



آزمایشگاه فیزیک پایه ۱



گزارش کار آزمایش شماره ۲

« فنر »

گروه ۲

محمد رضا مهدیه

تاریخ آزمایش : ۱۳۹۰/۷/۱۷

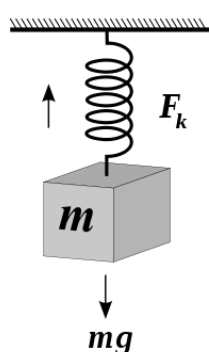
تاریخ تحویل گزارش کار : ۱۳۹۰/۷/۲۴

استاد: آقای (روزبه ترکی

تئوری آزمایش



از مکانیک تحلیلی می‌دانیم که هرگاه یک فنر تحت تأثیر یک نیروی کشش قرار گیرد، طول فنر اضافه می‌شود. این افزایش طولی تا جایی که از حد کشسانی تجاوز نکند، با نیروی کشش متناسب است. آنچه گفتیم بیان قانون



شکل (۱)

هوک است. یعنی اگر فنری را یک انتهای آن به جایی محکم شده است، اندکی بکشیم، در این صورت طول فنر افزایش پیدا می‌کند. اگر مقدار افزایش طول فنر را برابر x بگیریم، در این صورت بر اساس قانون هوک اگر نیروی کشش F باشد، باید $F = kx$ باشد که در آن k ثابت تناسبی است که ثابت فنر نامیده می‌شود.

از طرف دیگر، نیروی هوک در خلاف جهت افزایش طول فنر وارد می‌شود (این نیرو می‌خواهد فنر را به حالت اولیه خود برگرداند) بنابراین بهتر است که این رابطه را بصورت $F = -kx$ نشان دهیم. قابل توجه است که مقدار افزایش طول فنر نباید بیشتر

از حد کشسانی فنر باشد، چون در این صورت قانون هوک صادق نخواهد بود. اگر چنانچه بجای کشیدن فنر، آن را فشرده کنیم، باز نیروی هوک (F) وجود دارد و این بار، این نیرو سعی می‌کند که فنر را از حالت فشرده به حالت اولیه خود بازگرداند.

حال اگر به فنر وزنه mg را وصل کنیم (شکل (۱)) و رها سازیم حول وضع تعادل شروع به نوسان می‌کند. در صورتی که جرم فنر در برابر جرم وزنه ناچیز باشد داریم:

$$\begin{aligned} (۱) \quad & -kx = mg = m \ddot{x} \\ & m \ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x = A \sin \omega t \\ & -m \omega^2 \sin \omega t + k A \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

$$(۲) \quad \omega = (k/m)^{1/2}, \quad \omega = 2\pi/T \Rightarrow T = 2\pi(m/k)^{1/2}$$

و در صورتی که فنر نیز جرم قابل ملاحظه m_s داشته باشد داریم:

$$(۳) \quad T = 2\pi(m_w + f m_s/k)^{1/2}$$

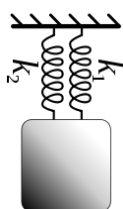
که $f m_s$ برابر جرم موثر فنر که برابر $1/3 m_s$ می‌باشد. بهم بستن فنرها:

سری: دو فنر با ضرایب k_1, k_2 را در نظر بگیرید که به صورت سری به هم متصل اند (شکل (۲)) سپس نیروی F به وارد شده و فنر اول به اندازه X_1 و فنر دوم به اندازه X_2 افزایش می‌یابد پس داریم:

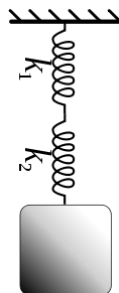
$$X = X_1 + X_2$$

حال طبق رابطه (۱) داریم:

$$mg/k_t = (mg/k_1) + (mg/k_2) \Rightarrow 1/k_t = 1/k_1 + 1/k_2$$



شکل (۳)



شکل (۲)

$$(۴) \quad \Rightarrow k_t = (k_1 k_r) / (k_1 + k_r) \quad \text{برای دو فنر داریم}$$

