سرشاخ شدن با کنکور

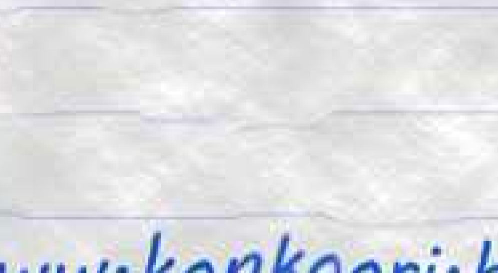
konkoori.blog.ir

سرشاخ شدن با کنکور

- خلاصه مطالب دروس
- جزوات برترین اساتید
- ارایه نکات کنکوری
- مشاوره کنکور
- اخبار کنکوری ها

«همه و همه در سرشاخ شدن با کنکور»

www.konkoori.blog.ir



جزوه ریاضی ۳ تجربی - ویژه امتحان نهایی

مشتق

[عبدالکریم قزل - دبیر دبیرستان های مراوه تپه - گلستان]

مشتق

آهنگ تغییر تابع : درتابع $y=f(x)$ نسبت تغییرات تابع (Δy) به تغییرات متغیر (Δx) را آهنگ تغییرات می گویند.

آهنگ تغییر y نسبت به x $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

تعریف آهنگ متوسط تغییر : هنگامی که متغیر از x_0 به x تغییر می کند مقدار $\Delta x=x-x_0$ را نمو متغیر و مقدار $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ را نمو تابع در x_0 می نامند و نسبت $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع در x_0 با نمو داده شده می نامند.

نکته : اگرقرار دهیم $x_2-x_1=h$ ، داریم $x_2=x_1+h$ و مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع در x_1 با نمو h عبارت است از :

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

مثال ۱) درتابع باضابطه ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییرتابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییرمیکند ، به دست آورید　(سوال ۱۲ امتحان نهایی دی ۸۹)

حل :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5-2}{25-4}=\frac{3}{21}$$

مثال۲) آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ وقتی x از ۲ به ۲/۲ تغییرکند را به دست آورید.(سوال ۱۲نهایی خرداد۸۷)

حل :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2/2)-f(2)}{2/2-2}=\frac{2/42-2}{0/2}=\frac{0/42}{0/2}=2/1$$
$$f(2/2)=\frac{1}{2}(2/2)^2=2/42 \quad , \quad f(2)=2$$

تمرین ۱) تابع با ضابطه ی $f(x)=x^{2}-3x+3$ داده شده است ، آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی از $x_1=1$ و $x_2=5$ تغییر میکند تعیین کنید. (سوال ۱۵ امتحان نهایی دی ۹۰)

تمرین ۲) تابع $f(x)=x^{2}+5x-6$ داده شده است ، آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از $x=1$ به $x=4$ تغییر میکند تعیین کنید. (سوال ۱۵ امتحان نهایی شهریور ۹۰)

تعریف آهنگ لحظه ای تغییر یک تابع : در تابع f مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ را آهنگ لحظه ای تغییرتابع درنقطه ی x_0 می نامند .

تذکر: آهنگ لحظه ای تابع $f(x)$ در نقطه ی x_0 همان تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه ی x_0 است.

تعریف مشتق

تابع $y=f(x)$ و نقطه ی x_0 از دامنه ی این تابع را درنظرمی گیریم . اگر h نمومتغیردر نقطه ی x_0 باشد ، برای تابع ، نمو $f(x_0+h)-f(x_0)$ را خواهیم داشت . حدنسبت نمو تابع به نمو متغیر را ، هنگامی که نمو متغیربه صفرنزدیک می شود ، یعنی : $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ را (درصورتی که این حدوجود داشته باشد) ، مشتق تابع f در نقطه ی x_0 می نامند و آن را با $f'(x_0)$ یا $y'(x_0)$ نشان می دهند. یعنی

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

با قراردادن $x=x_0+h$ ، مشتق تابع f در نقطه ی x_0 را به صورت زیر نیزمیتوان نوشت :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

نکته : آهنگ لحظه ای تغییرتابع و شیب خط مماس برنمودارتابع درنقطه ی x_0 برابراست با مشتق تابع درنقطه ی x_0

