ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه پنجم

استاد: دکتر قصوری

کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

ابراهیم شهنازی

خ

سرفصل مطالب:

خاصیت همگن بودن تبدیل لاپلاس	
خاصیت جمع آثار تبدیل لاپلاس (سوپر پوزیشن)	
خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس	
تبدیل فوریه نامتناهی	
تبدیل فوریه نیمه متناهی کسینوسی	
تبدیل فوریه نیمه متناهی سینوسی	

جلسه پنجم

"ریاضیات مهندسی پیشرفته"

1392/08/09

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = 1 \longrightarrow \int_0^{\infty} 1 \times e^{-st}\, dt = -\tfrac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\tfrac{1}{s}(0-1) = \tfrac{1}{s} \qquad R.O.C\ |s|>0$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \longrightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}\, dt = \frac{-1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$f(t) = \cos\alpha t \longrightarrow \tfrac{1}{2} e^{i\alpha t} + \tfrac{1}{2} e^{-i\alpha t} \longrightarrow$$ ادامه در ورق بعد

خاصیت همگن بودن تبدیل لاپلاس:

هرگاه یک ضریب در عدد ورودی ضرب شود همان ضریب را در خروجی داریم.

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t) \;\Rightarrow\; \alpha x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \alpha y(t)$$

خاصیت جمع آثار تبدیل لاپلاس (سوپر پوزیشن):

اگر دو ورودی با هم جمع شوند خروجی‌های آنها هم با هم جمع می‌شود.

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس:

سیستمی که همزمان دارای خاصیت همگن بودن و خاصیت جمع آثار باشد خاصیت خطی خواهد بود.

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} e^{i\alpha t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\alpha}\right) \\ &\tfrac{1}{2} e^{-i\alpha t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{s+i\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\alpha t \xrightarrow{\mathcal{L}} \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\alpha} + \frac{1}{s+i\alpha}\right) \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{2s}{s^2+\alpha^2} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$\sin\alpha t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt=\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(t)\,e^{-st}\right)dt$$

$$=\int_0^\infty f(t)\times\left(-t\,e^{-st}\right)dt=-\int_0^\infty t\,f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$t\,f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{-dF(s)}{ds}$$

$$t\times 1\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{-d}{ds}\mathcal{L}\{1\}=\frac{-d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}$$

$$f(t-t_0)\xrightarrow{\mathcal{L}}\int_0^\infty f(\overbrace{t-t_0}^{\tau})\,e^{-st}\,dt=\int_{-t_0}^\infty f(t)\,e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau=e^{-st_0}\int_{-t_0}^\infty f(\tau)\,e^{-st}\,d\tau$$

$$=e^{-st_0}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

مثال ۱) مطلوبست حل معادله زیراز طریق تبدیل لاپلاس.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+x\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0\qquad\begin{cases}u(x,0)=0\\ u(0,t)=t & t\geq 0\end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+x\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\}=0$$

مشتق نسبت به x و تبدیل لاپلاس نسبت به t است

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\}=U(x,s)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)+x\left(sU(x,s)-\cancel{u(x,0)}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}U(x,s)+x\left(sU(x,s)\right)=0$$

معادله جبری بر حسب متغیر x

حل معادله مرتبه اول (همگن)

$$\Rightarrow\frac{\partial U(x,s)}{\partial x}=-xs\,U(x,s)\ \Rightarrow\ \frac{\partial U(x,s)}{U(x,s)}=-xs\,\partial x$$

هر جا که بر حسب U بود به یک سمت و هر جا که بر حسب x هست به طرف دیگر می‌بریم.

از دو طرف انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{\partial U(x,s)}{U(x,s)} = \int -x\,s\,\partial x$$

$C(s)$ یک ثابت است نسبت به متغیر انتگرال‌گیری ←

$$\ln U(x,s) = -s\frac{x^2}{2} + C(s)$$

$$\Rightarrow e^{\ln U(x,s)} = e^{-\frac{sx^2}{2}+C(s)} = e^{-\frac{sx^2}{2}}\cdot \underbrace{e^{C(s)}}_{C_1(s)} \Rightarrow U(x,s) = C_1(s)\,e^{-s\frac{x^2}{2}}$$

تابع C را پیدا می‌کنیم:

حل معادله با شرایط اولیه:

$$u(0,t) = t \longrightarrow U(0,s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s^2} = C_1(s)\,e^{0} \Rightarrow C_1(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$U(x,s) = \frac{e^{-s\frac{x^2}{2}}}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{u(x,t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right) \qquad t > \frac{x^2}{2}}$$

مثال ۲) مطلوبست حل معادله زیراز طریق تبدیل لاپلاس.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی
$$u(0,t) = \begin{cases} \sin t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 U(x,s) - s\cancel{u(x,0)} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)}$$

$$= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,s) \Rightarrow \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} U(x,s) = 0$$

