\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = 2i + \frac{\pi}{4}j$$

$$\vec{f}'(t) = 2t\,i + \frac{1}{1+t^2}\,j \rightarrow \vec{f}'(1) = 2i + \frac{1}{2}j$$

$$\vec{f}(t) = t\,i + \frac{1}{t}\,j + t^2 k$$

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \frac{1}{2}t^2\,i + \ln t\;j + \frac{1}{3}t^3 k$$

توجه: قواعد مشتق‌گیری:

$$\left(\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)\right)' = f'(t) + g'(t)$$

ضرب نقطه‌ای $\quad (f(t)\cdot g(t))' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$

ضرب خارجی $\quad \left(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)\right)' = f'(t)\times g(t) + f(t)\times g'(t)$

ضرب اسکالر $\quad \left(\alpha(t)\cdot\vec{f}(t)\right)' = \alpha'(t)\cdot f(t) + \alpha(t)\cdot \vec{f}'(t)$

توجه: اگر تابع برداری دارای اندازه ثابت باشد بر مشتق خودش عمود است

در هر لحظه یک اندازه دارد
همان

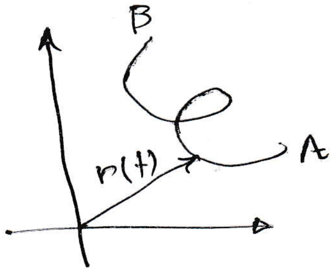
$$|f(t)| = c$$

$$|f(t)|^2 = c^2 \qquad \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$f(t)\cdot f(t) = c^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2f(t)\,f'(t) = 0$$

$$\rightarrow f(t)\cdot f'(t) = 0 \longrightarrow$$ f' و f بر هم عمودند

خم در صفحه:



$r(t)$ بردار مکان

$$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$$

$$a \leq t \leq b$$

سرعت: $v(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

تندی $|\vec{v}(t)| = v(t)$

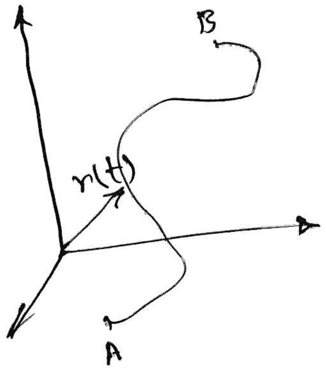
$$s(t) = \int_a^t v(u)\,du$$

$$L = \int_a^b v(t)\,dt$$

تندی سرعت

$v(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}$ تندی سرعت

منحنی در فضا:



$$r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$$

$$a \leq t \leq b$$

سرعت $v(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

تندی سرعت $v(t) = |\vec{v}(t)|$

تابع طول قوس $s(t) = \int_a^t v(u)\,du$

تندی سرعت است

طول مسیر $L = \int_a^b v(t)\,dt$

تندی سرعت

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

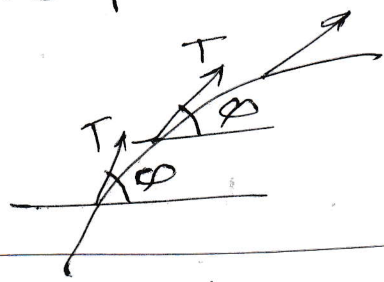
بردار یکه مماس : $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{V}(t)}{V(t)}$ ← بردار سرعت ، ← اندازه بردار سرعت

بردار یکه قائم : $\vec{N}(t) = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|}$

چون اندازه بردار $\vec{T}(t)$ ثابت است پس $\vec{T'}(t)$ بر آن عمود است.

انحنا:

$$K(t) = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{|\vec{T'}(t)|}{\underbrace{V(t)}_{\text{اندازه سرعت}}} = \overbrace{\left|\frac{d\phi}{ds}\right|}^{\text{این فرمول فقط مخصوص دو بعدی است}}$$



بردار قائم دوم : $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \quad \left(|\vec{B}(t)| = 1 \right)$

فرمول محاسباتی انحنا:

$$K(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ دو بعدی

$$K(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$ سه بعدی

حالت خاص : $y = f(x)$ ←

$$K(t) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

شعاع انحنا : $R(t) = \dfrac{1}{K(t)}$

شتاب:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a(t) = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

$$a_T = \frac{d\,v(t)}{dt} \qquad a_N = v^2 k$$

مثال: منحنی $\vec{r}(t) = (e^t \cos t)\, i + (e^t \sin t)\, j$ مفروض $S(1)$ را بدست آورید

