به نام خدای مهربان

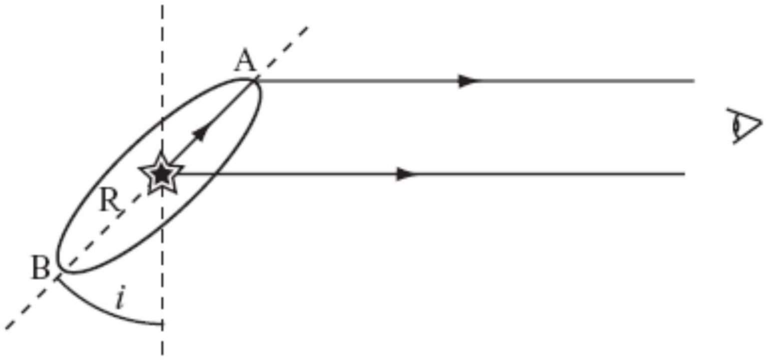
پاسخ سوالات مرحله 2 هشتمین دوره المپیاد نجوم

توجه: این سوالات به هیچ وجه پاسخ های نهایی نیست لذا سندی بر صحت و یا عدم صحت پاسخ سوالات شما نخواهد بود و کلیه حقوق مربوط به نشر و یا کپی محفوظ می باشد.

به دلیل در دست نبودن سوالات احتمال وجود اشتباه هست در صورت مشاهده موردی سریعا اطلاع دهید تا مورد بازبینی قرار گیرد.

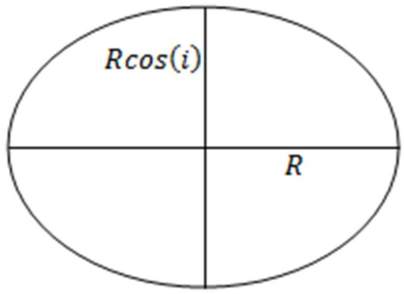
تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

1)



الف) در تصویر مقدار نیم قطر اطول بیضی همان شعاع دایره خواهد بود ولی مقدار نیم قطر اقصر R، در کسینوس i ضرب خواهد شد.

پس برای خروج از مرکز داریم:



$$e = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \sin(i) \qquad , \quad e = 0.73$$

$$\boxed{i = 47}$$

ب و ج) برای بدست آوردن تاخیر زمانی فقط مسافت نور مدنظر است:

$$t_1 = \frac{R+d-Rsini}{c} - \frac{d}{c} \quad , \quad \boxed{t_1 = \frac{R}{c}(1 - sini)}$$

$$t_2 = \frac{R+d+Rsini}{c} - \frac{d}{c} \quad , \quad \boxed{t_2 = \frac{R}{c}(1 + sini)}$$

د) $t_1 = 83 \mp 6 \quad , \quad t_2 = 395 \mp 24$

$$R = \frac{t_2 + t_1}{2} c = 6.2 \times 10^{15} (m) = 239 \text{ روز نوری}$$

$$\theta = \frac{2R}{d} = 1.62'' \quad , \quad \boxed{d = 1.58 \times 10^{21} (m)}$$

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

$$\boxed{d = 51(kpc)}$$

ه) به دلیل در دست نبودن کامل سوال آماده نیست.

2)

