بسم الله الرحمن الرحيم

Shimiomd.blog.ir

معرفي معادلات ديفرانسيل و مشتقات جزئي:

اگر معادله اي شامل جند متغير و مشتقات آنها باشد، آن معادله يك معادله ديفرانسيل ناميده مـي شود.معادله ديفراسيل با مشتقات جزئي معادله اي است كه شامل يك تابع و مـتغير هـاي آن و مشتقات جزئي مربوط مي باشد.فرم كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي به صورت رابطه

(١)مي باشد:

رابطه (١): $G(u,u_x,u_{xx},.....,u_x^{(n)},u_y,u_{yy},.....,u_y^{(m)},u_{xy}^{(i+j)},.....)=0$

كه در آن $u_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y$ $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

مثال:

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y)+u_{yyy}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \end{cases}$$

مجموعه معادلات PDE يك مجموعه معادلات نامحدود مي باشد.ازبين اين مجموعه تنها بخش كوچكي داراي كاربردهاي خاص مي باشد.

غالب مسائلي كه در كاربردهاي PDE مطرح مي شوند داراي فرمهاي محاسباتي (رابطه (٢))

مي باشند.كه در آن A , B , ….., G ضرايب معادله PDEهستند.

رابطه (۲): $Au_{xx}(x,y) + Bu_{xy} + Cu_{yy}(x,y) + Du_x(x,y) + Eu_y(x,y) + Fu(x,y) + G = 0$

اين معادله را فرم استاندارد معادله درجه ۲ از مشتقات جزئي مي نامند.

چنانچه A , B , ….., G توابعي از x , y باشند، معادله ي درجه ۲ خطي ناميده مي شود ولي چنانچه A , B , ….., G تابعي از U باشد ،معادله ي غير خطي ناميده مي شود.

مثال: معادله غير خطي درجه دو $u_{xx} + (\sin u)_{uy} = 0$

مثال: معادله خطي درجه دو $zu_{xx}(x,y) + xy^2 u_{yy}(x,y) + e^x u(x,y) = 10$

معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي خطي درجه ۲ در حوزه ي $u(x,y,z)$

معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزئي روي خط ، صفحه و يا فضا تعريف مي شوند.در بسياري از كاربردها ،مقاديرمتغير Uر در مرز ناحيه يا فضايا روي خط معلوم مي باشد.نيزدر برخي كاربردها مقدار تابع U در نقطه شروع زمان و مكان معلوم مي باشد.مسـائل گـروه اول Boundary value Problems (مسائل با مقادر مرزي) و مسائل گروه دوم را Initional Value Problems ميناميم.حالـت تركيبي از مقادير مرزي و اوليه نيز وجود دارد. يك معادله ديفرانسيل،خطي ناميده مي شود وقـتي كه معادله و شرايط اوليه يا مقاديرمرزي آن خطي باشد.

معادله ديفرانسيل PDE همگن يا Homogenus ناميده مي شود وقتي معادله و شرايط آن همگن باشند براي روش هايي كه در اين درس ارائه مي شود ،خطي و همگن بودن يك معادلـه , در وجـود جواب معادله نقش اساسي دارد.براي توضيح اينكه به چه دليل به حل معادلات مشتقات جزئـي نيازمنديم . مثالهائي را در فيزيك مطرح مي كنيم كه حل دقيق آنها به حل يك معادله PDE نيازمند است.به عبارت ديگر بيشتر كاربرد اين درس براي حل مسائلي است كه در زير نمونه هائي ازآن آورده شده است.

حل مسأله سيم نوسان كننده :

فرض مي كنيم سيمي به طول L در دو نقطه Fix شده باشد .سيم را باريك و داراي چگالي جرم طولي يكنواخت فرض مي كنيم.

سيم داراي حركت در راستاي y با سرعت $v(x+\Delta x,t)$است .

از آنجا كه در راستاي x حركت نداريم بنابراين:

$$H(v,t) = H(x+\Delta x,t) \rightarrow H(x,t) = cte \qquad \forall t \qquad 0 < x < l$$

$$\tan\alpha = \frac{v(x+\Delta x,t)}{H} \qquad \tan\beta = \frac{-v(x,t)}{-H}$$

$$\tan\alpha = y_x(x+\Delta x,t) \qquad \tan\beta = y_x(x,-t)$$

باقرار دادن معادله نيرو $\Delta F = ma$ براي يك المان طول سيم و در راستاي y داريم

$$\Rightarrow v(x+\Delta x,t)-v(x,t)=\delta.\Delta s.y_{tt}(x,t)$$

كه در ان Δs كمان ايجاد شده توسط المان در نظر گرفته شده مي باشد و در صورتي كه

$$\Delta x=\Delta s \Rightarrow \frac{v(x+\Delta x,t)-v(x,t)}{\Delta x}=\delta\, y_{tt}(x,t)$$

$$H\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x}\right)=\delta\, y_{tt}(x,t)$$

رابطه (٤):
$$Hy_{XX}(x,t)=\delta\, y_{tt}(x,t)\Rightarrow {}^{H}\!/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)=y_{tt}(x,t)$$

δ, H مقادير ثابتي هستند δ جرم واحد طول سيم و H كشش سيم مي باشد.

نشان داديم كه معادله ديفرانسيل حاكم بر سيم نوسان كننده به فرم:

$$y_{tt}(x,t)={}^{H}\!/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)$$

كه در آن y(x,t) انحراف سيم در راستاي y و در نقطه x و زمان t باشد چنانچه نيرويي بر سيم وارد نمائيم معادله نيرو بصورت رابطه (٥) خواهد بود:

رابطه (٥):
$$\delta\,\Delta x y_{tt}(x,t)=H(y_x(x+\Delta x),t)-y_x(x,t)+F\Delta x$$

اين رابطه از جايگزين كردن رابطه (٣)بدست مي آيد.

بنابراين:
$$y_{tt}(x,t)={}^{H}\!/_{\delta}\left(\frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x}\right)+{}^{f}\!/_{\delta}$$

بنابراين:
$$y_{tt}(x,y)={}^{H}\!/_{\delta}\, y_{XX}(x,t)+{}^{f}\!/_{\delta}$$

با در نظر گرفتن مسأله وزن خواهيم داشت:

$$\delta\,\Delta x y_{tt}(x,t)=H(y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t))-g\,\Delta x$$

$$y_{tt}(x,y)={}^{H}\!/_{\delta}\, y_{xx}(x,t)-g$$

براي حالتي كه سيم در محيط داراي اصطكاك باشد; مي دانيم كه نيروي اصطكاك اجسام متحـرك در هوا، گازها و سيالات با سرعت حركت هم متناسب است.رابطه(٦)

رابطه(٦): $f == -by_t(x,t)$ b :ضريب اصطكاك

بنابراين: $y_{tt}(x,t) = H/\delta\, y_{xx}(x,t) - by_t(x,t)$

معادلات ديفرانسيل بدون شرايط اوليه يا مرزي به صورت كامل قابل حل نيستند بنابراين وقـتي كامل است كه شرايط اوليه يا مرزي آن نيز مشخص باشد.

شرايط مرزي سيم نوسان كننده:

حالتي كه سيم داراي انحراف اوليه است و تحت انحراف اوليه رها مي شود.

$$y(0,t) = 0$$
$$y(l,t) = 0$$
$$y(x,0) = f(x) \quad 0 < x < \ell$$

آنگاه داريم:

كه در آن f(x) منحني انحراف اوليه است.

شرايط مرزي سري دوم:وقتي كه سيم تحت يك ضربه داراي سرعت اوليه مي شود:

$$y(0,t) = 0$$
$$y(\ell,t) = 0$$
$$y(x,0) = 0$$
$$y_t(x,0) = g(x)$$

كه در ان g(x) سرعت نقطه x در لحظه صفر مي باشد.

مدلسازيهاي مربوط به مسايل نوسان با يكي از دو صورت فوق انجام مي شود.

مساله ميله نوسان كننده

يك ميله قابل ارتجاع كه تحت يك نيرو قرار دارد در نظر بگيريد.y(x,t)را تابعي در نظربگيريدكه ميزان جابجايي نقطه X را در زمان t نسبت به مكان اوليه محاسبه مي كند.ميزان جابجايي نقطه $X + \Delta X$ برابر با مكان اوليه نقطه $X + \Delta X$ مي باشد.نيروي وارده بر ميله F(X,t) مد نظر مي گيريم كه نيروي وارد بر واحد طول مي باشد.

از روي قانون هوك و با توجه به روابط تنش ميزان تغيير طول با رابطه (v)مشخص مـي شـود بدست مي آيد:

$$F = \quad y(x+\Delta x) - y(x,t)$$

A :سطح مقطع ميله

B:مدول الاستيسيته(يانگ)رابطه (v)

$$F(x,t) = \frac{E}{\Delta x}\left(y(x+\Delta x,t) - y(x,t)\right)$$

$$F(x,t) = AEy_x(x,t)$$

مقدار نيرو به صورتي است كه ميله از حالت الاستيك خارج نشود.

پس:

براي نقطه xداريم

$$F(x,t) = -Ey_x(x,t)$$

$$F(x+\Delta x,t) = AEy_x(x+\Delta x.t)$$

معادله نيرو براي يك المان طولي ازميله به صورت رابطه (۸) است:

$$F(x+\Delta x,t) - F(x,t) = \delta A\Delta x y_{tt}(x,t)$$

A:سطح مقطع رابطه (۸)

$$\Rightarrow y_{tt}(x,t) = \frac{AE}{\delta A}\left(\frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x}\right)$$

Δ:طول

δجرم واحد طول

رابطه (۹):معادله ميله نوسان كننده

$$y_{tt}(x,t) = \frac{E}{\delta} y_{xx}(x,t)$$

براي يك صفحه نوسان كننده داريم: $Z_{tt}(x,y,t) = H/\delta\left(Z_{xx}(x,y,t) + Z_{yy}(x,y,t)\right)$

كه در آن Z_{tt} ميزان انحراف نقطه xوyدر لحظه t ميباشد.

مسأله انتقال حرارت:

براي يك حجم R u(x,y,z,t) را در دماي نقطه x,y در لحظه t در نظربگيريد.مي خواهيم بـا استفاده از قوانين ترمو ديناميك معادله ديفرانسيل براي هر نقطه را به صورت تابعي اززمان بدست اوريم.

همانطور كه ميدانيم شار حرارتي كه از يك المان صفحه عبور مي كند با رابطه زير مشخص مـي شود.كه nبردار عمود بر سطح المان صفحه مورد نظر مي باشد

$$\phi = -K\frac{du}{dn}$$

ϕ :شار k:رسانايي n:بردار عمود بر سطح

مثلاً حرارت انتقالي در راستاي محورهاي xوyوzبه صورت روابط (۱۰) بدست مي اید :

$$\phi_1 = -K\frac{du}{dx}$$

و حرارت انتقالي در راستاي محور y: روابط (١٠)

$$\phi_2 = -K\frac{du}{dy}$$

$$\phi_3 = -K\frac{du}{dt}$$

جريان حرارتي y را به به صورت جمع شارها معرفي مي كنيم.

$$J = \phi_1 \hat{I} + \phi_2 \hat{J} + \phi_3 \hat{K}$$

$$J = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{I} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{J} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{K}\right)$$

$$J = -k(\Delta u)$$

به اين صورت ϕ در هر راستا به صورت $\phi = J.n$ بدست مي اید

مثال :شار عبوري ازصفحه yz : .

$$\phi = j \quad j = -k\frac{du}{dx}$$

اگر I_1 برابر كل تغييرات حرارتي جسم مورد نظر بگيريم، I_1 با رابطه زير مشخص مي شود:

شار حرارتي (و بي حرارتي) $I_1 = \int\int\int_{R_0} \delta u dv$

از طرفي شاري كه از سطح ناحيه خارج مي شود باعث تغيير انرژي حرارتي ناحيه ميگردد.