$t \geq 0$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (e^t \cos t - e^t \sin t)\, i + (e^t \sin t + e^t \cos t)\, j$$

$$\vec{v}(t) = e^t\big((\cos t - \sin t)\, i + (\sin t + \cos t)\, j\big)$$

اندازه $\vec{v}(t) = e^t \sqrt{1 - 2\sin t \cos t + 1 + 2 \sin t \cos t} = \sqrt{2}\, e^t$

$$S(1) = \int_0^1 \sqrt{2}\, e^t \, dt = \sqrt{2}\, e^t \Big|_0^1 = \sqrt{2}(e-1)$$

مثال: انحنای منحنی $\vec{r}(t) = 3t^2\, i + (3t - t^3)\, j$ به ازای $t=1$ را بدست آورید

$$x = 3t^2 \longrightarrow x' = 6t \longrightarrow x'' = 6$$

$$y = 3t - t^3 \longrightarrow y' = 3 - 3t^2 \longrightarrow y'' = -6t$$

$$K(1) = \frac{|-36 - 0|}{(36)^{3/2}} = \frac{1}{6}$$

ماکزیمم انحنای $y=\ln(\sec x)$ را بدست آورید.

$$y'=\frac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x \longrightarrow y''=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$K(x)=\frac{\sec x}{(1+\tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}=\cos x$$

$$\max K(x)=1$$

منحنی در صفحه:

نشان دهید مماس $\vec{r}(t)=(3\cos t)i+(3\sin t)j+4t\,k$ بردار یکه آن (بردار یکه مماس) با محور Z ها زاویه ثابتی سازد

$$V(t)=(-3\sin t)i+(3\cos t)j+4k$$

$$|V(t)|=5$$

$$T(t)=\left(-\frac{3}{5}\sin t\right)i+\left(\frac{3}{5}\cos t\right)j+\frac{4}{5}k$$

$$\cos\theta=\vec{T}\cdot\vec{k}=\frac{4}{5}\longrightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{4}{5}$$

طول منحنی فضایی $\vec{r}(t)=\sqrt{2}\,t\,i+e^{t}j+e^{-t}k$ را بدست آورید.

$$0\leqslant t\leqslant \ln 2$$

$$V(t)=\sqrt{2}\,i+e^{t}j-e^{-t}k$$

$$|V(t)|=\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}=\sqrt{\frac{2e^{2t}+e^{4t}+1}{e^{2t}}}=\frac{e^{2t}+1}{e^{t}}=e^{t}+e^{-t}$$

$$L=\int_0^{\ln 2}(e^t+e^{-t})\,dt = e^t-e^{-t}\Big|_0^{\ln 2} = (2-\tfrac{1}{2})-(1-1)=\tfrac{3}{2}$$

- منحنی فضایی $\vec{r}(t)=ti+t^2j+t^3k$ داده شده است. معادله صفحه شامل مماس و قائم اصلی در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

نکته:

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

$$\vec{B_1}=\vec{V}\times\vec{a}$$

$$\vec{V}(1)=i+2j+3k \quad (t=1)$$
$$\vec{a}(1)=\cancel{0}\,2j+6k$$

$$\rightarrow \vec{B_1}=\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$=6i-6j+2k$$ → بردار نرمال صفحه مورد نظر

مکانیک: تابع برداری

$$\vec{R}(t)=(a+t^2)i+(a-t^2)j+btk$$

در فضای ۳ بعدی داده شده است که در آن a و b مقادیر ثابت‌اند $(b\neq 0)$ بردار قائم دوم به ازای هر t کدام است.

$$\vec{B_1}=\vec{V}\times\vec{a}$$

$$\cancel{B_1}\quad V=2ti-2tj+bk \qquad B_1=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2t & -2t & b\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

$$a=2i-2j$$

$$B_1=2bi+2bj \longrightarrow |B_1|=2b\sqrt{2}$$

بردار قائم دوم $\vec{B}=\dfrac{B_1}{|B_1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$