مثال ۱) با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را در نقطه ی $x=2$ به دست آورید.(سوال ۱۵ امتحان نهایی خرداد ۸۹)

حل :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{x-1}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)}{(x-1)(x-2)}=-1$$

مثال ۲) با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق تابع $y=\sqrt{4-x}$ را به دست آورید.(سوال ۱۳ امتحان نهایی خرداد۸۸)

حل :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}=$$

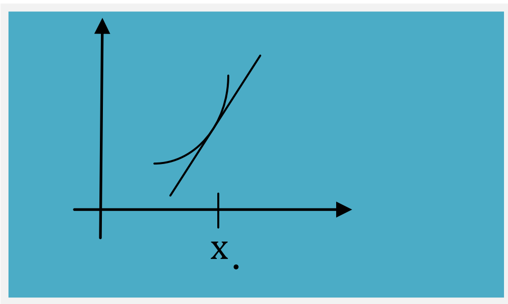
$$\lim_{h\to 0}\frac{4-x-h-4+x}{h(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x})}=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

تمرین ۳) با استفاده ازتعریف مشتق ، مشتق تابع $f(x)=x^3+2x$ را درنقطه ی $x_0=-1$ به دست آورید. (سوال ۱۳ امتحان نهایی خرداد۹۱)

تمرین ۴) مشتق تابع $f(x)=x^2+4x$ را درنقطه ی $x=2$ با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید. (سوال ۱۳ امتحان نهایی شهریور۹۰)

تمرین ۵) با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق تابع $f(x)=2x-1$ را درنقطه ی $x=2$ محاسبه کنید. (سوال ۸ امتحان نهایی دی ماه ۷۸)

شیب خط مماس بریک منحنی



اگرتابع f در نقطه $x_{\cdot}$ مشتق پذیرباشد آن گاه داریم :

مقدارمشتق درنقطه ی تماس = شیب خط مماس $\Longrightarrow f'(x_{\cdot}) = m$

یادآوری : معادله ی خط گذرنده از نقطه ی $(x_{\cdot}, y_{\cdot})$ و به شیب m برابر با $y - y_{\cdot} = m(x - x_{\cdot})$

مثال) شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-x$ را در نقطه ی $x_{\cdot} = ۳$ به دست آورید.

حل: $f(x)=x^{۲}-x \Longrightarrow f(۳)=(۳)^{۲} - ۳ = ۹ - ۳ = ۶$

مشتق تابع را از روش تعریف به دست می آوریم :

$$\lim_{\Delta x \to \cdot} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲} - x - ۶}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۲)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳}(x+۲)$$

$$= ۳ + ۲ = ۵$$

تمرین ۶) شیب خط مماس برمنحنی تابع $y= x^{۳} - ۴$ را در نقطه ای به طول ۲ و واقع بر منحنی به دست آورید

(سوال امتحان نهایی خرداد ۷۹)

تمرین ۷) شیب خط مماس بر منحنی $y=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در نقطه ای به طول ۵ واقع بر آن به دست آورید.

(سوال امتحان نهایی خرداد ۸۰)

سرعت یک متحرک

سرعت متوسط : سرعت متوسط همان آهنگ تغییرمتوسط تابع $f(t)$ نسبت به تغییر t است.

اگرمتحرکی باسرعت $s=f(t)$ حرکت کند در این صورت : $\text{سرعت متوسط}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

سرعت لحظه ای : سرعت لحظه ای برابر است با حدسرعت متوسط وقتی t به t_0 میل می کند که آن را

با $v(t_0)$ نمایش می دهند و داریم : $\text{سرعت لحظه ای} = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

مثال ۱) معادله ی حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x(t)= ۳t^۲ - ۴t + ۲$ است.

سرعت متوسط این متحرک را در فاصله ی زمانی $t= ۱$ و $t= ۳$ محاسبه کنید.

(سوال ۱۵ امتحان نهایی خرداد۹۰)

حل: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x\left(t_۲\right)-x\left(t_۱\right)}{t_۲-t_۱} = \frac{۱۷-۱}{۲} = ۸$

مثال ۲) معادله ی حرکت متحرکی به صورت $x=t^۲-۵t+۶$ می باشد . اولا سرعت متوسط این متحرک

را در فاصله زمانی $t= ۳$ تا $t= ۵$ به دست آورید. ثانیا آهنگ آنی تغییرات x را در $t= ۲$ به دست آورید.