كل شار حرارتي خارج شده ازناحيه انتگرال زير مشخص مي شود:

$$I_1 = \int\int_R J.dA$$

بنابراين:(از رياضيات _ داريم):

$$I_2 = \int\int\int_R (divj)dv = \iiint_R \nabla(J)dV$$

$$I_2 = \int\int\int_R -k\nabla.Jdv = \iiint -k\nabla^2 udV$$

از آنجايي كه اين روابط براي هر حجم برقرار مي باشد بنابراين

باملاحظه فيزيك مسأله داريم (وقتي در داخل ناحيه منبع حرارتي نداريم) : $I_1 = I_2$

$$I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow \int\int\int_R (\delta(u_t) - ku(vu))dv = 0$$

چون اين معادله براي هر ناحيه ي R برقرار است و U كميتي پيوسته است ، بنابراين لازم است .

$$\delta u_t = ku(v_u) = 0 \Rightarrow \Delta U_t = k\nabla^2 u$$

$$\nabla u(x,y,t,z)vu = \frac{\partial u}{\partial x}i^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial y}j^{\wedge} + \frac{\partial u}{\partial z}k^{\wedge}$$

$$u_1 = M_1\,\hat{i} + M_2\,\hat{j} + M_3\,\hat{k}$$

$$U_M = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(M_1\,\hat{i} + M_2\,\hat{j} + M_3\,\hat{k}\right) = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial M_3}{\partial z}$$

با ترکیب موارد فوق $\bar{u} = Uu$ داریم:

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \delta u_t(x, y, z, t)$$

پس:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, t, z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t)$$

معادله انتقال حرارت

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\delta}{k} u_t$$

هدف از بحث هاي ارائه شده اين است كه نشان دهيم مسائل و رفتارهايي در فيزيك و واقعيـت وجود دارند كه مي توان آنها را به فرم معادلات PDE نمايش دادو حل آنها احتياج به روشهاي PDE دارد E

درمسأله انتقال حرارت ديديم كه رابطه كلي انتقال حرارت در هر ناحيه بوسيله رابطه P D E زير مشخص مي شد.

$$?\,\nabla^2 u = \frac{\partial}{k} u_t \qquad \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}$$

بررسي شرايط مرزي در معادله انتقال حرارت :

چنانچه از يك مرز ناحيه شار ثابت حرارتي وارد شود، در اين صورت:

$$k\frac{du}{dn}\Big| = \phi_0$$

اگر مز عايق باشد داراي شرايط مرزي به صورت زير است كه: $\frac{du}{dx} = 0$

اگر عايق باشد شرط مرزي صفر است

چنانچه مرز به يك دماي ثابت متصل باشد آنگاه انتقال رارت بصورت زير مي باشد:

اگر محيط رسانا باشد انتقال حرارت به صورت رسانايي مي باشد و داريم

$$k\frac{du}{dn} = h(T_0 - u)$$

-يك ورق فلزي به صورت زير در نظر مي گيريم .مطلوب است معادلات انتقال حرارتي روي هر نقطه از ورق:

$$\nabla^2 u = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\delta}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

معادله براي هر نقطه از نوار فلزي

حال بايد شرايط مرزي را اعمال كنيم.براي حل معادله نياز به شرايط مرزي داريم.(روي ورق)

۱) مرز۱ $k\left.\frac{du}{dx}\right| = o \qquad u_x(x,o,t) = 0 \qquad 0 < x < l$

$o < x < l, \quad y = 0$

۲) مرز۲ $k\left.\frac{du}{dx}\right| = \phi_0 \qquad Ku_x(o,y,t) = \phi_0 \qquad y > 0$

$x = 0, \quad y > 0$

۳) مرز ۳ $k\left.\frac{du}{dx}\right| = h(o,u) \qquad KUx(0,y,t) = -h(u) \qquad y > o)$

$x = e, \quad y > 0$

دماي اوليه صفحه را نيز بصورت $u(x,y,0)=f(x)$ در نظر مي گيريم

معادله نوسان $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial t^2$

معادلات بر فرم $\nabla^2 u = \delta(u,x,y,z,t)$ را معادلات لاپلاس مي گوئيم و uتابع تحت لاپلاسـين را تابع هارمونيك

مي نامند.كاربرد اين معادلات در مباحث سيالات ، ترموديناميك ، الكترو مغناطيس ،موج ، آكوستيك ، بخوم ،ارتعاشات ، بيولوژي و ..

اگر u_2, u_1 دو تابع و c_2, c_1 دو ضريب در R باشند ، آنگاه $c_1u_1 - c_2u_2$ را تركيب خطي u_1 و u_2 مي ناميم.

e- را يك اپراتور خطي مي ناميم وقتي $e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = c_1e\{u_1\} + c_2e\{u_2\}$

براي مثال انتگرال گير يك اپراتور خطي است:

$$e\{u\} = \int u dt \rightarrow e\{c_1u_1 + c_2u_2\} = \int (c_1u_1 + c_2u_2)du =$$

$$\int c_1 u_1 du + \int c_2 u_2 du = c_1 \int u_1 du + c_2 \int u_2 du$$

خواص اپراتور خطي:

$$e\{0\} = 0$$

$$e\left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\} = \sum_{k=1}^{n} c_k e\{u_k\}$$

اگر M نيز يك اپراتور خطي باشد، در اين صورت:

$$e\{M\{u\}\} = M\{e\{u\}\} = eM\{u\}$$

$$(e+M)\{u\} = e\{u\} + M\{u\}$$

همانطور كه قبلاً بحث شد، معادلات مورد توجه فرم:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu(x,y) = G(x,y)$$

مي باشد.

از بين ،اين معادلات همگن كه در آن G=0 است ، مباني حل معادلات مي باشد.حال اپراتور e را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$e = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

حال بيان معادله همگن با اپراتور e بصورت

مي باشد.(u برابر است با والتاژ، دما،مكان ،پتانسيل،فشار يك سيال) $e\{u\} = 0$

حال مي توان نشان داد كه معادله غير همگن به صورت $e\{u\} = G$ خواهد بودو مي توان نشان داد چنانچه u_1, u_2 جوابها معادله همگن باشد:يعني $e\{u_1\} = 0 \quad e\{u_2\} = 0$

در اين صورت $c_1 e\{u_1\} + c_2 e\{u_2\} = e\{c_1 u_1 + c_2 u_2\} = 0$

نتيجه:اگر u_1, u_2 جوابهاي معادله همگن باشند،هر تركيب خطي آنها جواب معادله همگن است.كا -في آن در يك ضرب شود.بي نهايت جواب بدست خواهد آمد.

اگر u_1 جواب معادله همگن باشد و u_2 جواب معادله ناهمگن ، در اين صورت.

$$e\{u_1\} = 0 \qquad e\{u_2\} = G$$

در اين صورت هر تابع u كه $u = cu_1 + u_2$ جواب معادله غير همگن خواهد بود.

$$e\{cu_1 + u_2\} = ce\{u_1\} + e\{u_2\} = G$$

مثال:مسأله سيم مرتعش زير را در نظر بگيريد $u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t)$

شرايط مرزي اين است: $u_x(o,t)=0$
$u_x(c,t)=0$

در اين صورت جواب معادله همگن به فرم

$$u_0(x,t)=1/2 \qquad U_n(x,t)=\exp\left(-\frac{n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c} \qquad n=1,2,.....$$

مشتق تابع نسبت به t $$u_t(x,t)=\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2k}{c^2}t\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

تفاوتشان در k است $$u_{xx}=\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}\right)\exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt\right)\cos\frac{n\pi x}{c}$$

سپس $ku_{xx}=u(x,t)$

مي توان نتيجه گرفت كه $u=c_ou_o+c_1u_1+.....+c_nu_n$

نيز جواب معادله فوق خواهد بود.

معادلات به فرم $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$

خطي درجه ۲ هستند وقتي A تا F تابعي از x , y , t باشند

چنانچه ضرايب F-A عدد ثابتي باشند،معادله را معادله خطي درجه ۲با ضريب ثابت مي ناميم.

حال اگر $B^2-4Ac>0$معادله هذلولي يا H yperbolic گوئيم و اگر $B^2-4Ac=0$ باشد معادله را بيضوي يا Ecllipite گويند واگر $B^2-4Ac>0$باشد سهمي گوئيم.(Parabolic).

انواع معادلات لاپلاس:

مسأله لاپلاس را مسأله ديريشله يا نوع اول گويند اگر در شرايط مرزي مقدار u روي مرز دانسه شود.

مسأله لاپلاس نوع را نيومن گوينداگر مقدار مشتق u روي بخشي از مرز داده شده باشد.

مسأله ي لاپلاس را نوع سوم گويند اگر روي مرز مقدار$Ku+\frac{du}{dn}$ داده شده باشد.

مسأله لاپلاس را نوع چهارم (كوشي) گويند اگر معادله لاپلاس شامل ترمهاي u_{tt},u_t باشد و مقدار u يا u_t در لحظه صفر دانسته شده باشد.

بيان مختصاتها:

كارترين به استوانه اي

$$\begin{cases} x=p\cos\phi \\ y=p\sin\phi \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{cases} p=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=Arc\ \tan\left(y/x\right) \\ z=z \end{cases}$$

استوانه اي ← كروي

$$r = \sqrt{p^2 + z} \qquad \theta = Arc\tan\left(\frac{p}{z}\right)$$

$$\phi = \phi$$

كروي ← دكارتي

$$\begin{cases} x = rSin\ \theta Cos\ \phi \\ y = rSin\ \theta Sin\ \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كروي ← استوانه اي

$$\begin{cases} p = rSin\ \theta \\ \phi = \phi \\ z = rCos\ \theta \end{cases}$$

كارتزين← كروي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = ArcTan\frac{y}{x}$$

$$z = ArcTan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

بيان معادله لاپلاس در مختصات استوانه اي :

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

در اينصورت تابع u بصورت $u(p,\phi,z)$ خواهد بود.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}.\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial p}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \phi}.\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial p}.\frac{x}{p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} = Cos\phi\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} *$$

به جاي u در عبارت * قرار مي دهيم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = Cos\phi\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) - \frac{Sin\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 `u}{\partial x^2} = Cos\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(Coc\phi\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right) - \frac{Sin\phi}{p}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}Cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Cos\phi\left(Cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{Sin\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\Im}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p}\right) -$$

$$\frac{Sin\phi}{p}\left(-Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + Cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial \phi} - \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)$$

$$= Cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p} + \frac{Cos\phi Sin\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^u u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} -$$

$$\frac{Sin\phi Cos\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \Rightarrow$$

$$Cos^2\phi\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{2Cos\phi Sin\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Sin^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

محاسبه ي: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Sin\phi\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin\phi\,\partial\!\!\!/\partial p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{Cos\phi}{p}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

در نهايت: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Sin^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{2Sin\phi Cos\phi}{p}\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial \phi} + \frac{Cos^2\phi}{p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{Cos^2\phi}{p}\frac{\partial u}{\partial p}$

$$-\frac{2\sin\phi Cos\phi}{p^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial z^2} \qquad \nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 1\!\!\!/p\frac{\partial u}{\partial p} + 1\!\!\!/p^2\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

بيان معادله لاپلاس در مختصات استوانه اي:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

اگر مسأله در راستاي Z ثابت باشد:

$$P^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+p\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}p^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad p\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

معادله زير يك معادله لاپلاس درمختصات استوانه اي است:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x^{2+}}+x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \begin{matrix} o<x<\infty \\ 0<y<2\pi \end{matrix}$$

تمرين:معادله لاپلاس را به معادله كروي تبديل نمائيد.(معادله لاپلاس در فرم كروي)

در نهايت: $\nabla^2 u=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{Cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$

روش ديگر نمايش:

$$\nabla^2 u=1/r\,(ru)_{rr}+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u\theta Sin\theta)_\theta$$

$$(u+ru_r)\rightarrow(u_r+u_r+ru_{rr})$$

روش ديگر نمايش:

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}(r^2 ur)_r+\frac{1}{r^2 Sin^2\theta}u_{\phi\phi}+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta$$

اگر مسأله مستقل از ϕباشد:

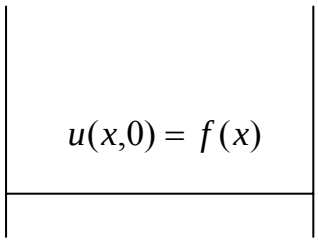
$$r\frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r+\frac{1}{r^2 Sin\theta}(u_\theta Sin\theta)_\theta=\nabla^2 u$$

فصل دوم:حل معادله $\nabla^2 u=G$

روش حل معادله به وسيله معادله همگن و بدست آوردن يك جواب اختصاصي براي مساله مـي باشد.يك روش كاربردي براي حل معادلات لاپلاس ،روش جداسازي متغيرها ميباشد. (Sepration of Vauiable)

بري توضيح اين روش از يك مثال استفاده مي كنيم:

$$Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \qquad 0<x<c \quad t>0$$



شرايط مرزي

$$\begin{cases} Ku_{xx}(x,t)=u_t(x,t) \\ u_x(0,t)=0 \\ u_x(c,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

در نهايت به متوسط يعني f(x) خواهيم رسيد.