صفحه شامل $\vec{N}$ و $\vec{T}$ را صفحه بوسان گوییم

MBA: طول قوس منحنی C به معادله

$$\begin{cases} x = \ln\sqrt{4+t^2} \\ y = \tan^{-1}\frac{t}{2} \end{cases}$$

در $0 \leq t \leq 2$ را بیابید؟

$$L = \int_0^2 \sqrt{x'^2}$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\frac{t^2}{(4+t^2)^2} + \frac{1/4}{(1+t^2/4)^2}}\, dt = \int_0^2 \sqrt{\frac{t^2+4}{(4+t^2)^2}}\, dt$$

$$t = 2\tan\theta \qquad \theta\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{2\sec\theta} = \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

مولد: فرض کنید $\vec{R}(t) = (e^t \sin t)i + (e^t \cos t)j + tk$ ، $t \in \mathbb{R}$ مطلوبست

خمیدگی منحنی در نقطه $t=0$ کدام است؟

$$R'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t)i + (e^t \cos t - e^t \sin t)j + k$$

$$\rightarrow R'(0) = i + j + k$$

$$R''(t) = e^t\big((\sin t + \cos t)i + (\cos t - \sin t)j\big)$$

$$+ e^t\big((\cos t - \sin t)i + (-\sin t - \cos t)j\big)$$

$$R''(0) = i + j + i - j = 2i$$

$$R' \times R'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +2j - 2k$$

$$|R' \times R''| = 2\sqrt{2} \qquad |R'| = \sqrt{3}$$

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

فرض کنید پارامتری شده برحسب طول قوس منحنی C به صورت زیر باشد،

$$\vec{r}(s) = \left(2\cos\frac{s}{2},\ \sin\frac{s}{2},\ 1-\sqrt{3}\sin\frac{s}{2}\right)$$

انحنای منحنی C کدام است؟

$$K = \frac{|T'(t)|}{V(t)} = \left|\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

$$T = \frac{V(t)}{V(t)} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dr}{ds}$$

$$T = \left(-\sin\frac{s}{2},\ \frac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\frac{s}{2}\right)$$

$$\frac{dT}{ds} = \left(-\tfrac{1}{2}\cos\frac{s}{2},\ \frac{-1}{4}\sin\frac{s}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{s}{2}\right)$$

$$\left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\frac{s}{2} + \frac{1}{16}\sin^2\frac{s}{2} + \frac{3}{16}\sin^2\frac{s}{2}} = \tfrac{1}{2}$$

$$\rightarrow \underline{K = \tfrac{1}{2}}$$

ـ فرض کنید $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$ طول منحنی آن $0 \leq t \leq 2\pi$ کدام است؟

$$\begin{cases} x' = -3a \sin t \cos^2 t \\ y' = 3a \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4 t}\; dt$$

$$= 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t|\, dt = \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt$$

$$= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 6a\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = 6a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 6a$$

ـ حرکت متحرکی با رابطه $\vec{r}(t) = (t\cos t)\,i + (t\sin t)\,j$ در لحظه t مولفه شتاب قائم کدام است؟

1) $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 2) $\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$ 3) $\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ 4) $\frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+1}}$

$$a_N = V^2 K$$

$$\vec{V} = (\cos t - t\sin t)\,i + (\sin t + t\cos t)\,j$$

$$\vec{V}(0) = i \qquad x' = \cos t - t\sin t \;\overset{1}{} \to x'' = -2\sin t - t\cos t \;\overset{0}{}$$

$$V(0) = 1 \qquad y' = \sin t + t\cos t \;\underset{0}{} \to y'' = 2\cos t - t\sin t \;\underset{2}{}$$

$$K(0) = 2 \to a_N = V^2 K = 2$$

توابع چند متغیره :

تابع دو متغیره :

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

دامنه در $\mathbb{R}^2$ و نمودار آن در فضاست

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w = f(x, y, z)$$

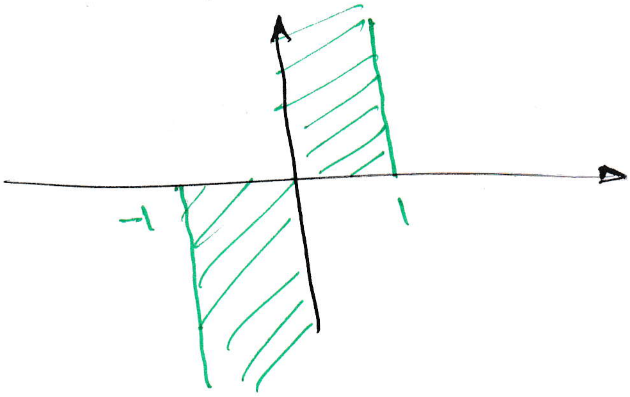
دامنه در فضای $\mathbb{R}^3$ و نمودار قابل ترسیم نیست