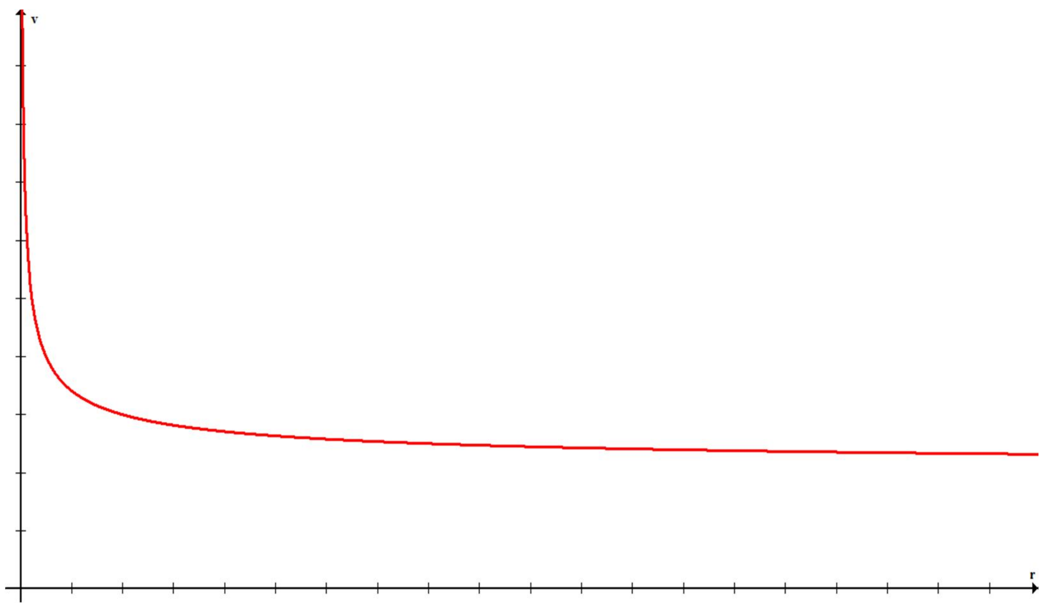
$$M(r) = m_c + \int 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \qquad \rho(r) = \rho_0 \frac{a^2}{r^2}$$

$$M(r) = m_c + 4\pi \rho_0 a^2 r$$

برای مدار های دایروی:

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \text{و} \quad \boxed{v = \sqrt{4\pi G \rho_0 a^2 + \frac{Gm_c}{r}}}$$

نمودار



ب) $r = 1pc \quad , \quad v = 100 \quad , \quad a = 1kpc \quad , \quad m_c = 10^6 m_{sun}$

$$v = \sqrt{4\pi G \rho_0 a^2 + \frac{Gm_c}{r}} \qquad , \quad \rho_0 = 7.09 \times 10^{-21} \left(\frac{kg}{m^3}\right) = \boxed{0.1 (\frac{M_{sun}}{pc^3})}$$

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

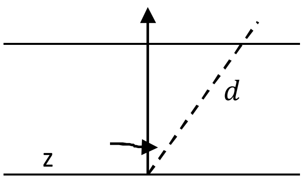
ج)
$$\rho(\mathrm{r}) = 0.01\rho_0 = \rho_0 \frac{a^2}{r^2}$$

$$r = 10a = 10kpc$$

$$v_\infty = \sqrt{8\pi G\rho_0 a^2 + \frac{2Gm_c}{r}} = 106.67$$

البته اگر منظور از لبه جایی باشد که فاصله به بینهایت میل کند سرعت فرار برابر 92.86 می شود(سوال در دسترس نیست)

3)



$(U-B)$ و $(\mathrm{U}-\mathrm{V})$ و $(B-V)$ صافی هایی هستند که نور با طول موج های خاص توسطشان دیده می شود. طول موج مرکزی V و B و U به ترتیب 550 و 440 و 386 نانو متر و پهنای آن ها 32 و 68 و 48 نانومتر است .

الف) اگر ضخامت جو را d در نظر بگیریم تابعیت شار f گذشته از جو این گونه است : $f = f_0 e^{-\kappa_\lambda d}$. رابطه ی بین قدر مطلق در خارج از جو زمین و درون آن را با در نظر گرفتن ضخامت جو بیابید .

ب) اگر مقدار $U-B$ برای فاصله ی سمت الراسی 0 برابر 0.8 و برای فاصله ی سمت الراسی 60 برابر با 0.6 ، و $\mathrm{B}-\mathrm{V}$ برای فاصله ی سمت الراسی 0 برابر 0.6- وبرای فاصله سرسویی 60 برابر با 0.7- باشد ، مقدار اندیس رنگی $(B-V)_0$ و $(U-B)_0$ در خارج از جو را بیابید .

