

۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\begin{aligned} 4 - x^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow D_f = [-2, 2] \\ D_g &= \{0, 1, 2, 3, 5\} \\ D_{\frac{f}{g}} &= (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{0, 1, 2\} - \{2\} = \{0, 1\} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{1} = 2 \\ \frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \end{cases} &\Rightarrow \frac{f}{g} = \{(0, 2), (1, -\sqrt{3})\} \end{aligned}$$

۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} D_f = (-3, +\infty) \\ D_g = (-3, +\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = (-3, +\infty) \\ g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (-3, +\infty) - \{1\} \end{aligned}$$

۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

نکته: برای دو تابع f و g داریم:

ابتدا دامنه دو تابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_f : 16 - x^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \\ D_g : x - 2 \neq 0 &\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ D_{\frac{f}{g}} &= [-4, 4] - \{2, -1\} \end{aligned}$$

تنها ریشه معادله $g(x) = 0$ عدد $x = -1$ می‌باشد، پس مطابق نکته می‌توان نوشت:

در این مجموعه، ۷ عدد صحیح $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ وجود دارند.

۴- پاسخ: گزینه ۴

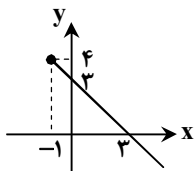
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

با توجه به اینکه $D_f = D_g = [-1, +\infty)$, پس $D_{f \times g} = [-1, +\infty)$ همچنین داریم:

$$(f \times g)(x) = (2 + \sqrt{x+1})(2 - \sqrt{x+1}) = 4 - (x+1) = 3 - x$$

پس نمودار این تابع در دامنه $[-1, +\infty)$ به صورت مقابل است:



۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \{1, 2, 3, 4\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{3\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_{g-f} = \{1, 2, 4\}$$

$$(g-f)(1) = g(1) - f(1) = \frac{1}{-2} - (-2) = \frac{3}{2}$$

$$(g-f)(2) = g(2) - f(2) = \frac{2}{-1} - (3) = -5$$

$$(g-f)(4) = g(4) - f(4) = 4 - (-1) = 5$$

بنابراین:

$$g-f = \left\{ \left(1, \frac{3}{2} \right), (2, -5), (4, 5) \right\}$$

۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

ابتدا دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = (-\infty, 1], \quad g(x) \neq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{1-x} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} \neq 1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, 1] - \{0\}$$

ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \times \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = 1+\sqrt{1-x}$$

نمودار این تابع با دامنه به‌دست آمده، در گزینه ۲ به‌درستی رسم شده است.

۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: عمل ضرب دو تابع f و g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad , \quad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

دامنه هر دو تابع f و g برابر $[0, +\infty)$ است، پس $D_{f \times g} = [0, +\infty)$. ضابطه تابع $f.g$ برابر است با:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = 1-x$$

بنابراین تابع $f.g$ یک تابع خطی با ضابطه $y = 1-x$ و دامنه $[0, +\infty)$ است که نمودار آن در گزینه ۲ به‌درستی رسم شده است.

۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: معادله هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است.

ضابطه تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار این تابع از نقاط $(0, -1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقاط در ضابطه تابع صدق می‌کند.

$$\begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow b = -1 \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \xrightarrow{b=-1} a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x - 1$$

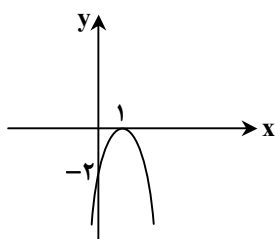
ضابطه تابع خطی g را به صورت $g(x) = mx + h$ در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار این تابع از نقاط $(0, 2)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقاط در ضابطه تابع صدق می‌کند.

$$\begin{cases} g(0) = 2 \Rightarrow h = 2 \\ g(1) = 0 \Rightarrow m + h = 0 \xrightarrow{h=2} m = -2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -2x + 2$$

بنابراین:

$$y = (fg)(x) = (x-1)(-2x+2) = -2(x-1)^2$$

اکنون نمودار این تابع را به کمک رأس و بعضی از نقاط آن رسم می‌کنیم.



بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$D_{g/f} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$\begin{aligned} D_f &= [-1, 2] \\ D_g &= [-1, 1] \end{aligned} \Rightarrow D_f \cap D_g = [-1, 1]$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x^2=0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{g/f} = [-1, 1] - \{-1, 0\} = (-1, 1) - \{0\}$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\begin{aligned} f &= \{(3, -2), (1, 2), (2, -1)\} \rightarrow 3f = \{(3, -6), (1, 6), (2, -3)\} \\ g &= \{(1, -2), (3, 5), (-2, -1)\} \rightarrow 2g = \{(1, -4), (3, 10), (-2, -2)\} \\ &\rightarrow 3f - 2g = \{(1, 12), (3, -16)\} \end{aligned}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$D_f : 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow D_f = (-2, 2)$$

$$D_g : x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log(4 - x^2) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = [1, 2) - \{\sqrt{3}\}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

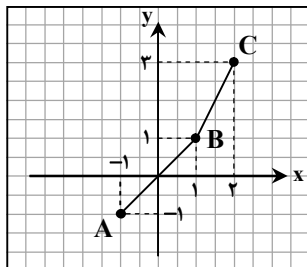
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، دامنه تابع $f + g$ به صورت $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ و ضابطه آن به صورت $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ است.