موازی: همان دو فنر قبل را متصور شوید ولی این بار با حالت موازی (شکل (۳)). حال داریم:

$$(۵) \quad F_T = F_1 + F_r \Rightarrow k_t x = k_1 x + k_r x \Rightarrow k_t = k_1 + k_r$$

روش انجام آزمایش:

(۱) و (۲) ابتدا هر یکی از فنرها را به گیره متصل کرده و شاخص اندازه گیری در انتهای فنر قرار داده و مقدار آن خوانده شد. (هر دو فنر کاملاً شبیه هستند). حال وزنه 200gr را به فنر آویزان کرده شد و شاخص پایینی را به انتهای وزنه برده و تفاضل مقدار اولی در این مقدار (تغییرات طول فنر) را در جدول (۲) ثبت شد. سپس وزنه را به اندازه 3cm به پایین کشیده ورها کرده و همزمان با رها سازی کرنومتر نیز به کار انداخته شد و زمان 50 نوسان در جدول (۱) ثبت شد. تمام این موارد هر کدام به طور مجزا برای وزنه های $300, 400, 500$ گرمی نیز انجام و در جداول (۱) و (۲) ثبت شد.

(۳) در این قسمت دو فنر یک بار به صورت سری (شکل (۲)) و یک بار به صورت موازی (شکل (۳)) بسته شد و در هر مرحله وزنه مشخصی به آنها متصل واز دیاد طول فنرها در در جدول (۳) یادداشت شد. که به کمک رابطه (۱) k' فنر معادل حساب شد ودر جدول (۳) یادداشت شد.

جداول:

$M[\text{kg}r]$	$\Delta M[\text{gr}]$	تعداد نوسان n	مدت نوسان $t[\text{s}]$	$\Delta t[\text{s}]$	$T[\text{s}] = t/n$	$\Delta T[\text{s}]$	$T_r[\text{s}^r]$	$\Delta(T_r)$ $[\text{s}^r]$
۰.۲	۱۰	۵۰	۲۱	۱	.۴۲	۰.۰۲	.۱۷۶۴	۰.۰۱۶۸
۰.۳	۱۵	۵۰	۲۶	۱	.۵۲	۰.۰۲	.۲۷۰۴	۰.۰۲۰۸
۰.۴	۲۰	۵۰	۳۰	۱	.۶	۰.۰۲	.۳۶	۰.۰۲۴۰
۰.۵	۲۵	۵۰	۳۳	۱	.۶۶	۰.۰۲	.۴۳۵۶	۰.۰۲۶۴

جدول (۱) تعیین K با استفاده از رابطه (۲)

$M (\text{kg}r)$ جرم وزنه	$\Delta M (\text{gr})$	$\Delta x (\text{m})$ افزایش طول	$\Delta(\Delta x) (\text{m})$
۰.۲	۱۰	۰.۰۳۹	۰.۰۰۲
۰.۳	۱۵	۰.۰۶	۰.۰۰۲
۰.۴	۲۰	۰.۰۸	۰.۰۰۲
۰.۵	۲۵	۰.۱۰۲	۰.۰۰۲

جدول (۲) - تعیین g با استفاده از رابطه $F = -k\Delta x$

	$M (\text{kg}r)$	$\Delta x (\text{m})$	k'	k''	$\Delta k'/k'$
سری	۰.۱	.۰۴۱	۲۳.۳۶۵	۲۲.۸۵	۰.۲۲۳
موازی	۰.۳	.۰۳	۹۸.۸	۹۱.۲۶	۰.۲۴۱

جدول (۳) - ترکیب فنرها

محاسبات و خطاهای خواسته شده:

جدول (۱)

همانطور که در دستور کار خواسته شده خطاهای جرم وزنه ها را ۵٪ به صورت زیر حساب کرده و در جدول (۱) انتقال می دهیم:

$$\Delta m_1 = 200 \text{ gr} \times \frac{5}{100} = 10 \text{ gr} \quad \Delta m_2 = 300 \text{ gr} \times \frac{5}{100} = 15 \text{ gr}$$

$$\Delta m_3 = 400 \text{ gr} \times \frac{5}{100} = 20 \text{ gr} \quad \Delta m_4 = 500 \text{ gr} \times \frac{5}{100} = 25 \text{ gr}$$

دستگاه زمان در این آزمایش دارای خطای مقابل بود: $\Delta t = 1 \text{ s}$ که برابر دقت اندازه گیری این دستگاه زمان سنج بود.