پ) اگر مقدار قدر ظاهری U برابر با 6 باشد ، قدر های B و V را به دست آورید .

ت) قدر بلومتریک قدر حاصل از شار V و B و U می باشد . برای ستاره ی مورد نظر با قدر $M_v = 4$ درخشندگی مطلق این ستاره را به دست آورید .

پاسخ ها:

الف) وقتی ما ستاره ای با درخشندگی L_0 را در داخل جو می بینیم ، تصور می کنیم که ستاره ایست کم نور تر و با درخشندگی L . اما چون فاصله ی این دو ستاره را برابر می پنداریم پس نسبت روشنایی ها برابر با نسبت شار ها خواهد بود . پس :

$$M - M_0 = -2.5\log\left(\frac{L}{L_0}\right) = -2.5\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$= -2.5\log\left(\mathrm{e}^{-\kappa_\lambda \mathrm{d}}\right) = +2.5\log e\ d\times\kappa_\lambda \quad \rightarrow \boxed{M = M_0 + 1.086 d\kappa_\lambda}$$

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

دقت کنید که صورت سوال اندکی مبهم است و مشخص نکرده که رابطه ی بالا باید با در نظر گرفتن زاویه سرسویی باشد یا نه . به هر ترتیب اگر چنین باشد به جای d باید d_z گذاشت که در قسمت بعد معرفی می شود.

ب) برای محاسبه ی فاصله ی طی شده در جو در فاصله ی سرسویی z با توجه به شکل می توان گفت : $d_z = d \sec z$

$$\left.\begin{aligned} B - B_0 &= -2.5 \log\left(\frac{f_B}{f_{B_0}}\right) = +1.086\, d_z \kappa_B \\ V - V_0 &= -2.5 \log\left(\frac{f_V}{f_{V_0}}\right) = +1.086 d_z \kappa_V \end{aligned}\right\} \xrightarrow{-}$$

$$(B - V) - (B - V)_0 = 1.086\, d\, (\sec z)\, (\kappa_B - \kappa_V)$$

با نوشتن رابطه ی بالا برای فاصله سرسویی های **0** و **60** درجه و حذف ثوابت مربوط به کدری و d با تقسیم دو عبارت به هم خواهیم داشت :

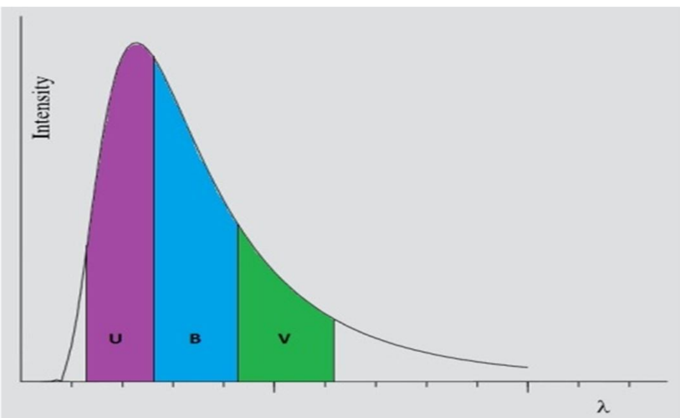
$$\frac{(B - V)_{z=0} - (B - V)_0}{(B - V)_{z=60} - (B - V)_0} = \frac{\sec 0}{\sec 60} = 0.5 \quad \rightarrow \quad \boxed{(B - V)_0 = -0.5}$$

با انجام همین عملیات برای U-B خواهیم داشت : $(U - B)_0 = 1$

پ) دقت کنید چون در سوال ذکر نکرده که این قدرها را در چه فاصله ی سرسویی می خواهیم ، پس احتمالا منظور قدر در خارج از جو بوده است . با توجه به قسمت های قبلی داریم :

$\boxed{B_0 = 5}$, $\boxed{V_0 = 5.5}$

ت) سوال درخشندگی بلومتریک را ناشی از درخشندگی ها در فیلتر های ماورای بنفش ، آبی و مریی تعریف کرده است . بنابراین برای یافتن روشنایی بلومتریک روشنایی این سه فیلتر را با هم جمع می کنیم .به شکل توجه کنید .