ابتدا با توجه به نکته، دامنه تابع $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$D_{f+g} = (-\infty, 2] \cap [-1, +\infty) = [-1, 2]$$

در این دامنه با توجه به خطی بودن هر دو تابع، جمع آنها نیز یک تابع خطی است، پس کافی است نقاطی از تابع را مشخص کنیم و آنها را به هم وصل کنیم.



$$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(-1) = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ g(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(1) = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ g(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(2) = 3 \Rightarrow C(2, 3)$$

بنابراین گزینه «۲» پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، توابع $f + g$ و $f - g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

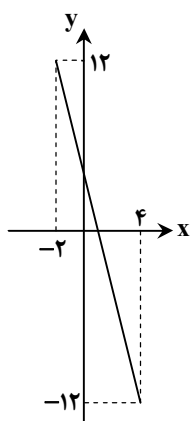
ابتدا با توجه به نمودار، ضابطه f و g را به دست می‌آوریم. هر دو تابع خطی هستند. پس داریم:

$$f(x) = -x + 4$$

$$g(x) = 3x$$

$$(f - g)(x) = -x + 4 - 3x = 4 - 4x$$

تابع را در دامنه خواسته شده رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، برد این تابع $[-12, 12]$ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$D_{\left(\frac{f+g}{3f}\right)(x)} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\} = \{2, 7, 3\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{f+g}{3f}\right)(2) &= \frac{-1+7}{-3} = -2 \\ \left(\frac{f+g}{3f}\right)(7) &= \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12} \\ \left(\frac{f+g}{3f}\right)(3) &= \frac{5+8}{15} = \frac{13}{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{f+g}{3f}\right)(x) = -2 \Rightarrow x = 2$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$D\left(\frac{f-g}{g}\right) = D_{(f-g)} \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = D_f \cap D_g$$

$$D_f = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$D_g : \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_g = [0, +\infty) - \{1\}$$

$$D\left(\frac{f-g}{g}\right) = D_f \cap D_g = \{0, 2\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{f-g}{g}\right)(0) &= \frac{1-(-1)}{-1} = -2 \\ \left(\frac{f-g}{g}\right)(2) &= \frac{-2-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{-2\sqrt{2}+2-1}{1} = 1-2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R\left(\frac{f-g}{g}\right) = \{-2, 1-2\sqrt{2}\}$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، توابع $f+g$ و $f-g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) & D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) & D_{f-g} &= D_f \cap D_g \end{aligned}$$

ضابطه f و $g-f$ را به دست می‌آوریم:

$$g-f : \begin{cases} A(3, 0) \\ B(0, 6) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y = -2x + 6 \Rightarrow (g-f)(x) = -2x + 6$$

$$f : \begin{cases} B(0, 6) \\ C(-2, 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y = 3x + 6 \Rightarrow f(x) = 3x + 6$$

اگر دو ضابطه بالا را جمع کنیم، ضابطه g به دست می‌آید:

$$g(x) = ((g-f) + f)(x) = -2x + 6 + 3x + 6 = x + 12 \Rightarrow (f+g)(x) = (3x+6) + (x+12) = 4x + 18$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۳، فصل ۲ ◀ درس ۴)

$f + g$ زمانی یک به یک است که دو مؤلفه‌ی اول متفاوت مؤلفه‌های دوم یکسان نداشته باشند.

اکنون $f + g$ را در همه‌ی گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

یک به یک نیست $\Rightarrow f + g = \{(2,6), (3,6)\}$: گزینه ۱

یک به یک نیست $\Rightarrow f + g = \{(2,2), (3,2), (4,2)\}$: گزینه ۲

یک به یک نیست $\Rightarrow f + g = \{(2,3), (4,3)\}$: گزینه ۳

یک به یک است $\Rightarrow f + g = \{(2,6), (3,8), (4,2)\}$: گزینه ۴

۱۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: هر تابع به فرم $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامیم.

ابتدا ضابطه توابع خطی f و g را به دست می‌آوریم. برای هر دو تابع خطی، شیب و عرض از مبدأ را داریم، پس ضابطه آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{b}{a}x + b \\ g(x) = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow f + g = \left(2 - \frac{b}{a}\right)x + b - 2$$

تابع $f + g$ همانی است. پس:

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \\ 2 - \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = \frac{f(x) = -x + 2}{g(x) = 2x - 2} \quad (-3 + 2) - (2 \times 2 - 2) = -1 - 4 = -5$$