دکتر نادر فنائی

تحلیل:

سازه‌ها - تالیف محمد بدیعی ۴ جلد نشر آنلاین

تئوری سقف‌های سازه‌ها ترجمه محمد بدیعی انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

کتابخانه فرهنگ

مقاومت مصالح:

هیبر جانستون (ترجمه اتصلی، یلفان)

سوالات: دکتر خداکرمی

سازه‌های کره‌کنگور سطح نمی‌شود:
- بخش تنگه
- اعضاء غیر منشوری
- تحلیل تقریبی
- روش‌های افزایشی
- کانتش

پایداری و معادلات تعادل (۲ سوال)

تحلیل: دکتر نادر فنائی

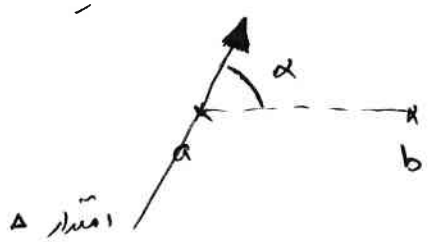
معادلات تعادل سازه در صفحه:
- سازه مسطح plane structure
- سازه فضایی space structure

۱) فرمت استاندارد معادلات تعادل، سازه در صفحه:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} \Sigma M_a = 0 \rightarrow \text{برآیند نیروها از } a \text{ بگذرد} \\ \Sigma M_b = 0 \rightarrow \text{برآیند نیروها از } b \text{ بگذرد} \\ \Sigma F_\Delta = 0 \rightarrow \text{برآیند نیروها در راستای } \Delta \text{ صفر باشد} \end{cases}$$

a و b دو نقطه و Δ راستا است بنابراین راستای Δ نباید عمود بر راستای a و b باشد



۳)
$$\begin{cases} \Sigma M_a = 0 \\ \Sigma M_b = 0 \\ \Sigma M_c = 0 \end{cases}$$

شرط اینکه a، b، c نباید در یک راستا باشند و تشکیل مثلث بدهد

حالات خاص:

۱) نیروها همراستند:

۱)
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{cases}$$

این معادله بی‌فایده است بنابراین حذف می‌شود

$$\begin{cases} \Sigma M_a = 0 \\ \Sigma M_b = 0 \\ \Sigma M_c = 0 \end{cases}$$

a نقطه همراستی و b و c نباید در یک امتداد باشند

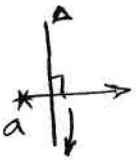
۲) حذف می‌شود

$$\begin{cases} \Sigma M_a = 0 & a: \text{نقطه همراستی} \\ \Sigma M_b = 0 & b: \text{نقطه دلخواه} \\ \Sigma F_\Delta = 0 \end{cases}$$

راستای Δ نباید با راستای ab عمود باشد

۲) (نیروها همگی راستا) نیروها موازی :

$\Sigma F = 0$ برقرار است در این راستای خط چین تعادل نیروها را داریم



۱) $\Sigma F_A = 0$

$\Sigma M_a = 0$

برآیند نیروهای موازی

در راستای A هم نیروئی نداریم ولی تعادل برقرار نیست

چون سیستم در حال حرکت یا شتاب است

۲) $\Sigma M_a = 0$
$\Sigma M_b = 0$ راستای ab خاصیتی موازی نیروها باشد و با این شرط سیستم در حال حرکت خواهد شد.

نیرو سه مشخصه دارد { نقطه اثر، راستا و جهت، مقدار }

حالات خاص تعادل : { two-force member عضو دو نیروئی، three-force member عضو سه نیروئی }

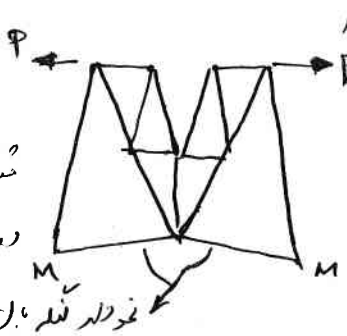
عضو دو نیروئی :

نیروها باید { ۱. هم راستا، ۲. مختلف الجهت، ۳. از لحاظ مقدار مساوی باشند }

عضو دو نیروئی در حالت خاص می تواند عضو خرپائی باشد

یعنی عضو خرپائی عضو دو نیروئی است

ولی عضو دو نیروئی عضو خرپائی نیست



مثلاً در این خرپا هم اعضای آن دو نیروئی نیستند

خود دارد تغذیه بال پائین

Supports : تکیه‌گاه‌ها

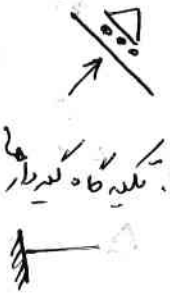
۱. مفصلی Hinge Support

Component : مؤلفه

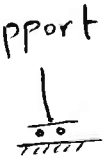
Resultant : برآیند

۲. تکیه‌گاه غلطکی : Roller support

۳. تکیه‌گاه گیردار Clamped support / fixed support



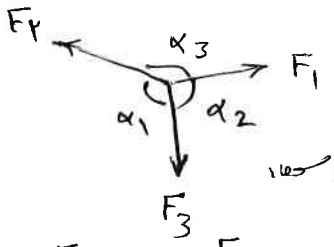
۴. تکیه‌گاه گیردار غلطکی
تکیه‌گاه لغزنده slide support



عضو سه نیروئی :

۱) سه نیرو همرا اس باشند

۲) ۳ نیرو سوازی باشند



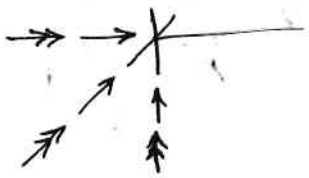
قانون سینوسها

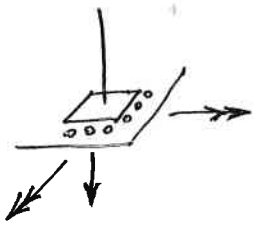
$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}$$

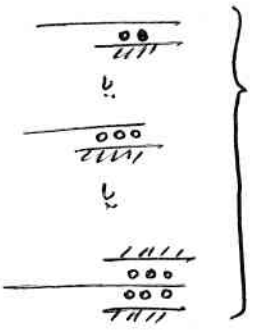
اگر شرط تعادل برقرار باشد تعادل برقرار است

* همراستی نیروها به اضافه برقراری قانون سینوسها شرط کافی برای برقراری تعادل است *

نقطه : ۱. مفصلی







شل تکیه‌گاه گیردارهای که عکس العمل محدودی ندارد

Kinds of springs انواع فنرها :

Spring

۱. linear فنر خطی (اتصالی)

$$\Delta l = \frac{F}{K_s}$$

Ks (N/m)

۲. فنر حلزونی : Torsionale Spring or spiral Spring

$$\Delta\theta = \frac{M \rightarrow \text{گشتاور}}{K_\theta}$$

سختی گشتاور حلزونی از نوع گشتاور بر رادیان است

stability : پایداری rigidity : صلبیت

instability : ناپایداری

* انواع ناپایداری : kinds of instability

elastic or rigid body

شرط لازم برای پایداری یک سازه صلب صفحه ای : وجود ۳ تکیه گاه یا ۳ قید تکیه گاهی است

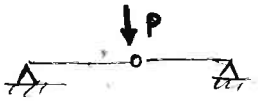
و شرط کافی آن این است که این ۳ نموازی یا متلاقی نباشند

۱) ناپایدار ایستائی statically unstable

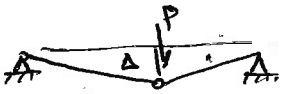
Contilever or projected beam

پشتی آسه

۲) ناپایدار هندسی داخلی internal geometric instability



برقرار نمی شود $\Sigma F_y = 0$



$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{P}{EA}} \cdot l$$

restrain : قید

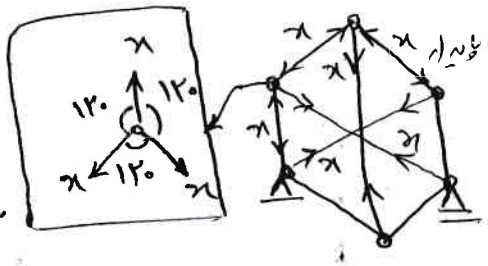
restrained : مقید

instantinius unstable : ناپایدار آنی

deformation : برای تغییر شکل محوری بکار می رود

deflection : برای تغییر شکل خمشی بکار می رود

Zero-force test : آزمون بار صفر



خرپا مقابل مثال ناپایدار هندسی است

در ترکیب سه تعادل پایدار غیر صفر پدید می شود آنها هم حالتی که هیچ نیروی خارجی وارد نکرده ایم در این حالت گفته می شود جسم ناپایدار هندسی داخلی است.

* نتیجه تحلیل یک سازه پایدار یکتاست *

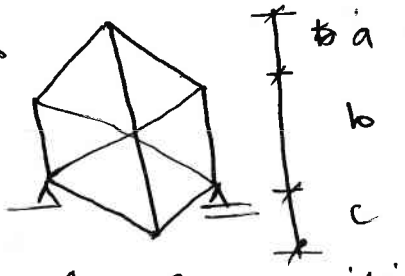
پایداری سازه ها را با آزمون بار صفر یا قانون ترکیب اجسام صلب یا روش پاسخ نشان می دهند یا ثابت می کنند

$$AX = B$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$|A| = 0$ ناپایدار

$|A| \neq 0$ پایدار

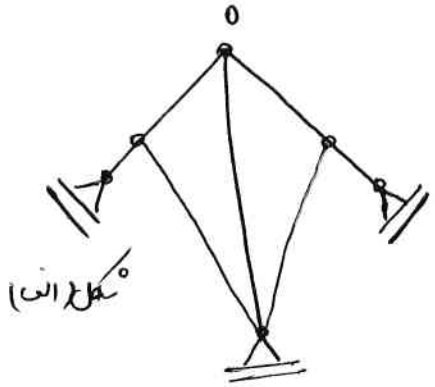


$\begin{cases} a = c & \text{خرپا ناپایدار} \\ a \neq c & \text{خرپا پایدار} \end{cases}$

۵/۶

۳) ناپایداری هندسی خارجی external geometric instability

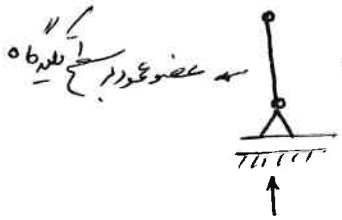
یا تکیه‌گاهی سازه ←
- عکس العملهای تکیه‌گاهی موازی یا متقارب
- عکس العملهای تکیه‌گاهی همراس یا متقاطع

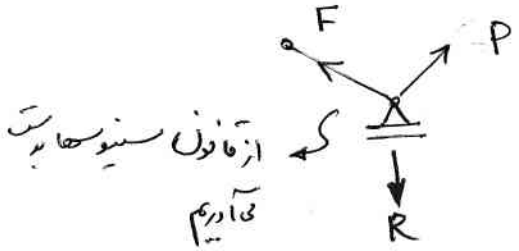


شکل (الف)

نکته: اگر یک عضو دوفیزیکی به یک تکیه‌گاه مفصلی متصل شود عکس العمل تکیه‌گاه مفصلی در امتداد عضو دوفیزیکی خواهد بود

بنابراین در خرپا که عضوها دوفیزیکی اند حالت شکل زیر که عضو عمود بر سطح تکیه‌گاه است همیشه ناپایدار است

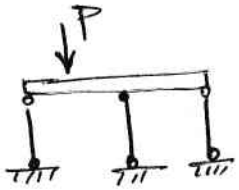




ولی اگر عمود نباشد حالت زیر برقرار است و پایدار است ←

که از تفاوت مینوسها بدست می‌آوریم

پس در شکل (الف) هر سه تکیه‌گاه باید مفصلی باشد تا سازه پایدار باشد



* سازه می‌تواند ناپایدار باشد ولی برای یک بارگذاری خاص تعادل داشته باشد. ←

پس: داشتن تعادل دلیل بر پایداری سازه نیست.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

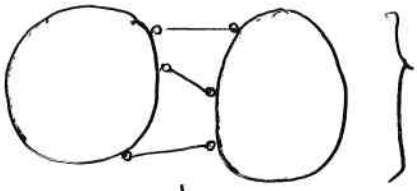
$$\text{ثابت} \quad \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

$n \longrightarrow \infty$

$$\Rightarrow 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

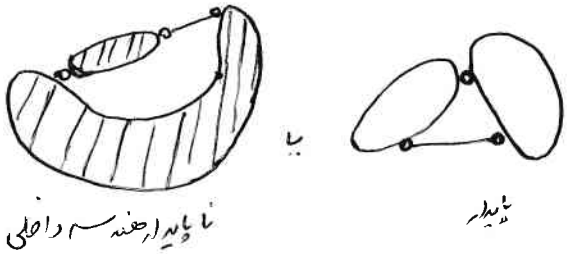
قوانین ترکیب اجسام صلب:

fault: گسل
sub fault: زیرگسل
یا یک قسمت از گسل



اعضای دو نیرویی که نه موازی‌اند و نه همراس

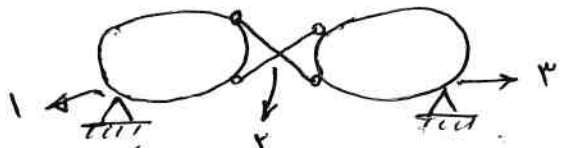
* تغییر شکل جزء ذات سازه‌های واقعی (الاستیک) است پس نه روی تغییر شکل سازه نمی‌توان اصلح به پایداری و ناپایداری سازه قضاوت کرد*



← امتداد عضو دو نیرویی نباید از مفصل مشترک بگذرد

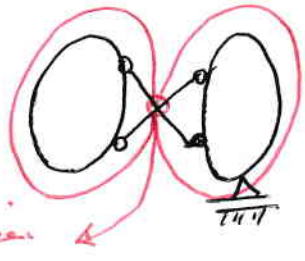
اگر دو جسم صلب توسط دو میله به هم متصل شوند یعنی هر میله که راستا باشد گیردار آن یک میله را با واکنش‌های تکیه‌گاهی جبران می‌کنیم

* محل برخورد دو میله یا دو عضو دو نیرویی مفصل موهومی گفته می‌شود و شرط پایداری اینست که عکس العمل نیروی تکیه‌گاهی از آن مفصل موهومی (امتداد آن) عبور نکند



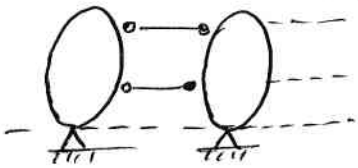
شرط پایداری جسم یا سازه بالا اینست که
۱ و ۲ و ۳ در یک امتداد نباشند

۲: مفصل موهومی

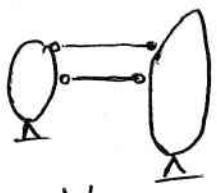


Virtual hinge

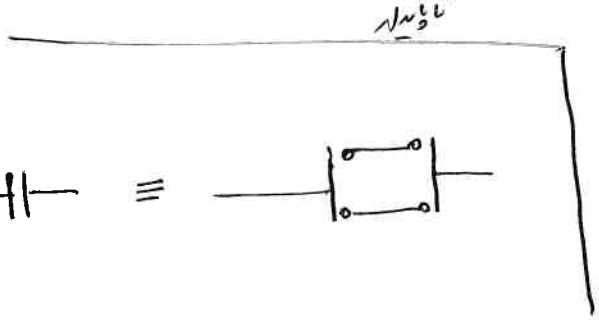
dummy pseudo ←

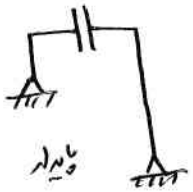


ولی: چون این سه راستا موازی‌اند

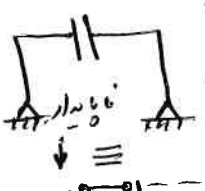


پایدار

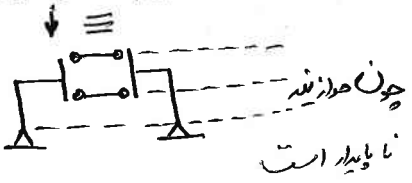




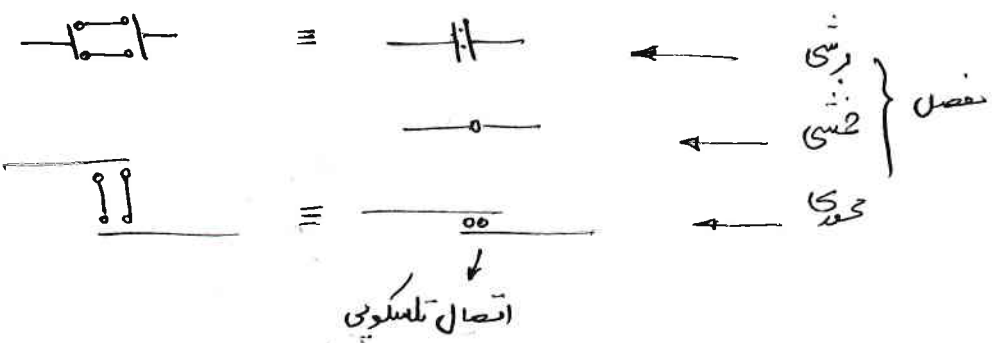
ولی ←

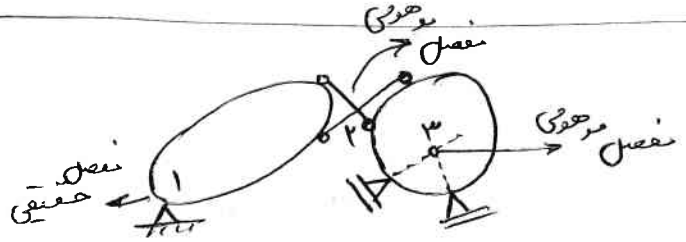


بنابراین:

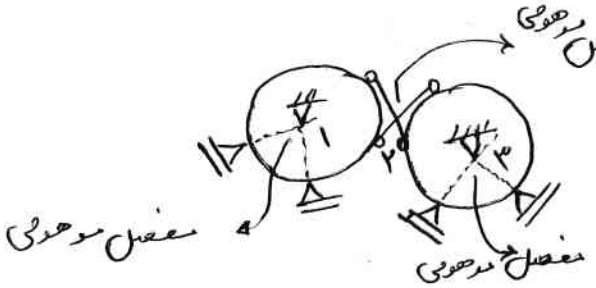


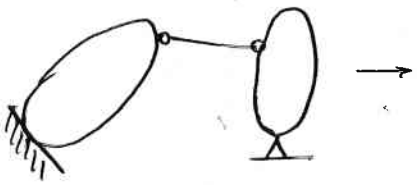
چون موازی‌اند
ناپایدار است



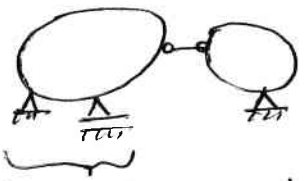


۱، ۲، ۳ نباید در یک راستا باشند
تا پایداری برقرار باشد



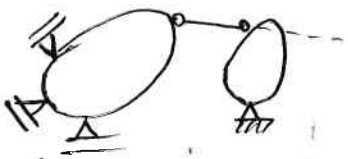


برای پایداری اندام عضو دو درجه‌ای نباید
از مفصل تکیه‌گاه مفصلی بگذرد



اندام مفصل هم نباید از
مفصل تکیه‌گاه ثابت بگذرد

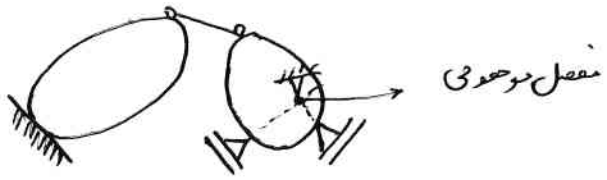
اندام این دو نباید نه
یک نقطه بگذرد



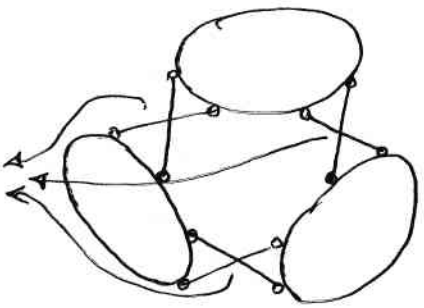
این سه نباید موازی یا همراس باشند

اندام دو نیرویی هم نباید
از مفصل تکیه‌گاه ساده بگذرد

اگر n تا جسم صلب را بخواهیم به هم وصل
کنیم تا پایدار باشند باید (n-1)۳ عضو دو
نیرویی باشد تا n جسم را به هم وصل کنیم



اندام میله نباید از مفصل موهومی بگذرد

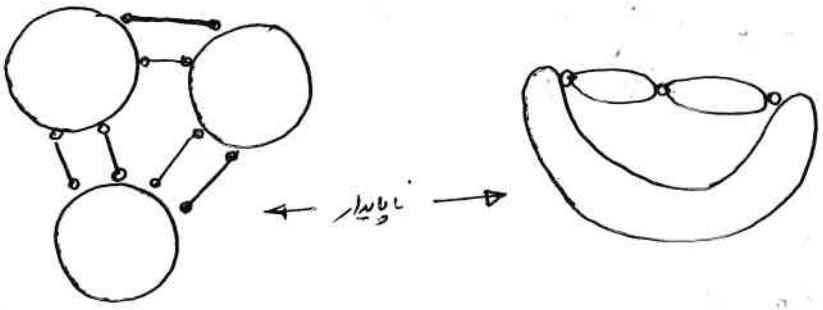


مفصل موهومی که دو میله را تنها نیشتند پس پایدارند

یا

هر مفصل به جای ۲ معضوات.