(سوال ۱۲ امتحان نهایی شهریور۸۶)

حل : الف) $\text{سرعت متوسط}= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x\left(t_۲\right)-x\left(t_۱\right)}{t_۲-t_۱} = \frac{x(۵)-x(۳)}{۵-۳} = \frac{۶-۰}{۲} = ۳$

ب) آهنگ لحظه ای $x'(t) = ۲t-۵ \rightarrow x'\left(۲\right)= -۴ +۵ = -۱$

تمرین ۸) معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=\frac{۱}{۲}t^{۲}-۳t+۱$ می باشد.

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله ی زمانی $t=۰$ تا $t=۴$ به دست آورید.

ب) آهنگ لحظه ای تغییرات $f(t)$ را در $t=۷$ بیابید.　　(سوال ۱۴ امتحان نهایی خرداد۹۱)

تمرین ۹) معادله ی حرکت متحرکی بر محور x ها به صورت $x(t)=۲t^{۲}-۵t+۱$ بوده ، مطلوب است محاسبه ی :

الف) سرعت متوسط متحرک در فواصل زمانی $t_{۱}=۱$ و $t_{۲}=۳$

ب) سرعت لحظه ای در $t=۳$　　(سوال امتحان نهایی خرداد۸۲)

تمرین ۱۰) موشکی به طورقائم روبه بالا پرتاب شده است . اگراین موشک پس از t ثانیه s متر را طی کند و معادله حرکت آن به صورت $S=۱۸۰t-۵t^{۲}$ باشد ، سرعت موشک را ۵ ثانیه پس از پرتاب حساب کنید　　(سوال امتحان نهایی شهریور۷۹)

مشتق دوم

مشتق $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را (درصورتی که وجود داشته باشد) مشتق اول ، و مشتق $y'=f'(x)$ را (درصورت وجود) مشتق دوم تابع می نامند و با $y''=f''(x)$ نشان می دهند.

نکته : اگرمعادله ی حرکت یک متحرک $s=f(t)$ باشد مشتق اول آن یعنی $s'=f'(t)$ راسرعت می نامند و با $v(t)$ نمایش می دهند .مشتق دوم $f(t)$ ، یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می گویند و با $a(t)$ نشان می دهند ، یعنی $v(t)=f'(t)$ و $a(t)=v'(t)=f''(t)$

دستورها و قضیه های مشتق گیری

۱- اگر c یک عدد ثابت و $f(x)=c$ ، آن گاه داریم $f'(x) = ۰$

مثال : $y = ۸ \rightarrow y' = ۰$

۲- اگر $y=f(x) = x^n$ ، آن گاه $y'=f'(x) = nx^{n-۱}$

مثال : $y = x^۶ \rightarrow y' = ۶x^۵$

۳ - اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و a عددی ثابت و $y=a\,f(x)$ آن گاه : $y'=(af(x))' = af'(x)$

مثال : $y=-۵x^۷ \rightarrow y'=-۵\left(۷x^۶\right) = -۳۵x^۶$

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y=f(x)+g(x)$ ، آن گاه : $y'=f'(x)+g'(x)$

مثال : $y= ۳x^۵ - ۵x^۲ \rightarrow y'= ۱۵\,x^۴ - ۱۰x$

۵ - اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y=f(x)g(x)$ ، آن گاه : $y'=f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$

مثال : $y=\left(۳x-۲\right)\left(x^۲+۱\right) \rightarrow y' = ۳\left(x^۲+۱\right) + ۲x\left(۳x-۲\right) = ۹x^۲ - ۴x + ۳$

۶ - اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیرباشند و $g(x) \neq ۰$ و $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ آن گاه داریم :

$$y'=\frac{f'(x)\,g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^۲}$$

مثال : $y= \frac{۱}{x^۲}$ ، $x \neq ۰ \rightarrow y'=\frac{۰\left(x^۲\right)-۲x\left(۱\right)}{\left(x^۲\right)^۲} = \frac{-۲}{x^۳}$

مشتق تابع مرکب

۷ – اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ دو تابع مشتق پذیرباشند آن گاه y نسبت به x دارای مشتق است.