برای دست آوردن پریود (دوره تناوب) کافی است زمان نواسانها را بر تعداد نوسان (همان ۵۰) تقسیم کنیم. به عبارتی داریم:

$$T = \frac{t}{n} \quad T_1 = \frac{21}{50} = 0.42 \text{ s} \quad T_2 = \frac{26}{50} = 0.52 \text{ s} \quad T_3 = \frac{30}{50} = 0.6 \text{ s} \quad T_4 = \frac{33}{50} = 0.66 \text{ s}$$

برای محاسبه ی خطای آن کافی است از همان عبارت دیفرانسیل گرفت که داریم:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{\text{میگیریم}} \ln T = \ln t - \ln n \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \frac{dT}{T} = \frac{dt}{t} - \frac{dn}{n} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta t}{t} T$$

که برای هر قسمت داریم:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{21} (0.42) = 0.02 \text{ s} ; \Delta T_2 = \frac{1}{26} (0.52) = 0.02 \text{ s} ; \Delta T_3 = \frac{1}{30} (0.6) = 0.02 \text{ s} ; \Delta T_4 = \frac{1}{33} (0.66) = 0.02 \text{ s}$$

برای بدست آوردن T^2 نیز داریم:

$$T^2 = (T)^2 \quad T_1^2 = 0.1764 \text{ s}^2 ; T_2^2 = 0.2704 \text{ s}^2 ; T_3^2 = 0.36 \text{ s}^2 ; T_4^2 = 0.4356 \text{ s}^2$$

برای بدست آوردن خطای T^2 داریم:

$$T^2 = (T)^2 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dT^2 = 2TdT \Rightarrow \Delta(T)^2 = 2T\Delta T$$

$$\Delta(T)_1^2 = 2(0.42)(0.02) = 0.0168 \text{ s}^2 ; \quad \Delta(T)_2^2 = 2(0.52)(0.02) = 0.0208 \text{ s}^2$$

$$\Delta(T)_3^2 = 2(0.6)(0.02) = 0.024 \text{ s}^2 ; \quad \Delta(T)_4^2 = 2(0.66)(0.02) = 0.0264 \text{ s}^2$$

حال برای بدست آوردن k از روی رابطه (۲) و با کمک نمودار (۱) در ضمیمه داریم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{M}{K} \Rightarrow K = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}$$

همانطور در قسمت دوم رابطه بالا مشهود است که شیب نمودار T^2 بر حسب M مقدار ثابتی است که این مقدار برابر $\frac{4\pi^2}{K}$ کافی است شیب نمودار را بدست آورده و برابر این مقدار ثابت قرار دهیم و سپس K را محاسبه کنیم. پس اکنون داریم:

$$\text{بهترین شیب} \quad \frac{M}{T^2} = \frac{0.5 - 0.2}{0.4356 - 0.1764} = 1.157 \text{ kg/s}^2 \Rightarrow k = 4\pi^2 \times 1.157 = 45.63 \text{ kg/s}^2$$

$$\begin{aligned} \text{بیشترین شیب} \quad \frac{M}{T^2} &= \frac{0.4875 - 0.205}{0.4488 - 0.1680} = 1.006 \text{ kgr/s}^2 \\ \text{کمترین شیب} \quad \frac{M}{T^2} &= \frac{0.5125 - 0.195}{0.4224 - 0.1848} = 1.336 \text{ kgr/s}^2 \end{aligned}$$