قضيه ۱): اگر $u_1 \ldots\ldots u_n$ جواب هاي معادله فوق باشند $u=\sum c_k u_k$ نيز جوابي براي مسأله است.

قضيه ۲): اگر u پيوسته و همگراي يكنواخت باشد سري جواب به ازاي $n=\infty$ همگرا واهد بود.

قضيه ۳): جوابي كه در حالت كلي بدست مي آيد يكتاست.

$u(x,t)$ را مي خواهيم.

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

روش جداسازي متغيرها

تابعي از كان =تابعي از زمان

$$KX''(x)T(t)=X(x)T'(t) \rightarrow \frac{KX''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{T(t)}$$

اين تساوي در صورتي برقرار است كه نسبت كسرها ثابت باشد .

عدد ثابت

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{K}\frac{T'(t)}{T(t)}=\lambda \rightarrow$$

$$\frac{X'(x)}{X(x)}=\lambda \quad \frac{T'(t)}{KT(t)}=\lambda$$

معادله 1 ←

$$X''(x)-\lambda X(x)=0$$

معادله۲ ←

$$T'(t)-\lambda KT(t)=0$$

با حل معادلات ۱و۲ جواب بدست خواهد آمد.به معادلات ۱،۲ معادلات اشتروم ليوويل گويند.

نحوي اعمال شرايط مرزي:

$$1 \quad X'(o)T(t) = X'(c)T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T(t) \neq 0, X'(o) = o_1 X'(c) = 0$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda x(x) = 0 \\ X(o) = 0 \\ X'(c) = 0 \end{cases} \qquad T'(t) - k\lambda t(t) = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k\lambda \Rightarrow CosT(t) = k\lambda t + CosA$$

$$\Rightarrow Cos\frac{T(t)}{A} = k\lambda t \Rightarrow \frac{T(t)}{A} = e^{k\lambda t} \Rightarrow T(t) = Ae^{k\lambda t}$$

نحوي حل معادله :سه حالت در نظر مي گيريم:

$$1)\lambda > 0 \qquad X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = a_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \qquad \lambda > 0$$

فرض $\lambda = a^2 \Rightarrow X''(x) = a^2 \times (x) \Rightarrow X(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$

$$X(x) = Aae^{ax} - Bae^{-ax}$$

$$\begin{cases} X'(o) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \\ X'(c) = 0 \Rightarrow Ae^{ac} - Be^{-ac} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$$

اگر X(x) صفر باشد u (x,t) صفر است پس $\lambda > 0$ جوابي ايجاد نمي كند.

$$2)\lambda = 0 \qquad X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X'(c) = 0 \Rightarrow A = 0$$

در اين حالت

$$X(x) = B \qquad T(t) = A \qquad u(x,t) = X(x)T(t) - A.B$$

$$u(x,o) = f(x) \Rightarrow AB = f(x)$$

پس اگر f (x) ثابت باشد در اين صورت $u(x,t) = f$ واضح است.

$$3)\lambda < 0 \qquad X''(x) = -a^2 X(x) \Rightarrow X(x) = ACosax + BSinax$$

$$\lambda = -a^2$$

$$X'(o) = 0 \Rightarrow -AaSinac + aBCosax = 0\Big|_{x=0} \qquad B = 0$$

$$X'(o)=0 \Rightarrow -AaSinac=0 \Rightarrow Sinac=0 \rightarrow ac=n\pi \Rightarrow a=\frac{n\pi}{c}$$

$$X(x)=Cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) \qquad n=0,1,.....$$

$$T(t)=e^{k\lambda t}=e^{-ka^2t}=e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{c^2}\right)t} \qquad n=0,1,...$$

تمامي u_n ها در معادله ي $ku_{xx}=u_t$ و شرايط مرزي اش صدق مي كند.پس سري زيـر نيـز در معادله ي شرايط مرزي صدق مي كند:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n(x,t)$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)=e^{-k\frac{n^2\pi^2}{c^2}}+Cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$u_n(x,t)=e\frac{-kn^2\pi^2}{c^2}Cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \qquad n=0,1,.....$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\frac{-n^2\pi^2}{c^2}kt}Cos\frac{n\pi x}{c}$$

پس نقط كافي ضرايب a_n را بدست آوريد:

محاسبه ضرايب با استفاده از شرط مرزي $u(x,0)=f(x)$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nCos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

سري $\sum a_nCos\frac{n\eta x}{c}$ بايستي به f (x) همگرا باشد.

براي محاسبه a_n به موارد زير توجه بشود:

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}dx=\frac{c}{n\pi}Sin\frac{n\pi x}{c}=0 \qquad \begin{cases} o & n=1.2,..... \\ c & n=0 \end{cases}$$

$$\int_0^c Cos\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{m\pi x}{c}dx=1/2\int_0^c\left(Cos(n+m)\frac{\pi x}{c}+Cos(n-m)\frac{n\pi}{c}\right)dx$$

$\Rightarrow$ فرض كنيم $n=1,2,.....$ $m=1,2,.....$ n,mn,m طبيعي اند $\begin{cases} 0 & \forall m,n|m\neq n \\ c/2 & n=0 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nCos\frac{n\pi x}{c}=f(x)=a_0+a_1Cos\frac{n\pi x}{c}+a_2Cos\frac{2\pi x}{c}+.....+a_nCos\frac{n\pi x}{c}=f(x)$$

براي محاسبه كافي از دو طرف انتگرال از 0 تا c بگيريم .دراينصورت:

$$a_0\int_0^c dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + ... + ... = \int_0^c f(x)dx$$

$$a_0 c = \int_0^c f(x)dx \Rightarrow a_0 = 1/c\int_0^c f(x)dx$$

براي محاسبه a_1 در $Cos\frac{nx}{c}$ (ضريب خودش)ضرب كرده و انتگرال مي گيريم.

$$a_0\int_0^c Cos\frac{nx}{c}dx + a_1\int_0^c Cos\frac{nx}{c}Cos\frac{nx}{c}dx + ...$$

$$= \int Cos\frac{nx}{c}f(x)dx = a_i\, c/2 = \int f(x)cCos\frac{\eta x}{c}dx$$

به همين ترتيب:

$$a_1 = 2/c\int_0^c f(x)Cos\frac{2\eta x}{c}dx$$

$$a_n = 2/c\int_0^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx \qquad \forall n = 1,2,.....$$

$Ku_{xx} = u_t$ مسآله انتقال حرارت $u_x(0,t) = 0$ $u_x(c,t) = 0$

دماي اوليه نقطه: $u(x,0) = ?$

مثال:فرض كنيد كه f (x) تابعي بصورت زير باشد. $f(x) = 10x$ $c = 10x$

جواب هر معادله را بدست آوريد.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{c^2}kt} Cos\frac{n\eta x}{c}$$

$$k = \frac{\text{ظرفيت حرارتي واحد حجم}}{\text{جرم واحد حجم}}$$

$$a_0 = 1/10\int_0^C 10x\,dx \qquad a_n = 2/10\int_0^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$a_0 = 50$ متوسط $\qquad a_n = 2/10\int_0^{10} 10xCos\frac{n\pi x}{c}dx$

$$a_n = 2/10\int_0^c xCos\frac{n\pi}{10}x\,dx = 2/10\left(\frac{u10}{n\pi}Sin\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^{10} - \frac{10}{n\pi}\int_0^{10} Sin\frac{n\pi x}{c}dx\right)$$

$$\begin{cases} \text{زوج} & a_n = 0 \\ \text{فرد} & a_n = -\dfrac{400}{n^2\pi^2} \end{cases} \quad \text{يا} \quad a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = 2/10\left(\left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 Cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}\right) \Rightarrow a_n = \frac{200}{n^2\pi^2}(Cosn\pi - 1)$$

$$u(x,t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 k}{10}t}Cos\frac{n\pi x}{10}$$

جواب مسأله انتقالي حرارت با شرايط اوليه $f(x)$

روش Sepration od Voualley بهترين روش براي حل معادلات با مشتقات جزئي مي باشد.
با روش فوق الذكر ، جوابي براي معدلا لاپلاس ارائه نموديم .سوالي كه مطرح است اين است كه آيا جواب بدست آمده يكتاست يا خير ؟
فصل ۱۵ كتاب چرچيل ،اثبات يكتايي جواب پيشنهادي به اين روش است.

روش هاي ديگر حل معادلات P D E:

برخي از مسائل PDE را مي توان با روش هاي مبتكرانه حل نمود.اين روش ها صرفاً براي حـالا خاص برقرارند.

مثال:

$$u_{xx}(x,y) = 0 \quad u(0,y) = y^2 \quad u(1,y) = 1$$
$$0 < x < 1 \quad -\infty < y < \infty$$

$u_{xx}(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(x,y) = \phi(y)$ ولي ممكن است ثابت باشد $\Rightarrow u(x,y) = \phi(y)x + h_y$

$$u(0,y) = y^2 \Rightarrow h(y) = y^2 \qquad (\phi(y)\times 0)$$

$$u(1,y) = \phi(y) + h(y) = 1 \Rightarrow \phi(y) = 1 - y^2$$

$$u(x,y) = (1 - y^2)x + y^2$$

روش ديگر

$$a^2 y_{xx}(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

براي مثال:

$$y(x,0) = h(x) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$y_t(x,o) = 0 \qquad t > 0$$

حل:براي حل معادله از تبديل زير استفاده مي كنيم: ←

$$\begin{cases} u = x + at \\ v = x - at \end{cases}$$

يعني مغيرها را مي توان برحسب (v , u) يا (x , t) نوشت

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial u}{\partial t} \qquad y(x,t)\to y(u,v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}.a+\frac{\partial u}{\partial v}.(-a)=a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)-a\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial y}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

با جاگذاري در معادله PDE

$$a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)$$

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\begin{cases}y_n(u,v)=h(u)\\ y_v(u,v)=q(v)\end{cases}$$

يك تابع پيشنهادي بصورت زير است:

$$g(u,v)=f(u)+g(v) \qquad f'(u)\to 0$$

پس جواب به صورت

$$y(u,v)=f(u)+g(v)$$

است و جایگذاري $x+at=u$ $x-at=v$

از شرایط مرزي داریم :

$$y(x,t)=f(x,at)+g(x-at)$$

$$af'(x)-ag(x)=0\Rightarrow f'(x)=g'(x)$$

$$f(x)=g(x)+k \text{ یا } c$$

$$2f(x)=h(x)+c\Rightarrow f(x)=\tfrac{1}{2}(h(x)+c)$$

$$2g(x)=h(x)-c\Rightarrow g(x)=\tfrac{1}{2}(h(x)-c)$$

سایر روش هاي مورد استفده عبارتند از :

۱)تبدیل لاپلاس ۳)تبدیل انتگرالي فوریه

۲)تبدیل فوریه ٤)نگاشت کانتورمال

پس $y(x,t)=f(x,at)+g(x-at)=\tfrac{1}{2}(h(a+at)+h(x-at))$

مثال:معادله لاپلاس زیر را حل کنید؟

$$y_{tt}(x,t)=a^2y_{xx}(x,t)$$

$$y(o,t)=y(c,t)=0 \qquad 1$$

$$y(x,0)=f(x) \qquad y_t(x,0)=0 \qquad 3$$

همانطور که مي دانیم این معادله نوسان تامسر نقش است.طول تار c , a ضریبي است که به جنس تار و جرم واحد طول بستگي دارد.