توجه : برای محاسبه دامنه توابع چند متغیره همان محدودیتهایی که قبلا برای توابع یک متغیره بیان شده است می باشد

– دامنه تابع زیر را رسم کنید

$$f(x, y) = \sin^{-1} x + \sqrt{xy}$$

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ xy > 0$$



حد تابع دو متغیره : فرض کنید f به جز نقطه مشخص a در صفحه پیرامون حقیقی

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$

وجود دارد که در نقطه (a, b) می گویند . بنا براین برخلاف توابع یک متغیره که تنها دو مسیر (چپ و راست) وجود داشت و با یکسان بودن انها حد وجود (حد چپ و راست) وجود حد ثابت می شد ، اما در توابع دو متغیره با مسیر وجود حد ثابت نمی شود . ولی عدم وجود حد را با پیدا کردن حداقل دو مسیر که دارای حدود متفاوت باشند مشخص می شود . وجود اثبات حد با ε و δ خواهد بود که

معمولاً در بحث تستها بکار نمی روند. در بعضی از تستها وجود حد را با پیوستگی تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد

مثال: نشان دهید توابع زیر در مبدا دارای حد نمی باشد

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \to \begin{cases} \xrightarrow{y=x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \\ \xrightarrow{\text{محور } x\text{ها}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \begin{cases} \xrightarrow[y=0]{\text{محور } x} \lim \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \\ \xrightarrow[x=0]{\text{محور } y} \lim \dfrac{-y^2}{y^2} = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = 0$$

$$\xrightarrow{y=\sqrt{x}} \lim \frac{x^2}{2x^2} = 1/2$$

نشان دهید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2(\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta) = 0 \times \text{مح} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2 - r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\left(1-r^2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)=1$$

ریاضی: فرض کنیم

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) در $(0,0)$ پیوسته نمی‌باشد ✓

۲) در $(0,0)$ پیوسته است

۳) حد آن در $(0,0)$، $\frac{1}{2}$ است

۴) هیچ مسیری وجود ندارد که حد آن در $(0,0)$ $\frac{1}{2}$ باشد

$$\lim \frac{r^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{r^6\cos^6\theta+r^4\sin^4\theta} = \lim r\left(\frac{\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta}{r^2\cos^6\theta+\sin^4\theta}\right) \quad \times$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{x^3y^2}{x^6+y^4} = \begin{cases} \text{محور } x,\ y=0 & 0\\[2mm] \xrightarrow{y=x^{\frac{3}{2}}} & \lim \dfrac{x^6}{2x^6}=1/2\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = \cos 0 = 1$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y+1} \quad , \quad g(x) = \cos x \longrightarrow \text{پیوسته است } \cancel{(f\circ g)(x)}\ (g\circ f)(x)$$

در (0,0) پیوسته است — در تمام نقاط پیوسته است

مشتقات جزئی:

$$Z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = Z_x = f_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = Z_y = f_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

توجه: قواعد مشتق‌گیری که قبلاً بیان شده است برای محاسبه مشتقات جزئی قابل استفاده‌اند

$$f(x,y,z) = x^{yz}$$

$$f_x = (yz)\, x^{yz-1}$$

$$f_y = (z\ln x)\, x^{yz}$$

$$f_z = (y\ln x)\, x^{yz}$$

برای تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ? \longrightarrow \text{موجود نیست}$$