حال خطای شیب نمودار برابر است با بیشترین اختلاف شیب از بهترین شیب:

$$\delta_1 \left(\frac{M}{T^2} \right) = \left| \text{کمترین شیب} - \text{بهترین شیب} \right| = |1.157 - 1.336| = 0.179$$

$$\delta_2 \left(\frac{M}{T^2} \right) = \left| \text{بیشترین شیب} - \text{بهترین شیب} \right| = |1.157 - 1.006| = 0.151$$

پس خطای شیب نمودار برابر است با:

$$\Delta \left(\frac{M}{T^2} \right) = 0.179$$

اکنون می توانیم خطای مطلق K را نیز حساب کنیم:

$$K = 4\pi^2 \frac{M}{T^2} \Rightarrow \Delta K = 4\pi^2 \Delta \left(\frac{M}{T^2} \right) \Rightarrow \Delta K = 4\pi^2 \times 0.179 = 7.059 \text{ kgr/s}^2$$

محاسبه جرم فنر و خطای آن:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \rightarrow \frac{M}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2} = \tan \alpha = \text{شیب خط}$$

$$\begin{cases} T^2 = 4\pi^2 \frac{M}{K} \\ M = m_w + fm_s \end{cases} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{m_w + fm_s}{K} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{m_w}{K} + 4\pi^2 \frac{fm_s}{K}$$

حال برای نقطه به جرم 0.2 gr که مقدار T^2 برابر است با 0.1764 s^2 و جایگزینی در روابط بال مقدار جرم فنر محاسبه می شود:

$$0.1764 = 4\pi^2 \frac{0.2 + fm_s}{45.63} \Rightarrow fm_s = 0.004 \text{ kgr} \Rightarrow m_s = 3fm_s = 0.012 \text{ kg}$$

با توجه به موارد بالا منحنی رسم شده به کمک T^2 و M یک خط راست است با ضریب زاویه $\frac{4\pi^2}{K}$ و عرض از

مبدأ $4\pi^2 \frac{fm_s}{K}$ می باشد. چنانچه خطای شیب برای نمودار T^2 بر حسب M برابر $\delta \alpha$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi \pi^2}{K} \rightarrow K = \frac{\xi \pi^2}{\alpha} \Rightarrow K \frac{\delta K}{K} = \frac{\xi \pi^2}{\alpha} \frac{\delta \alpha}{\alpha} \Rightarrow \delta K = \frac{\xi \pi^2}{\alpha^2} \delta \alpha \\ \frac{\delta \alpha}{\alpha} = \frac{\delta K}{K} \end{cases}$$

اگر خطای عرض از مبدأ δb حال خطای جرم از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$b = \frac{4\pi^2}{k} fm_s \rightarrow b = \alpha \cdot fm_s \Rightarrow fm_s = \frac{b}{\alpha} \Rightarrow \delta fm_s = \frac{\alpha \cdot \delta b + b \cdot \delta \alpha}{\alpha^2}$$

از طرفی از قبل خطای شیب را حساب کردیم زیرا خطای شیب همان خطای M/T^2 پس:

$$\delta \alpha = 0.179$$

$$b_{\text{بیشترین}} = 1.157 \times 0.004 = 0.004628 ; b_{\text{کمترین}} = 1.336 \times 0.004 = 0.005344 ; b_{\text{بیشترین}} = 1.006 \times 0.004 = 0.004024$$

$$\delta b = 0.0013 \Rightarrow \delta fm_s = \frac{1.175 \times 0.0013 + 1.157 \times 0.179}{1.175^2} = 0.150$$

جدول (۲)

خطای دستگاه اندازه گیری طول برابر دقت اندازه گیری آن است که برابر ۱ mm است.