روش حل:جداساري متغیرها

$$y(x,t)=X(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\begin{cases}\lambda^2\\0\\-\lambda^2\end{cases}$$

الف

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda^2\Rightarrow x''(X)=\lambda^2X(X)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda^2\rightarrow T''(t)=a^2\lambda^2T(t)$$

$$\begin{cases} X(t) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \\ T(t) = Ce^{a\lambda t} + De^{-a\lambda t} \end{cases}$$

$1 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \qquad \Rightarrow A = 0, B = 0$

$X(c) = 0 \Rightarrow Ae^{\lambda c} + Be^{-\lambda t} = 0$ غ‌ق‌ق

ب) $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{matrix} X''(x) = 0 \\ T''(t) = 0 \end{matrix} \begin{cases} X(x) = Ax + B \\ T(t) = Ct + D \end{cases}$

شرايط مرزي $\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X(c) = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases}$

ج) $\lambda < 0 \qquad \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow X(x) = B\,Sin\lambda x + A\,Cos\lambda x \\ T''(t) = -a^2\lambda^2 T(t) \Rightarrow T(t) = C\,Sina\lambda + + D\,Cos\lambda t \end{cases}$

$1 \rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad X_n(x) = Sin\frac{n\lambda}{c}x$

$X(c) = 0 \Rightarrow BSin\lambda c = 0 \Rightarrow \lambda c = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{c} \qquad \forall_n = 0,1,.....$

پس بي نهايت جواب داريم:

$T_n(t) = CSin\frac{an\pi}{} + + DCos\frac{an\pi}{c} + *$

$3: \quad X(x)T'(0) = 0$

$* = 0 \Rightarrow T_n'(0) = 0 \Rightarrow C$

بايد صفرباشد

$$Tn(t) = Cos\frac{an\pi C}{T}$$

بنابراين : $X_n(x) = Sin\frac{n\pi x}{c}$, $T_n(t) = Cos\frac{a\pi x}{c}t$

پس $Y_n(x,t) = Sin\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{a\pi x}{c}t$

پس $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c}Cos\frac{a\pi x}{c}t$. اين تركيب خطي جواب است

فقط بايد b_n را بدست آوريم $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Cos\ \frac{n\pi x}{c}$

برنامه اي محاسبه اي دقيق y(x,t) لازم است كه ضـرايب محاسـبه شـوند.از شـرط اوليـه g(x,0)=f(x) اسنفاده مي كنيم.كه f(x) انحراف اوليه تاراست.(به جاي t صفر مي گزاريم)

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} = f(x)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}dx = -\frac{c}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^c = -\frac{c}{n\pi}(Cosn\pi - 1) = \frac{c}{n\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right) = \frac{c}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\int_0^c Sin\frac{n\pi x}{c}Sin\frac{m\pi x}{c}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ c/2 & n=m\end{cases}$$

با ضرب رابطه $\sum b_n Sin\frac{n\pi x}{c}=f(x)$ در $Sin\frac{n\pi x}{c}$ و گرفتن انتگرال داريم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_o^c b_n Sin\ \frac{n\pi x}{c}Sin\ \frac{m\pi x}{c}dx\ =\int_0^c f\ (x)Sin\ \frac{m\pi x}{c}dx$$

$$c/2\,b_m=\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}\Rightarrow b_m=2/c\int_0^c f(x)Sin\frac{m\pi x}{c}dx$$

مثال f(x) تابع روبرو باشد:

$$\begin{cases}f(x)=0.2x & 0<x<10\\ f(x)=-0.2x+4 & 10<x<20\end{cases}$$

$$=2/20\left(2/10\left(-x\frac{20}{n\pi}Cos\frac{n\pi x}{20}\Big|_0^{10}+\frac{20}{n\pi}\int_0^{10}Cos\frac{n\pi x}{20}dx\right)\right)$$

$$b_n=2/20\int_0^{20}f(x)Sin\frac{n\pi x}{20}dx=2/20\left[\int_o^{10}2/10\,x\,Sin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}\left(-2/20+4\right)Sin\frac{n\pi x}{20}dx\right.$$

$$\left.+\left(\left(\left(-2/20\,x+4\right)\left(\frac{-20}{n\pi}Cos\frac{c\pi x}{20}\Big|_0^{20}+\frac{20}{n\pi}\int_{10}^{20}\left(\frac{-2}{10}Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right)\right)\right)\right)\right]$$

$$.....+\int_{10}^{20}\frac{-2}{20}xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\int_{10}^{20}4Sin\frac{n\pi x}{20}dx$$

$$=2/20\int_{10}^{20}\ xSin\frac{n\pi x}{20}dx+\frac{4\times 20}{n\pi}\left(-Cos\frac{n\pi x}{20}\right)\Big|_{10}^{20}=.....$$

فصل سوم سري هاي فوريه:

معرفي توابع قطعه اي پيوسته:

اگر تابع f(x) در فاصله[a,b] به جز چند نقطه اي محدود قابل شمارش پيوسته باشد،به آن تابع ،

تابع قطعه اي پيوسته مي گويند.

نقاط ناپيوستگي $x_1, x_2, ...x_n$ كه

$$a < x_1 < x_2 ..... < x_n < b$$

نيز لازم است تا حدود زير موجود باشند

$$f\left(x_1^-\right) f\left(x_1^+\right), f\left(x_2^-\right), f\left(x_2^+\right), ..., f\left(x_n^-\right), f\left(x_n^+\right)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 Mx < -0.5 \\ a & -0.5 < x < 0.5 \\ 1 & 0.5 \le x < 1 \end{cases}$$

انتگرال تابع قطعه اي پيوسته را در فاصله (c,d) كه $(c,d) \subset (a,b)$ بصورت زير تعريف مي شود:

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^{x_M} f(x)dx + \int_{x_M}^{x_{M+1}} f(x)dx + ... + \int_{x_{r-1}}^{d} f(x)dx$$

توابع پيوسته حالت خاصي از توابع قطعه اي پيوسته اند.

فوريه براي تقريب توابع در يك بازه از سري هاي سينوسي و كسينوسي استفاده كرد كه مي توان با تقريب مناسب از هر دقت دلخواه كه بخواهيم تابع f(x) اي را كه قطعه پيوسته است،(در فاصله [a,b] ،توسط سري هاي سينوسي و كسينوسي تقريب زد و دو سري ارائه كرد كه به سري هاي سينوسي فوريه و كوسينوسي فوريه معروف هستند.

سري كسينوسي فوريه: پيشنهاد فوريه براي بسط كسينوسي بصورت روبرو است

$$f(x) = {a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi x}{c}$$

از اين سري براي تقريب توابع f(x) قطه اي پيوسته در فاصله 0 تا C استفاده مي شود.

مثال: تابع f(x) كه $0 < x < \eta$ را توسط سري كسينوسي تقريب بزنيد.

$$f(x) \approx {a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos \frac{n\pi x}{\pi}$$

براي محاسبه ضريب a_n داريم:

$${a_o}/{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cosnx = f(x) \Rightarrow {a_o}/{2} \int_0^{\eta} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\eta} Cos\, nx\, dx = \int_0^{\eta} f(x)dx$$

$$= a_o/2 \times \pi + o = \int_o^{\eta} f(x)dx \Rightarrow a_o = 2/\pi \int_o^{\eta} f(x)dx$$

$$a_o/2 \int_o^{\eta} Cos\, mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_o^{\eta} Cos\, nx\, Cos\, mx\, dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, 1/2 \left[\int_o^{\eta} (Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx \right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, 1/2 \left[\int_o^{\eta} (Cos(n-m)x - Cos(nn+m)x)dx = \int_o^{\eta} f(x) Cos\, mx\, dx \right.$$

بنابراين در كل

$$a_n = 2/\pi \int_o^{\eta} f(x) Cos\, nx\, dx$$

بسط سري سينوسي:

اگر f(x) يك تابع در فاصله [0,c] باشد و بصورت قطعه اي پيوسته باشد .مي توان f(x) را توسط يك سري سينوسي فوريه تقريب زد.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi x}{c}$$

چنانچه n به بي نهايت ميل كند ،تقريب تا حدود دلخواه دقيق مي شود.

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi x}{c}$$

مطلوب است b_n ها:

براي محاسبه f(x) توجه شود كه :

$$\int_o^c Sin \frac{n\pi x}{c} Sin \frac{m\pi x}{c} dx = \int_o^c f(x) Sin \frac{m\pi x}{c} dx$$

پس با ضريب طرفين در سينوس $\frac{m\pi x}{c}$ و انتگرال جواهيم داشت

$$b_m \, c/2 = \int_o^c f(x) Sin \frac{m\pi x}{c} dx \Rightarrow b_m = 2/c \int_o^c f(x) Sin \frac{m\pi x}{c} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_o^c Sin \frac{n\pi x}{c} Sin \frac{b\pi x}{c} dx = \int_o^c f(x) Sin \frac{m\pi x}{c} dx$$

مثال:تابع f(x)=x را در فاصله (o,π) با بسط سينوسي فوريه ثقريب بزنيد:

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin \frac{n\pi x}{c} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\, \pi x$$

$$b_n = 2/\pi \int_o^{\pi} x Sin\, nx\, dx = \frac{-x}{n} Cos\, nx \Big|_o^{\pi} + 1/n \int_o^{\pi} Cos\, nx\, dx$$

$$= 2/\pi \left(\pi/n (-1)^{n+1} - o + 1/n^2 \, Sinx \Big|_o^{\pi} \right) = \left(\frac{(-1)^{n+1} \times \pi}{n} \right) \times 2/\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n} Sin\, nx = 2SinX - Sin2x + 2/3\, Sin3x.....$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي اولاً داراي پريور است.و نيز به دليل

اينكه $Sin\,nx$ فرد است بنابراين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\,nx$ هم فرد است.

شكل روبرو بسط تابع $f(x)$ و خود تابع را مشخص مي كند.

$f(x)=x \qquad [0,\pi]$ $\qquad \sum b_n Sin\,nx$

البته اگر همين تابع را توسط كسينوسي فوريه بيان مي كرديم داراي خواص زير بود

$$f(x)=a_o/2+\sum an\,Cosnx$$

خواص:۱-بسط داراي پريور 2π (ك،م،م)

۲-بسط به دليل اينكه از جملات كسينوسي تشكيل شده زوج است.

نكته:پريود يك تابع ثابت هر عددي مي تواند باشد .

فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (-c،c)همانطور كه مي دانيم هر تابع را مي توان بصورت جمع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{كه} \qquad g(-x)=-g(x) \;,\quad h(-x)=h(x)$$

$h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه $h(x)$ را درفاصله (0،c) با بسط كسينوسي تقريب

بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(-c،c) تقريب زده خواهد شد.

$$h(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c} \qquad a_n=2/c\int_o^c h(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\pi x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\frac{n\pi x}{c} \qquad \text{كه} \qquad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (-c،c) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا نمائيم.

$$a_n=2/c\int_o^c \frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\pi x}{c}dx=1/c\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dxt\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]$$

$$=1/c\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx+\int_{-c}^{o} f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]=1/c\int_{-c}^{c} f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

بنابراين $f(x)$ در فاصله $(-c,c)$ با بسط زير مشخص مي شود.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\ \frac{n\pi x}{c}+b_n Sin\ \frac{n\pi x}{c}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)Cos\ \frac{n\pi x}{c}dx \qquad b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)Sin\ \frac{n\pi x}{c}dx$$

مثال: تابع زير را بسط فوريه بدهيد: $x\leftarrow(-\pi,\pi)$

$$f(x)\begin{cases}0 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}\\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n Cos\ nx+b_n Sin\ nx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\ nx\,dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sin\ \frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} 1\times Cosnx\,dx=\frac{1}{n\pi}Sinnx\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{n\pi}\left(Sin\frac{n\pi}{2}+Sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{1}{n\pi}\times 2Sin\frac{n\pi}{2}$$

حال $\qquad b_n:\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Sin\ nx\ dx=0$

بنابراين

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}Sin\frac{n\eta}{2}\right)Cos\,nx \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx=1$$

a_o را محاسبه مي كنيم

يا مقدار متوسط =

قضيه:اگر تابع $f(x)$يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي $(-\pi,\pi)$ باشد و $f(x)$ بسط فوريه $f(x)$ باشد،خواهيم داشت.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\,nx\,dx+b_n Sin\,nx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnx\,dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sin\,nx\,dx$$

حال چنانچه يك نقطه ناپيوستگي تابع $f(x)$باشد و با توجه به اين كه تابع $f(x)$پيوسته است.
مقدار $f(x_0)$بوسيله رابط زير مشخص مي شود:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\,nx$$

كه به قضيه متوسط جام موسوم است.
اين قضيه دولم رياضي اثبات مي شود.

مثال :تابع $f(x)=x$ در فاصله (π,π)بسط داده و قضيه متوسط آن را تست كنيد.

$$f(x)=x \qquad f(x)=a_o/1+\ a_n Cosnx+\ b_n Sinnx$$

$$a_n=1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Cos\ nx\ dx \qquad b_n=1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}f(x)Cos\ nx\ dx$$

$f(x)$ يك تابع فرد است پس: $a_n=0$

$$b_n=1/\pi\int_{-\pi}^{\pi}x\ Sin\ x\ dx=2/\pi\int_{o}^{\pi}Sin\ nx\ dx=2/\pi\left(\frac{-x}{\pi}Cosx\ \Big|_{o}^{\pi}+\right)$$

$$+1/\pi\int_{o}^{\pi}Cos\ nx\ dx=2/\eta\int\frac{-\pi(-1)^n}{\pi}+o+1/n^2\ Sin\ nx\Big|_{o}^{\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

پس

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$

پس

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}Sin\ \ nx$$

$$=2\left(Sinx-1/2\ Sin2x+1/3\ Sin3x-1/4\ Sin4x+.....\right)$$

وقتي x نقطه پيوستگي f باشد در غير اينصورت در نقطه ناپيوستگي متوسط تابع $f(x)=f(x)$ f مي شود.

$F(-\pi)=0 \qquad F(\pi)=0$

نقاط ناپيوستگي $f:-\pi,\pi$

كه اين با متوسط مقادير جام برابر است.

خواص ضرايب سري فوريه :

اگر $S_N(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{N}a_n\,Cosnx$ آنگاه داريم :

$$2/\pi\int_o^{\pi} S_N(x)Cos\ nx = a_n$$

$$S_N(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{N}a_n Cosnx$$

نيز انتگرال به صورت زير محاسبه مي شود:

$$2/\pi\int_o^{\pi}(S_N(x))^2\,dx$$

$$2/\pi\int_o^{\pi}(a_o/2+\sum a_n Codnx)S_N(x)dx=2/\pi\int_o^{\pi}a_0/2\,S_N(x)dx+2/\pi\sum a_n\int_o^{\pi}S_N(x)Cosnxdx$$

$$=2/\pi\,\frac{a_o^2}{4}\int_o^{\pi}dx+2/\pi\sum_{n=1}^{N}a_n^2\times\pi/2=\left(\frac{a_o^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n^2\right)$$

حال براي حالت سينوسي داريم:

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,Sin\ nx$$

داريم

$$2/\pi\int_0^{\pi}S_N(X)\,Sinmxdx = b_m$$

لذا

$$2/\pi\int_0^{\pi}[S_N(X)]^2dx=\sum_{n=1}^{N}2/\pi\int_0^{\pi}S_N(X)b_n Sinnxdx$$

$$=\sum_{n=1}^{N}b_n\times 2/\pi\int_0^{\pi}S_N(X)Sinnxdx=\sum_{n=1}^{N}(b_n)^2$$

براي هر دو حالت داريم :

$$E=2/\pi\int_0^{\pi}(f(x)-S_N(X))^2dx\ \geq\ 0$$

$$2/\pi\int_0^{\pi}f^2(x)dx\quad 4/\eta\int_0^{\pi}f(x)S_N(x)+2/\eta\int_0^{\pi}(S_N(x))^2dx$$ به اين صورت مي نويسيم

از آنجا كه f تابعي قطعه اي پيوسه است كه به صورت سنوسي يا كسينوسي بسط فوريه داده مي شود و با توجه به اينكه تابع $f(x)$ در فاصله $(0,\pi)$ محدود است ، لذا عبارت از 0 تا η :

محاسبه مقدار عبارت:

$$\int_0^{\pi}f^2(x)dx$$

(قطعه اي است محدود)

$$2/\pi\int_0^{\pi}f(x)S_N(x)dx$$

براي حالت كسينوسي داريم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(\frac{a_o}{2} + a_n Cosnx\right)dx = \frac{2}{\pi}\times\frac{a_0}{2}\int_0^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)Cosnxd$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

براي حالت سينوسي داريم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\left(\int_0^{\pi} b_n Sinnx\right)dx = \sum_{n=1}^{N} bn\times\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)Sinnxdx = \sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\pi}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$ قضيه پارسوال

در حالت كسينوسي براي حالت نامساوي داريم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx \geq \left(a_o/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq 2/\pi \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

اين نامساوي به ازاء هر N برقرار است(من جمله زماني كه N به بي نهايت ميل كند)

پس:

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \geq 2/\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

سري $\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1} a_o^2$ يك سري با جملات مثبت و مقدار محدود است پس:

براي حالت سينوسي داريم:

$$\lim_{n} a_n = 0$$

$$2/\pi \int_0^{\pi} f(x) \geq 2 \times \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2\right) \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx \qquad \lim_{n} b_n = 0$$

پس همواره دنباله هاي a_n , b_n در سري فوريه به سمت ميل خواهند كرد.

قبلاً گفتيم كه بسط فوريه تابع $f(x)$ كه در بازي $(-n, n)$ تعريف شده بود بصورت:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_m Cosx + b_n Sinn_x\right)$$

بود و با ضرايب زير تعريف مي شد:

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)Cosdx \qquad b_n = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(x)Sinnxdx$$

و گفتيم كه تابع $f(x)$بايستي قطعه اي پيوسته باشد در اين صورت بسط فوريه تابع $f(x)$كه در نقاطي كه $f(x)$ پيوسته است به $f(x)$ همگرا است و در نقاطي كه $f(x)$ناپيوسته است با متوسط جام برابر است .پس همواره بسط فوريه همگراست.

طبق قضيه نشان داريم كه : $\lim ax = 0 \quad , \quad \lim bx = 0$

و نيز نشان داريم كه: $a_0{}^2/_2 + \sum_{n=1}^{N} a_n{}^2 \le {}^1/_R \int_{-R}^{R} f(x)Cos^2 dx \ge 1$

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \le {}^1/_R \int_{-R}^{R} f^2 Cos(x)\,dx$$

قضيه:نشان دهيد كه سري $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{ax^2 + bx^2}$ همگرا است:

اثبات:اگر b_n, a_n ضرايب بسط فوريه ي $f(x)$ باشند داريم:

$$a_n = {}^1/_\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x)Cosnx \quad , \quad b_n = {}^1/_\pi \int_{-\pi}^{\pi} \beta(x)\sin nxdx$$

حال ضرايب α_n , β_nرا به صورت زير تعريف مي كنم:

$$\alpha_n = {}^1/_\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nxdx \quad , \quad \beta_n = {}^1/_\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)Sinnxdx$$

با انتگرال گيري جزء به جزء داريم: $\alpha_n = a_n \times n \quad , \quad \beta_n = nb_n$

حال براي نشان دادن همگرايي $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_m{}^2 + b_n{}^2}$ مقدار S_Nرا بصورت زير تعريف مي كنيم.

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}\right)^2$$

نشان مي دهيم كه S_N به ازاء هر مقدار N همگراست:

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\alpha_n^2}{n^2} + \frac{\beta_n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$$

$$S_N = \left(\sum_{n=1}^{N}\left({}^1/_{n^2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2 < \left(\sum_{n=1}^{N}{}^1/_{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)\right)$$

حال بايد اين نامساوي توجيه شود.

$\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{N}{}^1/_{n^2}$

اما همگراست و هم طبق ۱و۲ همگرا هستند.البته بهتر است بگوئیم

محدود هستند .بنابراين نز محدود مي باشد.سپس سري $\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)^{1/2}$ همگراست.

قضيه پارسوال: طبق اين قضيه انرژي متوسط $f(x)$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ بر حسب ضرايب بسط فوريه قابل محاسبه است.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1} am\ Cosbx + bn\ \sin nx\right)dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\times\frac{1}{\eta}\int f(x)dx + \sum an\left(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Cos\,nx\,dx\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f(x)Sin\,cx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta}\frac{a_0}{2}f(x)dx + \sum_{n=1} a_n\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Cosnxdxt + \sum_{n=1} b_n\frac{1}{\eta}\int_{\eta}^{\eta} f(x)Sinnxdx$$

$$= \frac{a_o^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} an^2+\sum_{n=1}^{\infty} bn^2$$

پس $\frac{1}{\eta}\int_{-\eta}^{\eta} f^2(x)dx = \frac{a_o^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(an^2+bn^2\right)$ (از خواص بسط فوريه)

مشتق پذيري و انتگرال بسط فوريه:

اگر f(x) تابع قطعه اي پيوسته در فاصله $(-\eta,\eta)$ باشد و داراي بسط فوريه زير باشد:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,Cos\,nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n Sin\,nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Cos\,nx\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Sin\,nx\,dx$$

آنگاه انتگرال تابع f(x) بصورت زير محاسبه مي شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)du = \frac{a_0}{2}(x+\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(a_n Sin\,nx - b_n\left(Cos\,nxt(-1)^{n+1}\right)\right)$$

يعني انتگرال بسط فوريه همواره قابل محاسبه است.

براي مشتق پذيري بسل لازم است كه f(x) در فاصله $[-\pi,\pi]$ تعريف شده باشد و داشته باشيم:

$$f'(x)=f(x)$$

آنگاه $f'(x)$ در نقاطي كه $f''(x)$ موجود است با مشق بسط فوريه برابر خواهد بود:

$$f'(x)=\sum\left(-n\,a_n\,Sin\,nx+nb_n Cos\,nx\right)$$

در فصل قبل حل معادلات لاپلاس به روش جداسازي متغيرها آورده شد $y_t = a^2 y_{xx}(x,t)$

$y(a,t)=0 \rightarrow y(c,t)=0 \qquad y(x,o)=f(x)$

معادلات به فرم زير را به راحتي مي توان حل كرد:

$$y_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

براي حل معادلات f(x) را بصورت زير در نظر مي گيريم:

$$u_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

$$U(x,t)=u(z,t)+\phi(x)$$

$$U_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)+h(x)$$

$$u_t(x,t)a^2(u_{xx}(x,t)+\phi''(x))+h(x)$$

$$a^2\phi''(x)+h(x)=0 \rightarrow \phi''=-1/a^2\, h(x)$$

$$\phi(x)=\frac{-1}{a^2}\iint h(t)dtdv \qquad u_t(x,t)=a^2 u_{xx}(x,t)$$

حل معادله لاپلاس در صفحه (نوسان صفحه)

$$U_{tt}(xyt)=a^2[(Z_{xx})(xy+)+Z_{yy}(xy_+)]$$

$$0<x<a \quad 0,<y<b \quad +>0$$

شرايط مرزي:

$$Z(0,y,t)=0 \qquad Z(a,y,t)=0 \qquad Z(x,0,t)=0$$

$$Z(x,b,t)=0 \qquad Z(x,y,0)=f(x,y)$$

روش :جدا سازي متغيرها:

$$Z(x,y,t)=X(x).Y(y).T(t)$$

$$XY\,T'' = a^2(x''yt + XY''T) \Rightarrow \frac{T''}{a^2T}=\frac{x''}{x}+\frac{y''}{y}$$