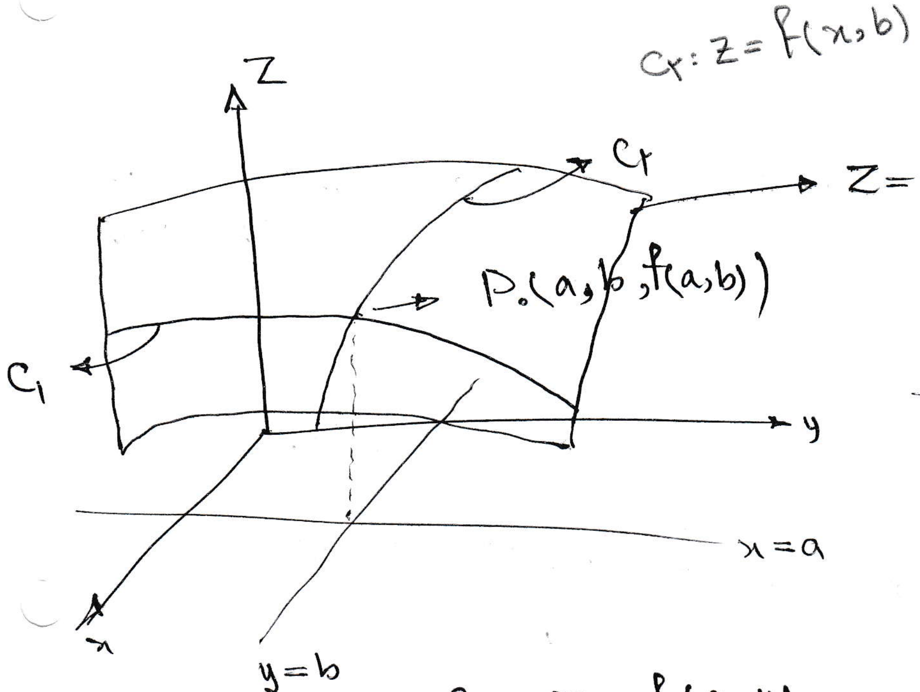
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{\sin^2 \Delta x}{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x\,|\Delta x|} = \begin{cases} \Delta x>0 & 1 \\ \Delta x<0 & -1 \end{cases}$$

توجه: برخلاف دیفرانسیل که در حالت صورت و مخرج ساده می‌شوند، این کار را برای ∂ امکان‌پذیر نیست

توجه:

مفهوم هندسی مشتقات جزئی:



$C_1: Z = f(a,y)$

$$\longrightarrow \begin{cases} Z - f(a,b) = f_y(a,b)(y-b) \\ x = a \end{cases}$$ خط مماس بر منحنی C_1 در نقطه P_0

$C_2: Z = f(a,b)$ $\quad C_2: z = f(x,b)$

خط مماس بر منحنی C_2 در نقطه P_0

$$\begin{cases} Z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) \\ y = b \end{cases}$$

معادله پارامتری خط مماس بر فصل مشترک $x=1$ و هذلولی‌گون دو پارچه $Z=\sqrt{x^2+y^2+1}$ در نقطه $P_0(1,1,\sqrt{3})$ کدام است.

$$C_1: Z = \sqrt{2+y^2} \longrightarrow Z_y = \frac{y}{\sqrt{2+y^2}} \xrightarrow{P_0} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} Z - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(y-1) \\ x=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = t \\ Z - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

۱۳۵
A

صفحه $y=-1$ سهمیگون بیضوی $Z=2x^2+y^2$ را در یک منحنی قطع می‌کند معادله پارامتری خط مماس بر این منحنی در نقطه $(2,-1,9)$ بدست آورید

مشتقات جزئی مراتب بالاتر: برخلاف توابع تک متغیره که همواره از یک متغیر مستقل مشتق مراتب بالاتر گرفته می‌شود در توابع چند متغیره نوع متغیر مستقل را می‌توان عوض کرد

$$\frac{\partial^5 Z}{\partial x^2 \partial y^3} = Z_{yyyxx}$$

در صورتی که تابع پیوسته باشد ترتیب مشتق گیری اهمیتی ندارد

$$Z = \sin^2 x \cos^2 y \longrightarrow Z_{yyyxx} = ?$$

$$Z_y = \sin^2 x(-2\sin y\cos y) = -\sin^2 x \sin 2y$$

$$Z_{yy} = -2\sin^2 x \cos 2y \rightarrow Z_{yyy} = 4\sin^2 x \sin 2y$$

$$Z_{yyyx} = 8\cos x \sin x \sin 2y = 4\sin 2x \sin 2y$$

$$Z_{yyyxx} = 8\cos 2x \sin 2y$$

MBA اگر $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ حاصل $\dfrac{\partial f/\partial y}{\partial^2 f/\partial x^2}$ کدام است؟

$$\ln f = -\frac{1}{2}\ln y - \frac{x^2}{4y} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{f_x}{f} = \dfrac{-x}{2y} \rightarrow f_x = -f\cdot\dfrac{x}{2y} \\[2ex] \dfrac{f_y}{f} = -\dfrac{1}{2y} + \dfrac{x^2}{4y^2} \rightarrow f_y = f\left(\dfrac{-1}{2y} + \dfrac{x^2}{4y^2}\right) \end{cases}$$

$$f_{xx} = -f_x \cdot \frac{x}{2y} - f \cdot \frac{1}{2y} = f\left(\frac{x^2}{4y^2} - \frac{1}{2y}\right)$$