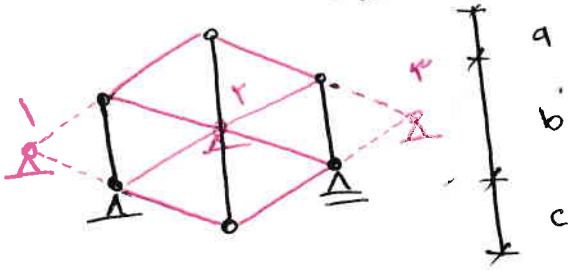
$$3(n-1) = 6$$



ناپایدار

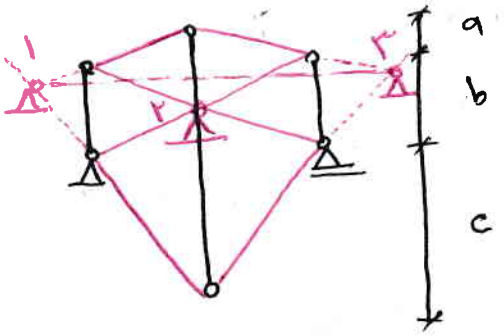
دو میله دو تا دو تا میله های موازی به یکدیگر متصل می شوند

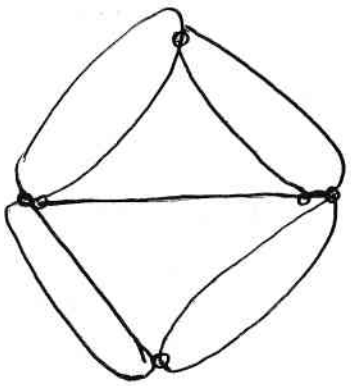
پس دلیل اینکه خرپای بغرنج ناپایدار است اینست که سه مفصل موهومی که ۳ عضو قائم را به یکدیگر متصل کرده دو به راستا هستند یعنی ۱ و ۲ و ۳ دو به راستا هستند



اگر $a \neq c$ بود آن وقت این ۳ مفصل موهومی دو به راستا نبودند و خرپا پایدار می شد

یعنی





پایدار

$$3(n-1) = 9$$

هر مفصل بجای ۲ معضوات

و یک میله کم دارد که با اضافه کردن آن پایدار می شود

Degree of indeterminacy

determinate : معین

indeterminacy : نامعینی

درجه نامعینی = تعداد معادلات − تعداد مجهولات

سازه نامعین ← بیشتر جواب دارد چون (مثل دستگاه معادلات تعادل که ۳ مجهول ۳ معادله دارد)

شرط پایداری آن که جواب unique ، یکتا باشد

determinate structure

isostatic structure

indeterminate structure → redundant structure

hyperstatic structure

سازه با قید اضافی

Redundancy : قید اضافه

* فرمولهای درجه نامعینی :

Member (M) : تعداد اعضا

Node (N) : تعداد کل گره‌ها

Reaction (R) : تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

۱) plane truss : خرپای مسطح

$$D.I = M + R - 2N$$

۲) Space truss :

$$D.I = M + R - 3N$$

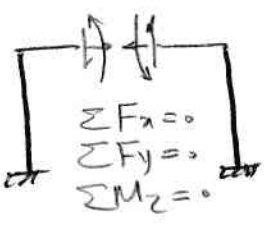
۳) plane frame :

M: تعداد کل اعضا

N: تعداد کل گره‌ها

R: تعداد کل عکس‌العمل‌ها

C: تعداد شرایط → { Conditional equation, Construction equation }



$DI = (3M + R) - (3N + C)$: plane frame, صفحه‌ای

مفصل — لولایی $C=1$ — خمشی $C=1$ — محوری $C=1$

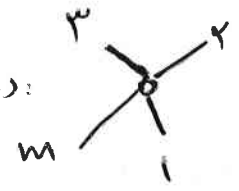
غلطک $C=2$ → $\begin{cases} M=0 \\ S=0 \rightarrow \text{نیروی محوری} \end{cases}$

$C = m-1$

m عضو به نقطه رسیده

۲) Space frame :

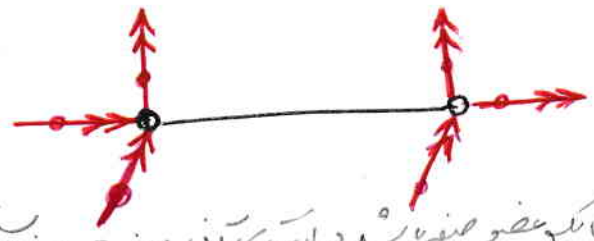
$DI = (6M+R) - (6N + C)$



در فضا :

$C = 3(m-1)$

$\begin{cases} M_{1x}=0 \\ M_{2x}=0 \\ \vdots \\ M_{nx}=0 \end{cases}$ $m-1$ $\quad \begin{cases} M_{1y}=0 \\ M_{2y}=0 \\ \vdots \\ M_{ny}=0 \end{cases}$ $m-1$ $\quad \begin{cases} M_{1z}=0 \\ M_{2z}=0 \\ \vdots \\ M_{nz}=0 \end{cases}$ $m-1$ $\rightarrow 3(m-1)$



اگر تکیه‌گاهی در ابتدای یک عضو صفر باشد در انتهای آن عضو هم صفر است

مهم * در حل سه شرایط تعادل فضائی بایستی به ازای هر عضو در سر تفصل یک واحد از شرایط C کاست تا تعداد معادلات شرطی درست حل شود

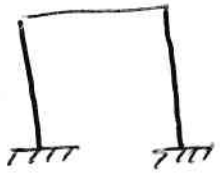
اگر به تیر بازو دهیم تکیه خمشی درست می‌کند ولی پیچش معقوله جدای است و از هیچ چیزی دیگر نمی‌آید غیر از خودش ممکن است در یک سر عضوی خمش داشته باشیم ولی در سر دیگر نداشته باشیم ولی اگر در یک سر عضوی پیچش داشته باشیم همان پیچش را در سر دیگر داریم

روشهای میانبر تعیین درجه نامعینی :

۱. روش حلقه : فقط برای قاب سطح جواب می دهد و برای قاب سطح بهترین روش است

* برای قاب فضائی جواب نمی دهد *

$$D.I = 3M - C$$



M : تعداد حلقه ها

C : تعداد معادلات شرطی

حلقه را به زمین می چسبانیم ←

در روش حلقه پیش فرض این است که تکیه گاهها گیردار است (مثل شکل) پس اگر گیردار نبود به تعداد معادلات شرطی اضافه می شود (به همان تعداد که هر مولفه ده تکیه گاه آزادی می شود)

۲. روش درختی : { قاب سطح ← $D.I = 3M - C$ ، قاب فضائی ← $D.I = 6M - C$

سطح : هر برش سه تا معادله آزادی کند

فضائی : هر برش ۶ تا مولفه آزادی کند

M : تعداد برشها

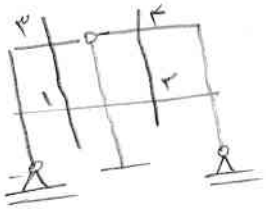
C : معادلات شرطی

grid : شبکه

مثال : درجه نامعینی قاب زیر را بدست آورید :

$$D.I = 3\times4 - (2+2+2) = 12-6 = 6$$

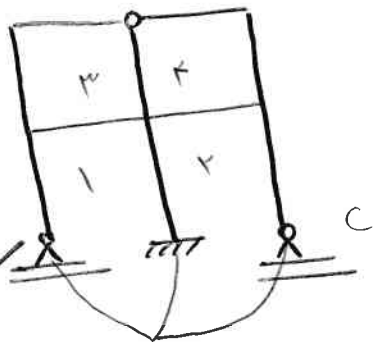
روش درختی :



$$D.I = 3\times4 - (2+2+2) = 6$$

همواره تعداد حلقه ها در روش حلقه برابر است با تعداد برش ها در روش درختی و تعداد معادلات شرطی هم برابر است

$C = 3-1 = 2$



C=۲
برش آزاد
لنگه آزاد

(در روش درختی توجه شود که هیچ عضو نباید در فضا باقی بماند و تمام یک سقوط باید به زمین وصل شود)

در روش درختی ستونهایی نمود ساده، درخت و قیدهایی شونده شاخه درخت و برای ماسهای روبرو جواب می دهد

از فرمول عمومی : $M = 10 , N = 9 , R = 5 , C = 2$

$$D.I = (3M+R) - (3N+C) = (3\times10+5) - (3\times9+2) = 6$$
$$35 - 29$$

روش گره صلبی یا حلقه: $C=2$ ← ۱ به خاطر منفصلی شدن دو عضو به یکدیگر ، ۱ به خاطر منفصلی شدن تکیه‌گاه و آزاد شدن لنگر (آزادی لنگر)

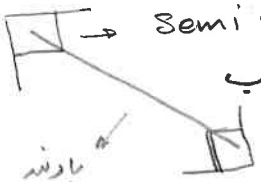
روش عمومی: $C=1$ ← به خاطر منفصلی شدن دو عضو به یکدیگر

روش حلقه یا درجی $C=3$ ← بعاری درجاتی که پیش از یک عضو با اتصال منفصلی به تکیه‌گاه برسد.

روش عمومی: $C=1$

حلقه: $C=1$

عمومی: $C=0$ یا ندارد

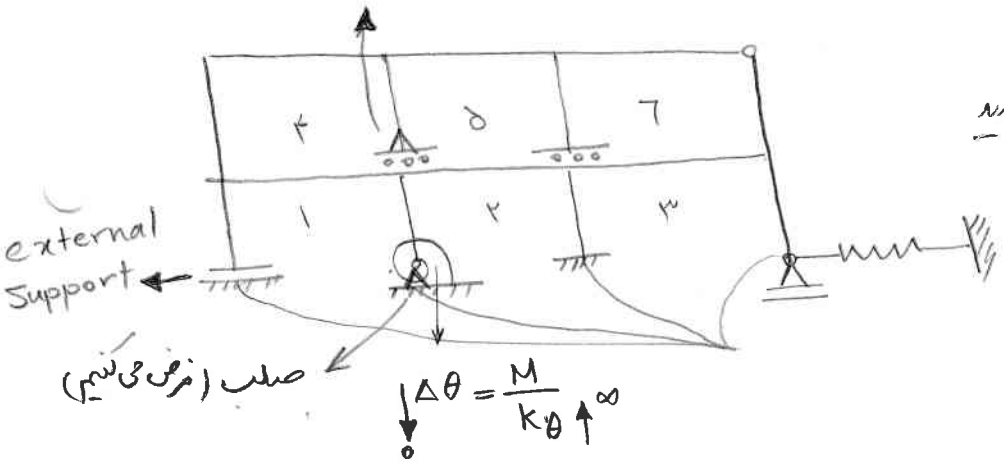


*** Important: ***

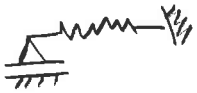
** در روش حلقه وقتی دو عضو از روی هم رد می‌شوند و عبور نمی‌کنند یا اتصالی ندارند ما فرض می‌کنیم که باهم اتصال دارند و در آخر ۳ درجه نه درجه نامعینی سازه کم می‌کنیم؛ به ازای هر فرضی که می‌کنیم ۳ درجه یا یک حلقه از درجه نامعینی سازه کم می‌کنیم. **

تکیه‌گاه داخلی internal support

* درجه نامعینی قاب زیر را بدست آورید



$\Delta\theta = \frac{M}{K_\theta} \uparrow \infty$ ↓ ۰

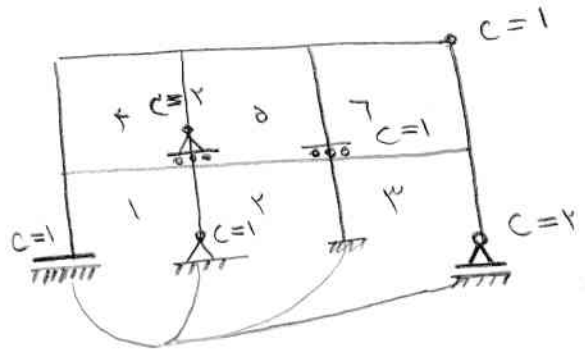


$\Delta H = \Delta l = \frac{F_S}{K_S} \uparrow \infty$ ↓ ۰

یا سختی قیدها را ∞ تصور می‌کنیم یا اینکه قیدها را حذف کرده و در آخر به تعداد درجه نامعینی سازه اضافه می‌کنیم (به تعداد قیدها)

تکیه‌گاه خارجی سازه را به زمین وصل می‌کند ولی برای تکیه‌گاه داخلی شرط تعادل کافی نیست

۱۳
S

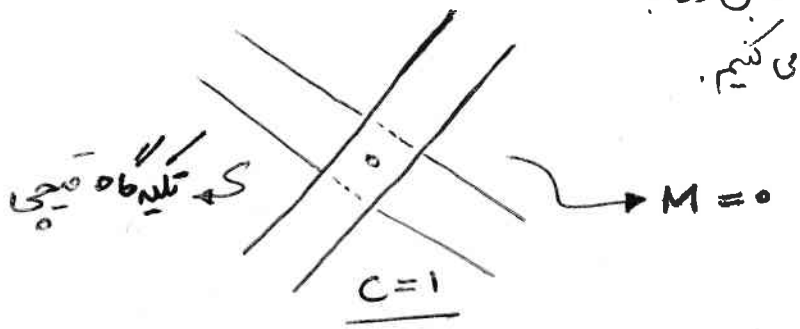


$$D.I = ۳\times۶ - (۱+۱+۲+۲+۱+۱) + ۲ = ۱۸ - ۸ + ۲ = ۱۲$$

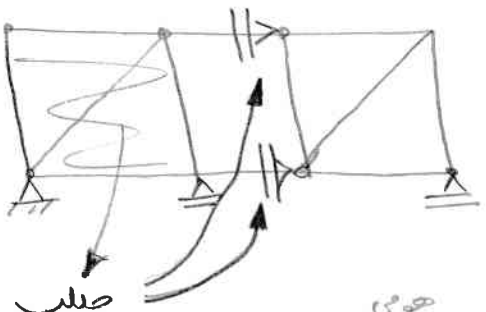
↓

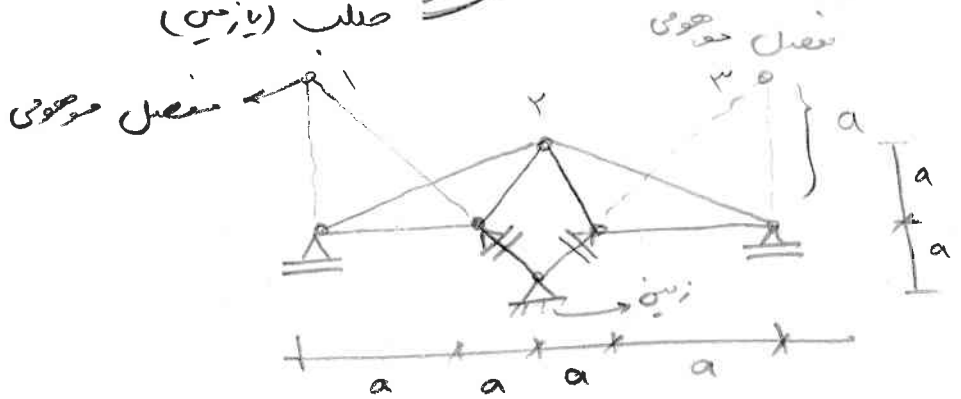
بخاطر ۲ نقطه

اگر در قاب بجای عضو کابل دار باشند، کابلها را حذف کرده و در انتها به ازای هر کابل یک درجه نامعینی به سازه اضافه می کنیم.

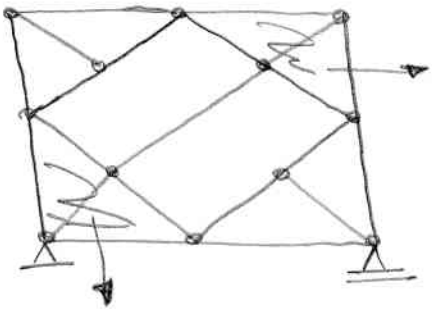


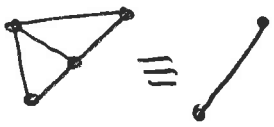
زمین یا هر نقطه ای که سازه پایدار را نقطه مطمئن گوئیم





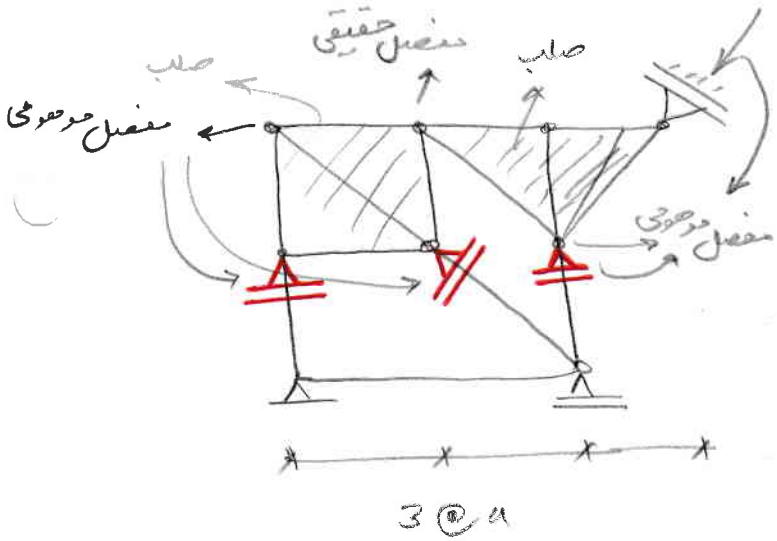
۱، ۲، ۳ در یک راستا قرار دارند





(۲ و ۱) ۲ جسم صلب با سه میله موازی به هم وصل شده اند

ک ← ناپایدار هندسی داخلی



پایدار و معین

پایدار است (سه مفصل در یک راستا نیست)

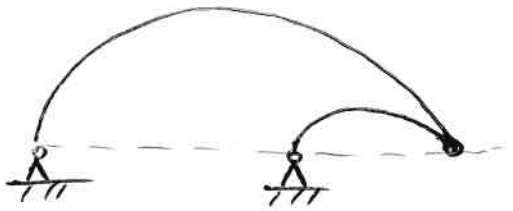
D.I < ۰ → unstable structure

D.I = ۰ → ? نامعینی دلیلی بر ناپایداری نیست

D.I ≥ ۰ → ?

