تمرین سری اول درس ریاضی مهندسی (تحویل یکشنبه ۲۳ فروردین)

تمرین هایی که علامت زده شده اند را حل کنید.

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x\ ; & -\pi<x<0 \\ -x\ ; & 0<x<\pi \end{cases} \qquad c)\ f(x) = \begin{cases} 0\ ; & -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \\ x\ ; & -\frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} -x^2\ ; & -\pi<x<0 \\ x^2\ ; & 0<x<\pi \end{cases} \qquad e)\ f(x) = |x|\ ;\ 0<x<2\pi$$

۳. هرگاه $f(x)$ متناوب و با دورهٔ p باشد آنگاه نشان دهید که

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx$$

و از آنجا

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\,dx$$

۴. سری فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = x + \sin x \quad -\pi<x<\pi \quad , \quad f(x) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$ جواب.

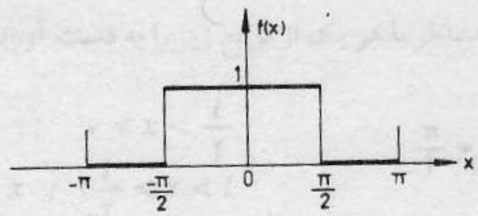
جواب.

$$b) \begin{cases} f(x) = \sin\frac{\pi x}{l}\ ; & 0<x<l \\ f(x) = f(-x)\ ; & -l<x<0 \end{cases} \quad , \quad f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \cos\frac{n\pi}{l}x$$

جواب.

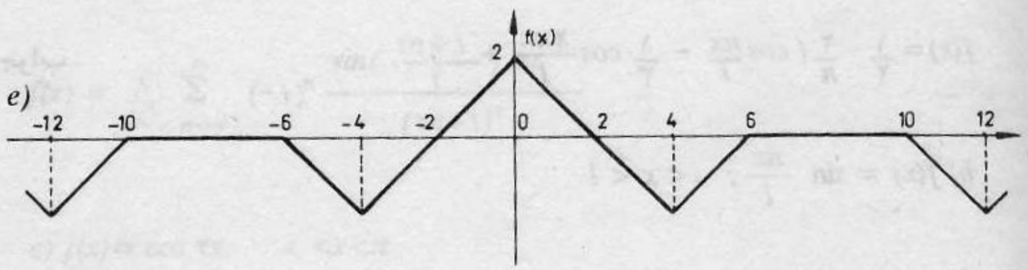
$$c)\ f(x) = \sinh x\ ;\ -1<x<1 \quad , \quad f(x) = 2\pi \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2\pi^2} (-1)^{n+1} \sin n\pi x$$

d)



جواب.
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \dots\right)$$

e)



جواب.
$$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2\cos(n\pi/2)+\cos(3n\pi/2)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{8}$$

f)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ ; & -1 < x < 0 \\ -x \ ; & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad ,p=2$$

جواب .
$$f(x) = \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \dots\right) - \frac{1}{\pi}\left(2\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + - \dots\right)$$

۵ - با بکار بردن سری فوریه

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ ; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \ ; & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

نشان دهید که

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + ... = \frac{\pi}{۴}$$

۶ - سری فوریه کسینوسی متناظر با هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} ۰ \ ; & ۰ < x < \frac{l}{۲} \\ ۱ \ ; & \frac{l}{۲} < x < l \end{cases}$$

جواب . $f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi x}{l} + ...\right)$

$$b)\ f(x) = \sin\frac{\pi x}{l} \ ; \ ۰ < x < l$$

جواب . $f(x) = \frac{۲}{\pi} - \frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۱\times ۳}\cos\frac{۲\pi x}{l} + \frac{۱}{۳\times ۵}\cos\frac{۴\pi x}{l} + ...\right)$

$$c)\ f(x) = \sin x \ ; \ ۰ < x < \pi$$

جواب. $f(x) = \frac{۴}{\pi}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{\cos ۲x}{۱-۲^۲} + \frac{\cos ۴x}{۱-۴^۲} + ...\right)$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} x \ ; & ۰ < x \leq ۱ \\ ۲ - x \ ; & ۱ < x < ۲ \end{cases}$$

جواب. $f(x) = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\pi x}{(۲n+۱)^۲}$

$f(x) = f(-x) \;;\; -\infty < x < 0$

۱۷ - سری فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن سری فوریه حقیقی متناظر با آنها را معین کنید.