جواب : ۱ ←

دیفرانسیل:

$$y = f(x) \longrightarrow df = f'(x) \cdot dx$$

$$\Delta f \simeq df$$

$$Z = f(x,y) \longrightarrow df = f_x\, dx + f_y\, dy$$

$$\Delta f \simeq df$$

$$w = f(x,y,Z) \longrightarrow df = f_x\, dx + f_y\, dy + f_Z \cdot dZ$$

$$\Delta f \simeq df$$

- دیفرانسیل تابع $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ در نقطه $(3,-4)$ کدام است؟

$$df = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\, dy$$

$$df(3,-4) = \frac{1 + 3/5}{8}\, dx + \frac{-4/5}{8}\, dy$$

$$= \frac{1}{5}\, dx - \frac{1}{10}\, dy = 0.1(2dx - dy)$$

- مقدار تقریبی $(1.97)^{3.02}$ به کمک دیفرانسیل کدام است؟ $(\ln 2 \simeq 0.7)$

$$f(x,y) = x^y$$

$$x = 2,\ y = 3$$

$$\Delta x = -0.03 \quad \Delta y = 0.02$$

$\frac{۱۳۷}{۸}$ $\Delta x \simeq df$

$$f(۱{,}۹۷, ۳{,}۰۲) = f(۲,۳) \simeq ۱۲ \times (-۰{,}۰۳) + ۵{,}۶ \times ۰{,}۰۲ = ۷{,}۷۵۲$$

$$f_x = y x^{y-1} \xrightarrow{(۲,۳)} ۱۲$$

$$f_y = (\ln x) x^y \xrightarrow[(۲,۳)]{} ۸\ln ۲ = ۵{,}۶$$

مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{(۴{,}۰۱)^۲ + ۲(۴{,}۰۱)}$ با استفاده از دیفرانسیل کدام است؟

۱) ۲٫۰۰۳ ۲) ۲٫۰۰۲ ۳) ۲٫۰۰۴ ۴) ۲٫۰۰۵

$$\longrightarrow f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۲x} \qquad f(۴) = \sqrt[۳]{۱۶-۸} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

$x = ۴$

$\Delta x = ۰{,}۰۱$

$$\Delta f = f(۴{,}۰۱) - f(۴) = f'(۴)\cdot \Delta x$$

$$\sqrt[۳]{(۴{,}۰۱)^۲ + ۲(۴{,}۰۱)} - ۲ \simeq$$

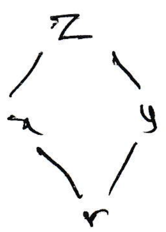
$$f'(x) = \frac{۲x - ۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۲x)^۲}} \xrightarrow{x=۴} f'(۴) = \frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[۳]{(۴{,}۰۱)^۲ + ۲(۴{,}۰۱)} - ۲ \simeq \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰۰} \longrightarrow$$ گزینه ۴ ۲٫۰۰۵

قاعده زنجیره‌ای :

اگر $Z = x^۲ - y^۲ + \frac{y^۲}{x}$ ، $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ باشد:

مشتق $\frac{\partial Z}{\partial r}$ در $r = ۲$, $\theta = \pi/۳$ کدام است؟



$$\frac{\partial Z}{\partial r}=\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=\left(2x-\frac{y^2}{x^2}\right)\cos\theta+\left(-2y+\frac{2y}{x}\right)\sin\theta$$

$$\begin{matrix} r=2 \\ \theta=\pi/3 \end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix} x=1 \\ y=\sqrt{3} \end{matrix}\longrightarrow\frac{\partial Z}{\partial r}=(2-3)\frac{1}{2}+\left(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

