تئوری بازیها [1]

تئوری بازی برای نخستین بار در سال ۱۹۲۱ از طرف ریاضی دان بزرگ فرانسوی به نام امیل بورل، مطرح شد و در سال ۱۹۲۸ این تئوری بوسیلهٔ نیومن، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و با همکاری مورگان استرن، تئوری بازیها به عنوان روش تجزیه و تحلیل موارد رقابتی در اقتصاد، بازرگانی، رفاه و سایر زمینه‌های برخورد منافع گسترش داده شده که از نتیجه آن کتابی تحت عنوان تئوری بازیها و سلوک اقتصادی در سال ۱۹۴۴ منتشر گردید.

تئوری بازیها در واقع روشی است برای مطالعه و تصمیم‌گیری که دو یا چند تصمیم گیرنده (رقیب) منافعشان با یکدیگر در تعارض و تضاد باشد و همواره سعی می‌کنند با در نظر گرفتن کلیه حرکات، اعمال و اندیشه‌های رقیب، مطلوب‌ترین نتیجه را از تلاش خود بدست آورند، زیرا هر دو طرف در مقابل یک مسئله قرار دارند و آن افزایش و به حد مطلوب رساندن خواسته‌های خود است. فرق این نوع تصمیم‌گیری با تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان اینست که در تئوری بازیها تصمیمات تصمیم گیرنده بستگی به انتخاب استراتژی تصمیم گیرنده مقابل دارد و مهارت و آگاهی تصمیم گیرنده است که نقش اساسی را در بازیها ایفا می‌نماید در صورتی که در تصمیم‌گیری در

---

1. Theory of Game

شرایط عدم اطمینان وقوع نتایج بستگی به استراتژی انتخاب شده توسط تصمیم گیرنده ندارد و بیشتر عامل شانس و اتفاق و احتمالات نقش اساسی داشته و بطور کلی وقوع نتایج و انتخاب استراتژی کاملاً از یکدیگر جدا و مستقل می‌باشد در ضمن باید متذکر شد در ماتریس تصمیم‌گیری تئوری بازی به علت تعارض منافع دو رقیب به جای وقوع نتایج استراتژیهای رقیب نوشته می‌شود و این حالت از تصمیم‌گیری را تصمیم‌گیری تحت شرایط تعارض می‌نامند.

ساده‌ترین مدل تئوری بازی در شرایطی است که فقط دو رقیب یا بازی کن مقابل یکدیگر قرار می‌گیرند، البته در تئوری بازی هر رقیب بطور مستقیم یک واحد تصمیم گیرنده محسوب می‌شود و الزاماً نباید حتماً یک نفر باشد. بلکه گروهی از افراد یک سازمان، شرکت، مؤسسه و یا لشکر نظامی می‌توانند به عنوان یک طرف بازی به حساب آورده شوند اما آنچه که نقش یک رقیب یا بازی کن را در تئوری بازی مشخص می‌کند هدف وی می‌باشد که کاملاً معلوم بوده و تحت شرایط و قوانین ویژه‌ای همیشه سعی می‌کند حداکثر استفاده را از موقعیتهای موجود بعمل آورده و با توجه به تصمیمات طرف مقابل نتیجه و سودمندی تصمیمات خویش را به حداکثر ممکنه افزایش دهد. در چنین شرایطی است که مقدار برد یک رقیب درست برابر با مقدار باخت رقیب دیگر یعنی جمع جبری برد و باخت برابر است با صفر (۰). این حالت را اصطلاحاً بازی دو نفر با مجموع[1] صفر گویند. برای مثال در صورتی که در صحنه رقابت فقط دو تولید کننده وجود داشته باشد و کوشش آن دو در افزایش سهمیه فروش کالا به بازار منجر به افزایش سهمیه فروش یکی و کاهش سهمیه دیگری به همان نسبت شود. این حالت را یک بازی دو نفره با مجموع صفر گویند.

بازی دو نفره با مجموع صفر

همان گونه که گفته شد در بازی دو نفره با مجموع صفر برد یک نفر همواره با باخت نفر دیگر برابر است. برای تشریح این موضوع فرض کنید دو بازی کن (رقیب) بنام A و B در تصمیم‌گیری شرکت دارند. بازی کن A دارای ۵ استراتژی یا حرکت است که وسیله A_1، A_2، A_3، A_4، A_5، مشخص شده است و بازی کن B دارای ۴ استراتژی بنامهای B_4، B_3، B_2، B_1 می‌باشد. در اینجا چون تعداد محدودی استراتژی در اختیار هر بازی کن است تعداد کل حالات ممکن بازی نیز محدود می‌باشد یعنی ۴×۵ ترکیب مختلف حرکت A و حرکت B (منظور از حرکت اینست که یکی از بازی کن‌ها راه حلی (استراتژی) را از میان راه حلهای دیگر برمی گزینند. ماتریس سودمندی ترکیبات مختلف حرکتهای بازی کن A و B را می توان به صورت جدول شمارهٔ (۱۰) نشان داد.