تهیه و تنظیم: عطا مرادی

ابتدا قدر ظاهری در آبی را پیدا می کنیم . با توجه به $(B\text{-}V)_0$ داریم :

$$B_0 = 3.5$$

همان گونه که گفته شد قدر ظاهری بلومتریک بر اساس سوال ناشی از انرژی هر سه طیف U و B و V است . پس:

$$m_{bol} - m_B = -2.5\log\left(\frac{f_B + f_U + f_V}{f_B}\right) = -2.5\log\ (1 + \frac{f_V}{f_B} + \frac{f_U}{f_B})$$

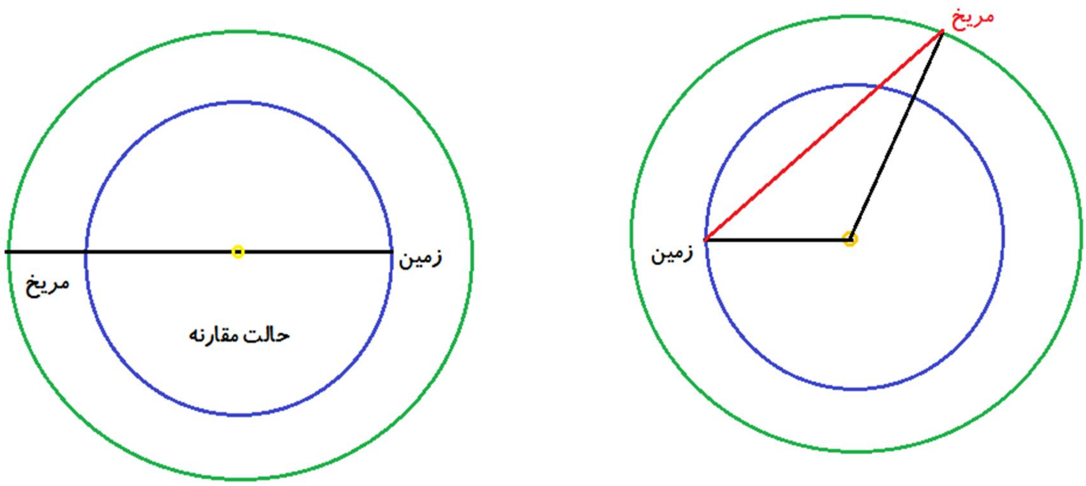
با توجه به $(B\text{-}V)_0$ و $(U\text{-}B)_0$ خواهیم داشت :

$$(B - V)_0 = -2.5\log\left(\frac{f_B}{f_V}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{f_V}{f_B}\right) = 0.631$$

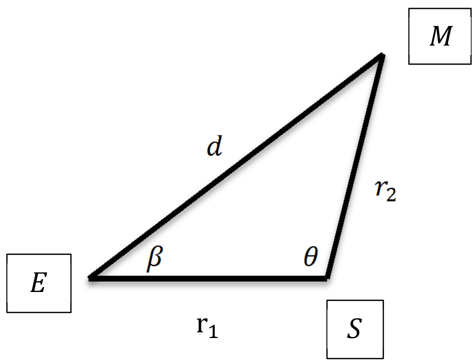
$$(U - B)_0 = -2.5\log\left(\frac{f_U}{f_B}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{f_U}{f_V}\right) = 0.398$$

$$\boxed{m_{bol} = 2.73}$$

4) مریخ و زمین در روز اول بهار در حالت مقارنه هستند. 6 ماه بعد در لحظه طلوع خورشید سمت و ارتفاع مریخ چقدر است؟



همانطور که در شکل مشاهده می کنید در حالت اول مریخ در مقارنه است حال باید پس از 6 ماه جدایی زاویه ای مریخ و خورشید را بیابیم. تصویر دوم حالت دو سیاره را پس از 6 ماه نشان می دهد.