معادله مشخصه [illegible]

$$\alpha^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{s}{c}$$

$$\Rightarrow U(x,s) = A_{(s)} e^{-\frac{s}{c}x} + B_{(s)} e^{+\frac{s}{c}x}$$

پاسخ تبدیل لاپلاس باید محدود باشد [illegible] $B(s) = 0$

$$\Rightarrow U(x,s) = A(s)\, e^{-\frac{s}{c}x}$$

شرط مرزی $u(0,t) = \sin t \quad t \geq 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} U(0,s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ با استفاده از فرمول

$$\Rightarrow A(s) e^{-\frac{s}{c} \times 0} = \frac{1}{s^2+1} = A(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$U(x,s) = \frac{e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(x,t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{x}{c}\right) & t > \frac{x}{c} \\ 0 & t < \frac{x}{c} \end{cases}$$

[illegible] $\sin t$ [illegible]

تمرین ۲) درصورتی که در مثال قبل $u(x,0)=f(x)$ باشد جواب زیر را بدست آورید (u_p و u_H)

الف) $f(x)=x$

ب) $f(x)=e^{-3x}$

خ

مثال ۳) مطلوبست حل معادله انتقال حرارت با شرایط کرانی غیر صفر از طریق تبدیل لاپلاس.

$c=1$

$u(0,t)=1$

$u(1,t)=1$

$u(x,0)=1+\sin\pi x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)=sU(x,s)-u(x,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}-sU(x,s)=-1-\sin\pi x$$

پاسخ شامل دو بخش است.

$$\frac{\partial^2 U_h(x,s)}{\partial x^2}-sU_h(x,s)=0 \qquad \alpha^2-s=0 \Rightarrow \alpha^2=s \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{s}$$

$$\Rightarrow U_h(x,s)=A(s)e^{-\sqrt{s}x}+B(s)e^{\sqrt{s}x} \qquad B(s)=0$$

به دلیل محدود بودن جواب

$$U_p(x,s)=\alpha_{(s)}+\beta_{(s)}\sin\pi x$$

$$\frac{\partial^2 U_p}{\partial x^2}=\boxed{-\pi^2\beta(s)\sin\pi x}$$

$$\Rightarrow -\pi^2\beta(s)\sin\pi x-s(\alpha(s)+\beta(s)\sin\pi x)=-1-\sin\pi x$$

$$\sin\pi x\left(-\pi^2\beta(s)-s\beta(s)\right)-s\alpha(s)=-1-\sin\pi x$$

$$(-\pi^2-s)\beta(s)=-1 \qquad \Rightarrow -s\alpha(s)=-1 \Rightarrow \alpha(s)=\frac{1}{s}$$

$$\beta(s)=\frac{1}{\pi^2+s}$$

$$U(x,s) = U_h(x,s) + U_p(x,s)$$

$$\Rightarrow \left(A(s)\, e^{-\sqrt{s}\,x}\right) + \left(\frac{1}{s} + \left(\frac{1}{\pi^2+s}\right) \sin \pi x\right)$$

$$u(0,t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} U(0,s) = \frac{1}{s}$$

$$u(1,t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} U(1,s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow U(0,s) = \frac{1}{s} \Rightarrow A(s) + \frac{1}{s} + 0 = \frac{1}{s} \Rightarrow A(s) = 0$$

$$\Rightarrow U(1,s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{\pi^2+s} \sin(\pi \times 1) \Rightarrow 0 = 0$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{\pi^2+s}\right) \sin \pi x \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} U(x,t) = 1 + e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

جواب مسئله

تبدیل فوریه نامتناهی :

$$F\{f(t)\} = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

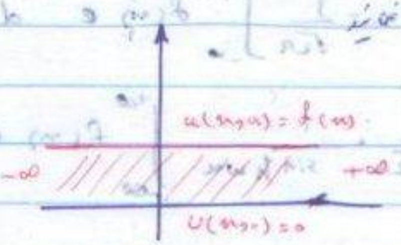
$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^n F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{F.T} (i\omega)^n F(\omega)$$

مثال ۴) خطوط $y=0$ و $y=a$ دارای پتانسیل می‌باشند $u(x,0)=0$, $u(x,a)=f(x)$ نگه داشته شده. پتانسیل الکتریکی بین این خطوط را با استفاده از تبدیل فوریه بدست آورید.



با فوریه گرفتن نسبت به x:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$(i\omega)^2\, U(\omega,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(\omega,y)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(\omega,y)-\omega^2 U(\omega,y)=0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\alpha^2-\omega^2=0 \Rightarrow \alpha=\pm\omega$$

$$U(\omega,y)=A(\omega)\,e^{-\omega y}+B(\omega)\,e^{\omega y}$$

اگر ω را به سمت $-\infty$ میل دهیم $A(\omega)$ نامحدود می‌شود و اگر ω را به سمت $+\infty$ میل دهیم $B(\omega)$ نامحدود می‌شود، بنابراین به جای فرم $U(\omega,y)$ را تغییر دهیم که هر دو نامحدود نشوند پس به فرم هیپربولیک می‌نویسیم:

$$\cosh\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \qquad e^{\alpha}=\cosh\alpha+\sinh\alpha$$

$$\sinh\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \qquad e^{-\alpha}=\cosh\alpha-\sinh\alpha$$