1. Zero-Sum Games

حرکتهای بازی کن A

حرکتهای بازیکن B

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	۴	۳	۲	-۱	-۳
B_2	-۲	۱	۳	-۳	۳
B_3	-۴	-۱	-۲	-۳	-۲
B_4	-۱	۲	-۲	۱	-۳

ماتریس سودمندی بازی کن A در مقابل بازی کن B

جدول شماره (۱۰)

ارقامی که در هر کدام از مربعهای ماتریس بالا نشان داده شده مشخص مقدار پرداختی است که باید از طرف بازی کن B به بازی کن A داده شود، بدین ترتیب رقم ۴ در مربع محل تقاطع ستون اول و ردیف اول طبق ضابطه بازی اگر بازی کن A حرکت A_1 و بازی کن B حرکت B_1 را انجام دهند بیانگر اینست که بازی کن B باید این مبلغ را به بازی کن A پرداخت نماید. ستونهای جدول بالا متعلق به حرکتهای (استراتژیهای) بازی کن A و ردیفهای آن مربوط به حرکتهای بازی کن B می‌باشد.

بازی را باید بنحوی دنبال کرد تا بهترین حرکت که متضمن حداکثر سودمندی برای بازی‌کن A و حداقل ضرر برای بازی کن B است برگزیده شود. این امر هر دو بازی کن را بر آن می‌دارد که انتخاب حرکتهای خود را براساس ارقام ماتریس سودمندی با دقت انجام داده و در تصمیمات کاملاً منطقی و اصولی باشند.

برای انتخاب مناسبترین استراتژی تصور نمائید بازی کن A حرکت اول را شروع کند. با این انتخاب بازی کن B متقابلاً باید، حرکتی را انجام دهد که مقدار ضررش به حداقل ممکن کاهش یابد. برای مثال چنانچه بازی کن A استراتژی A_1 را برگزیند بازی کن B می‌بایستی با انتخاب استراتژی B_3 به بازی کن A پاسخ دهد زیرا این مقدار حداقل سودمندی می‌باشد که در اولین ستون به بازی کن A تعلق می‌گیرد و به وضوح می‌توان مشاهده کرد که اگر بازی کن A استراتژی دیگری برگزیند مقدار ضرر وی افزایش می‌یابد. بطور مشابه اگر بازی کن A استراتژی A_2 را انتخاب کند او باید انتظار داشته باشد که بازی کن B استراتژی B_3 را بر خواهد گزید زیرا این متضمن حداقل ضرر یعنی -۱ برای او می‌باشد. بدین ترتیب هر حرکتی که از جانب بازی کن A انجام می‌شود باید انتظار داشت که بازی کن B فقط حداقل مقدار سودمندی ستون مربوط به استراتژیها را انتخاب می‌کند البته به شرط اینکه بازی کن B فرد منطقی و همواره در فکر حداقل نمودن ضرر خود باشد. بنابراین برای انتخاب بهترین حرکتها می توان نخست حداقل سودمندی هر استراتژی از بازی کن A را جدول

سودمندی به صورت زیر بیرون آورد.

حداقل سودمندی ستونهای مربوطه		استراتژی‌های بازی کن A
از اولین ستون	۴-	A_1
از دومین ستون	۱-	A_2
از سومین ستون	۲-	A_3
از چهارمین ستون	۳-	A_4
از پنجمین ستون	۳-	A_5

اکنون با توجه به اینکه بازی کن A همواره در پی حداکثر نمودن سودمندیش می‌باشد طبیعتاً، بهترین حرکت از جانب او عبارتست از حداکثر سودمندی از میان حداقل سودمندی ستونها که در جدول بالا آمده است یعنی ۱- که مربوط است به استراتژی A_2 حال در قبال انتخاب استراتژی A_2 از بازی کن A باید بازی کن B استراتژی B_3 را برگزیند زیرا این متضمن حداقل ضرر برای وی می‌باشد و چنانچه استراتژی دیگری به جای B_3 انتخاب شود وی متحمل ضرر بیشتری خواهد شد.

بنابراین حرکتها عبارتند از: A_2 از بازی کن A و به دنبال آن B_3 از بازی کن B و نتیجه بازی مساوی است با ۱ که این، ضرر ۱ متوجه بازی کن A می‌گردد.

گفتیم اولین حرکت از جانب بازی کن A صورت گرفت. حال ببینیم که اگر اولین حرکت از جانب بازی کن B باشد آیا فرم بازی فرق می‌کند و جواب مسئله متفاوت خواهد بود؟

اگر انتخاب حرکت اول از جانب بازی کن B صورت گیرد او چنین استدلال می‌نماید که بازی کن A آن حرکتی را انجام خواهد داد که مقدار سودمندیش حداکثر گردد، مثلاً اگر بازی کن B حرکت B_1 را انجام دهد بازی کن A در مقابل حرکت A_1 را انجام خواهد داد. زیرا این انتخاب متضمن حداکثر سودمندی در ردیف اول برای اوست و چنانچه B حرکتهای دیگری انجام دهد A به همین صورت حرکت خود را برخواهد گزید. بنابر این رویه‌ای که بازی کن B در پیش می‌گیرد عبارتست از انتخاب حداکثرهای هر ردیف و آنگاه انتخاب حداقل ردیفها. این
عملیات به شرح زیر است:

حداکثر سودمندی ردیفها		حرکتهای بازی B
ردیف اول	۴	B_1
ردیف دوم	۳	B_2
ردیف سوم	۱-	B_3
ردیف چهارم	۲	B_4

بنابراین در جدول بالا حداقل حداکثر ردیف سودمندی ۱- می‌باشد که مربوط است به حرکت یا استراتژی B_3 از بازی B در این موقعیت بازی کن A باید استراتژی A_2 را برگزینند زیرا در غیر این صورت باعث افزایش زیانش خواهد شد. چنانچه این عملیات صورت گیرد نتیجه بازی درست با حالت قبل که حرکت اول از بازی کن A بود مشابه می‌باشد. یعنی انتخاب استراتژی A_2 و B_3 و نتیجه سودمندی ۱- برای بازی کن A.