در واقعیت تمام سازه های ساخته شده D.I مثبت دارند چون اگر D.I صفر باشد به محض ایجاد شکلی درجه نامعینی منفی می شود و بلافاصله ناپایدار می شود ولی با D.I > ۰ ضریب اطمینان را بالا می بریم (هرچه D.I بیشتر ← سازه پایدارتر و گران تر)

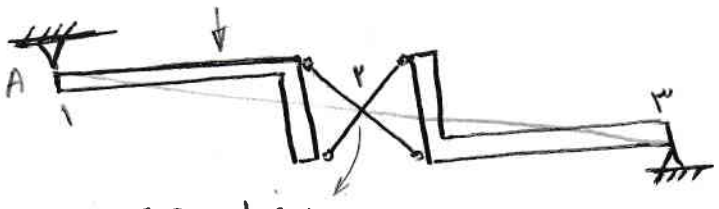
به شرط پایداری ← که جواب تحلیل سازه یکتا باشد (Unique)



سه مفصل در یک راستا اند

↳ ناپایدار

تست ۴



مفصل موهومی

ناپایدار است. اثبات به دو روش

۱. روش بار آزمایشی ← اگر بار نگذاریم $\sum M_A \neq 0$

۲. قانون ترکیب اجسام صلب ← سه مفصل در یک امتداد (۱، ۲ و ۳ در یک امتداد)

تست ۵ و ۶

شیب عضو CE : $m_{CE} = \frac{x}{a}$

$m_{AF} = \frac{a+x}{5a}$

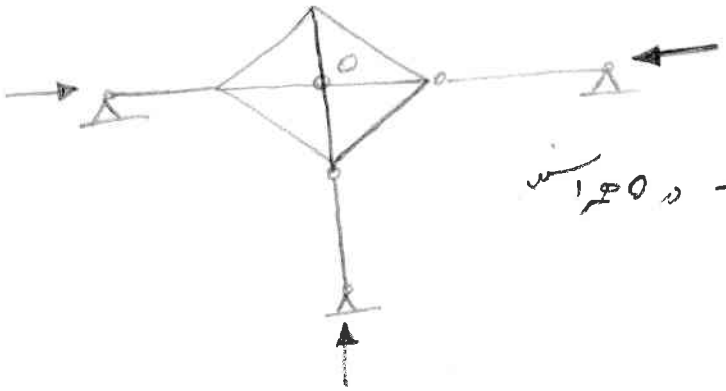
$\frac{x}{a} = \frac{a+x}{5a} \rightarrow x = \frac{a}{4}$

شیب خط کوچک

به ازای هر x غیر از $x = \frac{a}{4}$ سازه پایدار است

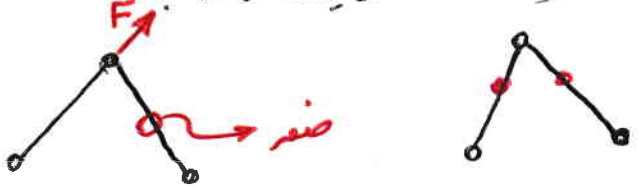
وقتی امتداد AF با دو عضو BD و CE موازی باشد حالت ناپایداری پیدا می‌کند

تست ۸

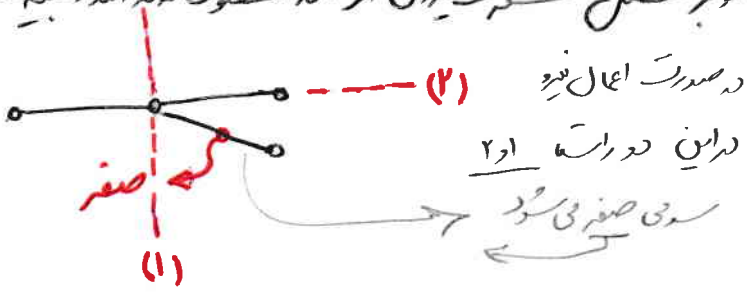


ناپایدار ← در O هم‌رس

نکته ۱) هرگاه دو عضو خرپایی که در یک امتداد نیستند در یک مفصل به یکدیگر متصل شده باشند و در مفصل مشترک نیروی اثر نکند هر دو عضو صفر نیرو می‌خواهد بود



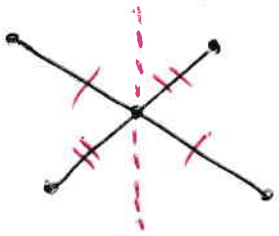
نکته ۲) هرگاه سه عضو خرپایی که دو تا از آنها در یک امتداد و سومی در امتداد تقید نیست در یک مفصل به یکدیگر متصل شده باشند و بر مفصل مشترک نیروی اثر نکند عضوی که در امتداد تقید نیست، صفر نیرو می‌خواهد بود.



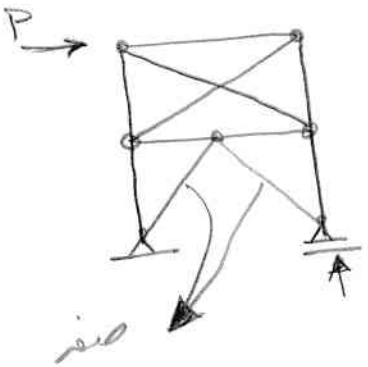
در صورت اعمال نیرو در این دو راستا او ۲ سومی صفر می‌شود

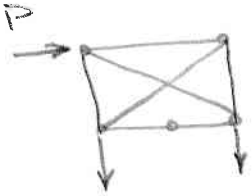
نکته ۳) هرگاه چهار عضو خرپایی که در یک امتداد هستند در یک گره وارد شده باشند در صفحه
(۲ به ۲ در یک امتداد هستند)

مشکل نیروی وارد شده باشد ، اعضائی که در یک امتداد هستند نیروی برابر وارد



تست ۱۱



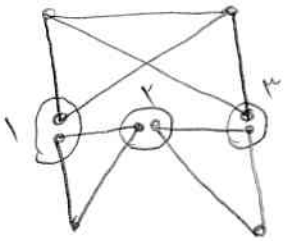


پایداری خرپا ؟

$\Sigma F_x \neq 0$

ناپایدار

اثبات از طریق قانون ترکیب اجسام صلب :



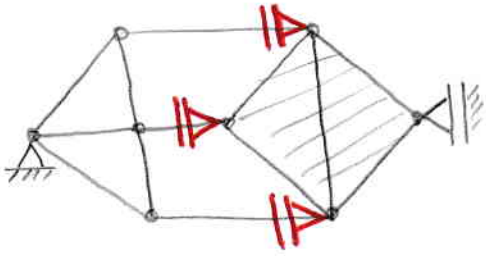
سه مفصل در یک امتداد نیستند → ناپایدار

طریق دیگر

امتداد دو عضو از مفصل سوم گذشته است

ناپایدار

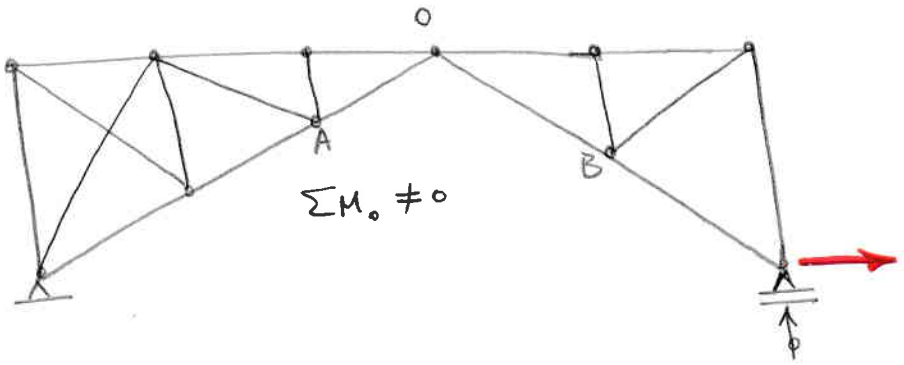
تست ۱۳



سه حلقه موازیند

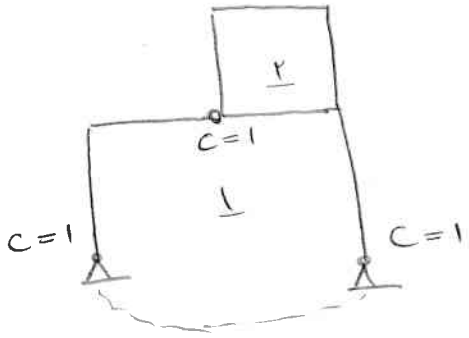
ناپایدار

تست ۱۴



در صورت اضافه کردن اعضاء جدید باز هم ناپایدار است و تغییر شکل می دهد تا اینکه O در امتداد سه فاصل تکیه‌گاهی قرار گیرد) پس یا باید Δ تبدیل شود به Δ یا اینکه یک عضو در امتداد AB قرار گیرد تا پایدار شود.

تست ۲۸



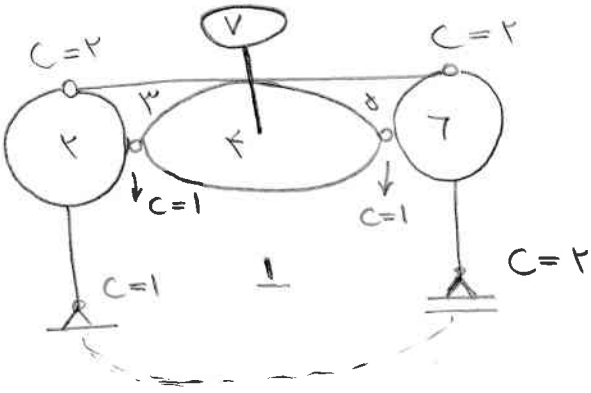
حلقه $DI = ۳\times۲-(۱+۱+۱) = ۳$

(اگر از روش درختی می رفتیم در سه حالت می توانیم برش بزنیم پس اینجا اشتباه دارد)

عمومی $DI = (۳M+R)-(۳N+C) = (۳\times۷+۴)-(۳\times۷+۱) = ۳$

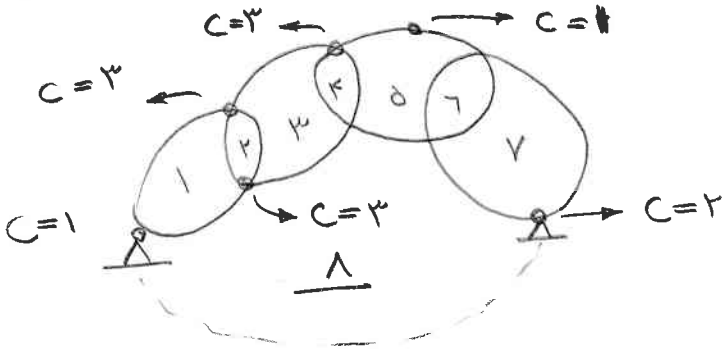
$C=۱$

تست ۳۰



گزینه ۲ ← $DI = ۳\times۷-(۲\times۲+۲\times۱+۱+۲) = ۱۲$ روش حلقه

تست ۳۱



$$D.I = ۳\times۸ - (۱+۲+۳\times۳+۱) = ۲۴-۱۳ = \underline{۱۱}$$

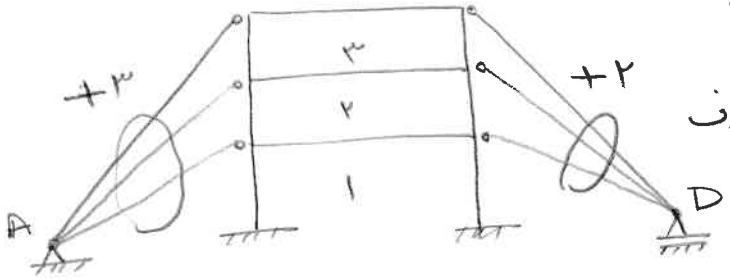
تست ۳۲

آزادی حلقه: هر برش سه معادله آزادی می‌کند
- C تا برش در طبقه
- P تا برش در دهانه

$\rightarrow$ درجه نامعینی $= \underline{۳PS}$

تست ۳۵

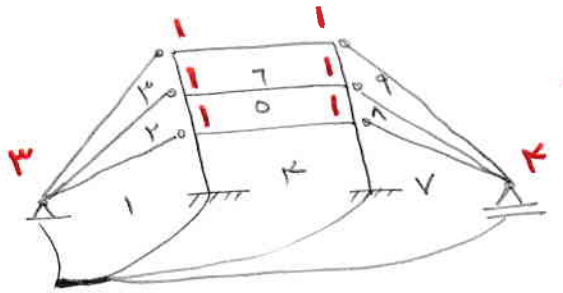
درجه نامعینی سازه کدام است؟



می‌دانیم اعضا دوسرمفصلی مستقل را از سازه حذف کرده و درجه آخر درجه نامعینی سازه باقیمانده اضافه کنیم

$\rightarrow$ درجه نامعینی سازه باقیمانده $= ۳\times۳ = ۹$

درجه نامعینی کل $= ۹+۳+۲ = \underline{۱۴}$

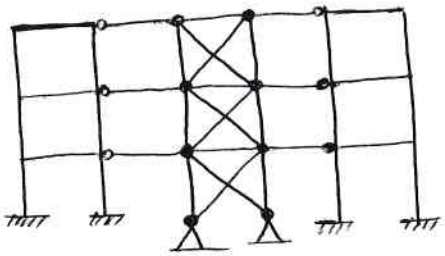


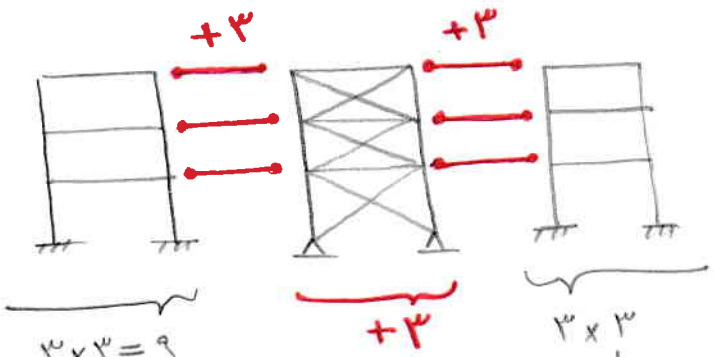
گزینه C

حلقه $D.I = ۳\times۹ - (۶\times۱+۳+۴) = ۲۷-۱۳ = \underline{۱۴}$

تست ۳۶

درجه نامعینی سازه کدام است؟

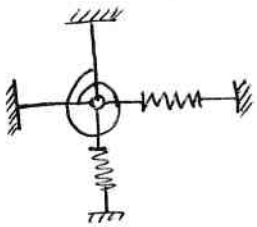




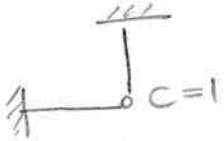
$$D.I = ۳+۹+۹+۳+۳ = ۲۷$$

تست ۵۵

درجه نامعینی سازه کدام است؟



سه تا تنه حذف می‌کنیم پس ۳+ تا به DI باقیمانده اضافه می‌کنیم

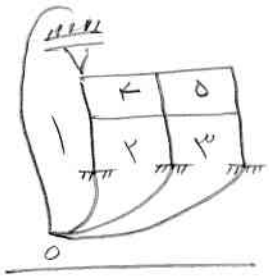


$$DI = ۳*۱-۱ = ۲+۳ = ۵$$

سه تا تنه

توجه: در روش حلقه اگر یک تکیه‌گاه بالای سازه بود، آن را هم باید به زمین وصل کنیم مثلاً:

تکیه‌گاه خارجی



یا اگر تنه‌ها را حذف کنیم و DI سازه باقیمانده منفی شد

مشکلی نیست ممکن است با اضافه کردن تعداد تنه‌ها دوباره DI مثبت شود

حذف تنه‌ها

$$DI = -۱$$

$$DI \text{ کل} = -۱+۲ = ۱$$

تعداد تنه

$DI = M + R - 3N = 7 + 12 - 3\times 7 = 1$

Space frame

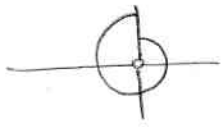
تست ۵۸ — ۲۰ / ۵

تست ۵۹ — درشی درجتی ۸ تا برش می‌خورد و هر برش I درجه یا I معادله تعادل می‌خواهد

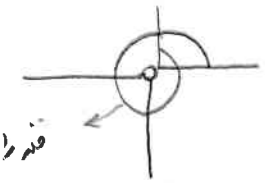
$\rightarrow 8\times 7 = 48 = DI$

(۸: برش، ۷: معادله)

توجه: اگر قید از روی یک عضو وارد شود (قید پیشی) و روی خودش برگردد هیچ تأثیری ندارد چون یک عضو با خودش را دیم پیدا نمی‌کند ← پس هیچ تأثیری ندارد و آنرا دور می‌اندازیم

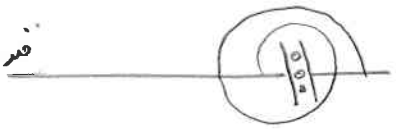


یا اگر قید یک انتهای صلب را به هم وصل کند ←



قید را دور می‌اندازیم

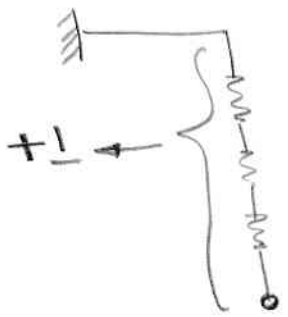
یا اگر غلطک برش آزاد را به هم وصل کند



قید را دور می‌اندازیم

چون شیب چپ و راست آن با هم برابرند

توجه: اگر n تا قید را سری کردیم آن n قید در محاسبه DI فقط یک درجه نامعینی را اثر آن می‌دهد



n قید را حذف و DI را 1+ اضافه می‌کنیم

تست ۶۴ — تعداد اعضای دو سر مفصل فراموش نشود

آیا عضو دو سر مفصل دارد

* به تعداد اعضای دو سر مفصل در قاب تصادفی $C = 3(m-1)$ از تعداد معادلات شرطی (C) کم می‌کنیم $= 3(4-1) = 9$

$C = 4\times 9 - 7 = 30$

$M = 10$, $N = 8$ $R = 4*7 = 24$

$\rightarrow DI = (7\times 10 + 24) - (7\times 8 + 30)$

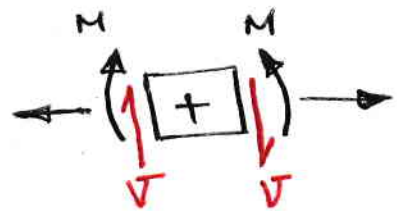
$= 84 - 78 = 6$

هر عضو دو سر مفصل منبع درجه نامعینی است

پس می‌توانیم 6 عضو را برداریم و به DI، 6+ اضافه کنیم ← پس 24 ستون می‌ماند که DI هر کدام صفر است پس

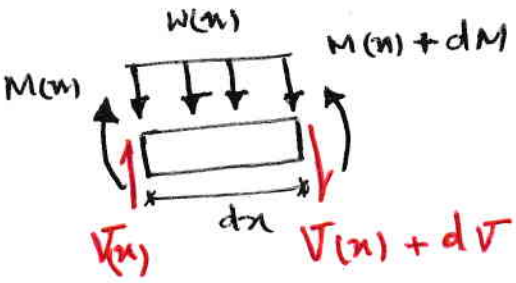
$DI = 6$

* تیرهای معین *



* برش مثبت ساعتگرد است *

در تحلیل همیشه از چپ به راست می‌رویم



$\Sigma F_y = 0$

$$\rightarrow V(x) = w(x) \cdot dx + V(x) + dV$$

$$\rightarrow dV = -w(x)\,dx$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

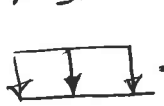
Bending moment diagram
دیاگرام لنگر خمشی

Uniformed distributed load
بارگسترده یکنواخت

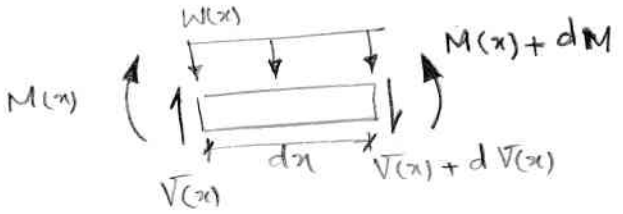
Concentrated load: بارمتمرکز

۱) برش V یک درجه از بارگسترده بیشتر است

۲) برش مثبت ساعتگرد است

+  بارگسترده

$$\frac{dV}{dx} = \ominus w(x)$$



$$\Sigma M = 0 \rightarrow V(x) \cdot dx + M(x) = M(x) + dM + w(x) * dx * \frac{dx}{2}$$