پس: $U(\omega,y)=A(\omega)\cosh\omega y+B(\omega)\sinh\omega y$

$$u(x,0)=0 \Rightarrow U(\omega,0)=0 \Rightarrow U(\omega,0)=A(\omega)\times 1+B(\omega)\times 0=0$$

$$=A(\omega)=0$$

$$U(\omega,y)=B(\omega)\sinh\omega y \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}B(\omega)\sinh\omega y\, e^{i\omega x}\,d\omega$$

عکس تبدیل فوریه

$$u(x,a) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \sinh \omega a \, e^{i\omega x} \, d\omega = f(x)$$

$$B(\omega) \sinh \omega a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx$$

$$U(\omega, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sinh \omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx \right) \sinh \omega y$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a} \int^{\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx \right) e^{i\omega x} \, d\omega$$

$x \to u$

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \omega y}{\sinh \omega a} f(u) \, e^{-i\omega (u-x)} \, du \, d\omega$$

تبدیل فوریه نیمه متناهی کسینوسی:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$$

$$F_c\{f'(t)\} = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega t \, dt$$

$$F_c\{f''(t)\} = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

تبدیل فوریه نیمه متناهی سینوسی:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$$

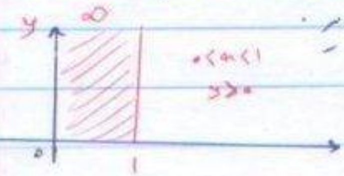
$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega t \, dt$$

$$F_s\{f'(t)\} = -\omega F_c(\omega)$$

$$F_s\{f''(t)\} = -\omega^2 F_s(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$$

مثال ۵)

با استفاده از روش تبدیل فوریه تابع $u(x,y)$ را بیابید که در نوار نیمه نامتناهی $0<x<1$ ، $y>0$ در شرایط زیر صدق نماید.



نوع تبدیل صورت مسئله:

اشکال حاوی x باشد (بازه x) فوریه لاپلاس با مشخصات ... ادامه.

و یکی را بیابید که در ... صدق کند (مثبت).

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad (\text{پایدار}) \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

شرایط:

$$u(0,y)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,y)=f(y)$$

با توجه به شرایط اولیه و مشتق $(x,0)$ داریم بر روی y از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می‌کنیم چون مشتق ... را حذف می‌کند.

$$F_c\{f''(t)\}=-\omega^2F_c(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_c(x,\omega)+\left(-\omega^2U_c(x,\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{du}{dy}(x,0)\right)$$

$$\frac{\partial^2 U_c(x,\omega)}{\partial x^2}-\omega^2U_c(x,\omega)=0$$

$$U_c(x,\omega)=A(\omega)\cosh\omega x+B(\omega)\sinh\omega x$$

$$u(0,y)=0 \xrightarrow[\text{فوریه کسینوسی}]{F_c} U_c(0,\omega)=0$$

$$\Rightarrow U_c(0,\omega)=A(\omega)\times 1+B(\omega)\times 0=0 \Rightarrow \boxed{A(\omega)=0}$$

$$U_c(x,\omega)=B(\omega)\sinh\omega x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = f(y) \xrightarrow{F_c} \frac{\partial}{\partial x} U_c(1,\omega)$$

$U_c(x,\omega)$:

$$\frac{d}{dx} U_c(x,\omega)\Big|_{x=1} \Rightarrow \omega B(\omega) \cosh \omega x \Big|_{x=1} = f_c(y)$$

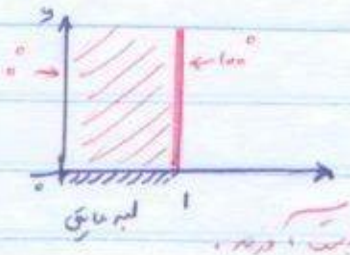
$$\Rightarrow \omega B(\omega) \cosh \omega = F_c(\omega) \qquad (\sinh \omega x)' = \omega \cosh \omega x$$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{1}{\omega \cosh \omega} F_c(\omega)$$

$$U_c(x,\omega) = \frac{F_c(\omega)}{\omega \cosh \omega} \sinh \omega x$$

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{F_c(\omega)}{\omega \cosh \omega} \sinh \omega x \cos \omega y \, d\omega$$

مثال ۶)



در ... $f(y)=100$ بگیرید عایق را حل کنید.

هر مشتق لبه‌ای برابر صفر باشد یعنی لبه عایق می‌باشد

صورت زیر مسئله:

در صورتی که لبه $x=1$ به صورت $\frac{\partial u}{\partial x}(1,y)=100$ باشد پاسخ را بدست آورید.

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 100 \cos \omega t \, dy \Rightarrow 100\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \sin y \Big|_0^\infty$$

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{100\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega} \sin y}{\omega \cosh \omega} \sinh \omega x \cos \omega y \, d\omega.$$

جایگذاری کردن $F_c(\omega)$