دلیل اینکه نتیجه‌ها یکسان می‌باشد اینست که حداکثر حداقلهای ستونها درست برابر است با حداقل ردیفها یعنی:

حداقل حداکثر ردیفها = ۱- = حداکثر حداقل ستونها

در چنین موقعیتی که حداکثر حداقل ستونها برابر با حداقل حداکثر ردیفها می‌باشد گفته می‌شود که ماتریس سودمندی دارای نقطهٔ تعادل[1] است. نقطه تعادل جدول سودمندی مثال مزبور مربعی است با سودمندی ۱- که از محل تقاطع ستون دوم و ردیف سوم حاصل شده است. جائی که بازی کن A استراتژی A_2 و بازی کن B استراتژی B_3 را انتخاب می‌کنند. اهمیت و ارزش نقطه تعادل در این است که مناسبترین حرکتها و سودمندی‌ها را برای هر بازی کن مشخص می‌نماید. بنابراین برای دست یابی به جواب مطلوب فقط احتیاج به یافتن نقطه تعادل در ماتریس سودمندی می‌باشد و زمانی که این نقطه تعیین گردد در واقع مسئله حل شده است. اما متاسفانه در بیشتر اوقات در ماتریس‌های سودمندی چنین نقطه‌ای را نمی‌توان تعیین نمود. برای مثال جدول سودمندی شماره (۱۱) را ملاحظه فرمائید که مقدار حداکثر حداقلهای ستونها دیگر با مقدار حداقل حداکثرهای ردیفها برابر نمی‌باشد.

استراتژی‌های بازی کن‌ها

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	حداکثر ردیفها	
B_1	۶	-۵	۲	-۱	۵	۶	
B_2	۱	-۲	۴	۵	۳	۵*	حداقل حداکثر
B_3	۱	۰	-۳	۷	۱۱	۱۱	
B_4	-۲	۴	۸	۳	-۵	۸	
حداقل ستونها	-۲	-۵	-۳	-۱*	-۵		
			حداکثر حداقل				

جدول شماره (۱۱)

از جدول شماره (۱۱) همان گونه که گفته شد می توان ملاحظه کرد مقدار حداکثر حداقلهای ستونها طبق حرکت A برابر با ۱- است در صورتی که مقدار حداقل حداکثرهای ردیفها براساس حرکت B

1. Suddle point

برابر ۵ است لذا جدول سودمندی بالا دارای نقطه تعادل نمی‌باشد در چنین وضعیتی نیومن و مورگان مفهوم جدید دیگری برای حل مسائل رقابتی پیشنهاد نموده‌اند که بنام استراتژیهای مخلوط[1] مشهور است.

استراتژی مخلوط

همان گونه که گفته شد زمانی که در ماتریس سودمندی نتوان نقطه تعادلی پیدا کرد الزاما باید از استراتژی مخلوط استفاده کرد. برای تشریح چگونگی استراتژیهای مخلوط بازی کن‌ها به منظور سادگی عملیات یک ماتریس سودمندی دو به دو را به شرح زیر مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

استراتژی‌های بازی کن A

استراتژیهای بازیکن B

	A_1	A_2	حداکثر ردیفها
B_1	۷	۲	۷*
B_2	۳	۱۱	۱۱
حداقل ستونها	۳*	۲	

حداکثر حداقل

حداقل حداکثر

جدول شماره (۱۲) ماتریس دو به دو

در ماتریس سودمندی بالا حداکثر حداقل ستونها برابر با ۳، مربوط به حرکت A_1 از بازی A می‌باشد این حرکت می‌رساند بازی کن A هرگز مقدار سودمندیش کمتر از ۳ نخواهد بود و به همان قیاس چون حداقل حداکثر ردیفها برابر است با ۷ که متعلق به حرکت B_1 از بازی کن B می‌باشد به این بازی کن اطمینان می‌بخشد او هرگز بیشتر از ۷ ضرر نخواهد کرد. با توجه به اینکه دو رقم مزبور یعنی ۳ و ۷ با یکدیگر برابر نیستند روشن است استراتژی ویژه‌ای برای هر دو بازی کن وجود ندارد. در صورتی که بازی کن A همیشه استراتژی A_1 را برگزیند او اطمینان خاطر دارد حداقل سه سود خواهد برد. اگر B نیز همواره حرکت B_1 را انجام دهد هیچوقت بیشتر از ۷ ضرر نخواهد کرد، اما اگر بازی کن A دریابد B همیشه استراتژی B_2 را با توجه به حرکت پیش‌بینی شده انتخاب خواهد کرد ممکن است جهت افزایش میزان سودمندیش (به ۱۱) او نیز حرکت A_2 را برگزیند. به عبارت دیگر اگر برای بازی کن B مسلم شد بازی کن A حرکت A_2 را انجام خواهد داد او ممکن است پیش دستی کرده و با تغییر حرکت خود از B_2 به B_1 مقدار سودمندی رقیب را به ۲ کاهش دهد. این امر همواره موجب بلاتکلیفی

---

1. Mixed Strategy

بازی بوده و هیچ وقت نتیجه نهائی معلوم و مشخص نخواهد شد.