عمران: $Z=y\,f(x^2-y^2)$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد،

آنگاه $y^2\frac{\partial Z}{\partial x}+xy\frac{\partial Z}{\partial y}$ برابر چند است؟

$$Z=y\,\underbrace{f(x^2-y^2)}_{t=x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=2xy\,f'(x^2-y^2)\rightarrow y^2\frac{\partial Z}{\partial x}=2xy^3\,f'(x^2-y^2)\quad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2\,f'(x^2-y^2)$$

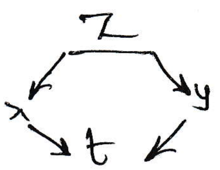
$$\rightarrow xy\frac{\partial Z}{\partial y}=xy\,f(x^2-y^2)-2xy^3\cdot f'(x^2-y^2)\quad (2)$$

$\xrightarrow{1,2}$ جواب $=xZ$

صنایع: اگر $Z=y^2\tan x$ ، $x=t^2uv$ ، $y=u+tv^2$

$\frac{\partial Z}{\partial t}$ برای $v=0$ ، $u=1$ ، $t=2$ کدام است؟

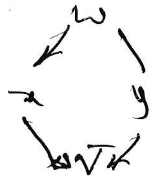
$$\frac{\partial Z}{\partial t}=\left((1+\tan^2x)\,y^2\right)(2tuv)+(2y\tan x)\cdot v^2$$



$$\rightarrow\frac{\partial Z}{\partial t}=0$$

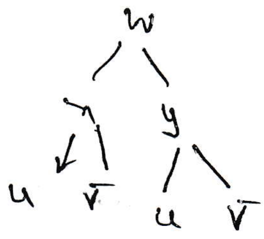
عمران: با فرض $w=f(x,y)$ که در آن $x=u+v$, $y=u-v$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = ?$$



1) $w_{xx} - w_{yy}$ 2) $w_{xx} + 2w_x - w_{yy}$

3) $w_{xx} + w_{yy}$ 4) $w_{xx} - 2w_x - w_{yy}$



$$\frac{\partial w}{\partial v} = w_x - w_y$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = (w_x)_u - (w_y)_u$$

$$= (w_{xx} + w_{xy}) - (w_{yx} + w_{yy}) = w_{xx} - w_{yy}$$

توجه: اگر $f(x,y)$ همگن از درجه n باشد آنگاه: $x f_x + y f_y = n f$

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = n(n-1) f$$

مشتق ضمنی:

$$F(x,y)=0 \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} \\[2ex] \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{F_y}{F_x} \end{cases}$$

$$F(x,y,z)=0 \longrightarrow \begin{cases} z_x = -\dfrac{F_x}{F_z} \\[2ex] z_y = -\dfrac{F_y}{F_z} \\[2ex] y_x = -\dfrac{F_x}{F_y} \end{cases}$$

$y_z = \ldots$ به طور مشابه

$x_y = \ldots$ 〃

$x_z = \ldots$ 〃

مشتق ضمنی

اثبات از طریق قاعده زنجیره‌ای

$$F(x,y)=0$$

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow & & \searrow \\ x & & y \\ \downarrow & & \swarrow \\ & x & \end{array}$$

$$F=0 \rightarrow F_x=0$$

$$\frac{dx}{dx}=1$$

$$F_x \times 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\cancel{x_x}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

از معادله $z^2+3xz+y^2=\ln(x^2+z)$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(2,3,-3)$ کدام است؟

$$\boxed{z_x = -\frac{F_x}{F_z}}$$

$$F = z^2+3xz+y^2-\ln(x^2+z)$$

$$z_x = -\frac{3z-\frac{2x}{x^2+z}}{2z+3x-\frac{1}{x^2+z}} \qquad z_x\Big|_{(2,3,-3)} = -\frac{-9-4}{-6+6-1} = -13$$

فرض کنید $2x^2+y^2+3z^2+xy-z-9=0$ مقدار z_{yx} در نقطه $(-2,1,1)$ چیست؟

$$\xrightarrow{\text{مشتق ضمنی}} z_y = -\frac{2y+x}{6z-1} \qquad \text{مشتق ضمنی} \quad z_x = -\frac{4x+y}{6z-1}$$

مشتق از x

$$z_{yx} = \frac{(1-6z)-6z_x(x+2y)}{(1-6z)^2}$$

$$\rightarrow z_{yx} = -1/5$$