حال از شکل بالا خواهیم داشت:

$$d^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2 \times r_1 r_2 \cos\theta$$

و از سینوس ها

$$\frac{d}{\sin(\theta)} = \frac{r_2}{\sin(\beta)}$$

برای یافتن θ از زاویه ی خورشید مرکزی نسبی استفاده می کنیم:

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

$$\omega = \frac{360}{p} \quad \text{و} \quad \theta - 180 = (\omega_2 - \omega_1)t$$

و برای یافتن دوره تناوب از قانون سوم کپلر استفاده می کنیم:

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

که داریم:

$$p_{\text{مریخ}} = 1.87(yr) \quad , \quad \theta = 96.26$$

البته با تناسب هم میشد حل کرد. حال از روابط مثلثاتی بالا برای جدایی زاویه ای داریم:

$$d = 1.91(A.U.) \quad , \quad \beta = 52.35^\circ$$

حال بخش کروی مسئله:

از دید زمین مریخ در سمت راست مریخ قرار دارد پس طول سماوی آن به اندازه این فاصله زاویه ای کمتر است.

در اول پاییز طول خورشید حدودا برابر **180** می باشد پس برای طول مریخ خواهیم داشت:

$$\lambda_{mars} = 180 - 52.35 = 127.65$$

$$\sin(\delta) = sin(\varepsilon) \times \sin(\lambda) \quad , \quad \delta = 18.40$$

$$\cos(\delta) \times \cos(\alpha) = \cos(\lambda) \quad \text{و} \quad \alpha = 130.07$$

برای خورشید هم داریم: $\delta_s = 0$ و $\alpha_s = 180$

حال در لحظه طلوع خورشید : $\cos H_s = -\tan(\delta) \times \tan(\varphi)$

برای $\varphi = 30.5$ $H_s = 270$ و $LST = H + \alpha = 90$

حال برای مریخ: $H = 319.93$

حال از مثلث کروی خواهیم داشت:

$$sina = \sin(\varphi)\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos(H)$$

و

$$\frac{-\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin H}{\cos a}$$

در نتیجه:

$$\boxed{a = 51.8 \quad , \quad A = 99}$$

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

5) این سوال از برخی جهات مبهم بود ولی روش حل: در حالت مقارنه ، یک سیاره با صفحه دایره البروج دارای زاویه است . حال بعد از یک روز با تقریب می توان از حرکت در راستای عمود بردایره البروج صرف نظر کرد .

چون هر دو در نصفالنهار هستند و فاصله زاویه ای این ها از دید ناظر زمینی 4.5 درجه است در این حالت که در شکل مشاهده می کنید پس از یک روز سیارات با زمین در چنین شرایطی خواهند بود.

حال به دوره تناوب هلالی سیارات نیاز داریم:

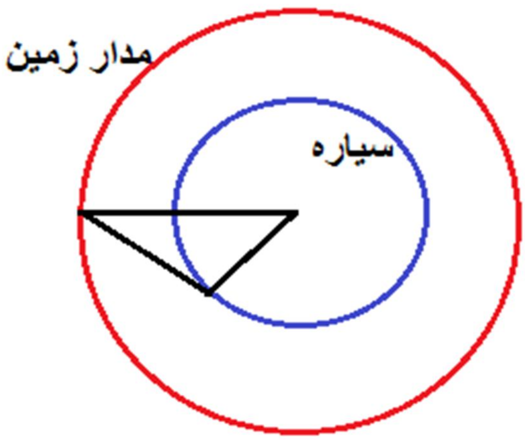
$$\frac{1}{p} = \left|\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_s}\right|$$