با این بلاتکلیفی مسلم است هر دو بازی کن باید بعضی اوقات استراتژی‌های خود را عوض کنند اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که بازیکنان در چه زمانهائی و به چه نسبتی باید از استراتژیها استفاده کنند که متضمن بهترین سودمندی برای آنها باشد.

برای یافتن این نسبتها فرض نمائید احتمال انتخاب استراتژی A_1 و A_2 از بازی کن A بدون در نظر گرفتن اینکه بازی کن B چه حرکتی انجام خواهد داد به ترتیب p و q است که مجموع این دو برابر یک می‌باشد. بنابراین می‌توان ماتریس مربوط به استراتژی A_1 و A_2 را در مقابل استراتژی B_1 به صورت زیر نوشت:

	A_1	A_2
B_1	۷	۲

با در نظر گرفتن احتمال انتخاب استراتژیهای بازی کن A متوسط سودمندی یا ارزش مورد انتظار او در بازی برابر خواهد بود با:

$$۷p + ۲q$$

و بطور مشابه ارزش مورد انتظار او در مقابل حرکت B_2 از بازی کن B برابر خواهد بود با:

	A_1	A_2
B_2	۳	۱۱
	$۳p$	$+ ۱۱q$

چون گفته شد احتمال انتخاب استراتژیهای A_1 و A_2 بدون در نظر گرفتن استراتژیهای B بررسی می‌شود، لذا ارزش مورد انتظار بازی کن A در مقابل حرکتهای B_1 و B_2 مساوی می‌باشد و می‌توان چنین نوشت:

$$۷p+۲q=۳p+۱۱q$$

$$p+q=۱$$

با حل دو معادله مزبور مقدار p و q برابر خواهد بود با:

$$p=\frac{۹}{۱۳} \qquad q=\frac{۴}{۱۳}$$

دو نسبت p و q نشان می‌دهد بهترین بازی برای A عبارتست از مخلوط دو استراتژی A_1 و A_2 به نسبتهای $\frac{۹}{۱۳}$ و $\frac{۴}{۱۳}$ یا ۹ به ۴. لازم به تذکر است که نباید بازی کن A بطور* منظم از دو نسبت‌های مزبور استفاده نماید زیرا بازی کن B قادر خواهد بود استراتژی آینده وی را طبق مشاهدات قبلی در طول بازی حدس بزند و موجب کاهش سودمندی وی بشود. لذا تنها راه مطمئن در مقابل حرکتهای رقیب انتخاب استراتژی به صورت تصادفی می‌باشد. با چنین عملی دیگر هیچ شانسی به رقیب خود داده نمی‌شود و حتی خود او هم از حرکتهای آتی خود خبر نخواهد داشت. در طرح

تصادفی می‌توان به این صورت عمل نمود که بر روی ۹ قطعه کاغذ A_1 و بر روی ۴ قطعه A_2 نوشت و آنها را با یکدیگر مخلوط کرد. آنگاه به منظور اخذ تصمیم یکی از آنها را برداشته و طبق آن حرکت را انجام داد.

بهمان ترتیب می‌توان نسبتهای انتخاب استراتژی برای بازی کن B را بدست آورد. حرکتهای B_1 و B_2 را از بازیکن B با احتمالات p' و q' در نظر بگیرید که مجموع این دو احتمال هم برای با ۱ می‌باشد.

ماتریس سودمندی برای استراتژی A_1 در مقابل B_1 و B_2 عبارتست از:

	A_1
B_1	۷
B_2	۳

و متوسط ضرر مورد انتظار بازی کن B در قبال حرکت A_1 برابر است با:

$$7p' + 3q'$$

و همچنین سودمندی برای استراتژی A_2 در قبال حرکتهای B_1 و B_2 برابر است با:

	A_2
B_1	۲
B_2	۱۱

و متوسط ضرر مورد انتظار برابر است با:

$$2p' + 11q'$$

اکنون یکبار دیگر باید دو معادلهٔ بالا را برابر یکدیگر قرارداد یعنی:

$$7p' + 3q' = 2p' + 11q'$$

$$p' + q' = 1$$

با حل دو معادلهٔ بالا جوابهای q' و p' عبارتست از:

$$p' = \frac{8}{13} \qquad q' = \frac{5}{13}$$

بنابر این نسبتهای استراتژی B که در بردارنده بهترین بازی می‌باشد. عبارتست از ۱۳ قطعه کاغذ دیگر که روی ۸ عدد B_1 و روی ۵ عدد B_2 نوشته شده است. با مخلوط کردن آنها می‌توان بطور تصادفی یکی را برگزید و طبق آن عمل نمود.

باید گفت اگر هر دو بازی کن حرکتهایشان را بر مبنای احتمالات محاسبه شده بالا مخلوط نمایند در درازمدت مقدار سودمندیشان به حداکثر خود خواهد رسید.