$a)\ f(x) = e^{2x} ; -\pi<x<\pi ;$ جواب. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{2+in}{4+n^2} (-1)^n \sinh 2\pi e^{inx}$

$b)\ f(x) = x ; -\pi<x<\pi ;$ جواب. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{n} e^{inx}$

۱۸ - انتگرال فوریه مختلط هر یک از توابع زیر را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه حقیقی آنها را معین کنید.

$a)\ f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \;;\; -\pi < x < \pi \\ 0 \;;\; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

$b)\ f(x) = \begin{cases} \sinh 2x \;;\; 0 < x < 2 \\ 0 \;;\; \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

۱۹ - آیا تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه تابع $f(x) = e^x$ موجود است؟

۲۰ - نشان دهید که تابع $f(x) = 1$ دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه نیست.

۲۱ - $F_s\{e^{-ax}\} ; a > 0$ را با انتگرالگیری به دست آورید.

۲۲ - تبدیل کسینوسی فوریه معکوس تابع e^{-w} را بیابید.

۲۳ - $F_s^{-1}(\frac{1}{w} - \frac{1}{w} \cos w\pi)$ را بیابید.

۲۴ - آیا تبدیل کسینوسی فوریه تابع $\frac{\cos x}{x}$ یا $\frac{\sin x}{x}$ موجود است؟

۲۵ - تبدیل فوریه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از جدول تبدیلات فوریه به دست آورید.

$a)\ f(x) = \begin{cases} e^{-x} \;;\; x > 0 \\ 0 \;;\; x < 0 \end{cases}$ $\quad b)\ f(x) = \begin{cases} e^{x} \;;\; x > 0 \\ 0 \;;\; x < 0 \end{cases}$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} e^{۲ix} & ;\ |x| < ۱ \\ ۰ & ;\ |x| \geq ۱ \end{cases} \qquad d)\ f(x) = \begin{cases} x & ;\ ۰ < x < a \\ ۰ & ;\ \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۲۶ – نشان دهید که اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد $f(x-a)$ نیز دارای تبدیل فوریه است و

$$F\{f(x-a)\} = e^{-iwa}\, F\{f(x)\}$$

۲۷ – نشان دهید که اگر $\bar{f}(w)$ تبدیل فوریه $f(x)$ باشد آنگاه $\bar{f}(w-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax}\, f(x)$ است.

۲۸ – انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & ;\ |x| \leq ۱ \\ ۰ & ;\ |x| > ۱ \end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال $\int_۰^\infty \frac{\sin x\ \cos ax}{x}\, dx$ را به ازای مقادیر گوناگون a محاسبه کنید.

۲۹ – به کمک انتگرال فوریه نشان دهید که

$$a)\ \int_۰^\infty \frac{x \sin ax}{۱+x^۲}\, dx = \frac{\pi}{۲} e^{-a},\ a > ۰$$

$$b)\ \int_۰^\infty \frac{\cos ax}{۱+x^۲}\, dx = \frac{\pi}{۲} e^{-a},\ a \geq ۰$$

۳۰ – تبدیلات فوریه هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} ۱ & ;\ |x| \leq \pi \\ ۰ & ;\ |x| > \pi \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^۲ & ;\ |x| < x_۰ \\ ۰ & ;\ |x| > x_۰ \end{cases}$$

۳۱ – تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ - x^۲ & ;\ |x| < ۱ \\ ۰ & ;\ |x| > ۱ \end{cases}$ را به دست آورید و به کمک آن $\int_۰^\infty \frac{x \cos x - \sin x}{x^۳}\, dx$ را محاسبه کنید.