که در این صورت برای دو سیاره داریم:

$$p_1 = 538.93 \quad , \quad p_2 = 29.5$$

حال باید مقدار زاویه طی شده در این یک روز از دید ناظر زمینی را بیابیم و از هم کم کنیم.

$$\theta_1 = \frac{1}{538.93} \times 360 = 0.668^{\circ} \ , \theta_2 = \frac{1}{29.5} \times 360 = 12.2^{\circ}$$



تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

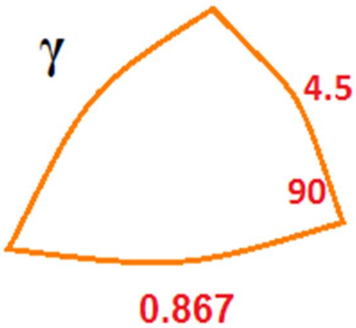
در اینجا از سوال قبلی و روابط مثلثاتی آن و قانون کپلر کمک می گیریم و برای فاصله زاویه ای دو سیاره از دید ناظر زمینی با خورشید داریم:

$$\beta_1 = 1.74^{\circ} \quad \text{و} \quad \beta_2 = 2.61^{\circ}$$

$$\boxed{\alpha = 0.867^{\circ}}$$

حال اختلاف این دو زاویه با تقریب اینکه از حرکت در راستای عمود بر دایره البروج صرف نظر کرده ایم به ما اختلاف زاویه ای شکل را می دهد.

حال برای بدست آوردن جدایی زاویه ای پس از یک روز یک مثلث کروی مطابق زیر داریم که یک زاویه آن قائم است:



$$\cos\gamma = \cos 4.5 \times \cos 11.54$$

$$\boxed{\gamma = 4.58^{\circ}}$$

که البته بسیار معقول است.

6) برخی ستاره ها در طی سیر تحولی شان ، پس از خروج بخشی از جرمشان که از طریق سوخت و ساز هسته ای است ، تحت گرانش می رمبند و تبدیل به کوتوله سفید می شوند. به طور معمول جرم کوتوله های سفید از مرتبه جرم خورشید و شعاعشان از مرتبه شعاع زمین است. جرم و شعاع سه کوتوله سفید که هر یک عضوی از منظومه دو تایی هستند اندازه گیری شده است و در جدول زیر مقادیر آن ها ذکر شده است.