برای تعیین مقدار سودمندی بازی در دراز مدت می‌دانیم احتمال A_1، $\frac{9}{13}$ و B_1، $\frac{8}{13}$ می‌باشد. بنابر این احتمال انتخاب حرکت A_1 از بازی کن A و بدنبال آن حرکت B_1 از بازی کن B برابر است با:

$$\frac{9}{13} \cdot \frac{8}{13} = \frac{72}{169}$$

و به گونه مشابه احتمال ترکیب A_1B_2 ، A_2B_1 و A_2B_2 محاسبه شده است که در جدول زیر می‌توان ملاحظه کرد:

$A_2B_1 : \frac{۴}{۱۳} \cdot \frac{۸}{۱۳} = \frac{۳۲}{۱۶۹}$	$A_1B_1 : \frac{۹}{۱۳} \cdot \frac{۸}{۱۳} = \frac{۷۲}{۱۶۹}$
$A_2B_2 : \frac{۴}{۱۳} \cdot \frac{۵}{۱۳} = \frac{۲۰}{۱۶۹}$	$A_1B_2 : \frac{۹}{۱۳} \cdot \frac{۵}{۱۳} = \frac{۴۵}{۱۶۹}$

لازم به تذکر است همیشه مجموع احتمال چهار ترکیب بالا به یک ختم می‌شود یعنی:

$$\frac{۷۲}{۱۶۹} + \frac{۴۵}{۱۶۹} + \frac{۳۲}{۱۶۹} + \frac{۲۰}{۱۶۹} = ۱$$

حال چنانچه سودمندی هر حرکت را در احتمال وقوع مربوط به خود ضرب کنیم و حاصل را با یکدیگر جمع نمائیم ارزش مورد انتظار بازی بدست می‌آید. این محاسبات در جدول شماره ۱۳ نشان داده شده است.

حرکتهای بازی کن A		حرکتهای بازی کن B
A_2	A_1	
$۲ \times \frac{۳۲}{۱۶۹}$	$۷ \times \frac{۷۲}{۱۶۹}$	B_1
$۱۱ \times \frac{۲۰}{۱۶۹}$	$۳ \times \frac{۴۵}{۱۶۹}$	B_2

جدول شماره (۱۳)

و بالاخره ارزش مورد انتظار بازی برای است با:

حداکثر سود A در دراز مدت $= ۷ \times A_1B_1 + ۲A_2B_1 + ۳A_1B_2 + ۱۱A_2B_2$

$$۷ \times \frac{۷۲}{۱۶۹} + ۲ \times \frac{۳۲}{۱۶۹} + ۳ \times \frac{۴۵}{۱۶۹} + ۱۱ \times \frac{۲۰}{۱۶۹} = ۵/۴$$

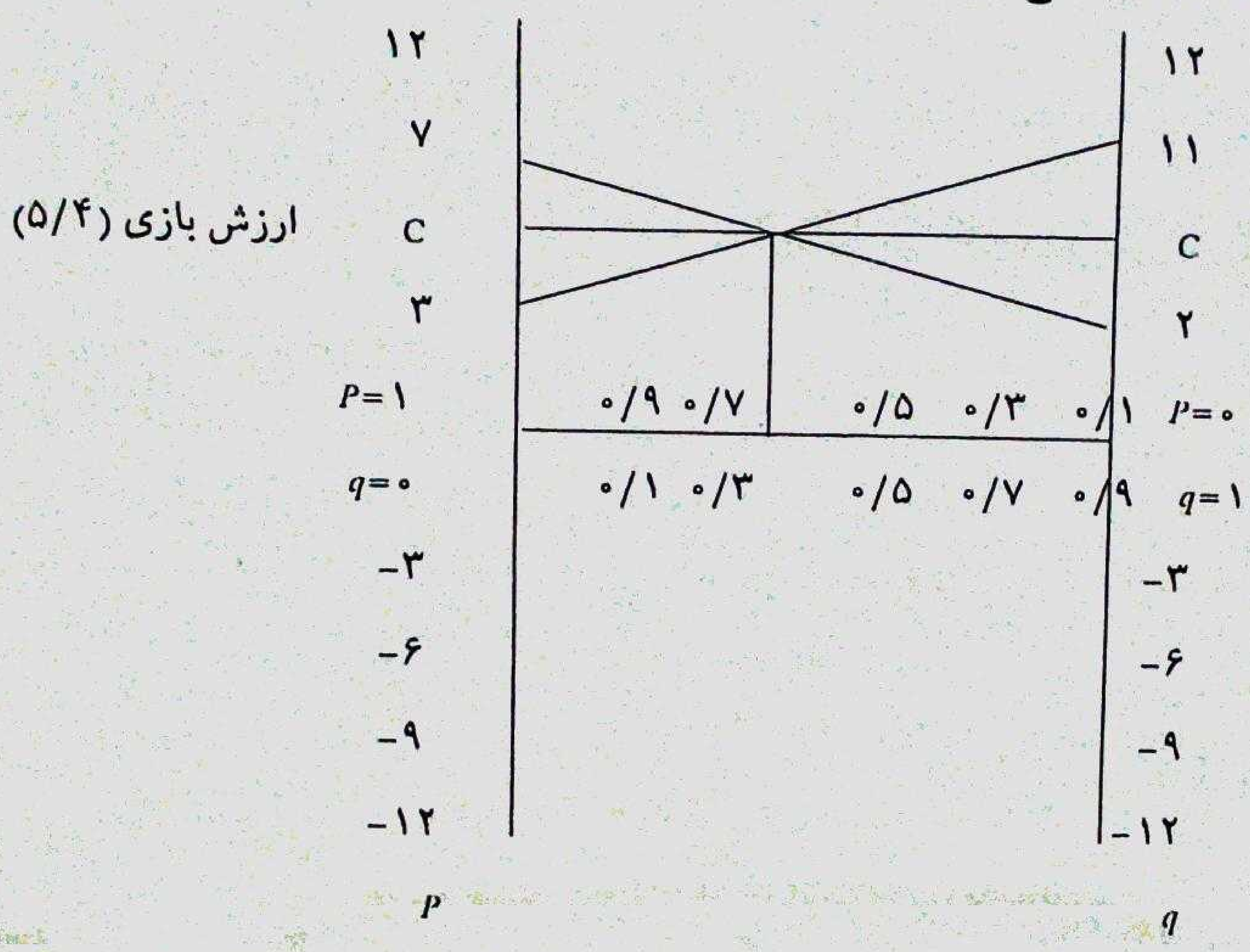
رقم ۵/۴ نشان می‌دهد بازی کن A بطور متوسط در دراز مدت سودمندیش معادل این رقم خواهد بود و هیچ نسبت دیگری نمی‌تواند این سودمندی را برای A افزایش دهد. چون این یک بازی دو نفر با مجموع صفر می‌باشد. لذا ضرر بازی کن B درست معادل برد بازی کن A یعنی ۵/۴ است و چنانچه حرکتهای مخلوط دیگری با نسبتهای دیگر برگزیده می‌شد این ضرر را نمی‌توانست کاهش دهد.