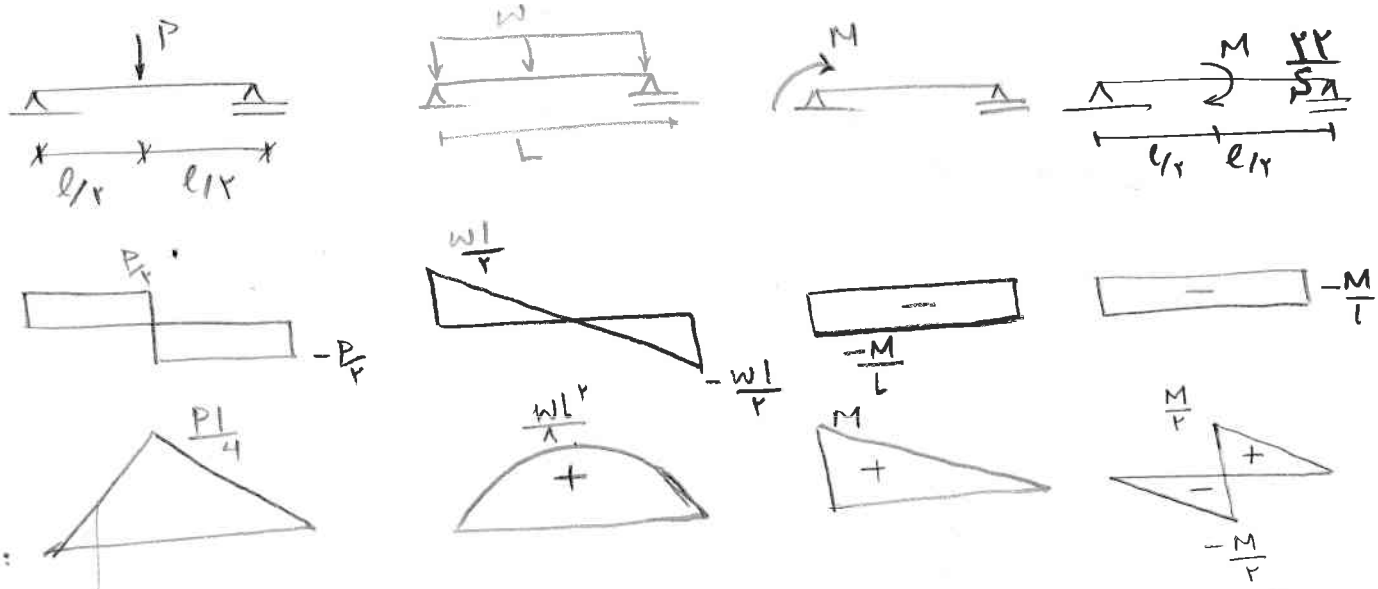
$$\rightarrow dM = V(x) \cdot dx - w(x) \cdot \frac{dx^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = V(x) - \frac{w(x) \cdot dx^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = V(x)$$

ی‌ه → Bowles

حمیدرضا ابریشمی (دانشگاه فردوسی)



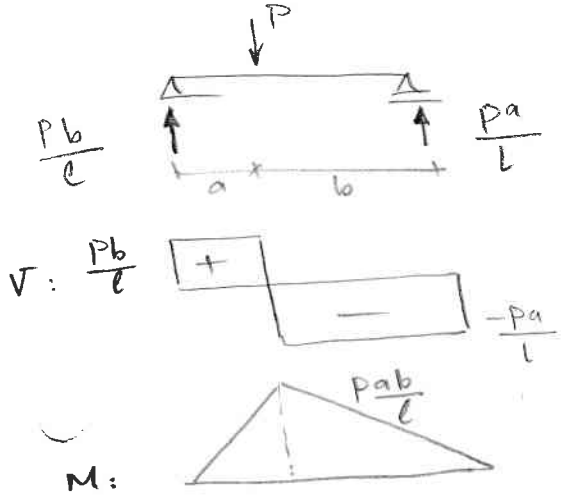
نکته ۱) نمودار نیروی برشی همیشه از قطعه صفر شروع شده و به مقدار صفر نیز ختم می شود در مورد لنگر نیز همینطور است

نکته ۲) در قسمتی از سازه که باری وجود ندارد، برش ثابت است و خطی موازی با محور تیر می باشد و در آن قسمت از سازه گشتاور خمشی یا لنگر خمشی بصورت خطی تغییر می کند (برش شیب نمودار لنگر است)

* برش شیب نمودار لنگر است *

$$\text{شیب} = \frac{\frac{PL}{4}}{\frac{L}{2}} = +\frac{P}{2} = V$$

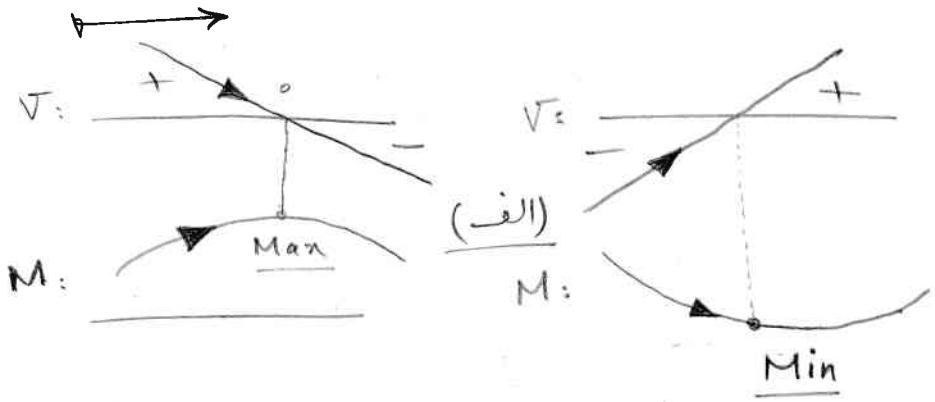
نکته ۳) در نقطه ای که یک بار متمرکز اثر می کند در دیاگرام نمودار برش، پرش داریم. اگر جهت بار متمرکز بطرف پائین باشد، پرش برابر سوئه قائم این بار متمرکز بطرف پائین خواهد بود و اگر جهت بار متمرکز رو به بالا باشد پرش، برابر سوئه قائم این بار متمرکز بطرف بالا خواهد بود. در دیاگرام لنگر در نقطه اعمال بار شیب نمودار گشتاور خمشی، تغییر می کند و آن نقطه دارای ۲ شیب است که تفاضل شیبها برابر است با سوئه قائم نیروی متمرکز اعمال شده در آن نقطه.



ضرب a در b حداکثر مقدار است که $a = b = \frac{L}{2}$

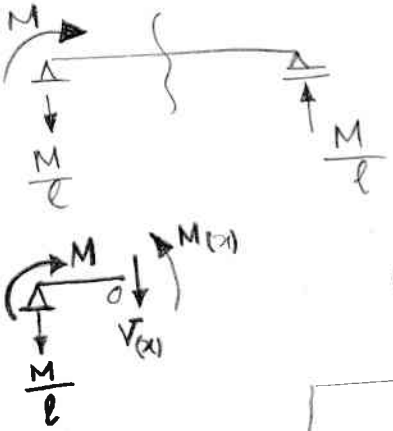
یا بار متمرکز در وسط تیر باشد

* اگر در نمودار لنگر تغییر شیب داشته باشیم، تفاضل شیبها برابر است با سوئه قائم نیروی متمرکز اعمال شده در آن نقطه *



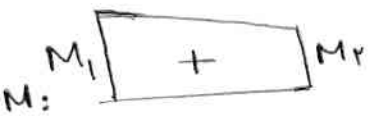
نکته ۴: در قسمتی از سازه که بار گسترده یکنواخت وجود دارد برش بصورت خطی تغییر می کند و شدت ممان دارد و در آن قسمت از سازه گشتاور خمشی بصورت سهمی (درجه ۲) تغییر می کند

نکته ۵: گشتاورهای خمشی ماکزیمم و مینیمم در محلی بوجود می آید که برش برابر صفر شود $V=0$ و چنانچه در این نقطه نیروی برشی از مقدار مثبت در سمت چپ نقطه برش صفر به مقدار منفی در سمت راست این نقطه تغییر کرده باشد گشتاور خمشی Max است و در غیر اینصورت Min است (شکل الف)



Single Curvature

double Curvature

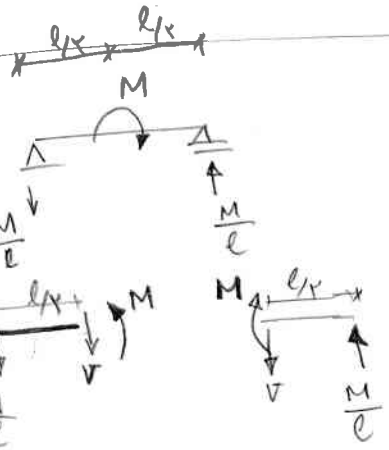


$$\sum M_0 = 0$$

$$M(x) + \frac{M}{\ell} x = M$$

$$M(x) = M - \frac{M}{\ell} x$$

$$M(x) = M\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



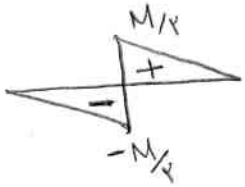
نگر ساعتگرد برشی مثبت به اندازه خودش در دیاگرام نگر وارد می کند

$$M^- + \frac{M}{\ell} \times \frac{\ell}{۲} = ۰$$

$$M^+ = \frac{M}{\ell} \times \frac{\ell}{۲} = +\frac{M}{۲}$$

$$M^- = -\frac{M}{۲}$$

M:



نکته ۶) در نقطه‌ای که تکیه‌گاه متمرکز اثر می‌کند دیاگرام نگاه برش داریم. اگر جهت نگاه متمرکز ساعتگرد باشد برش برابر با مقدار نگاه متمرکز سطر فاصله بالا خواهد بود. و اگر جهت نگاه متمرکز پادساعتگرد باشد، برش برابر با مقدار نگاه متمرکز سطر فاصله پایین خواهد بود.

نکته ۷) در یک سازه تحت اثر بارهای متمرکز دیاگرام نگاه بصورت خطی تغییر می‌کند و گشتاور خمشی Max در زیر بار متمرکزی اتفاق می‌افتد که در زیر آن بار برش تغییر علامت دهد.

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \rightarrow dV = -w(x)\cdot dx \rightarrow \int_a^b dV = \int_{x_a}^{x_b} -w(x)\cdot dx$$

$$\boxed{V_b - V_a = -\int_{x_a}^{x_b} w(x)\cdot dx}$$

شرط آنکه بین b, a بار متمرکزی اثر نکند

* سطح زیر نمودار بار بین دو نقطه b, a برابر برش بین آن دو نقطه است

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \rightarrow dM = V(x)\cdot dx \rightarrow \int_a^b dM = \int_{x_a}^{x_b} V(x)\cdot dx$$

$$\rightarrow \boxed{M_b - M_a = \int_{x_a}^{x_b} V(x)\,dx}$$

شرط آنکه بین a, b نگاه متمرکزی اثر نکند

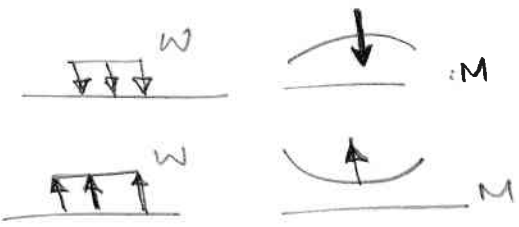
* سطح زیر نمودار برش بین دو نقطه a و b برابر با نگاه بین آن دو نقطه است *

* توجه شود که نمودار برش اگر نگاه متمرکزی داشته باشیم لحاظ می‌شود *

نکته ۸: جهت تقعر نمودار نگاه خمشی را بارگسترده تعیین می‌کند

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dM}{dx} = \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dM}{dx} = \frac{dV}{dx} = -w(x)$$



نکته ۹: اگر بارگسترده وارده بر سازه از درجه m باشد برش از درجه m+1، نگاه از درجه m+2، شیب از درجه m+3، و منحنی تغییر مکان از درجه m+4 خواهد بود.

تغییر شکل

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''(x)}{\left[1+(y'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI} \rightarrow \boxed{y''(x) = \frac{M(x)}{EI}}$$

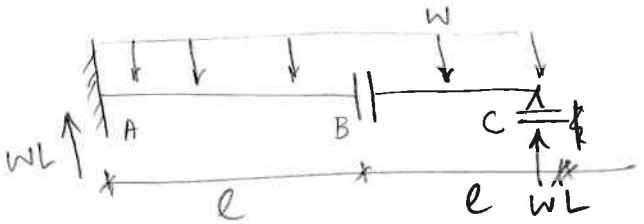
منحنی تغییر شکل y(x) از درجه m+4 است خیلی کوچک

منحنی شیب y' ← از درجه $m+3$ است Elastic curve

منحنی تغییر شکل یا y ← از درجه $m+4$ است

نکته ۱۰: در سازه های دارای مفصل خمشی که چپ یا راست مفصل خمشی لنگر متمرکز اثر نمی کند همواره نمودار لنگر خمشی سازه از مفصل خمشی می گذرد. بعبارت دیگر لنگر خمشی در محل مفصل خمشی صفر است

نکته ۱۱: در سازه های دارای مفصل برشی که در چپ یا راست مفصل برشی بار متمرکز اثر نمی کند همواره نمودار برش سازه از مفصل برشی می گذرد. بعبارت دیگر برش در محل مفصل برشی صفر است



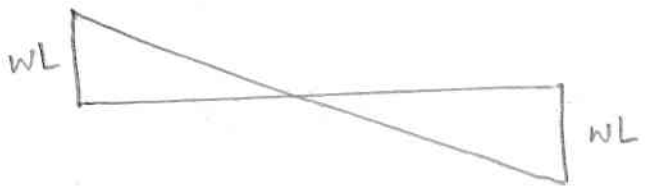
BC: $\Sigma F_y = 0 \quad R_C - WL = 0$

$R_C = WL$

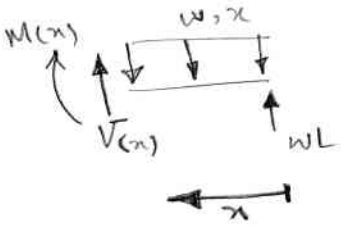
$\Sigma F_y = 0 \quad R_A + R_C = 2WL$

$R_A = 2WL - WL = WL$

V:



M:



$\Sigma M = 0$

$M(x) + Wx * \frac{x}{2} = Wl * x$

$$M(x) = Wlx - \frac{Wx^2}{2}$$

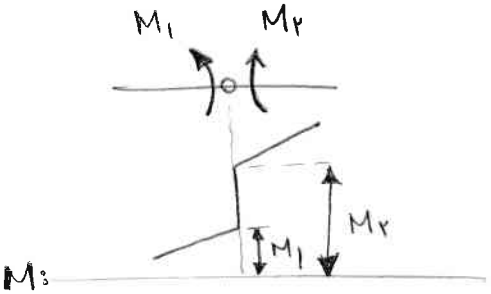
$$0 \leq x \leq 2l$$

$x = l \rightarrow M = \frac{Wl^2}{2}$

$\frac{W(2l)^2}{8} = \frac{Wl^2}{2}$

نکته ۱: لنگر خمشی در محل مفصل خمشی برابر صفر است حتی اگر در محل مفصل خمشی نیروی متمرکز اثر کند

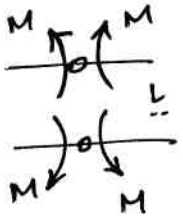
اگر مطابق شکل زیر در چپ و راست مفصل خمشی لنگرهای متمرکز M_1 و M_2 اثر کند در نمودار لنگر خمشی در چپ و راست مفصل خمشی مقدار لنگر به ترتیب M_1 و M_2 خواهد بود

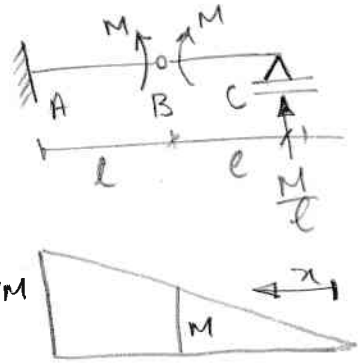


$$|M_1| \neq |M_2|$$

نکته ۲: اگر در چپ و راست یک مفصل خمشی یک جفت لنگر خمشی متمرکز به صورت

اثر کند در محل مفصل خمشی هیچ پرشی در نمودار لنگر خمشی دیده نمی شود



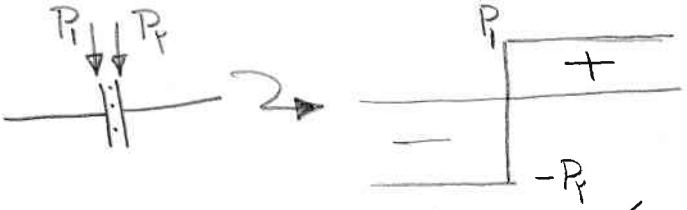


$$BC: \sum M_B = 0 \rightarrow R_C = \frac{M}{\ell}$$

$$M(x) = \frac{M}{\ell} * x$$

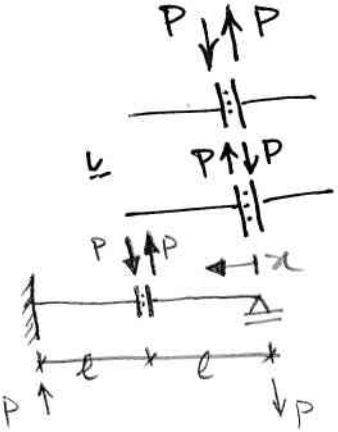
۳: برش در محل مفصل برشی برابر صفر است حتی اگر در محل مفصل برشی لنگر متمرکزی اثر کند

اگر مطابق شکل زیر در چپ و راست مفصل برشی نیروهای متمرکز P_1 و P_2 اثر کند در نمودار برش در چپ و راست مفصل برشی مقدار برش به ترتیب برابر P_1 و $-P_2$ خواهد بود



۴. اگر در چپ و راست یک مفصل برشی یک جفت نیروی متمرکز به صورت

اثر کند در محل مفصل برشی هیچ پرشی در نمودار برش دیده نمی شود



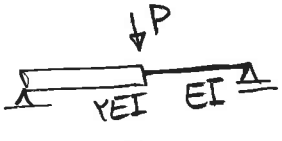
$$BC: \sum F_y = 0 \rightarrow R_C + P = 0 \rightarrow R_C = -P$$

$$M(x) = -Px$$

M: $-\frac{Pl}{4}$ M(x) x

V: P +

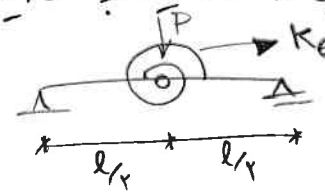
نکته ۵: در یک سازه معین نه صلبیت خمشی اجزای سازه و نه نسبت صلبیت خمشی اعضای مختلف سازه هیچکدام تأثیری در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه ندارند چون تحلیل سازه‌های معین از استاتیک صرف بدست می‌آید



V: $\frac{P}{2}$ + − $\frac{Pl}{4}$

M: $\frac{Pl}{4}$

نکته ۶: در یک سازه معین دارای فنر صلبی یا انعطاف، سختی فنرها صلبی یا انعطاف هیچ تأثیری در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه ندارند چون تحلیل یک سازه معین از استاتیک بدست می‌آید و سختی فنرها در معادلات استاتیک وارد نمی‌شود.



$\Delta\theta = \frac{M}{k_\theta} = \frac{Pl/4}{k_\theta}$

if $k_\theta \to \infty$

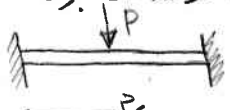
V: + − $\frac{Pl}{4}$

M:

توجه شود مفصل خمشی در صورتی لنگر را انتقال نمی‌دهد که خودش جابجا نشود بعبارتی

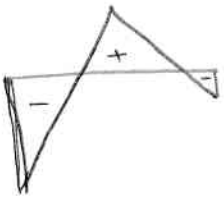
△ نداشته باشد ولی در شکل مقابل مفصل خمشی لنگر را انتقال می‌دهد.

نکته ۷: در یک سازه نامعین صلبیت خمشی اجزاء مختلف سازه تأثیری در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه ندارند ولی نسبت صلبیت خمشی اجزای مختلف سازه در این نمودارها موثر است و با تغییر آن نمودارهای برش و لنگر خمشی تغییر می‌کند.