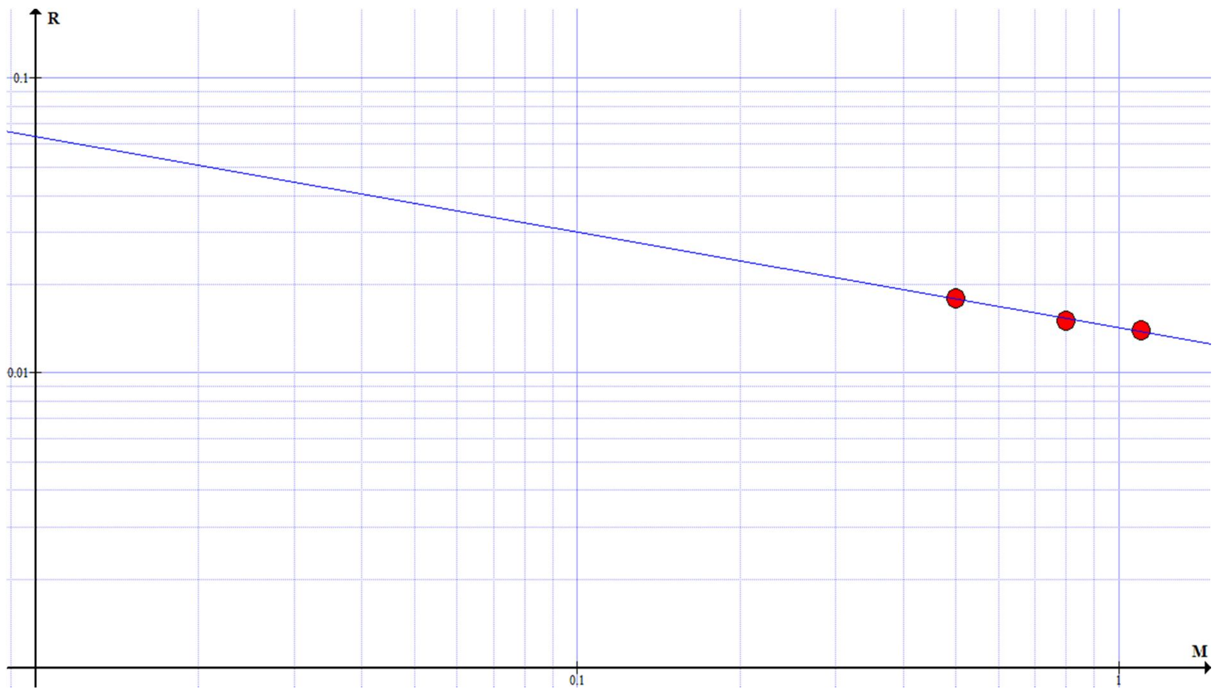
ستاره	جرم (M_{sun})	شعاع (R_{sun})
1	0.5	0.018
2	0.8	0.015
3	1.1	0.014

الف) اگر فرض کنیم که رابطه جرم و شعاع در کوتوله های سفید به صورت زیر باشد:

$$\frac{R}{R_s} = A(\frac{M}{M_s})^B$$

با رسم منحنی شعاع–جرم در مقیاس لگاریتمی مقادیر A, B را بیابید.

حل: در رسم در نمودار تمام لگاریتمی نباید دیگر از داده ها لگاریتم بگیرید!



نمودار مطابق بالا خواهد بود و

$$\boxed{B = -0.324 \ , \ A = 0.014}$$

ب) تابعیت درخشندگی و دمای موثر را برای ستاره ای با جرم برابر جرم خورشید بدست آورید .

پاسخ:

$$\frac{R}{R_s} = A(\frac{M}{M_s})^B \qquad \text{و} \qquad L = 4\pi R^2 \sigma {T_{ef}}^4$$

در نتیجه:

$$\frac{L}{L_s} = \mathrm{A}^2 (\frac{M}{M_s})^{2B} \times (\frac{T}{T_s})^4$$

$$M = M_s \quad , \quad \boxed{\frac{L}{L_s} = \mathrm{A}^2 (\frac{T}{T_s})^4}$$

$$\log\left(\frac{L}{L_s}\right) = 4log\left(\frac{T}{T_s}\right) + 2logA$$

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی

د) برای ستاره ای با دمای 10000 کلوین و جرم برابر جرم خورشید درخشندگی مطلق رابیابید.

$$T = 10^4 k \quad , \qquad \frac{L}{L_s} = \mathrm{A}^2 (\frac{T}{T_s})^4$$

$$\boxed{L = 1.76 \times 10^{-3} L_s}$$

اگر انرژی تابشی این ستاره یک دهم انرژی پتانسیل گرانشی باشد عمر ستاره چقدر است؟

$$E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \ \text{و}\ E_r = -\frac{3}{50}\frac{GM^2}{R} = 1.64 \times 10^{42} j$$

$$t = \frac{E_r}{L} \ \text{و}\ R = AR_s = 0.014 R_s$$

$$t = 7.7(Gyr)$$

با تشکر از تمامی دوستان و افرادی که ما را در تهیه این پاسخ نامه یاری کردند.

بچه های تیم ششمین المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

91/2/16

تهیه و تنظیم: عطا مرادی ، آرش گل محمدی و کیانا افضلی