بنابراين داريم:

همانطور كه قبلاً گفتيم اين معادله صرفاً براي $\lambda < 0$ برقرار است: $\frac{T''}{a^2T}=-\lambda^2$

$$T''=-a^2\lambda^2 T$$

$$\frac{X''(x)}{x(x)}+\frac{y''}{y}=-\lambda^2 \rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{-y''}{y}-\lambda^2=\begin{cases}+\eta^2\\0\\-\eta^2\end{cases}$$

پس داريم:

$$\begin{cases} x(0)=0 & x(a)=0 \\ y(0)=0 & y(b)=0 \end{cases}$$ شرايط مرزي

حل:

$$\frac{X''}{X}=-\eta^2 \Rightarrow X''(x)=-\eta^2 X \Rightarrow X=BSin\eta x+ACos\eta x$$

$$X(a)=0 \rightarrow A=0$$

$$X(a)=0 \rightarrow o=BSin\ \eta a \Rightarrow \eta a=x\eta \Rightarrow \eta=\frac{n\eta}{a}$$

$$\Rightarrow X_n^{(x)}=Sin=(\frac{n\eta}{a})x$$

$$\frac{y''}{y}-\lambda^2=-\eta^2 \Rightarrow \frac{y''}{y}=\lambda^2-\eta^2 \Rightarrow y''=(\lambda^2-\eta^2)y$$

پس براي اينكه اين رابطه جواب داشته باشد ،مطابق بالا بايد ضرايب $\lambda^2-\eta^2$ منفي باشد.

$$y(0)=0$$
$$y(b)=0$$
$$y''=-(n^2\lambda^2)y$$
$$y=c\sqrt{n^2-\lambda^2}y+DSin\sqrt{\eta^2-\lambda^2}y$$
$$\sqrt{\eta^2-\lambda^2}=m\eta/b \Rightarrow \eta^2-\lambda^2=\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2 \Rightarrow \lambda^2=\left(\frac{n\eta}{a}\right)^2-\left(\frac{m\eta}{b}\right)^2$$
$$\Rightarrow \lambda=\eta\sqrt{\frac{n^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}}$$

پس η,λ بدست مي آيند.

$$\gamma_m=Sin\left(\frac{m\eta}{b}\right)y$$

۱-اگر $z_1=2\lambda$ $Z_2=1-\lambda$ $Z_3=3-2\lambda$مطلوب است:

الف) $-1+i$ ب) $1+\sqrt{3i}$ ج) $3i$

۲-فرم قطبي اعداد مختصات زير را نشان دهيد:

الف) $-1+i$ ب) $1+\sqrt{3}i$ ج) $3i$

۳-اگر $Z_1 = 2e^{i\pi}$, $Z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}}$, $Z_3 = se^{\frac{i}{u}}$ مطلوب است:

الف) $\frac{Z_1}{Z_3}$ ب) $Z_1\overline{Z_2}$ ج) $Z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

٤-با استفاده از قانون دو مقدار $Sin3\theta$, $Cos3\theta$ را بيابيد

۵-نشان دهيد روابط زير برقرار است:

الف) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$ ب) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$

ج) $\overline{iz} = -i\overline{z}$ د) $\overline{\overline{Z} + 3i} = z - 3i$

٦-مجموعه نقاطي را پيدا كنيد كه در شرايط زير صدق كنند:

الف) $\mathrm{Re}(\overline{z} - i) = z$

ب) $|z - i| = |z + i|$

۷-اگر $Z_1 Z_2 = 0$ ثابت كنيد حداقل يكي از آنها صفر است.

۸-ريشه معادلات زير را پيدا كنيد:

الف) $Z^2 + 4 = 0$ ب) $Z^{\frac{2}{3}} + 3i = 0$ ج)

۹-نشان دهيد هذلوي $x^2 - y^2 = 1$ را مي توان بصوت $z^2 + z^{-2} = 2$ نوشت.

۱۰-با استقراء فرمول چند جمله اي متقابل

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{i}z + \frac{n(n-1)}{2i}z^2 + \ldots. \frac{n(n-1)(n-2)+\ldots.(n-k+1)}{ki}z^x + \ldots.. + z^n$$

را كه در آن n عددي صحيح و مثبت است بيابيد.

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ را به طريق برداري

مشخص كنيد.

الف) $z_{1=} = (-3,1)$ $z_2 = (1,4)$

ب) $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_{2=} = x_{1-} iy_1$

۱۲-نشان دهيد:

$$\left|(2\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i)\right| = \sqrt{3}|2z + 5|$$

۱۳-ثابت كنيد: $|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| < \sqrt{2}|z|$

١٤-يك مقدار از argz را بيابيدهرگاه:

$$Z = \frac{i}{-2-2i} \qquad Z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$$

الف) ب)

از خواص مربوط به فضاي برداري داشتيم كه اگر f , g دو بردار بصورت زير باشند

$$\vec{f} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{g} : (b_1, b_2, b_3)$$

در اين صورت خواص زير را داريم:

$$\vec{f} . \vec{g} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad |f|^2 = f . f = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\vec{f} . \vec{g} = \left|\vec{f}\right| . \left|\vec{g}\right| . Cos\theta \qquad \left|\vec{f} - \vec{g}\right| = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)\right)^{1/2}$$

$$f + g \Rightarrow \vec{f} . \vec{g} = 0 \qquad |f| = 1 \Rightarrow f = \text{بردار نرمال}$$

اگر $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ مجموعه برداري ارتوگونال باشند يعني:

$$< \phi_i , \phi_J >= 0 \quad , \quad < \phi_i \phi_i >= |\phi_i|^2$$

در اين صورت بردارهاي $\frac{\phi_1}{|\phi_1|}, \frac{\phi_2}{|\phi_2|}, ..., \frac{\phi_n}{|\phi_n|}$ مجموعه بردارهاي ارتونرمال هستند.

ترجيحاً لازم است كه بردارهاي $\phi_1 ..... \phi_n$ از هم مستقل باشند .چون در غير اين صورت يكي را بر حسب ديگري مي توان نوشت و صفر داخلي آنها صفر نخواهد شد.

هر بردار در فضاي ايجاد شده بوسيله اين بردار را مي توان با تركيب خطي از اين بردارها بدست آورد.

$$f = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 , ..., c_n \phi_n$$

نحوي محاسبه ضرايب بصورت زير است:

$$C_K < \phi_k \phi_k >=< f . \phi_k > \Rightarrow C_k = \frac{1}{\|\phi_k\|} < f , \phi_k >$$

استنتاج براي فضاي توابع:

اگر f , g توابعي در فاصله (a,b) و به فرم قطعه اي –پيوسته باشد(pwc) ،چنانچه فاصله را به Δx هاي كوچك تقسيم كنيم ،خواهيم داشت:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_n)$$
$$g = (g_1, g_2, ..., g_n)$$

ضرب برداري را بصورت زير تعريف مي كنيم كه f , g:

$$(f,g)=\sum f_K g_K \Delta x_K$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f,g)=\int_a^b - f(x)g(x)dx$$

كه اين تعريف ضرب داخلي براي توابع مي باشد.

ناحيه a ,b را ضرب داخلي روي آن تعريف مي شودFundamental interval يا بازه ي اساسي مينامند.

خواص زير براي ضرب داخلي توابع برقرار است:

$$(f,g)=(g,f)$$

$$(f,g+h)=(f,g)+(f,g)$$

$$(cf,g)=c(f,g)$$

$$(f,f)=\|f\|^2\geq 0\to\|f\|=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)$$

$$(f,g)=0\Rightarrow f+g$$

$$|f-g|^2=\int_a^b (f-g)^2\,dx$$

$(f,g)=1\Rightarrow$ f نرمال مي باشد

مثال:

$$<\Psi_i(x,\Psi_j(x))>=2/c<\Psi_i\Psi_j>=\delta(i,j)\quad 0<x<c\qquad \Psi_n(x)=Sin\frac{n\pi x}{c}$$

حال دسته توابع $\phi_i=\sqrt{\frac{2}{c}}Sin\frac{n\pi x}{c}$ دسته توابعي از ارتونرمال هستند زيرا:

مثال:دسته توابع $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{c}}\ Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}$ دسته توابع ارتونرمال هستند. $0<x<c$

مثال:دسته توابع $\phi_0=1/\sqrt{2c}$, $\phi_{2_{n-1}}=1/\sqrt{c}Cos\frac{n\pi x}{c}$, $\phi_0(x)=1/\sqrt{c}Sin\frac{n\pi x}{c}$

دسته توابع از ارتونرمال در(-C,C) هستند.

روش كلي فوريه براي بسط توسط توابع ارتونرمال:

$$f=c_0\phi_0+c_1\phi_1+.....+c_k\phi_k+.....+c_n\phi_n$$

كه $C_k=<f.\phi_k>\quad k=0,1,.....,\quad C_k=\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx$

مثال از محاسبه ضرايب:

$$f(x)=C_0\frac{1}{\sqrt{2c}}+C_1\frac{1}{\sqrt{2}}Cos\frac{n\pi x}{c}+C_2\frac{1}{\sqrt{2}}Sin\frac{n\pi x}{c}+.....$$

$$C_k=<f(x).\frac{1}{\sqrt{c}}Cos\frac{n\pi x}{c}>=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$a_k=\frac{ck}{\sqrt{c}}=1/c\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\pi x}{c}dx$$ كه همان ضرايب سري فوريه است.

قضيه اگر $\phi_n(x),.....,\phi_2(x),\phi_1(x)$ توابع از ارتونرمال باشد،يعني:

$$<\phi_m(x).\phi_k(x)>=\begin{cases}0 & k\neq m\\ c_k^2=1 & k=m\end{cases}\qquad k,m=1,2,.....$$

و $\phi(x)$ يك تركيب خطي از توابع ارتوگونال $\phi_n(x),.....\phi_1(x)$ باشد،

$$\phi(x)=\delta_1\phi_1(x)+.....+\delta_n\phi_n(x)$$

و نيز اگر f (x) يك تابع در همان بازه ي توابع ارتوگونال باشد، آنگاه تعريف مي كنيم بهترين تخمين تابع f (x) توسط ϕ_k ها كه k=1,2,.....n باشد ،تابعي همانند $\phi_{(x)}$ است به طوري كه ضرايب همان ضرايب فوريه باشد.

اثبات:اگر فرض كنيم $\delta_n,.....\delta_2,\delta_1$ اعداد دلخواهي باشد و $\phi(x)$ تابع تخمين f f (x) باشـد لازم است تا اندازه خطا مينيمم شود $|f(x)-\phi(x)|$

اين مقدرا بانام خطا يعني $|f(x)-\phi(x)|$ ناميده مي شود.

$$E=|f(x)-\phi(x)|=\left(\int_a^b f(x)-\phi(x)^2dx\right)^{1/2}$$

$$E^2=|f(x)-\phi(x)|^2=\int(f(x))-\phi(x)^2\,dx$$

$$\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\phi^2(x)dx$$

$$=|f(x)|^2-2\int_a^b f(x)\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)dx+\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)\right)^2dx$$

$$=|f(x)|^2-2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\int_a^b f(x)\phi_k(x)dx+\int_a^b\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\phi_k(x)\delta_\ell\phi_\ell(x)dx$$

براي Min كردن E^2 بايد سمت راست تابع Min شود.انچه متغيير است δ_k است .يعـني $\phi(x)$ ساخته شده با ضرايب δ_x وقتي بهترين تخمين است كه ضرايب δ_k همان ضرايب فوريه

$$\Rightarrow E^2=\sum|\phi_k|^2+2\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\delta_k-|f_k|^2)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{kk}^2-2c_k\delta_k+c_k^2\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$$

باشند.

$$\delta_k = ck$$

$$= |f(x)|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \delta_K c_k + \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 (1)$$

پس

$$c_k = < f(x)\phi_k(x) >$$

$$\delta_k = c_k \Rightarrow E^2 = \left\| f \right|^2 \left| - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \right.$$

و چون $E^2 > 0$ (انتگرال از يك تابع مثبت)پس:

$$|f(x)|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \qquad \forall_n \in N$$

(لذا وقتي كه n= ∞)

به نامساوي فوق نامساوي بسل گويند.