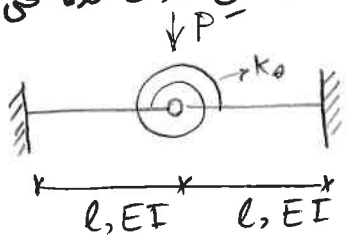


V: $\frac{P}{2}$ $\frac{P}{2}$

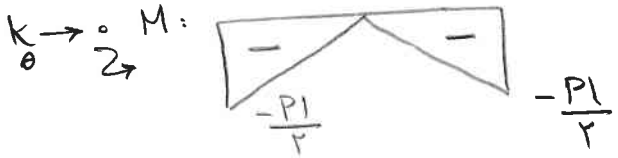
M: $\frac{Pl}{8}$ + − − $-\frac{Pl}{8}$ $\frac{Pl}{8}$



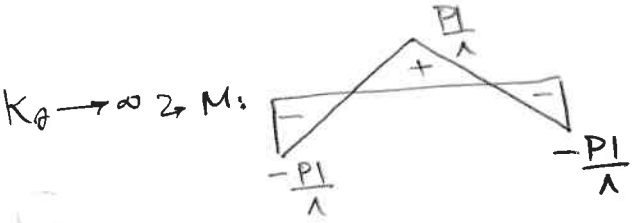
نکته ۸: در یک سازه نامعین درجه‌ای فنر پیچشی یا انتقالی برخلاف سازه معین درجه‌ای فنر سختی قرها در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه موثر است



با تغییر طول قسمت سمت راست فنر برش‌ها هم تغییر می‌کند



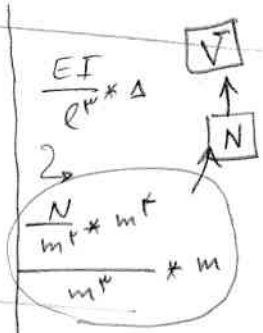
هم نمودار برش و هم نمودار لنگر خمشی به سختی فنر وابسته است



چرخش تکیه‌گاهی — نشست تکیه‌گاهی

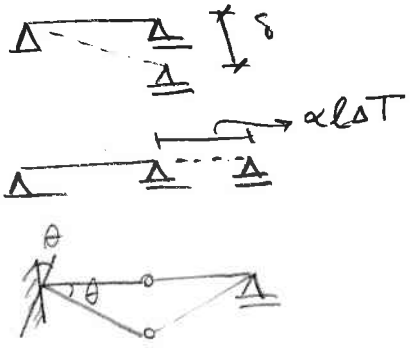
$$V: \alpha wl,\ \alpha P,\ \alpha \frac{M}{l},\ \alpha \frac{EI}{l^3}\Delta,\ \alpha \frac{EI}{l^2}\theta$$

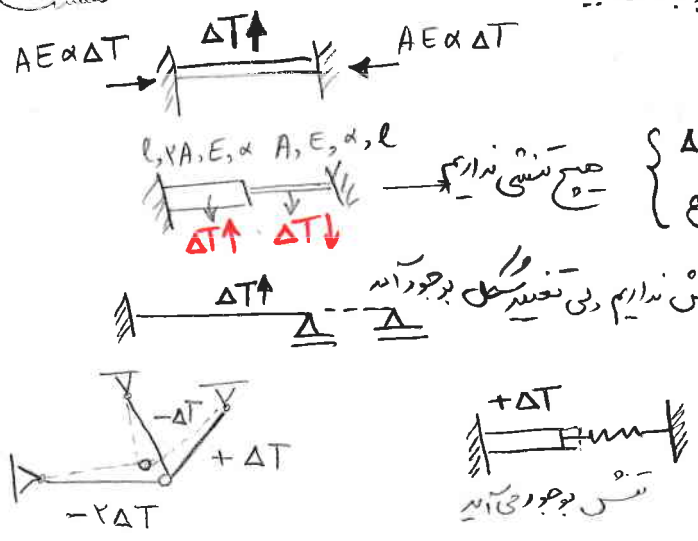
$$M: \alpha wl^2,\ \alpha Pl,\ \alpha M,\ \alpha \frac{EI}{l^2}\Delta,\ \alpha \frac{EI}{l}\theta$$



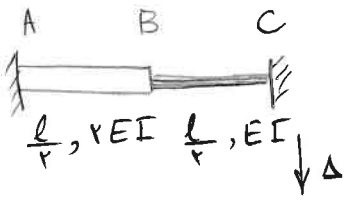
نکته ۹: در یک سازه معین تحت اثر نشست تکیه‌گاهی، چرخش تکیه‌گاهی، خطای ساخت و تغییر درجه حرارت هیچ تنشی در سازه بوجود نمی‌آید و سازه با تغییر شکل خود را با شرایط ایجاد شده سازگار می‌کند ولی در یک سازه نامعین تحت اثر مجموعه عوامل فوق الذکر، معمولاً در سازه تنش بوجود می‌آید ولی در مورد تغییر شکل سازه چیزی نمی‌توان گفت و ممکن است بوجود بیاید یا نیاید ولی اگر در سازه تنش بوجود نیاید تغییر شکل حتماً بوجود می‌آید.

Settlement ← نشست





نکته ۱۰: در یک سازه نامعین تحت اثر نشست یا چرخش تکیه‌گاهی هم صلبیت خمشی اجزای مختلف سازه و هم نسبت صلبیت خمشی اجزای مختلف سازه در نمودارهای برش و لنگر خمشی سازه نقش دارند



مثلا ۴ $t\cdot m^2$ ۱ $t\cdot m^2$

۴۰ ۱۰ ←

بین هر برش و خمش تیر پائینی با بالائی رابطه ۱۰ برابر برقرار است

برش پائینی ۱۰ برابر برش تیر بالائی

لنگر تیر پائینی ۱۰ برابر لنگر بالائی است

در صورت نسبت هر چرخش در سازه نامعین $V, M \propto EI$ ←

در سازه نامعین $V, M \propto EI$

نکته ۱۱: در یک سازه تحت اثر بارگذاری مشخص چنانچه صلبیت خمشی همه اجزای سازه n برابر شود، خیز و شیب هر نقطه از سازه جدید نسبت به سازه اولیه $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود (چون $\frac{1}{EI} \propto \theta, \Delta$)

این مطلب ربطی به درجه نامعینی سازه ندارد و برای سازه معین و نامعین هر دو صحیح است

پیچش ← T ← GJ

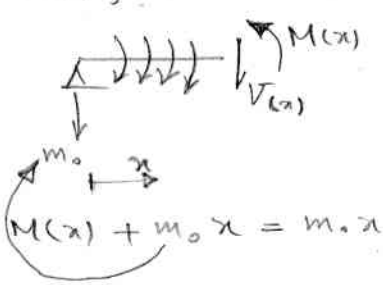
خمش ← M ← EI

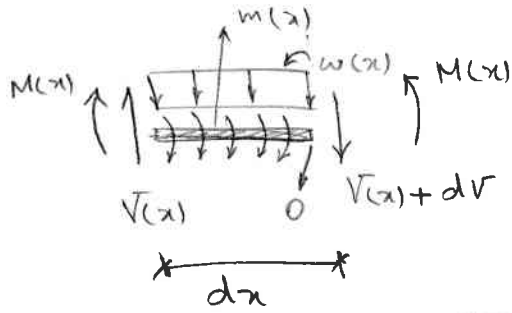
$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright R_B * l = m_0 * l \rightarrow \boxed{R_B = m_0 \uparrow}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = m_0 \downarrow$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_{(x)} + m_0 = 0 \rightarrow V_{(x)} = -m_0$

V:





$\Sigma M_O = 0$

$\curvearrowleft M(x) + dM + w(x)\,dx \times \frac{dx}{2}$

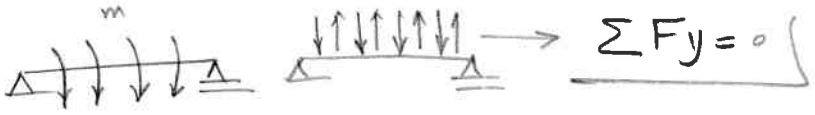
$= M(x) + V(x)\,dx + m(x)\,dx$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V(x) + m(x)}$$

لنگر خمشی گسسته در شرطی که ساعتگرد باشد مثبت فرض می شود.

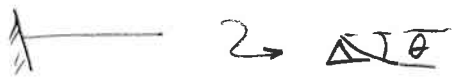
توجیه صفر شدن لنگر با جا گذینی هرکدام از لنگرها با کوپل نیرو

$M \equiv$ ↓↑

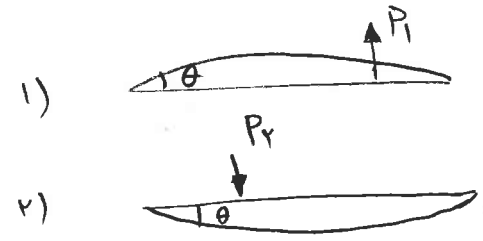


که کوپل نیروها یکدیگر را خنثی می کنند

اگر خواستیم پیش بینیم یک تکیه گاه گیردار لنگر دارد یا نه آنرا منفصل (تکیه گاه مفصلی) می کنیم و اگر منفصل چرخید پس در تکیه گاه گیردار لنگر داریم.

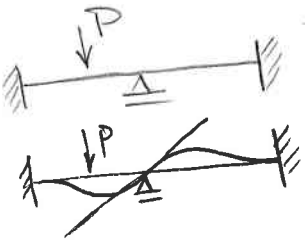


تکیه گاه گیردار لنگر دارد



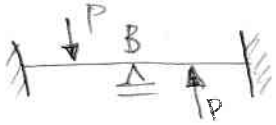
$\theta = \theta$ حالت (۱) حالت (۲)

اگر دو بار را با هم اثر دهیم $\rightarrow \theta = 0$



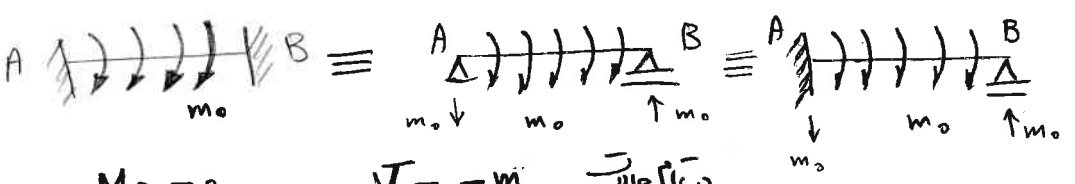
اگر تکیه گاه میانی را منفصل کنی و دوتا زاویه چپ و راست برابر باشد آنگاه لنگر در تکیه گاه میانی وجود نمی آید

اگر تکیه گاه میانی را منفصل کنی θ چپ، θ راست با هم برابر نمی شوند



چون تقارن داریم اگر B را منفصل کنیم $\theta_{B_R} = \theta_{B_L}$ ← لنگر در تکیه گاه میانی وجود نمی آید

۳۱



$M_A = M_B = 0$ $\quad$ $V = -m_0$ در تمام حالات

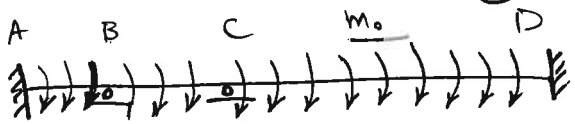
نکته ۱۲: در یک تیر چند دهانه تحت اثر لنگر خمشی گسترده یکنواخت در کل طول تیر موارد زیر برقرار است

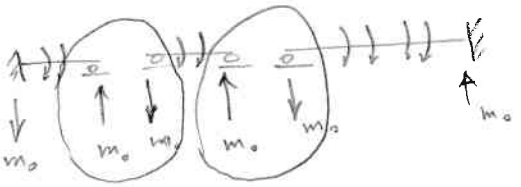
۱. تیر تغییر شکل خمشی ندارد و مستقیم باقی می‌ماند و لنگر خمشی در کل طول سازه صفر است و لنگر همه تکیه گاهها برابر صفر است

۲. برش در کل طول سازه برابر m_0 است (m_0: شدت لنگر خمشی گسترده یکنواخت است)

۳. عکس العمل تکیه گاههای کناری برابر m_0 است ولی عکس العمل همه تکیه گاههای میانی برابر صفر است

۴. چنانچه در نقطه ای از سازه مفصلی شود تمام نتایج فوق معتبر باقی خواهد ماند





$y'' = \frac{M \to 0}{EI}$ $\longrightarrow$ نقطه عطف

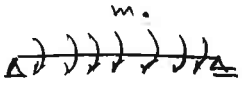
عذاب

آیا بارگذاری بصورت لنگر خمشی گسترده می تواند باعث خمش در سازه شود ؟

بله در صورتی که شدت بارگذاری لنگر خمشی گسترده ثابت نباشد می تواند باعث خمش شود

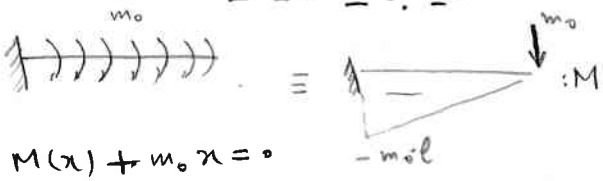
لنگر خمشی گسترده یکنواخت هم در صورتی که در تمام طول تیر اثر نکند هم باعث خمش می شود

و یا بر تیر طره یا تیری که تکیه گاه آن قادر به تحمل برش نیست اثر کند باعث خمش می شود



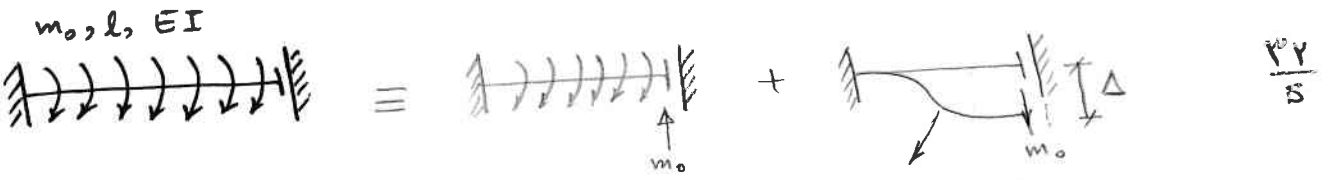
$m(x) = m_0 \frac{x}{\ell}$

$m(x) = m_0 (\frac{x}{\ell})^n$



$M(x) + m_0 x = 0$

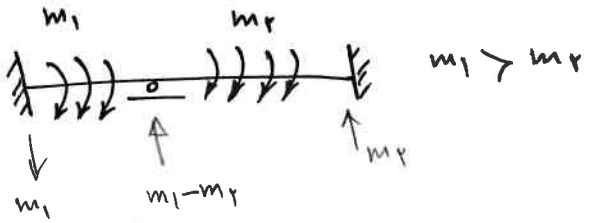
$M(x) = -m_0 x$

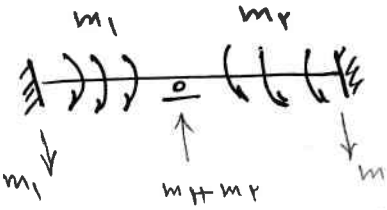


دقیقا مانند تیر دو سر گیردار
حل می‌شد

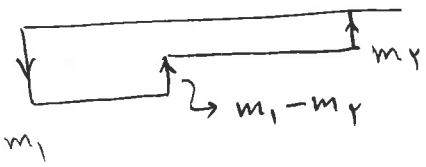
$$K = \frac{12EI}{l^3}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{m_0}{\frac{12EI}{l^3}} = \frac{m_0 l^3}{12EI}$$

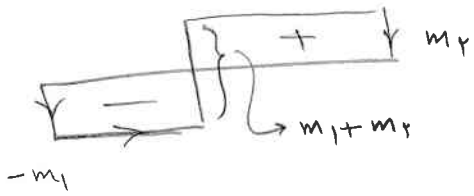


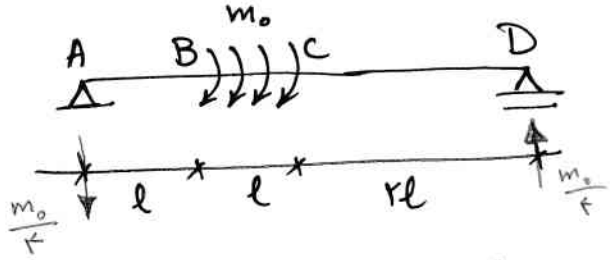


V:



V:

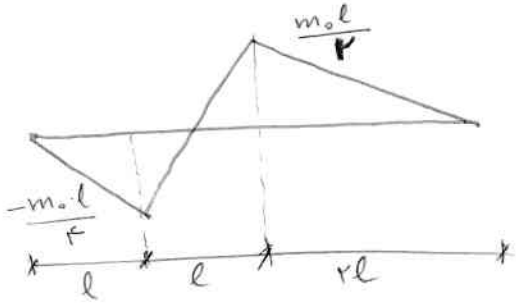




$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_D \times 4l = m_0 l \rightarrow R_D = \frac{m_0}{4}$$

Shear diagram

Bending moment diagram

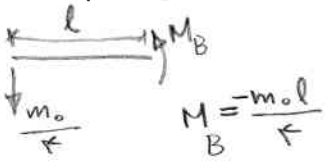


$$\frac{dM}{dx} = \underbrace{V(x) + m(x)}_{\text{ناپیوسته}}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\frac{m_0 L}{2} - \left(\frac{-m_0 \cdot L}{4}\right)}{L} = \frac{3m_0}{4}$$

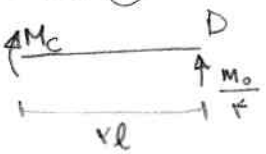
$$\frac{dM}{dx} = V(x) + m(x) = -\frac{m_0}{4} + m = \frac{3m_0}{4}$$

شروع از D : ابتدا باید از سمت راست شروع کنیم حال باید از سمت چپ شروع می‌کنیم



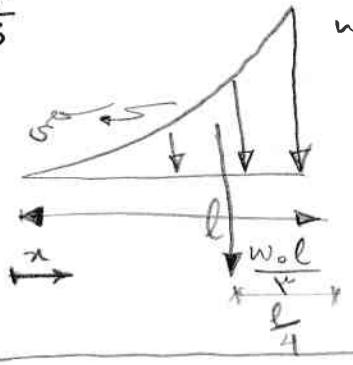
$$M_B = \frac{-m_0 l}{4}$$

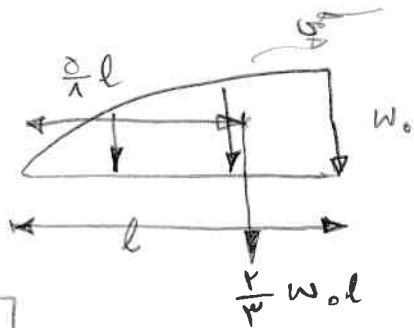
$$M_C = \frac{m_0}{4} \times 2l$$

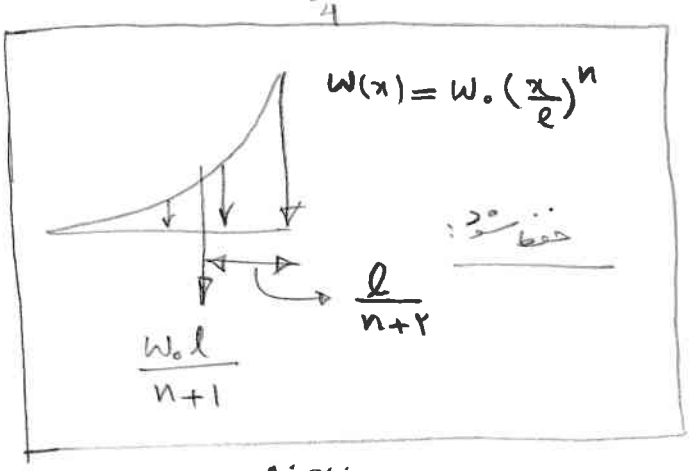


$$M_C = \frac{m_0 l}{2}$$

۲۰۳
۵





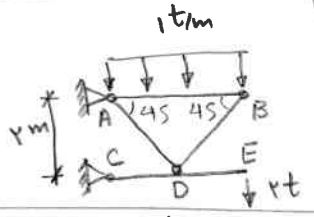


حفظ شود:

$$\int w(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=\ell} w_0\left(\frac{x}{\ell}\right)^n dx$$

$$= \left[\frac{w x^{n+1}}{(n+1)\ell^n}\right]_0^{\ell} = \frac{w_0\ell}{n+1}$$

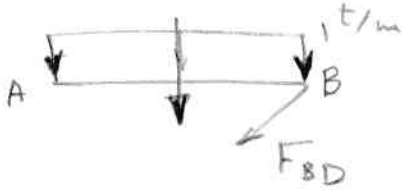
$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$



تست ۷۰ : نیرو در عضو AD چقدر است؟

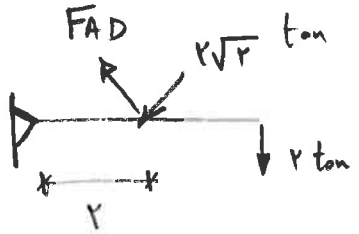
$\Sigma M_A = 0 \quad F_{BD} * 4 \sin 45 + 4 * 2 = 0$

$F_{BD} = -2\sqrt{2}$ یعنی



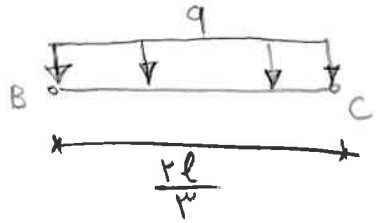
$\Sigma M_C = 0 \quad F_{AD} * 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 2*4 + 2\sqrt{2} * 2 * \frac{\sqrt{2}}{2}$