اگرمشتق y نسبت به u را با y'_u و مشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می دهیم . داریم :

$$y'_x = y'_u . u'(x) = f'(u)g'(x)$$

مثال: $y=\left(x^۴-۳x^۲+۱\right)^۳ \quad \to \quad y' = ۳\left(x^۴-۳x^۲+۱\right)^۲\left(۴x^۳-۶x\right)$

نتیجه : اگر $y=u^n$ و u تابعی از x باشد ، خواهیم داشت : $y'_x = nu' u^{n-۱}$

۸ – اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و مثبت باشد و $y=\sqrt{f(x)}$ ، آن گاه : $\left(f(x) > ۰\right)$, $y'=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$

مثال : مشتق $y=\sqrt{x}$ برابر است با $y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

مشتق توابع مثلثاتی

۱ – تابع $\sin x$ برای هر مقدار x از $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و مشتق آن $\cos x$ است.

۲ – تابع $\cos x$ برای هر مقدار x از $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و مشتق آن $-\sin x$ است.

۳ – تابع $\tan x$ برای هرمقدار $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$, $k\in\mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱+\tan^۲ x$ است .

۴ – تابع $\cot x$ برای هرمقدار $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن $\frac{-۱}{\sin^۲ x} = -(۱+\cot^۲ x)$ است .

اگر u و v توابعی از x بگیریم ، همه ی دستورهای محاسبه ی مشتق را می توان در جدولی به صورت زیرخلاصه کرد .

تابع	مشتق	مثال
$y=c$	$y'=0$	$y=7 \rightarrow y'=0$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=4x-9 \rightarrow y'=4$
x^n	nx^{n-1}	$y=x^6 \rightarrow y'=6x^5$
au	au'	$y=5x^7 \rightarrow y'=-5\left(7x^6\right) =-35x^6$
$u+v$	$u'+v'$	$y=3x^5-5x^2 \rightarrow y'=15x^4-10x$
$u.v$	$u'v+v'u$	$y=\left(3x-2\right)\left(x^2+1\right) \rightarrow y'=3\left(x^2+1\right)+2x\left(3x-2\right)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$y=\frac{1}{x^2} \quad ، \quad x \neq 0 \rightarrow y'=\frac{0\left(x^2\right)-2x\left(1\right)}{\left(x^2\right)^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$y=\frac{1}{x^3} \rightarrow y'=-\frac{3x^2}{x^6}$
$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$	$y=\frac{1}{x^3} \rightarrow \frac{-5}{x^6}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y=\left(x^4-3x^2+1\right)^3 \rightarrow y'=3\left(x^4-3x^2+1\right)^2\left(4x^3-6x\right)$
$\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x} \rightarrow y'=\frac{x'}{2\sqrt{x}}$
$\sin u$	$u' \cos u$	$y=\sin(3x-1) \rightarrow y'=3\cos(3x-1)$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$y=\cos(x^2+1) \rightarrow y'=-2x\sin(x^2+1)$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan(1-x^2) \rightarrow y'=-2x\left[1+\tan^2(1-x^2)\right]$
$\cot u$	$-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot(-5x) \rightarrow y'=5\left[1+\cot^2(-5x)\right]$

تمرین ۱۱ : مشتق توابع زیر را به دست آورید .(ساده کردن الزامی نیست) (سوال ۱۳ نهایی خرداد۹۰)

الف) $g(x)=\left(x^{۵}-۳x\right)\left(x+۱\right)^{۴}$

ب) $\sin^{۳}\left(\frac{x}{۲}\right)-\cot x$

تمرین ۱۲ : مشتق تابع $y=\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}$ را به دست آورید و دامنه ی مشتق پذیری آن را مشخص کنید .

(سوال ۱۳ نهایی خرداد۹۰)

تمرین ۱۳ : مشتق توابع زیر را به دست آورید .(ساده کردن الزامی نیست) (سوال ۱۲ نهایی شهریور۹۱)

الف) $f(x)=\left(x+۱\right)\left(۲x+۷\right)^{۳}$

ب) $g(x)=۳\sin^{۲}۵x-۴\tan x$

ج) $h(x)=\frac{۳x+۱}{x^{۲}-۵}$

تمرین ۱۴ : شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۵}$ را در نقطه ای به طول $x=۴$ به دست آورید. (سوال ۱۳ نهایی شهریور۹۱)