وقتي $n \to \infty$مي توان نشان داد كه $\lim C_n=0$ به عبارتي سري $\sum_{k=1}^{n} ck^2$ به ازاء $\infty \to$به سمت $|f(x)|^2$ همگرا مي شود. يعني:

$$|f(x)|^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

مجموعه $\{\phi_k(x)\}$ روي (a,b) را كامل گوئيم اگر براي هر تابع f با دامنه (a,b) داشته باشيم:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2 = |f|^2$$

يعني خطا =0

بنابراين تخمين با مجموعه اي از ارتونرمال كامل به خطاي صفر مي انجامد.

مثال:مجموعه اي توابع ارتونرمال هندسي:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Cos\, nx, \quad \phi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Sin\, nx$$

اين توابع روي $(-\pi, \pi)$ كامل هستند.

C هاي زوج:ضرايب b_n

C هاي فرد :ضرايب a_n

انواع ديگر ارتوگوناليستي:

گوئيم توابع $\phi_k(x)$ در (a , b) با وزن p(x) ارتوگونال است اگر

$$\int_a^b P(x)\phi_k(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ cte & m = k \end{cases}$$

اين ارتوگونايستي را مي توان معادل با ارتوگونااليستي توابع $\sqrt{p(x)}\phi_k(x)$ گرفت.مثلاً توابع بسل به اين صورت تعريف مي شوند و توابعي كه داراي دومتغيير هستند نيز مي توان تحت توابع پايه $\phi_{mn}(x,y)$بسط داد به گونه اي كه ضرب داخلي مربوط به صورت سطحي زير تعريف شود.

$$\int\int_R \phi_{mn}(x,y)\quad \phi_{ek}(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & m \neq e, n \neq k \\ c_{mn}^2 & m = e, n = k \end{cases}$$

حال هر تابع را مي توان بر حسب توابع $\phi_{mn}(x,y)$ بسط داد.

تخمين وقتي بهينه است كه ضرايب همان فوريه باشند.

براي توابع مختلف نيز مي توان ارتوگونااليستي تعريف نمود.

$$\omega = u + iv$$

$$\int_a^b \omega(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dx$$

$$\overline{\omega}(t) = u(t) - iv(t)$$

حال ضرب داخلي را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$< \omega_m(t), \omega_k(t) >= \int_a^b \omega_m(t)\overline{\omega_k(t)} \qquad dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \int\left(u_m^2(t) + v_m^2(t)\right)dt \end{cases}$$

كه آن را ضرب داخلي هرميتيك گويند.

انتگرال فوريه: تابحال در مورد بسط فوريه براي توابع پريوديك در فاصله (-2,2)صحبت كرده ايم.نشان داديم كه تخمين بهينه اي براي توابع در فضاي هندسي موجود است.

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\frac{n\eta x}{c} + b_n Sin\frac{n\eta x}{c}$$

$$a_0 = 1/c\int_{-c}^{c} f(x)dx \qquad a_n = 1/c\int f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$

$$b_n = 1/c\int_{-c}^{c} f(x)Sin\frac{n\eta x}{c}dx$$

با جايگذاري داريم كه:

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c}\left[\int_{-c}^{c} f(s)\cos\frac{n\pi s}{c}\cos\frac{n\pi x}{c}ds + \int_{-c}^{c} f(s)\sin\frac{n\pi s}{c}\sin\frac{n\pi x}{c}ds\right]$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(s)ds + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(s)Cos\frac{n\eta}{c}(s-x)dx$$

که نمايش جديدي براي سري فوريه است.

حال چنانچه f(x) يك تابع از $(-\infty,\infty)$ باشد و مطلقاً انتگرال پذير باشد يعني:

محدود باشد: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(s)|ds$

مي خواهيم ببينيم در شرايط فوق ،بسط فوريه به چه فرم جديدي تبديل مي شود.

براي اين منظور تعريف مي كنيم : $\Delta\alpha = \frac{\eta}{c}$

تحت شرايط آورده شده ،بسط فوريه به صورت زير تبديل مي شود:

$$\frac{1}{c}\sum_{n=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds = \frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)Cos(n\Delta\alpha(x-s))ds$$

$$\frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x$$

$$1 \quad = \frac{1}{\eta}\int_{o}^{\infty} F(\alpha,x)d\alpha = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos(\alpha(x-s))dsd\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n\Delta\alpha)\Delta x = \int_{o}^{x} f(x)dx = \quad f(x) = \int_{0}^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x + B(\alpha)Sin\,\alpha x)$$

بنابراين در حالتي كه $c \to \infty$ بسط فوريه به فرم فوق كه با نام انتگرال فوريه ناميده مي شود ميل مي كند:

$$f(x) = \frac{1}{\eta}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha(s-x)dsdx \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u du \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha u du$$

مثال: $f(x) = e^{-2|x|}$ مطلوب است محاسبه ضرايب $B(\alpha), A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Cos\,\alpha s ds \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)Sin\,\alpha s ds$$

$$|bn|n^4 < M \to \left|4bn\,Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \to \left|b_n Sin\frac{n\eta x}{c}\right| \le |b_n|$$

$$\le \sum\left|b_n \le \frac{M}{n^4} = M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right|$$

انتگرال فوریه $e^{-|x|}$ را بنویسید:

روش حل دوم: $f(x)=\int (A(\alpha)Cosx + B(\alpha)Sin\alpha x)dx$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Cos\,\alpha x\,dx \quad , B(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)Sin\,\alpha x dx$$

$$f(x)=e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty \qquad B(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}Sin\,\alpha x\,dx$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(A(\alpha)Cos\,\alpha x + B(\alpha)Sin\,\alpha x)dx \quad \mathrm{Re}\int_{o}^{\infty} e^{-x}e^{i\alpha x} \qquad B(\alpha)=0, A(\alpha)=\frac{2}{\eta}\int_{0}^{\infty} e^{-x}Cos\,\alpha x dx$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\eta}\int e^{-|x|}\ Cos\,\alpha x\,dx$$

$$=\frac{2}{\eta}\times\frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}A(\alpha)\times\frac{\eta}{2}\right]$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{2}{\eta}\left(\frac{1}{\alpha^2}(1-A(\alpha))\right)\Rightarrow\frac{\eta\alpha^2(A(\alpha))}{2}=1-A(\alpha)\frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}$$

$$e^{-|x|}=\int_{0}^{\infty}\frac{2}{\eta(\alpha^2+1)}Cos\,\alpha x\,dx\Rightarrow$$

$$\frac{2}{R}\int\frac{Cos\ \ 5\ x}{1+\ x^2}dx\ =\ \frac{R}{2}e^{-5}$$

$$\int\frac{Cos5\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-5}\rightarrow\alpha=x$$

تمرین :مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{Sin\,2\pi x}{1+x^2}dx$ را بدست آورید.

براي اين منظور است كه:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{-x} & x>0\\ -e^{-x} & x<0\end{cases}$$

جواب

$$=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$$

$$\frac{2}{R}\int\frac{Cos\ \ 5x}{1+\ x^2}dx\ =\ \frac{R}{2}e^{-5}\ \rightarrow\ \alpha\ =\ x$$

مسأله انتقال حرارت زیر را حل کنید:

$$f(x_0)=\int_{0}^{\infty}A(\alpha)Cos\,\alpha x_0 + B(\alpha)Sin\,\alpha x_0 d\alpha$$

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(x,o) = F(x) \qquad x > 0 \qquad t > 0$$

همانطور كه مشاهده مي شود حوزه تغييرات x تا بي نهايت است. بنابراين روش حل از تبديل در سري فوريه كه همان انتگرال فوريه مي باشد بدست خواهد آمد.

$$u(x,t)X(x)T(t \to) \frac{T'(t)}{kt(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \begin{cases} x^2 \\ 0 \\ -\lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$U(x_1) = 0 \to X(0) = 0$$

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

$$X(x) = \sin \lambda x$$

$$T(t) = e - \lambda zkt$$

انتگرال فوريه $$U(x,t) = \int_0^{\infty} (B\lambda e^{-k\lambda'} + Sin\ \lambda x)\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda)\sin \lambda x d\lambda = f(x)$$

$$B(\lambda) = {}^{2}\!/_{R} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin \lambda x dx$$

معرفي توابع بسل و كاربردهاي آنا:

درفرم معادله اي استوانه اي معادله لاپلاس داريم :

$$\Delta^2 u = p^2 \frac{du^2}{dp^2} + p\frac{du}{dp} + (\lambda p^2 - v^2)y = 0$$

چنان چه در اين معادله به جاي $x = \sqrt{\lambda}\, p$ تغيير متغيير دهيم داريم:

$${}^{x}\!/_{\lambda} \times \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial x^2}{\partial p^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}\right).\frac{ex}{ep}$$

اين معادله را معادله ديفرانسيل به نام معادله بسل مي شناسيم:

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sqrt{\lambda} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\lambda}.\lambda\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x}{\lambda}.\sqrt{\lambda}\frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$$

روش حل اين گونه معادلات با استفاده از سريها بود.
سري پيشنهادي بصورت زير است:

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$$

علت پيشنهاد اين اين جواب اين است كه در معادله نقطه ي $x = 0$ يك نقطه تكين منظم است چون :

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y - 0 \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - v^2}{x^2}y = 0$$

كه مشاهده مي شود نقطه $x=0$ يك نقطه تكين است.

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} (r+k)a_k x^{(r+k-1)}$$

$$t\left(x^2 + v^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k} = 0$$

در حالتي كه $v = n$ $\qquad n = 1,2,.....,$

$$\sum \left((r+k)(r+k-1)av\, x^{r+k} + (r+k)akx^{r+k} - n^2 akx^{r+k}\right) + \sum akx^{r+k+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{r+k}\left((r+k)(r+k-1) + (r+k) - n^2 ak + akx^2\right) = 0$$

در نهايت

$$:(r-n)(r+n)a_0 + (r-n+1)(r+n+1)a_1 x + \sum\left((r-n+k)(r+n+k)a_k + a_k - 2\right)x^k = 0$$

$$\Rightarrow a_0 \quad \text{يا} \quad (r+n)(r+n) = 0$$

$$(r-n+1)(r-n+1) = 0 \quad \text{يا} \quad a_1 = 0$$

$$* \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$$

در نتيجه توسط رابطه بازگشتي $* \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$ مي توان تمام روابط سري را بدست آورد.چون:

$$r = n \Rightarrow a_k = \frac{-1}{(r-n+k)(r+n+k)} a_k - 2$$

که براي k هاي زوج عدد غير صفر مي باشد.

$a_1, a_3, a_{2m} + 1 = 0$ و $a_0 \neq 0$ اما

در نهايت فرم كلي جواب:

$$a_2 = \frac{-1}{2(2n+2)} a_0 , a_4 = \frac{1}{4(2n+2)(2)(2n+2)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{ki\,(n+1)(n+2)(n+k)2^{2k}}$$

براي اينكه بتوان فرم ساده شده اي براي جواب پيشنهاد كرد ،مقدار a_0 را به صورت زير انتخاب مي كنيم:

$$a_0 = \frac{1}{n!2^n} \qquad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!2^{n+2k}}$$

پس جواب به فرم زير است :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(x/2\right)^{n+2k}$$

به مقدار اين جواب $y_n(x)$ گويند.

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(x/2\right)^{n+2k}$$

$y_n(x)$ را تابع مرتبه n ام بسل مي نامند.