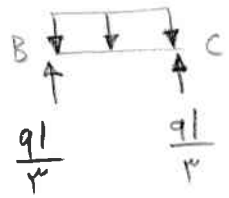
$F_{AD} = +2\sqrt{2}$ ton یعنی کششی



هرچقدر 2t به نقطهٔ E نزدیک‌تر شود نیروی BD فشاری‌تر شده ولی AD کشسته‌تر می‌شود

تست ۷۲

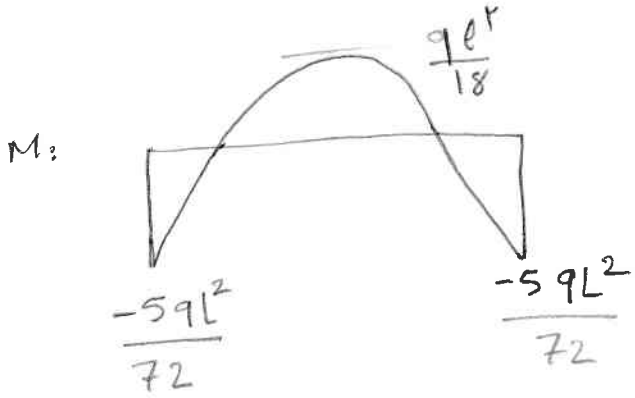




$$(M_{max})_{BC} = \frac{q(\frac{2\ell}{3})^2}{8} = \frac{q\ell^2}{18}$$

$$M_A = -\left[\frac{q\ell}{3} * \frac{\ell}{2} + \frac{qL}{2} * \frac{L}{12}\right] = -\frac{5qL^2}{72}$$

۷۲



تست ۸۵

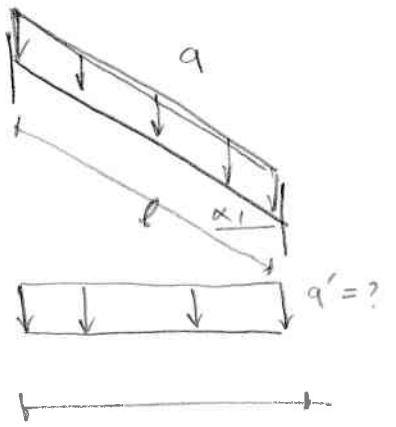
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow A*1 + 7 + 10*2 = 2*C_y \rightarrow C_y = 18\uparrow$ (2*4) ↑ C را A بیرون کرتیم

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 0$, $B_y = 0$

(1) ← (۸۶)

2 → (1)

۸۹

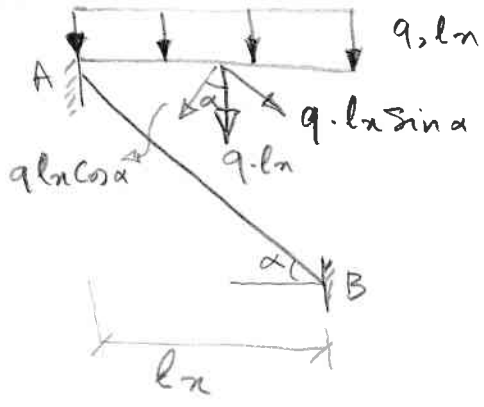


$ql = q' \cdot l_x$

$q' = \frac{ql}{l_x} = \frac{q}{\frac{l_x}{l}} \rightarrow q' = \frac{q}{\cos\alpha}$

(1) ↓

۹۰



$q_N = \frac{q l_x \cos\alpha}{l} = q\cos^2\alpha$

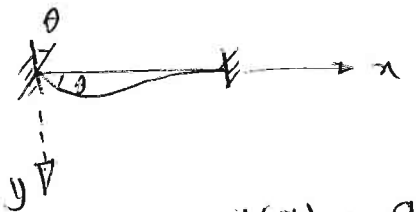
q_N ↓ Normal

$q_T = \frac{q l_x \sin\alpha}{l} = q \sin\alpha \cos\alpha$

q_T ↓ tangential

$\cos\alpha = \frac{l_x}{l}$

۱) $\frac{q_T}{q_N} = tg\,\alpha$ / ۲) $q_N^2 + q_T^2 = q^2\cos^2\alpha$: q_T, q_N را حذف می‌کنیم



در توابعی که شرط تابع و تمام مشتقهای آن
به ازای $x = \alpha$ ، صفر می‌شود اینست
که یک ترم $(x-\alpha)$ داشته باشد.
بنابراین اگر تابع از درجه n باشد
تقریبا تمام از درجه $n+1$ است

$$y(x) = \underbrace{a x}_{\text{درجه ۱}} \underbrace{(x-\ell)^2}_{\text{درجه ۲}}$$

تحلیل

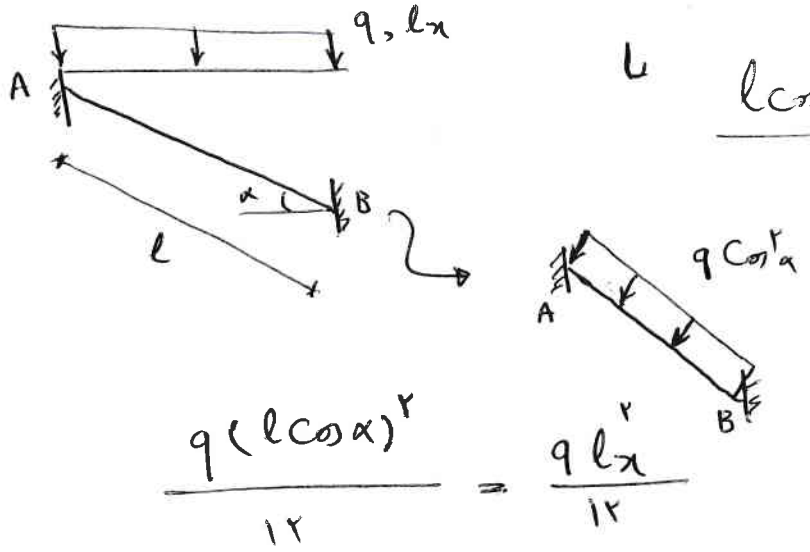
$$y'(x) = a(x-\ell)^2 + ax \cdot 2(x-\ell)$$

$$y'(0) = a\ell^2 = \theta \rightarrow a = \frac{\theta}{\ell^2}$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{\theta x}{\ell^2}(x-\ell)^2$$

$$y(\theta) = \theta x \left(\frac{x}{\ell} - 1\right)^2$$

نکته ۱: برای محاسبه‌ی لنگرهای تیر دلتری که یک تیر دو سر گیردار مایل تحت اثر بار گسترده یکنواخت قائم می‌توان از تصویر تیر در راستای افقی به جای تیر اصلی استفاده کرد



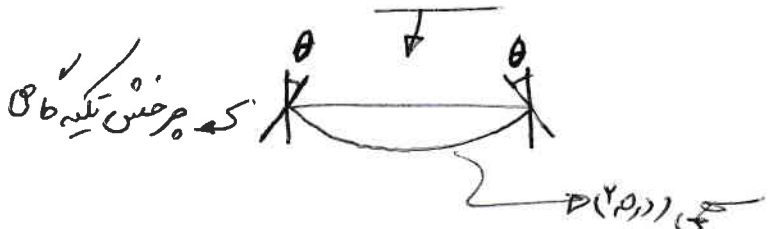
$l\cos\alpha = l_x$

$$\frac{q(l\cos\alpha)^2}{12} = \frac{q l_x^2}{12}$$

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''(x)}{\left[1+(y'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' = \frac{V(x)}{EI} \xrightarrow{\text{مشتق}} y^{(4)}(x) = -\frac{w(x)}{EI}$$

یعنی اگر تیری بار به آن وارد نشود براثر نشست تکیه‌گاهی یا چرخش تکیه‌گاهی منحنی تغییر شکل آن از درجه ۳ خواهد شد چون مشتق چهارم تغییر شکل سازه برابر $w(x)$ یا $w(x)=0$ صفر خواهد شد مگر در حالات خاص



* اگر بار گسترده وارد بر سازه از درجه m باشد، برش از درجه $m+1$، لنگر از درجه $m+2$، شیب از درجه $m+3$ و منحنی تغییر مکان (منحنی تغییر شکل سازه) از درجه $m+4$ خواهد بود.

توضیح: هنگامی که مشتق چهارم یک تابع صفر شود پس آن تابع از درجه ۳ بوده است و لذا اگر مشتق چهارم عدد (عدد ثابت) شود پس آن تابع از درجه ۴ بوده است. مثال

if $y = x^4 \to y' = 3x^2 \to y'' = 6x \to y''' = 6 \to y^{(4)} = 0$

۲ if $y = x^4 \to y' = 4x^3 \to y'' = 12x^2 \to y''' = 24x \to y^{(4)} = 24$

خرپا : truss

خرپا سازه‌ایست که: ۱) تمام اتصالات آن مفصلی است

۲) بارگذاری آن بصورت نیروهای متمرکز در محل مفصلهاست

۳) تمام اعضای آن مستقیم است (مهم)

۴) وزن عضو با بقیه در مقایسه با بارگذاری روی خرپا قابل صرف نظر کردن باشد

خرپا { مسطح ✓ : plane truss
فضایی : space truss

خرپا { معین ✓
نامعین

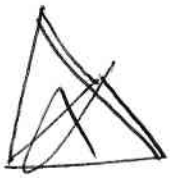
انواع خرپاهای معین

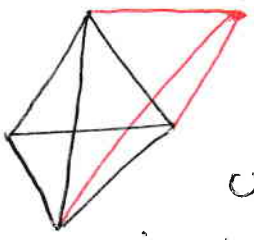
۱) خرپای ساده Simple truss : اضافه کردن دو عضو و یک مفصل

۲) خرپای مرکب Compound truss

۳) خرپای پیچیده Complex truss

خرپای فضایی : اساس خرپای فضایی یک چهاروجهی است پس، اضافه کردن ۳ عضو و یک گره خرپای فضایی





آگستر شی دهیم.

شما همانطور که در تولید خرپای مسطح می‌دیدیم همگام گسترش

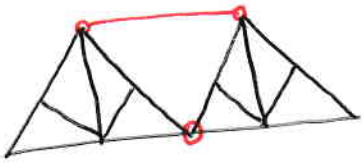
خرپا سه مفصل در یک راستا قرار نباید بگیرند (ناپایداری هندسی داخلی)

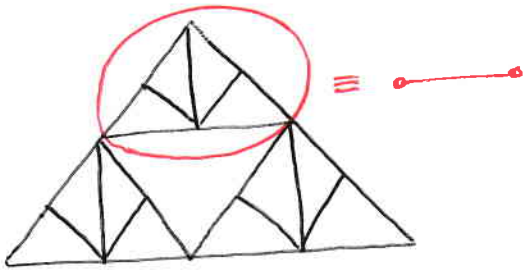
در خرپای فضایی هر چهار مفصل به همان دلیل ناپایداری هندسی داخلی نباید در یک صفحه قرار بگیرند

* در ترکیب خرپاهای ساده همان قوانین ترکیب اجسام صلب برقرار است که به آن ترکیب خرپای مرکب می‌گوییم

* اگر خرپایی را از یک دید ساده ببینیم و از یک دید مرکب، آن خرپا را ساده فرض می‌کنیم

مثلا:





خرپای ساده

خرپای نعرض : خرپایی است که یکی مثلث پایه حذف آن نمی‌توانیم پیدا کنیم

تعداد معادلات خرپای نعرض Coupled است یعنی آخر تحلیل نمی‌توانیم خرپا را تحلیل کنیم چون دو حرکت ۳ یا بیشتر

کجول وجود دارد از تعداد معادلات کل خرپا که آخر معادله نویسی باید تمام نیروهای خرپا را بدست آوریم و نمی‌شود

فقط نیروی که عضو ها سه تا کرد

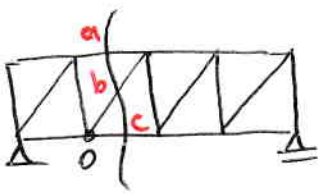
* روش‌های تحلیل خرپاهای معین *

۱) روش مفاصل : method of joints

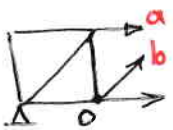
۲) روش مقاطع : method of Sections

ولی که کلور چون نیروی تمام مفاصل را نمی‌خواهد پس باید که روش مقاطع بزنیم چون که روش مفاصل باید نیروی تمام گره‌ها را بدست آورد . البته با ترکیب روش مقطع و مفصل دیگر تیغه لازم را می‌دهد

در روش مقطع باز کلی ترین قسمتی از خرپا از بقیه آن جدا می‌شود . سپس با نوشتن معادله تعادل گشتاور حول یک نقطه مناسب (از ۸۰ معادله) با نوشتن معادله تعادل نیروها در یک راستای مناسب نیروی عضو مورد نظر بدست می‌آید (از ۲۰)

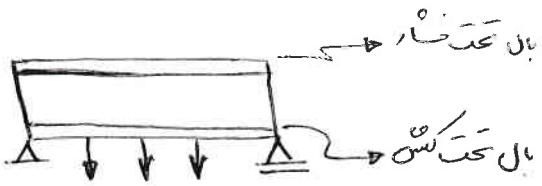


Sub Structure

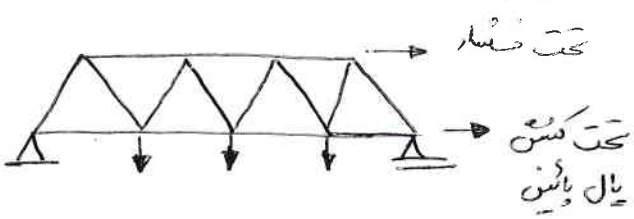


$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$ b ✓ نیروی داخلی عضو بدست می‌آید

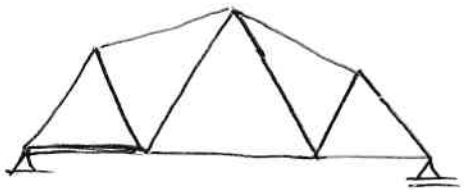
$\Sigma M_O = 0 \rightarrow$ a ✓ نیروی داخلی میله بالایی بدست می‌آید



≡



اعضای افقی پائین همگی تحت کشش هستند
اعضای افقی بالائی همگی تحت فشار هستند



این خرپا به دلیل اینکه با افزایش لنگر

بجای افزایش ظرفیت مقاطع d را افزایش داده
از پروفیل مناسب تری برای اینکار استفاده می کند

$$Fd = M$$

کار مجازی:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$ اسکالر → dot product

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}$$ برداری → Cross product

$1^{N\cdot m}$ ژول (Joule) $= 1^{N\cdot m}$

کار مجازی کاریست که نیرو یا تغییر مکان
مجازی است ولی نمی شود که هر دو مجازی باشند

یعنی یا { نیرو حقیقی و تغییر مکان مجازی
یا { نیرو مجازی و تغییر مکان حقیقی

{ Virtual Work
dummy
pseudo

Method of Virtual Work

در آخر مضرب تغییر مکان واحد مجازی وارد می کنیم

خط تاثیر: Influence Line

کار مجازی ۱

1) method of Virtual displacements → Influence Line
2) method of Virtual forces { بار واحد / لنگر واحد

استفاده از اصل کار مجازی وقتی به معنی ناسازه ندارد و اگر سازه پایدار باشد می توان از روش کار مجازی استفاده کرد

اصل کار مجازی: اگر بر یک سازه پایدار یک جابجایی مجازی یا نیروی مجازی وارد شود کل کار مجازی داخلی با کل کار مجازی خارجی برابر خواهد بود (این اصل از قانون بقای انرژی نتیجه می‌شود)

$$\sum Q \cdot \delta D = \sum q \cdot \delta d$$

- Q: نیروی خارجی
- q: نیروی داخلی
- D: جابجایی خارجی
- d: جابجایی داخلی
- δ: اپراتور تبدیل به مجازی

Q: نیروی خارجی حقیقی — δD: جابجایی خارجی مجازی — کار مجازی خارجی

q: نیروی داخلی حقیقی — δd: جابجایی داخلی مجازی — کار مجازی داخلی

اگر یک جسم صلب باشد بنابراین کار مجازی داخلی جسم صفر می‌شود چون تغییر مکان داخلی ندارد

کار مجازی خارجی = ۰

if : نیرو و لنگر مجهول

- نیرو → Δ مجازی
- لنگر → θ مجازی

if Δ و θ مجهول

- Δ ← نیروی مجازی
- θ ← لنگر مجازی

$$\sum \delta Q \cdot D = \sum \delta q \cdot d$$

δQ: نیروی مجازی خارجی — D: جابجایی حقیقی خارجی — کار مجازی خارجی

δq: نیروی مجازی داخلی — d: جابجایی حقیقی داخلی — کار مجازی داخلی

نشست تکیه‌گاهی در خشن‌کن‌های کار خارجی محسوب می‌شود چون مربوط به تکیه‌گاه است ولی تغییر طول‌های داخلی و خطای ساخت مربوط به کار مجازی داخلی می‌شود

$$1 \times \Delta + W_R = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i N_i L_i}{(AE)_i} +$$

$$1*\Delta + W_R = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i N_i L_i}{(AE)_i} + \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot \alpha \cdot L_i (\Delta T)_i + \sum_{i=1}^{n} n_i \delta_i$$

۴۵ / ۵

Δ: جابجایی حقیقی خارجی

$1*$: نیروی مجازی خارجی

W_R: نیروی مجازی تکیه‌گاه

$W_R \rightarrow W_{Reaction}$

X: نشست حقیقی تکیه‌گاه ناشی از بارگذاری مجازی

$\frac{N_i l_i}{A_i E_i}$: تغییر طول حقیقی داخلی

n_i: نیروی مجازی داخلی

$\Delta l = \frac{Fl}{AE}$

N_i: نیروی عضو i ام ناشی از بارگذاری حقیقی

n_i: نیروی عضو i ام ناشی از بارگذاری مجازی

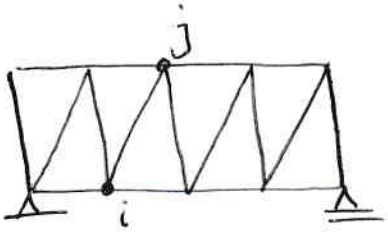
δ_i: خطای ساخت داخلی حقیقی

ΔT: افزایش دما (+) / کاهش دما (−)

δ: خطای ساخت: بلندتر (+) / کوتاهتر (−)

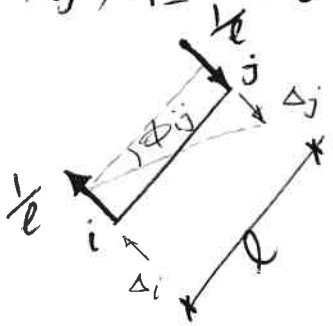
اگر تغییر مکان یک گره را در جهتی خواست یک بار مجازی یک (واحد) در آن جهت قرار می‌دهیم

اول بیایم سراغ بارگذاری مجازی داخلی تا نیروی تمام اعضا را بدست آوریم تا عضوی که صفر نیروئی شده دیگر در تحلیل بارگذاری خارجی آن را محاسبه نکنیم



$$\phi = \frac{\Delta_{ij}}{l_{ij}}$$

اگر دوران عضو ij را خواستیم: (ϕ_{ij})



$$\frac{1}{\ell} * \Delta i + \frac{1}{\ell} * \Delta j + W_R = \cdots$$

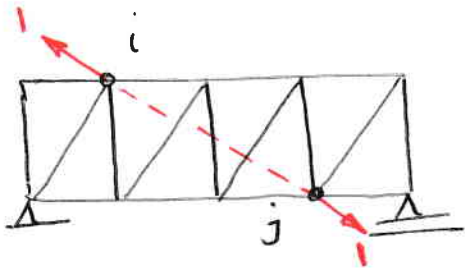
$$1 * \frac{\Delta i + \Delta j}{l} + W_R = \cdots$$

$$1 * \phi_{ij} + W_R = \cdots$$

اگر Δ یا ϕ مثبت بدست آمد یعنی تغییر مکان یا چرخش در جهتی بوده که نیرو را انجام کردیم

ولی اگر Δ یا ϕ منفی بود یعنی کار منفی انجام شده یا تغییر مکان یا چرخش در خلاف جهتی بوده که نیرو را انجام کرده ایم