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta(\Delta x) = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1mm + 1mm = 2mm$$

در اینجا به کمک رابطه $F=Kx$ و $F=mg$ و همچنین مقدار k بدست آمده از مرحله قبل می‌خواهیم مقدار g را به

کمک نمودار (۲) در ضمیمه بدست آوریم (نکته: مقدار x در فرمول منظور همان تغییرات طول است):

$$kx = mg \Rightarrow g = \frac{kx}{m} \quad \text{و} \quad k = 45.63 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \Rightarrow g = 45.63 \frac{\Delta x}{m}$$

$$1) \text{ از روی بهترین شیب } \frac{\Delta x}{m} = \frac{0.102 - 0.039}{0.5 - 0.2} = 0.21 \text{ m/kg}$$

$$2) \text{ از روی کمترین شیب } \frac{\Delta x}{m} = \frac{0.100 - 0.041}{0.5125 - 0.195} = 0.185 \text{ m/kg}$$

$$3) \text{ از روی بیشترین شیب } \frac{\Delta x}{m} = \frac{0.104 - 0.037}{0.4875 - 0.205} = 0.237 \text{ m/kg}$$

$$g_1 = 45.63 \times 0.21 = 9.5823 \text{ m/s}^2$$

$$g_2 = 45.63 \times 0.185 = 8.4415 \text{ m/s}^2$$

$$g_3 = 45.63 \times 0.237 = 10.8143 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{3} = \frac{9.58 + 8.44 + 10.81}{3} = 9.61 \text{ m/s}^2$$

اکنون خطای مطلق g را نیز حساب می‌کنیم:

$$\Delta g = \max\{|9.61 - 9.58|, |9.61 - 8.44|, |9.61 - 10.81|\} = \max\{0.03, 1.17, 1.2\} = 1.2$$

جدول (۳)

محاسبه k از رابطه $kx=mg$ را محاسبه خواهیم کرد با توجه به اینکه بهترین g برابر با 9.58 m/s^2 بدست آمد.

$$k_{\text{سری}} = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{0.1 \times 9.58}{0.041} = 23.365 \text{ kg/s}^2$$

$$k_{\text{موازی}} = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{0.3 \times 9.58}{0.03} = 95.8 \text{ kg/s}^2$$

محاسبه k'' بر آیند دو فنر به کمک رابطه (۴) و (۵) در تئوری گزارش و داده بدست برای k (یک فنر) در قسمت

اول. که مقدار بدست آمده برابر 45.63 kg/s^2 بود.

$$k''_{\text{برای حالت سری}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{45.63 \times 45.63}{2 \times 45.63} = 22.815 \text{ kg/s}^2$$

$$k''_{\text{برای حالت موازی}} = k_1 + k_2 = 2 \times 45.63 = 91.26 \text{ kg/s}^2$$

محاسبه خطای نسبی k' و k'' :

$$k' = \frac{mg}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta k'}{k'} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta k'}{k'} = \frac{0.005}{0.1} + \frac{1.2}{9.58} + \frac{0.002}{0.041} = 0.223 \quad \text{سری}$$

$$\frac{\Delta k'}{k'} = \frac{0.015}{0.3} + \frac{1.2}{9.58} + \frac{0.002}{0.03} = 0.241 \quad \text{موازی}$$

$$k'' = k_1 + k_2 \Rightarrow \Delta k'' = \Delta k_1 + \Delta k_2$$

$$k''_{\text{سری}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow \frac{\Delta k''}{k''} = \frac{\Delta k_1}{k_1} + \frac{\Delta k_2}{k_2} - \frac{d(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2} \Rightarrow \frac{\Delta k''}{k''} = \frac{\Delta k_1}{k_1} + \frac{\Delta k_2}{k_2} + \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2}{k_1 + k_2}$$

پرسشها:

(۱) قانون هوک را بیان کنید؟

اگر فنری را با اعمال نیرویی بکشیم طول آن زیاد تر می شود و هر چه به مقدار نیرو افزوده شود به همان نسبت افزایش طول فنر بیشتر می شود البته بزرگی نیرو نباید از حد معینی تجاوز کند. این نتیجه به قانون هوک معروف است. مطابق با قانون هوک، مقدار نیرویی که باعث افزایش طول فنر می شود از رابطه زیر به دست می آید. $F = -kx$