روش ترسیمی در حل مسائل تئوری بازیها

در مسائلی که ماتریس آنها $M \times ۲$ و یا $۲ \times M$ باشد حل آنها از طریق ترسیمی امکان‌پذیر است.

برای توضیح این روش یکبار دیگر از مسئله‌ای که در بحث استراتژی مخلوط به حل آن پرداختیم استفاده می‌کنیم. در روش ترسیمی باید دو محور عمودی به فاصله‌ای معین (مثلاً ده قسمت مساوی) ترسیم و یکی از محورها را به حرکت A_1 با احتمال P و دیگری را به حرکت A_2 با احتمال q اختصاص داد. روی این دو محور بگونه‌ای که در شکل زیر نمایش داده شده است سودمندیهای ماتریس تصمیم آورده می‌شود و محور افقی بین این خط هم باید از چپ به راست و بلعکس از صفر تا یک درجه بندی نمود. این درجه بندی مربوط به احتمال حرکتهای بازیکنها می‌باشد.

سودمندی حرکت A_1 در مقابل B_1 را روی محور P و سودمندی حرکت A_2 در مقابل B_1 را روی محور q مشخص می‌کنیم یعنی ۷ روی محور P و ۲ روی محور q آنگاه این دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌نمائیم. همچنین سودمندی حرکت A_1 در مقابل B_2 روی محور P و سودمندی حرکت A_2 در مقابل B_2 روی محور q تعیین و به یکدیگر متصل می‌سازیم. دو خطی که بدین صورت ترسیم می‌شوند در نقطه‌ای بنام a یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر از محل برخورد این دو خط یعنی نقطه a خطی



بر محور افقی ترسیم شود از محل برخورد آن با این محور یعنی نقطهٔ b می‌توان احتمال حرکتهای بازی کن A را به دست آورد ($P = ۰/۳۰۷$ و $q = ۰/۶۹۳$) و اگر از نقطهٔ a خطی بر محورهای عمودی ترسیم شود از محل برخورد این خط با محورها (نقطهٔ C) می‌توان ارزش بازی یا ارزش مورد انتظاری که متوجه بازی کن A می‌شود را بدست آورد (۵/۴). در این جا باید خاطرنشان کرد که جوابهای بدست آمده از روش ترسیمی با روش جبری یکسان است. احتمال حرکتهای بازی کن B را هم مانند بازی کن A می‌توان بگونه مشابه از طریق ترسیمی بدست آورد.

روش سیمپلکس در حل مسائل تئوری بازیها

برای حل ماتریسها ۳×۳ و بزرگتر که نقطه تعادل در آنها وجود ندارد روش برنامه‌ریزی خطی و حل آن از طریق سیمپلکس بهترین رویه می‌باشد. برای تشریح این روش ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم که سودمندی این ماتریس متوجه بازی کن X است.

بازی کن X

بازی کن Y		X_1	X_2	X_3
	Y_1	۶	۲	۱
	Y_2	۲	۳	۲
	Y_3	۳	۱	۵

قبل از مدل سازی از طریق برنامه‌ریزی خطی باید اطمینان حاصل نمود که بازی نقطه تعادل ندارد، در غیر این صورت نیازی به حل آن نمی‌باشد. این بررسی در جدول زیر نشان داده شده است.

	X_1	X_2	X_3	حداکثر ردیف	حداقل حداکثر
Y_1	۶	۲	۱	۶	
Y_2	۲	۳	۲	۳	۳**
Y_3	۳	۱	۵	۵	
حداقل ستون	۲	۱	۱		

۲** حداکثر حداقل ستون

چون حداکثر حداقل ستون برابر با حداقل حداکثر ردیف نمی‌باشد بازی نقطه تعادل ندارد و می‌توان از طریق برنامه‌ریزی خطی مدل سازی کرد. با توجه به بحثهای مربوط به روش استراتژی مخلوط، نامعادلات مربوط به بازی کن X در مقابل حرکتهای بازی کن Y به صورت زیر نوشته می‌شود.