اگر: تغییر مکان نسبی هر دو گره دلخواه نسبت به هم را بخواهیم یک بار مجازی در امتداد آن دو گره مطوف خارج از دو گره قرار می دهیم



$$1* \Delta_i + 1* \Delta_j + W_R = \cdots$$

$$1 * (\Delta_i + \Delta_j) + W_R = \cdots$$

جابجایی نسبی گره های i و j

$1* \Delta_R$ $\quad$ Δ_R: جابجایی نسبی i و j

Relative

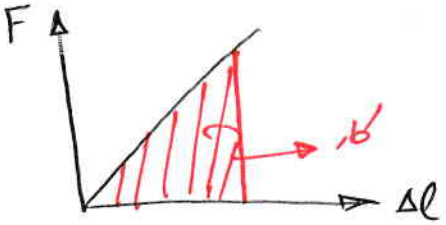
روش کار حداقل: Least work : تمام سازه های ایمن با مینیمم انرژی به تعادل می رسند

Strain Energy

انرژی کرنشی

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE}$$

$$U = \frac{1}{2} F . \Delta l = \frac{1}{2} F . \frac{Fl}{AE} = \frac{F^2 l}{2AE} = kF^2$$

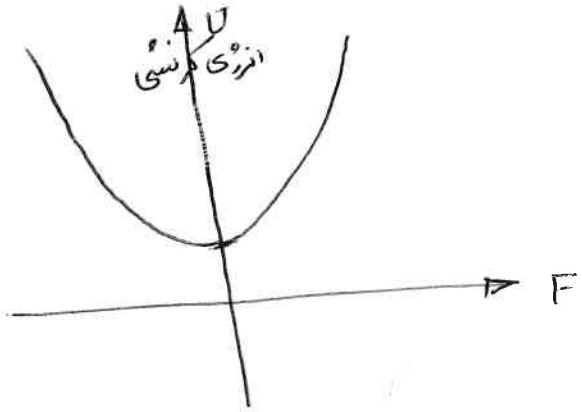


این انرژی را با دو فرض بدست آورده ایم که ۱) مصالح بصورت خطی رفتار می کنند

۲) بار بصورت تدریجی به عضو وارد می شود

اگر نیروی کلیه عضو خرپایی n برابر شود انرژی کرنشی آن n^2 برابر می شود چون هم نیرو n برابر شده

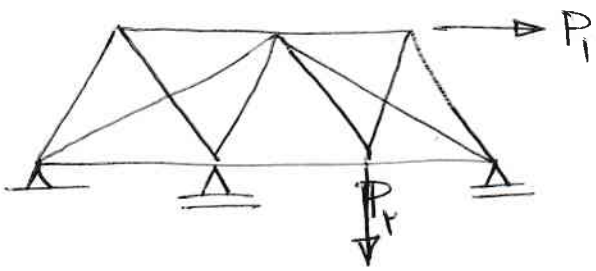
هم Δl n برابر شده است



$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 l_i}{2 A_i E_i}$$

انرژی کرنشی خرپای نامعین:

کلیه خرپای نامعین باید انرژی کرنشی آن مینیمم شود تا به تعادل برسد



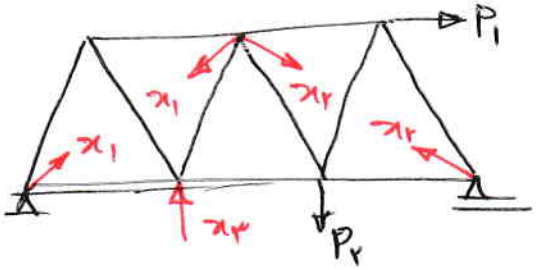
$x_1, x_2, x_3 = ?$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x_2}$

$\frac{\partial U}{\partial x_3}$

$\equiv$

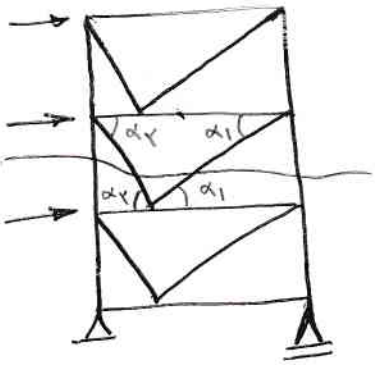


$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

۳ معادله ۳ مجهول $\Rightarrow x_1, x_2, x_3$ ✓ پیدا می‌شود

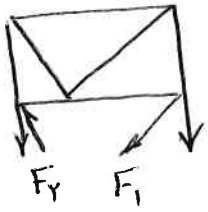
buckling: کمانش

۴۳
۵



$\Sigma F_y = 0$

$F_1 \sin\alpha_1 = F_2 \sin\alpha_2 \rightarrow F_2 = F_1 \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 = \Sigma V$

$F_1 \cos\alpha_1 + F_1 \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cos\alpha_2 = \Sigma V$

$\rightarrow \dfrac{F_1 \sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin\alpha_2} = \Sigma V$

کسی

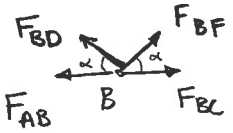
$\rightarrow F_1 = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \Sigma V$

چون

$F_2 = F_1 \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \rightarrow F_2 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \Sigma V$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \rightarrow F_1 = F_2 = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \Sigma V = \dfrac{\Sigma V}{2\cos\alpha}$

I



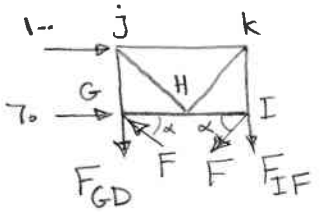
$\Sigma F_y = 0 \quad F_{BF}\sin\alpha + F_{BD}\sin\alpha = 0$

$\rightarrow F_{BF} = -F_{BD}$

به طور مشابه $F_{EI} = -F_{EG}$

$F_{HJ} = -F_{HK}$

با توجه به بارگذاری BF، EI، HK کششی و BD، GE، HJ فشاری می‌باشند.

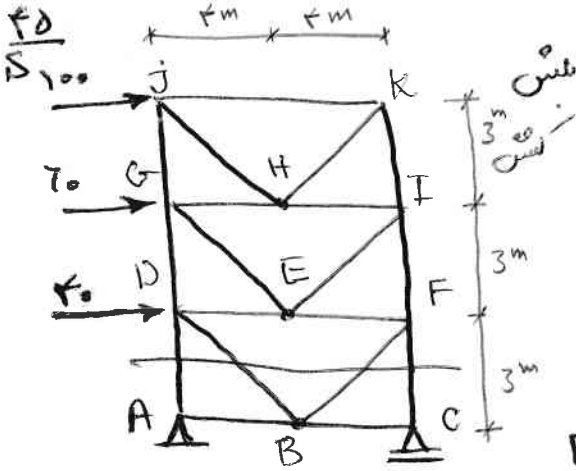


$\Sigma F_x = 0$

$F\cos\alpha + F\cos\alpha = 100 + 70$ $\qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$

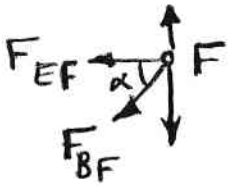
$\rightarrow 2F_x \frac{4}{5} = 170 \rightarrow \underline{F = 100\ KN}$

۴۵



۱۱۹ تحت این بارگذاری نیروهای ستون هر طبقه با ستون مقابلش برابر است

۱۱۹ دهانه‌های مقابل نیروی متمرکز EI چقدر است؟

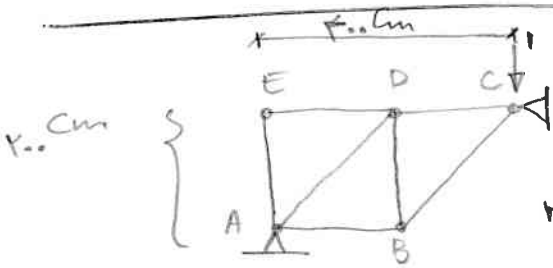


$\Sigma F_x = 0$

$F_{BF}\cos\alpha + F_{EF} = 0$

$\rightarrow F_{EF} = -F_{BE}\cos\alpha$

۱۴۴



تکیه‌گاه C به اندازه ۰/۵ cm به سمت راست است

نشست کدام تغییر مکان تأثیر چقدر خواهد بود؟ R_C

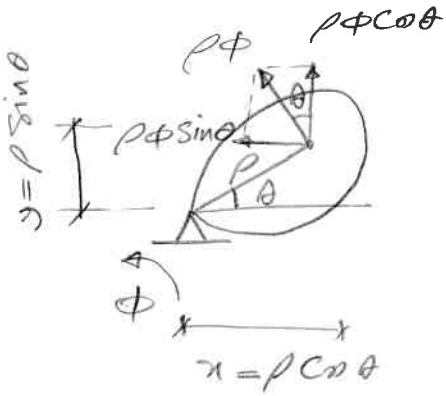
$\Sigma M_A = 0$

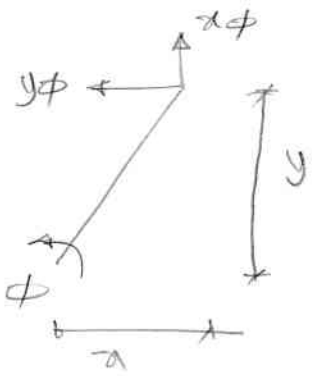
$\rightarrow \quad 1*۴ = R_C * ۲ \rightarrow R_C = ۲$

$1*\Delta V_C + ۲(-۰/۵) = 0 \rightarrow \boxed{\Delta V_C = +1}$

تغییر مکان رو به بالا است چون مثبت است

اگر یک جسم صلب را شبیه دور یک نقطه بچرخانیم (به اندازه ϕ)





$\Delta V = X\phi$

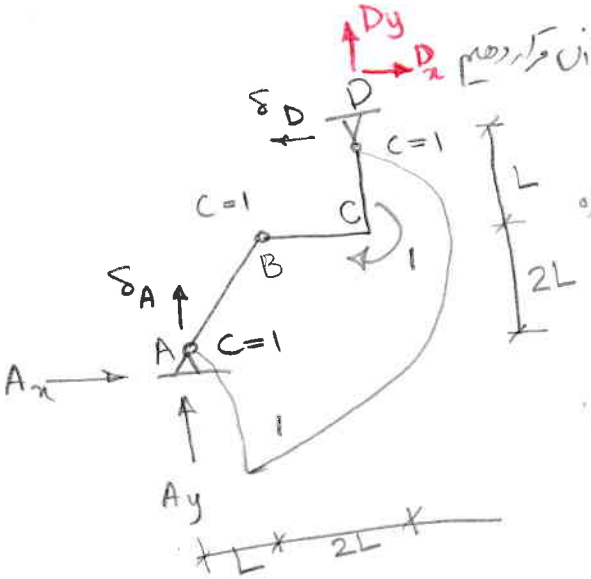
ϕ: زاویه چرخش

حالا حل ۱۴۴ با این روش

$\Delta H_C = y \cdot \phi = ۲۰۰\phi = ۰/۵ \rightarrow \phi = \frac{۰/۵}{۲۰۰} = \frac{1}{۴۰۰}$ rad

$\Delta V_C = x \cdot \phi = ۴۰۰ * \frac{1}{۴۰۰} = 1\,cm \downarrow$

* اگر جهت گره صلبی را نخواهیم بدانیم نگاه واحد روی آن قرار دهیم



کل سازه $\Sigma M_D = 0 \rightarrow$ A_x ✓ A_y ✓

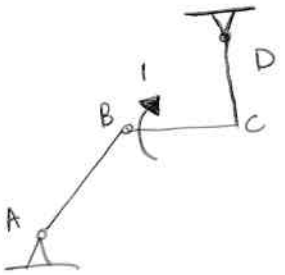
در سازگاری تغییر مکان‌های D_x و A بعد حول D به ترتیب به اندازه $\frac{L}{20}$ و $\frac{L}{20}$ در جهات مشخص شده نشست می‌کند. مقدار دوران گره C در اثر این نشست‌ها چند رادیان است؟

$$1 * \Phi_C + W_R = 0$$

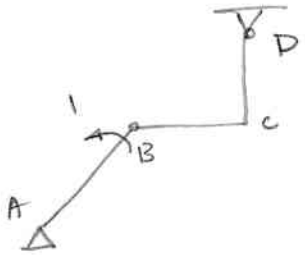
$$A_y = D_y$$

$$A_x = D_x$$

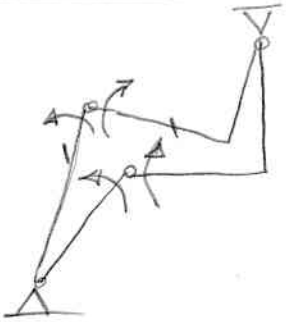
اگر Φ سمت راست B را خواست (چرخش راستا B را خواست) و AB دو نیرو فنی می‌شود



اگر چرخش چپ B را خواست (عضو BCD دو نیرو فنی می‌شود)



اگر چرخش نسبی مفصل B را خواست



$$1 * \Phi_{B^+} + 1 * \Phi_{B^-} + W_R = 0$$

$$2 \cdot 1 * \Delta\Phi_B + W_R = 0$$

چرخش نسبی در محل مفصل خنثی B که اگر مثبت به سمت آمد یعنی مطابق شکل سازه را تغییر شکل داده و گره مرعکس

تست ۱۴۶

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 2L \times D_y - 2L \times D_x = 1 \rightarrow D_y - D_x = \frac{1}{2L} \quad (1)$$

$$BCD: \sum M_B = 0 \rightarrow 2L \times D_y - L \times D_x = 1 \rightarrow 2D_y - D_x = \frac{1}{L} \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow D_x = \frac{1}{2L} \rightarrow, \quad D_y = \frac{2}{2L} \uparrow, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = \frac{2}{2L} \downarrow$$

$$\sum W = 0 \rightarrow 1 \times \phi_C - A_y \times \delta_A - D_x \times \delta_D = 0$$

$$\rightarrow \phi_C - \frac{2}{2L} * \frac{L}{200} - \frac{1}{2L} \times \frac{L}{200} = 0$$

$$\rightarrow \phi_C = \frac{1}{300} \text{ Rad}$$

چون عکس العمل قائم تکیه‌گاه A و D در خلاف جهت نشسته‌ی آنها بود در رابطه کار مجازی، کار آنها با علامت منفی ظاهر شد.

۱۴۹ در خرپای زیر عضو AF به اندازه 1^{Cm} کوتاه‌تر ساخته شده است. تغییر مکان گره G در راستای قائم چقدر است؟

A گره) $\Sigma F_y = 0$

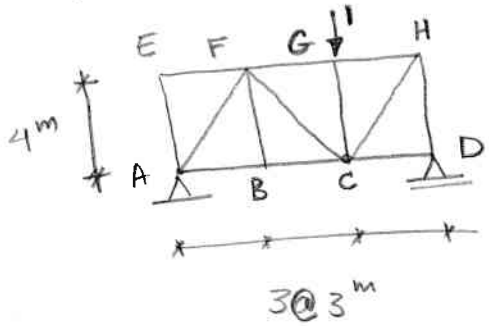
$$n_{AF} \sin\alpha + \frac{1}{4} = 0$$

$$n_{AF} = \frac{-1}{4 \sin\alpha} = \frac{-1}{4 \times \frac{4}{5}} = \frac{-5}{16}$$

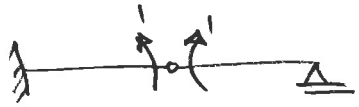
$$1 * \Delta V_G = n_{AF} * \delta_{AF} = -\frac{5}{16}(-1) = \frac{5}{16}$$

δ { − کوتاه‌تر ساخته شده / + بلندتر ساخته شده }

$$2 \Rightarrow \Delta V_G = \frac{5}{16} \downarrow \quad Cm$$



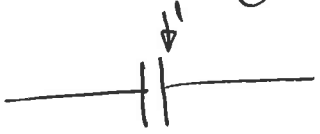
مطلب نقطه شده در کتاب و خیلی هم بزرگ است



$$1*\Delta\phi_B = \int \frac{Mm\,dx}{EI}$$

درصد و مفصل برشی :

اگر تغییر مکان برابر است مفصل را خواست



اگر تغییر مکان چپ و مفصل را خواست

اگر تغییر مکان نسبی در محل مفصل برشی را خواست

$$1*(\Delta B)_L + 1*(\Delta B)_R = \int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI}$$

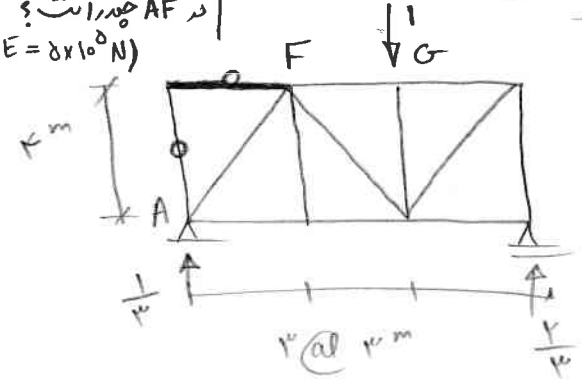
$$\rightarrow 1*(\Delta B)_{relative} = \cdots$$

اگر (ΔB) مثبت شد یعنی تغییر مکان مفروض در جهت relative و گرنه برعکس

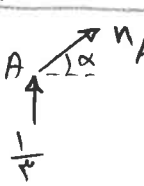
---

۱۴۸) نشست تکیه‌گاهی ، تغییر دما و خطای ساخت در خرپای معین ایجاد و تغییر نمی کند

یک AF (۱۴۸ کوتاهتر ساخته شده، نیروی ایجاد شده در AF چقدر است؟ $(AE = 8\times10^5\,N)$



A) $\sum F_y = 0$



$$n_{AF}\sin\alpha + \frac{1}{3} = 0$$

$$\rightarrow n_{AF} = \frac{-1}{3\sin\alpha} = -\frac{1}{3\times\frac{4}{5}} = \frac{-5}{12}$$

۶
۱۴۱

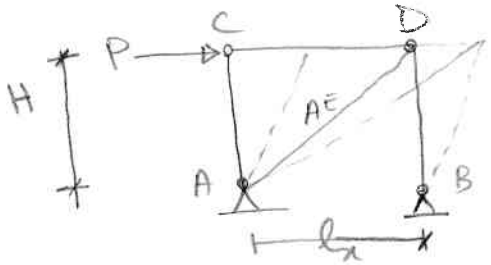
۱۴۹

$$1* \quad \Delta_C = n_{AF} * \delta_{AF} = \frac{-5}{12} * (-1) = \frac{5}{12}$$

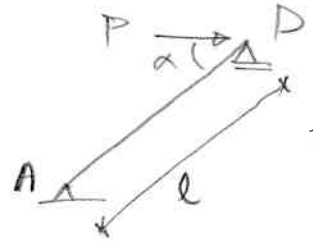
چون کوتاهتر ساخته شده منفی است

۱۵۹

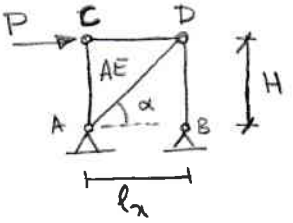
گره D ، C فقط افقی جابجا می‌شود



$\equiv$



در جاهایی که از تغییر شکل محوری اعضاء غیربارنده‌ی صرف نظر می‌شود تغییر مکان گره C چقدر است؟ (AE = constant)



$$k = \frac{AE}{\ell} \cos^2\alpha$$

سختی افقی میله مایل

α: زاویه بین راستای افقی و راستای میله

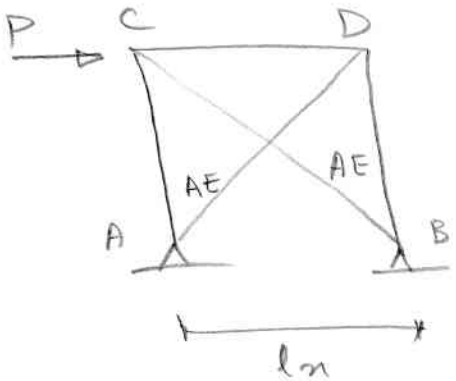
$$\ell = \frac{l_x}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{\ell}$$

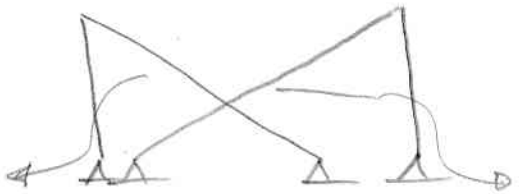
$$\rightarrow k = \frac{AE}{\frac{l_x}{\cos\alpha}} \cdot \cos^2\alpha \rightarrow k = \frac{AE}{l_x} \cdot \cos^3\alpha$$

$$\Delta_C = \Delta_D = \frac{P}{k} = \frac{P l_x}{AE \cos^3\alpha}$$

اگر دو بارنده شود



$\equiv$



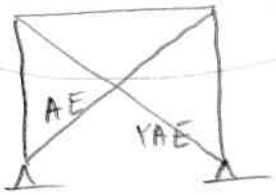
$$k = \frac{AE}{l_x} \cos^3\alpha \qquad k = \frac{AE}{l_x} \cos^3\alpha$$