(۲) کشسانی یا الاستیته یعنی چه و حد کشسانی یک فنر چیست؟

به جسمی که بر اثر کشیده شدن و یا فشرده شدن تغییر شکل داده و بتوان دوباره آن را به حالت اولیه اش برگرداند، جسم کشسان گفته می شود. که برای هر جسمی مقدار مشخصی که اگر بیشتر از حد معین تغییر شکل دهد کشسانی نیز به قوت خود باقی نمی ماند. همچنین برای اجسام کشسان ثابتی تعیین می شود که مشخص کننده میزان قدرت اجسام برای کشیده شدن و یا فشرده شدن آن است. (هر چه مقدار ثابت بیشتر قدرت کشش آن هم بیشتر)

(۳) انرژی پتانسیل و جنبشی در فنر چگونه به یکدیگر تبدیل می شوند شرح دهید. در چه وضعیتی حداقل مقدار خود را دارا می باشند؟

فنر در حالتی که به آن وزنه ای متصل نباشد و یا فشرده یا کشیده نشده باشد یا به طور کلی در حال تعادل کامل باشد، هیچ گونه انرژی ندارد ولی هرگاه فشرده یا کشیده شود انرژی به صورت انرژی پتانسیل کشسانی در آن ذخیره شده که با ره سازی فنر شروع به آزاد سازی آن می کند اگر فنر در یکی از این دو حالت فشرده یا کشیده رها شود انرژی پتانسیل آن به صورت جنبشی نمایان می شود. پس هر فنر به طور کلی شامل دو نوع انرژی می باشد. حال وقتی فنر کاملاً کشیده (تا مدی که فاصییت خود را از دست ندهد) یا تا مدی فشرده شود که دیگر قابلیت فشرده سازی موجود نباشد در فنر بیشترین انرژی به صورت پتانسیل کشسانی موجود خواهد بود که در حالت عمودی و زمانی که جمی به آن متصل باشد، این مکان ها برابر بالاترین قسمتی وزنه بالا می آید و پایین ترین قسمتی که پایین می آید بالاترین انرژی پتانسیل را داریم. حال هر کجا انرژی پتانسیل بیشترین باشد مقدار انرژی جنبشی کمترین است. و محل تعادل که برابر نصف فاصله $\min$ و $\max$ است انرژی جنبشی بیشترین مقدار است که در این جا پتانسیل کمترین است.

۴) چگونه می توان جرم نامعلومی را به روش قسمت (۱) تعیین کرد؟

ابتدا با کمک یک وزنه معلوم با استفاده از روش اول k فنر را بدست می آوریم سپس وزنه با جرم مجهول را آویزان کرده و همان مراحل را طی می کنیم ولی در اینجا مجهول جرم می باشد و با داشتن ثابت (زمان و تغییرات مسافت) می توان جرم مجهول را بدست آورد.

۵) اگر پریود فنر با دقت ۱٪ اندازه گیری شود در محاسبه ضریب ثابت فنر (K) چند درصد خطا وارد می

شود؟

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{M}{K} \Rightarrow \ln T^2 = \ln M + \ln K \Rightarrow \frac{2TdT}{T^2} = \frac{dM}{M} + \frac{dK}{K} \Rightarrow \frac{2\Delta T}{T} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta K}{K}$$

داریم:

$$\frac{\Delta T}{T} = 1\% , \frac{\Delta M}{M} = 5\% \Rightarrow \frac{\Delta K}{K} = 5\% + 2 \times 1\% = 7\%$$

۶) اگر خطا در اندازه گیری جرم ۱٪ باشد.

الف) با فرض اینکه مقدار T در دست باشد، در محاسبه k چند درصد خطا وارد می شود؟

ب) با فرض این که مقدار k در دست، در محاسبه T چند درصد خطا وارد می شود؟

تا رابطه زیر را در سوال قبل بدست آوردیم مال داریم:

$$\frac{2\Delta T}{T} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta K}{K}$$

الف) $\frac{\Delta K}{K} = 1\% + 0 = 1\%$

ب) $\frac{2\Delta T}{T} = 1\% + 0 = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = 0.5\%$