اين تابع حل معادله ديفرانسيل مرتبه n مي باشد.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \rightarrow y = y_n(x)$$

براي مثال:حل معادله بسل مرتبه صفر:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \rightarrow y = y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(x/2\right)^{2k}$$

شكل $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد :

انداختن در آب نماد y_0 است.

$$y_0(x) = 1 - \left(x/2\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(x/2\right)^4 + \left(1/3!\right)^2 \left(x/2\right)^6 \ldots\ldots$$

قضيه جواب معادله همگن در هرنقطه تابع است.

خاصيت تابع بسل:

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos\ (xSin\ \theta) = y_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) y_n(x) Cos\ \phi$$

$$2)\ Sin\ (xSin\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) y_n(x) Sin\ \phi$$

پس داريم $y2_n(x) = \frac{1}{R} \int_0^R Sin\ (xSin\ \phi) Sin\ (2x - 1)\phi\, d\phi$

در حالت كلي(۳ $y_n(x) = \frac{1}{R} \int_0^R Cos\ (n\phi - xSin\ \phi) d\phi$

با توجه به اينكه

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{K!(x+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n} y_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\ \frac{d}{dx} x^{-n} y_n(x) = -n x^{-n-1} y_n(x) + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \frac{(n+2x)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$-x^{-n} y_{n+1}(x)$ پس $y'(0) = -y_1(x)$

تابع $y_0(x)$ به صورت زير مي باشد.

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[(\log\frac{x}{3} - \nu) J_0(x)] + \frac{x^4}{x^2} - \frac{x^4}{x^2 4^2}(1 + \frac{1}{2}) + \frac{x^6}{x^2 4^2 6^2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \ldots.$$

$$R(V) = \frac{R(v+1)}{v}$$

$$V \xrightarrow{} -1^t \frac{V}{\sqrt{n}/2} \rightarrow -1^t = \min$$

خواص توابع بسل:

$$1)\ Cos\ (xSin\ \theta) = y_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) y_n(x) Cos\ \phi$$

$$2)\ Sin\ (xSin\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) y_n(x) Sin\ \phi$$

پس داريم $y_{2n}(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Sin(xSin\phi)Sin(2x-1)\phi\, d\phi$

در حالت كلي(۳ $y_n(x) = \frac{1}{R}\int_0^R Cos(n\phi - xSin\phi)d\phi$

با توجه به اينكه

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{K!(x+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$x^{-n} y_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$4)\ \frac{d}{dx}x^{-n}y_n(x) = -nx^{-n-1}y_n(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\frac{(n+2x)}{2}.\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2k-1}$$

$-x^{-n}y_{n+1}(x)$ پس $y'(0) = -y_1(x)$

روابط زير از خواص توابع بسل مي باشند:

$$1)\ xy_n(x) = ny_n(x) - xy_{n+1}(x)$$

$$2)\ xy_n(x) = -ny_n(x) + xy_{n-1}(x)$$

$$xy_{n+1}(x) = 2ny_n(x) - xy_{n+1}$$

بررسي صفرهاي تابع بسل :

تابع $y_n(x)$ داراي ريشه هاي نامحدود است (از نظر تعداد)كه در مكان هاي مشخص هستند.

$y_n(x) = 0 \rightarrow$ ريشه ها $= \{\alpha_{n0}, \alpha_{n1}, ..., \alpha_{A}\}$

$\phi a_{\circ} \rightarrow y_n(\alpha ni) = 0$

ديديم كه شكل تابع y_o از انداختن سنگ در آب ناشي مي شد.

$$b_n = \frac{2}{c}\int_o^c \frac{f(x)-f(-x)}{2}Sin\frac{N\eta x}{c}dx = \frac{1}{c}\left[\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx - \int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}dx\right]$$

$x = -x \qquad dx = -dx$

$$\int_o^c f(x)Sin\frac{N\eta x}{c}(-dx)$$

در خارج ازاين فاصه بسط سينوسي $\sum b_n Sin\, nx$ اولاً داراي پريود 2π است.و فرض كنيد كه $f(x)$ يك تابع قطعه اي پيوسته در فاصله ي (۲،۲-)همانطور كه مي دانيم هر تابع را مـي تـوان بصورت جمع در تابع زوج و فرد نوشت.

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad \text{كه} \qquad g(-x)=-g(x) \quad , \quad h(-x)=h(x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

تابع $h(x)$ يك تابع زوج است بنابراين چنانچه $h(x)$را در فاصله (۲،۰) با بسط كسينوسي تقريب

بزنيم ،تابع $h(x)$ در ناحيه(۲،۲-) تقريب زده خواهد شد.($h(x)$و كينوس هر دو زوج اند).

$$h(x)=a_o/\eta+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c} \qquad a_n=2/c\int_o^c h(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$

$$f(x)=h(x)+g(x) \qquad (-c,c)$$

پس

$$f(x)=a_o/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n Cos\frac{n\eta x}{c}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n Sin\frac{n\eta x}{c} \qquad \text{كه} \qquad x\in(-c,c)$$

كه اين بسط تابع فوريه $f(x)$ در فاصله (۲،۲-) مي باشد.حال بايد ضرايب را پيدا نمائيم.

$$2/\eta \qquad SN\ (x)Sinmxdx = bm$$

$$a_n=2/c\int_o^c\frac{f(x)+f(-x)}{2}Cos\frac{n\eta x}{c}dx=1/c\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_o^c f(-x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]$$

فرض كنيد ناحيه C ناحيه اي بصورت زير باشد و $\beta(Z)$ بغيراز نواحي مشخص شده تحليلي باشد آنگاه انتگرال $\beta(Z)$

$$\int_B \beta(Z)dZ=0$$

روي ناحيه D فوق برابر صفر است.

$$\int_C \frac{dZ}{Z^2(Z^2+q)}=\phi$$

گوئيم انتگرال $\int\beta(Z)dZ$مستقل از ميسر است اگر

$$\int_C \beta(Z)dZ=\int_a^b \beta(Z)dZ=F(Z(b))-F(Z(a))$$

البته مي توان گفت يك نام $\beta(z)$ ولداي انتگرال مستقل از مسير است اگر بنام ولداي تابع اوليه باشد. مثال:

$$\beta(z)cz^2 \to F(z)c\frac{z^3}{3}$$

$$\int_0^{1+i} z^2 z = \frac{1}{3}(1+i)^3 +$$

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \log z \int_{-2i}^{2i} = \log 2i - \log(-2i) = tui$$

انتگرال كوشي

اگر $\beta(z)$ يك تابع تحليلي در C باشد و تنها در نقطه در C تحليلي نباشد آنگاه

$$\int_c \frac{\beta(\bar{z})dz}{z - z_0} = 2\pi i \qquad \beta(z_0)$$

مثال:

$$\int_c \frac{\beta(\bar{z})dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad \beta(z_0)$$

$$\int_c \frac{zdz}{(q-z)(z-i)} = 2\pi i \frac{i}{q+1} = \frac{-2\pi}{10}$$

$$\int_c z_0 \beta(z)dz = z_0 \int_c \beta(z)dz$$

$$\int_c (\beta(z + g|t|))dz = \int_c \beta(z)az + \int_c g(z)dz$$

$$\left| \int_c \beta(z)dx \right| \le \int_a |\beta(z(t)Z')|dt$$

مثال:

$$Ic \int_{C1} z^2 dz$$

؟ انتگرال از تا بصورت هاي زير

$$I_1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

$$I_2 = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

$$Ic\int_C Z^2 dZ$$

طبق قضيه كوشي

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_R \int \left(\frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\int_C \beta(Z) d\delta = \int_C Ndx - Vdy + i\int Xdx + udy$$

$$= \int_R \int \left(\frac{-\partial u}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial x}\right) dxdy + i\int \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) dxdy$$

با توجه به اينكه اگر C ناحيه بسته باشد و $\beta(Z)$ تحليلي باشد

$$u_x = v_y$$
$$Xy = -V_X$$

لذا طبق قضيه اگر $\beta(Z)$ تحليلي باشد انتگرال آن روي هر ناحيه C اي كه حـد$\beta(Z)$حـد رو و درون C
تحليلي باشد برابر با صفر است

مفهوم انتگرال:

$$\omega(t) = X(t) + iy(t)$$

$$\int_a^b \omega(t)d + \int_a^b X(t)dt + o\int_a^b y(t)dt$$

مثال:

$$\int \theta^{i2t} dt = \sqrt{3}/2 + i/4$$

خواص:

$$\mathrm{Re}\int\int_a^b \omega(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}|Z(t)|\,dt$$

$$\int Z\omega(t)dt = Z\int_a^b \omega(t)$$

$$r_0 e^{\theta_0} = \int \omega(t)dt \Rightarrow \int \left(e^{-u\theta_0}\omega(t)\right)dt \text{ يا } \qquad r_o c\int \mathrm{Re}\left(e^{-1\theta_0}\omega(t)\right)dt \text{ ؟!}$$

$$\left|\int_a^b X(t)dt\right| \le \int_a^b |\omega(t)|dt$$

انواع انتگرال ۱)

Line Integral

$$\int_C \beta(t)dt \quad \text{يا} \quad \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} \beta(t)dt$$

با فرض اينكه $\bar{z}$ روي يك خط حركت مي نمايد.

$$\bar{z} = \bar{z}(t)$$

$$\int_a^b \beta(\bar{z})dt = \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_1} (u / x(t) + iv(x(t), y(t)))(dX' + 1dy')dt$$

$$= \int_{\bar{z}/t_0}^{\bar{z}/t_1} (Ux' - Vy') + i(uy' + Vx')dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (Ux' + Vy')dt + \int_{t_0}^{t_1} (Uy' + Vx')dt$$

$$\int_{-C} \beta(\bar{z})d\bar{z} - \int_C \beta(\bar{z})d\bar{z}$$

حل معادله لژاندر:

معادله $(1 - x^2)y'' - 2xy' + y = 0$ را با نام معادله ثراندر مي شناسيم.

با حل معادله فوق با روش سري ها داريم .اين بنام حد فاصله تعريف مي شود

توانهاي معادله به صورت زير هستند

$$y_1 = a_0 + \sum_{h-1}^{\infty} a_2 h \times 2h$$

$$y_2 = a_1 x + \sum_{h-1}^{\infty} a_{2h+1} \times 2h + 1$$

بنام ثراندر از مرتبه n را به صورت $P_n(x)$ تعريف مي كنيم كه در آن $\lambda = n(n+1)$

$$P_n(x) - \frac{1}{2^n} \sum \frac{(-1)^x (2n - 2h)!}{h!(n - 2h)h.(n + x)} X^{n-2h} \qquad n = 0,1,....$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = X$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(3S-3)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{2}(3s\times 4-30x^2+3)$$

خواص داريم كه $P_n(-x)=(-1)P_n(x)$

اگر حل معادله $(i-x^g)y^n-3\times y'+n(n=1)y=0$ جوابها به صورت توابع لژاندر مي باشد.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)+P_n(x)d\times = \int mn \qquad m\neq n$$

$$\phi_n(x)=\frac{P_n(x)}{|P_n(x)1|}\rightarrow \{\phi_n(x)\}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\frac{1}{n^1}\frac{d^n}{d\times n}(x^2-1)^n$$

$$P_{n+1}(x)-xp_n=\frac{n}{2^n n!}D^{n-1}u^n,\quad u=(x^2-1)$$

$$P'_{n+1}(x)-P'n-1(x)=(2n+1)P_n(x)$$

$$|1P_n(x)1|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\rightarrow \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}P_n(x)}$$

$$\beta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)\Rightarrow A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\beta(x)P_n(x)dx$$

كاربرد ژاندر درحل مسائل معادلات با مشتقات جزئي در مختصات كروي مي باشد.

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)+\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=0 \qquad 0<r<c\ ,\ 0<\partial<\pi$$

$$V(c,\partial)=F(\theta)$$

باجداسازي به معادله ژاندر مي رسيم.

$$V(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(Cos\ \theta)$$

$$=1/c=\left[\int_o^c f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx+\int_{-c}^{o}f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx\right]=1/c\int_{-c}^{c}f(x)Cos\frac{n\eta x}{c}dx$$