سودمندی مورد انتظار X در مقابل حرکت Y_1 $\quad V \leq 6P_1+2P_2+P_3$

سودمندی مورد انتظار X در مقابل حرکت Y_2 $\quad V \leq 2P_1+3P_2+2P_3$

سودمندی مورد انتظار X در مقابل حرکت Y_3 $\quad V \leq 3P_1+P_2+5P_3$

علامت V مشخص کنندهٔ ارزش بازی یا سودمندی مورد انتظار می‌باشد و علامتهای P_1، P_2 و P_3، بیانگر احتمال حرکتهای بازی کن X است و جمع این احتمالات برابر است با ۱ یعنی:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

برای حذف V ارزش بازی تمام نامعادلات بالا را بر V تقسیم می‌کنیم:

هدف بازیکن ستونی حداقل کردن سهم بازیکن سطری است. لذا min

کل سهم بازیکن سطر از بازی = $\{3p_1+p_2+5p_3 ,\ 2p_1+3p_2+2p_3 ,\ 6p_1+2p_2+p_3$

$$6\frac{p_1}{V}+2\frac{p_2}{V}+\frac{p_3}{V}\leq 1$$

$$2\frac{p_1}{V}+3\frac{p_2}{V}+2\frac{p_3}{V}\leq 1$$

$$3\frac{p_1}{V}+\frac{p_2}{V}+5\frac{p_3}{V}\leq 1$$

$$\frac{p_1}{V}+\frac{p_2}{V}+\frac{p_3}{V}=\frac{1}{V}$$

حال به فرض اینکه $X_1=\frac{p_1}{V}$ ، $X_2=\frac{p_2}{V}$ و $X_3=\frac{p_3}{V}$ در نظر گرفته شود نامعادلات فوق به صورت زیر بیرون می‌آیند:

$$6X_1+2X_2+X_3\leq 1$$
$$2X_1+3X_2+2X_3\leq 1$$
$$3X_1+X_2+5X_3\leq 1$$
$$X_1+X_2+X_3=\frac{1}{V}$$

چون هدف بازی کن X در مقابل بازی کن Y به حداکثر رسانیدن ارزش مورد انتظار است. لذا تابع $\frac{1}{V}=X_1+X_2+X_3$ باید به حداکثر رسانید. برای این منظور $Z=\frac{1}{V}$ در نظر می‌گیریم و مدل برنامه‌ریزی خطی را برای بازی کن X به گونه زیر تشکیل می‌دهیم.

تابع هدف $\quad Z=X_1+X_2+X_3$

$$6X_1+2X_2+X_3\leq 1$$
$$2X_1+3X_2+2X_3\leq 1$$
$$3X_1+X_2+5X_3\leq 1$$
$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

نامعادلاتی که سودمندی بازی کن Y را در مقابل حرکتهای بازی کن X مشخص می‌سازد نیز بگونه مشابه به شرح زیر است:

سودمندی Y در مقابل حرکت X_1 $\quad 6q_1+2q_2+3q_3\geq V$

سودمندی Y در مقابل حرکت X_2 $\quad 2q_1+3q_2+q_3\geq V$

سودمندی Y در مقابل حرکت X_3 $\quad q_1+2q_2+5q_3\geq V$

q_3 ، q_2 ، q_1 احتمال حرکتهای بازی کن Y فرض شده است و مجموع آنها برابر با ۱ می‌باشد.

$$q_1+q_2+q_3=1$$

برای تشکیل مدل برنامه‌ریزی خطی به منظور به حداقل رسانیدن ضرر Y در مقابل X تمام نامعادلات را بر V تقسیم می‌کنیم.

$$۶\frac{q_1}{V}+۲\frac{q_2}{V}+۳\frac{q_3}{V} \geq ۱$$

$$۲\frac{q_1}{V}+۳\frac{P_2}{V}+\frac{q_3}{V} \geq ۱$$

$$\frac{q_1}{V}+۲\frac{q_2}{V}+۵\frac{q_3}{V} \geq ۱$$

$$\frac{q_1}{V}+\frac{q_2}{V}+\frac{q_3}{V} = \frac{1}{V}$$

حال اگر $Y_1 = \frac{q_1}{V}$, $Y_2 = \frac{q_2}{V}$ ، $Y_3 = \frac{q_3}{V}$ و $Z^* = \frac{1}{V}$ در نظر گرفته شود مدل برنامه‌ریزی خطی برای بازی کن Y بصورت زیر تشکیل می‌شود:

$$Z^* = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$۶Y_1 + ۲Y_2 + ۳Y_3 \geq ۱$$
$$۲Y_1 + ۳Y_2 + Y_3 \geq ۱$$
$$Y_1 + ۲Y_2 + ۵Y_3 \geq ۱$$
$$Y_1 ، Y_2 ، Y_3 \geq ۰$$

برنامه فوق در حقیقت برنامه ثانویه برنامه قبل است که برای بازی کن X تشکیل دادیم. لذا هر کدام از این دو مدل حل شوند از جدول نهائی آن جوابهای مدل دیگر را می‌توان بدست آورد. برای سادگی مدل مربوط به حداکثر رسانیدن ارزش مورد انتظار بازی کن X را از روش سیمپلکس که در فصل چهارم بطور کامل آن را شرح دادیم حل می‌کنیم.

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + ۰ S_1 + ۰ S_2 + ۰ S_3$$

با توجه به محدودیتهای

$$۶X_1 + ۲X_2 + X_3 + S_1 = ۱$$
$$۲X_1 + ۳X_2 + ۲X_3 + S_2 = ۱$$
$$۳X_1 + X_2 + ۵X_3 + S_3 = ۱$$
$$X_1 ، X_2 ، X_3 \geq ۰ \quad S_1 ، S_2 ، S_3 \geq ۰$$

مرحله اول: ضرایب را وارد جدول نخستین سیمپلکس می‌کنیم.

متغیرهای پایه	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	b_i
S_1	۶	۲	۱	۱	۰	۰	۱
S_2	۲	۳	۲	۰	۱	۰	۱
S_3	۳	۱	۵	۰	۰	۱	۱
Z	۱-	۱-	۱-	۰	۰	۰	۰

جدول شماره (۱۴)

حله دوم: X_1 وارد s_1 خارج

	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	s_3	b_i
X_1	۱	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$
s_2	۰	$\frac{۱۴}{۶}$	$\frac{۱۰}{۶}$	$-\frac{۲}{۶}$	۱	۰	$\frac{۴}{۶}$
s_3	۰	۰	$\frac{۹}{۲}$	$-\frac{۳}{۶}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$
Z	۰	$-\frac{۴}{۶}$	$-\frac{۵}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$

جدول شماره (۱۵)

مرحله سوم: X_3 وارد s_3 خارج

	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	s_3	b_i
X_1	۱	$\frac{۲}{۶}$	۰	$\frac{۱۰}{۵۴}$	۰	$-\frac{۲}{۵۴}$	$\frac{۸}{۵۴}$
s_2	۰	$\frac{۱۴}{۶}$	۰	$-\frac{۸}{۵۴}$	۱	$-\frac{۲۰}{۵۴}$	$\frac{۲۶}{۵۴}$
X_3	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۹}$	۰	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$
Z	۰	$-\frac{۴}{۶}$	۰	$\frac{۴}{۵۴}$	۰	$\frac{۱۰}{۵۴}$	$\frac{۱۴}{۵۴}$

جدول شماره (۱۶)

مرحله چهارم: X_2 وارد s_2 خارج

	X_1	X_2	X_3	s_1	s_2	s_3	جواب
X_1	۱	۰	۰	$\frac{۲}{۱۰}$	$-\frac{۲}{۱۴}$	$\frac{۹}{۱۰۰}$	۰/۰۷۹
X_2	۰	۱	۰	$-\frac{۴}{۶۳}$	$\frac{۶}{۱۴}$	$-\frac{۱۰}{۶۳}$	۰/۲۰۶
X_3	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۹}$	۰	$\frac{۲}{۹}$	۰/۱۱۱
Z	۰	۰	۰	۰/۰۳	۰/۲۸۵	۰/۰۷۹	۰/۳۹۶۸

جدول شمارهٔ (۱۷) جدول نهائی

جوابها برای X_1 ، X_2 ، X_3 ، Y_1 ، Y_2 ، Y_3 ، Z و Z^* عبارتند از:

$Y_1 =$ ۰/۰۳	$X_1 =$ ۰/۰۷۹
$Y_2 =$ ۰/۲۸۵	$X_2 =$ ۰/۲۰۶
$Y_3 =$ ۰/۰۷۹	$X_3 =$ ۰/۱۱۱
$Z^* =$ ۰/۳۹۶۸	$Z =$ ۰/۳۹۶۸

حال با توجه به رابطه‌های $X_1=\frac{P_1}{V}, X_2=\frac{P_2}{V}, X_3=\frac{P_3}{V}, Y_1=\frac{q_1}{V}, Y_3=\frac{q_3}{V}, Y_2=\frac{q_2}{V}$ و $Z=\frac{1}{V}$ و $Z^*=\frac{1}{V}$ احتمال حرکتهای هر دو بازی کن همراه با سودمندی بازی کن X در مقابل بازی کن Y را بدست می‌آوریم:

$Z=\frac{1}{V}$ یا ۰/۳۹۶۸ $=\frac{1}{V}$

$V =$ ۲/۵۲

$P_1 = VX_1$ $P_1 =$ ۲/۵۲×۰/۰۷۹=۰/۲

$P_2 = VX_2$ $P_2 =$ ۲/۵۲×۰/۲۰۶=۰/۵۲

$P_3 = VX_3$ $P_3 =$ ۲/۵۲×۰/۱۱۱=۰/۲۸

جمع احتمالات   ۱

$q_1 = VY_1$ $q_1 =$ ۲/۵۲×۰/۰۳=۰/۰۸

$q_2 = VY_2$ $q_2 =$ ۲/۵۲×۰/۲۸۵=۰/۷۲

$q_3 = VY_3$ $q_3 =$ ۲/۵۲×۰/۰۷۹=۰/۲

جمع احتمالات   ۱

با محاسبات بالا مشخص شد که سودمندی مورد انتظار بازی کن X برابر است با ۲/۵۲ و همین مقدار ضرر بازی کن Y خواهد بود و حرکتهای بازی کن X بدین صورت است که باید ۲۰ درصد حرکت اول، ۵۲ درصد حرکت دوم و ۲۸ درصد حرکت سوم را انجام دهد و در مقابل وی بازی کن Y باید ۸ درصد حرکت Y_1 ، ۷۲ درصد حرکت Y_2 و ۲۰ درصد حرکت Y_3 را انجام دهد تا در مقابل بازی کن X، حداقل ۲/۵۲ ضرر دهد.