قوه‌ها موازیند یعنی هرچند C جابجا می‌شود، D هم جابجا می‌شود

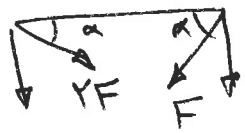
$$\rightarrow k_{\text{کل}} = \frac{2AE}{l_x} \cos^3\alpha$$

۴۹
S

حال اول



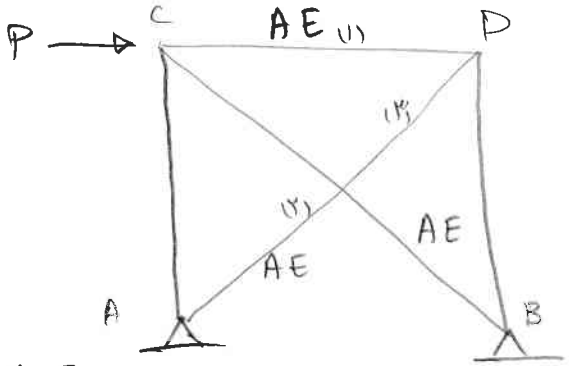
$$k = \frac{۲AE}{l_n}\cos^{۳}\alpha$$



حال دوم

این سه عضو تغییر مکان داشته

(۱) و (۲) و (۳)



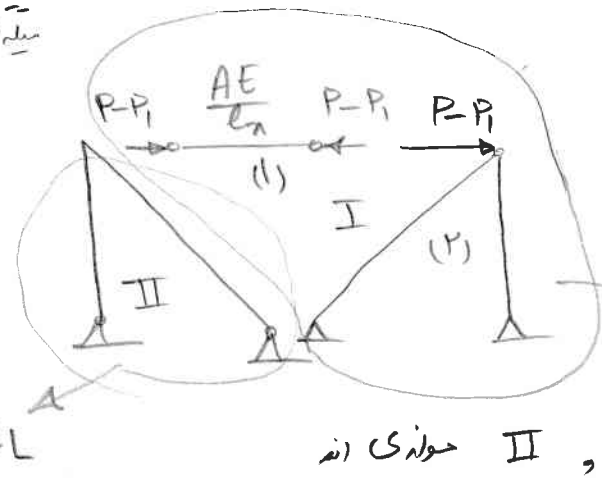
تغییر مکان D + کاهش طول سیلی افقی (۱)

≡

جابجایی متصل D

تغییر مکان D + کاهش طول سیلی افقی = جابجایی متصل D

≡



(۱) و (۲) سری اند ، I ، II موازی اند

$$\underbrace{(۱)\text{ و }(۲)}_{I}$$

$$k_L = \frac{AE}{l_n}\cos^{۳}\alpha \qquad k_R = \frac{\frac{AE}{l_n}\times\frac{AE}{l_n}\cos^{۳}\alpha}{\frac{AE}{l_n}+\frac{AE}{l_n}\cdot\cos^{۳}\alpha} = \frac{\cos^{۳}\alpha}{۱+\cos^{۳}\alpha}\times\frac{AE}{l_n}$$

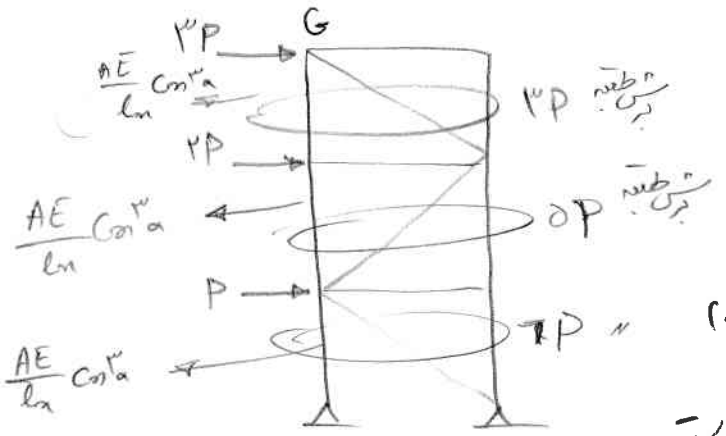
$$k_{total} = k_L + k_R \qquad \Delta_C = \frac{P}{k_{total}}$$

---

if $P_۲ = P - P_۱$ $P_۲$ به نسبت سختی بین دو عضو موازی تقسیم می‌شود

$$P_۲ = \frac{k_R}{k_L + k_R} * P \quad \rightarrow \quad \Delta_D = \frac{P_۲}{\frac{AE}{l_n}\cos^{۳}\alpha}$$

تغییر مکان جانبی حداکثر چقدر است؟



سختی هر طبقه: $\frac{AE}{l_x}\cos^3\alpha$ است همه یکی

تغییر مکان (drift): $\frac{\text{برش طبقه}}{\text{سختی هر طبقه}}$

طبقه‌ی حلقه طبقه‌ای است که drift آن، Δ آن بیشتر است

↓

relative displacement

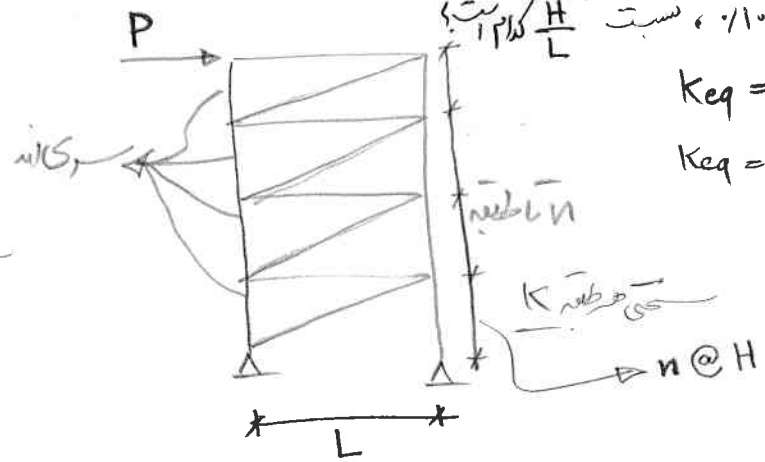
$$\Delta_G = \frac{3P}{\frac{AE}{l_x}\cos^3\alpha} + \frac{3P+2P}{\frac{AE}{l_x}\cos^3\alpha} + \frac{3P+2P+P}{\frac{AE}{l_x}\cos^3\alpha}$$

اگر یک یا دو طبقه ۲ بگذاریم سختی آن طبقه ۲ برابر می‌شود

۱۶۱

ذخیره‌ی مقابل ۱۰٪ تغییر شکل محوری اعضا غیر باربری صرف نظر می‌شود

سختی قوطی ساده برابر است با: $0.1024\frac{AE}{l}$، نسبت $\frac{H}{L}$ کدام است؟



$K_{eq} = nk$ ← سری ← n تا

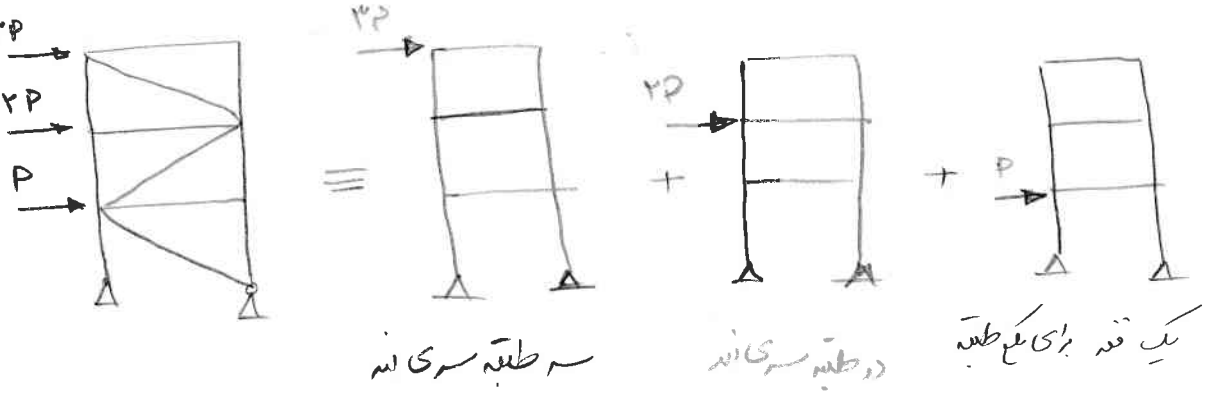
$K_{eq} = \frac{k}{n}$ ← سری ← n تا

$$\rightarrow K_{eq} = \frac{1}{n}\cdot\frac{AE}{l_x}\cdot\cos^3\alpha \rightarrow \Delta_{\text{بالا}} = \frac{P}{K_{eq}}$$

$$\boxed{\Delta_{\text{بالا}} = \frac{nP\,l_x}{AE\cos^3\alpha}}$$

$n=5$ در این مساله $\rightarrow K_{eq} = \frac{1}{5}\cdot\frac{AE}{L}\cdot\cos^3\alpha = 0.1024\frac{AE}{L} \rightarrow \cos^3\alpha = 5*0.1024 = 0.512$

$\rightarrow \cos\alpha = 0.8$ $\frac{H}{L}$ می‌خواهیم $\rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75 = \frac{H}{L}$



خط تأثیر Influence Line

(۱ یا ۲ سوال)

نمودارهای برش، لنگر و خیری محوری بر اثر یک بارگذاری ثابت مقادیر برش یا لنگر یا نیروی محوری را برای همه مقاطع سازه به ما می دهد. ← (بار ثابت، همه مقاط)

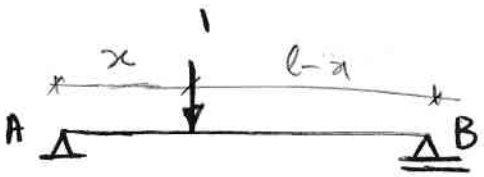
بار متحرک واحد قائم

ولی در خط تأثیر بر اثر یک بارگذاری متغیر (مکانی) در یک نقطه ثابت؛

(بار متغیر، یک نقطه)

تغییرات یک اثر مشخص (برش یا لنگر یا نیروی محوری) بررسی می شود

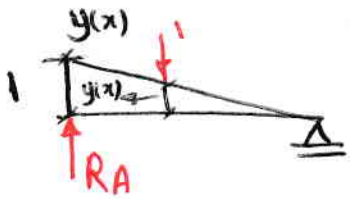
رسم خط تأثیر عکس العمل تکیه گاهی:



$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_A * l = 1 * (l-x) \rightarrow R_A = \frac{l-x}{l} = 1 - \frac{x}{l}$$

روش دیگر جایی که واحد در A بطرف بالا:

(کار بار واحد برابر است با خود بار واحد)



$$W_{ext} = 0$$

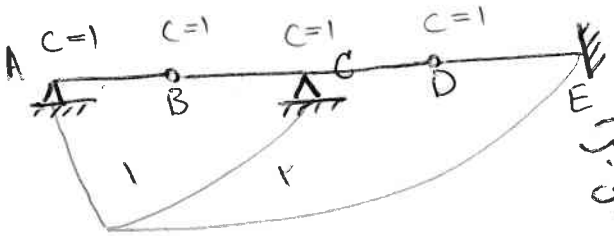
$$R_A * 1 - 1 * y(x) = 0 \rightarrow R_A = y(x)$$

برای رسم خط تأثیر یکی عکس العمل تکیه‌گاهی تبدیل تکیه‌گاهی مربوطه را حذف می‌کنیم و محل تکیه‌گاه را با جهتش و واحد به سمت بالا جابجا می‌کنیم و تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند بیانگر خط تأثیر عکس العمل تکیه‌گاه مورد نظر است

نکته: خطوط تأثیر کلیه پارامترها در یک سازه معین همواره خطی است. در حدود سازه نامعین چنین نمی‌توان گفت بدین معنا که خطوط تأثیر آن ممکن است خطی و یا همواره منحنی باشد مرجع که کلیه خطوط تأثیر در سازه‌های نامعین همواره منحنی می‌باشد

مثال: خطوط تأثیر عکس العملهای تمام تکیه‌گاهی را در تیر زیر رسم کنید

مثال



برای هر سازه در خط تأثیر باید اول درجه نامعینی را تعیین کنیم که اغلب سوالات همواره معین است

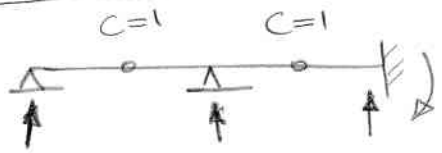
$$D.I = 3*2 - (4*1) = 2$$

چون بار قائم است پس در عکس العملهای افقی چشم پوشی می‌کنیم پس برای بارهای قائم تیر بالا معین است

$$(DI)_{beam} = R - C - 3 \qquad R: \text{Reaction}$$

ولی اگر از عکس العمل افقی چشم پوشی نکنیم پس:

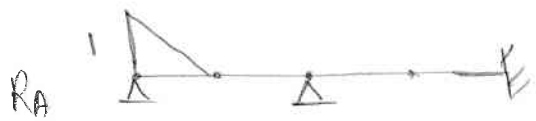
$$(DI)_{beam} = R - C - 2$$

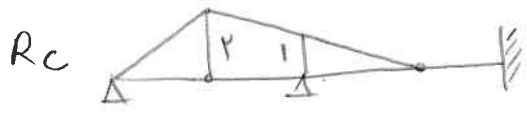


$$DI = 4 - 2 - 2 = 0$$

پس اگر سازه معین بود هیچگاه خط تأثیر آن معنی نمی‌شود والا غلط است

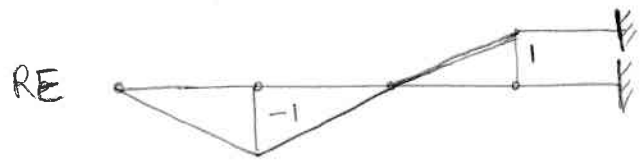
و سازه هم معنی نمی‌شود





۵۳

تکیه‌گاه گیردار اگر بخواهد بالا بیاید به خاطر اینکه خیش در آن ایجاد شود با اعمال بار داخلی در تکیه‌گاه ثابت E هم به آن بالا می‌آید

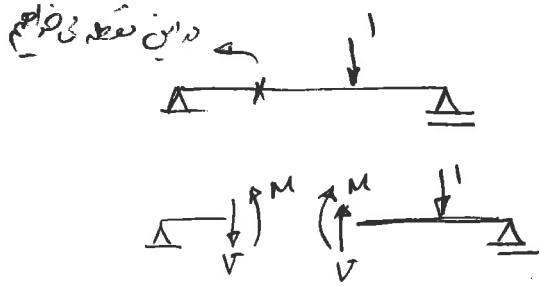


نکته: تمام خط تأثیر عکس الحملی تمام تکیه‌گاه‌ها در یک سازه استاتیکی با عرض واحد است

این مطلب کلی است و ربطی به معینی و نامعینی سازه ندارد

* رسم خط تأثیر تکیه‌گاه خیشی

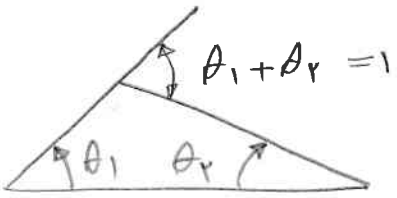
در این نقطه می‌خواهیم



$$-V * \Delta_1 + M\theta_1 + V \cdot \Delta_2 + M\theta_2 - 1 * y(x) = 0$$

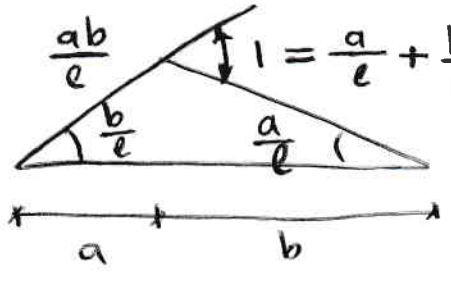
$$M(\theta_1 + \theta_2) + V(\Delta_2 - \Delta_1) = y(x)$$

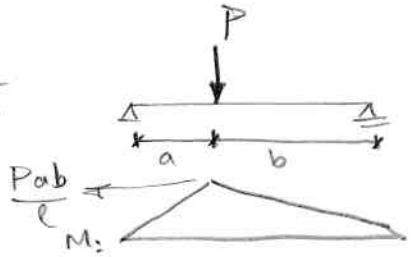
$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 1 \\ \Delta_1 = \Delta_2 \end{cases}$$



برای اینکه کار تکیه را 1 تکیم باید

برای رسم خط تأثیر تکیه‌گاه خیشی محل حدود نظر را مفصلی می‌کنیم (منفصل خیشی). سپس بدون اینکه اجازه تغییر طول تغییر خط نسبی بدهیم چرخش نسبی واحد ایجاد می‌کنیم. تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند بیانگر خط تأثیر تکیه‌گاه خیشی محل حدود نظر است.

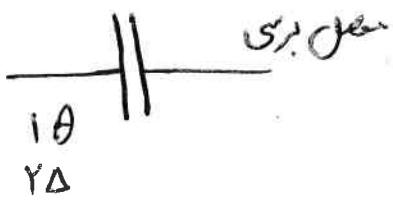




if $P=1$ ⟹ M: $\frac{ab}{\ell}$

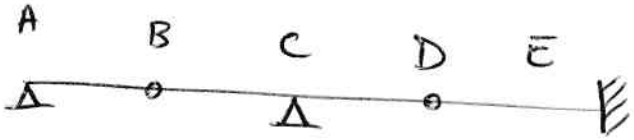
چون نقطه در مفصل خمشی است که تغییر مکانهای چپ و راست یکی است و شیب چپ و راست برابر نیست

یعنی یک Δ و دو θ داریم



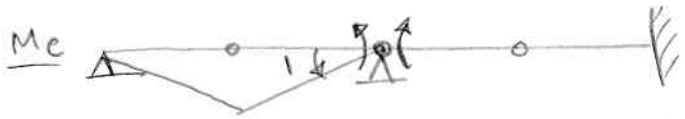
یعنی یک θ و ۲ تا Δ داریم

مثال: خطوط تأثیر نقطه خمشی را در B و C و D و E و همچنین وسط هرکدام از ۴ تیر AB و BC و CD و DE در تیر زیر رسم کنید



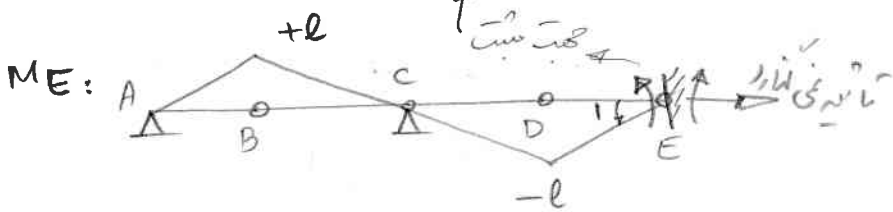
نکته: خط تأثیر نقطه خمشی در محل مفصل خمشی یک خط صفر است.

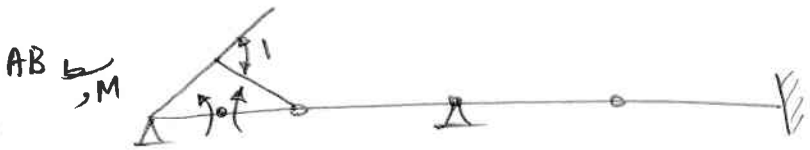
* خط تأثیر برشی در محل مفصل برشی یک خط صفر است

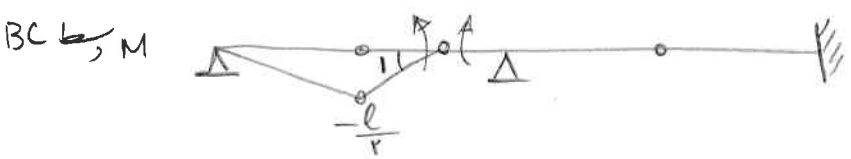


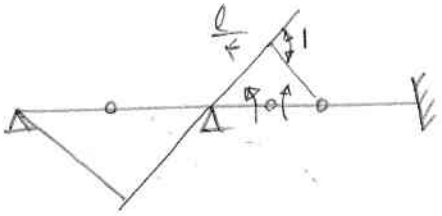
اگر C از راست بچرخد D پائین می‌آید،

DE صحبتی می‌شود پس از راست نمی‌چرخد تا در قوقانی را به فشاری نداند

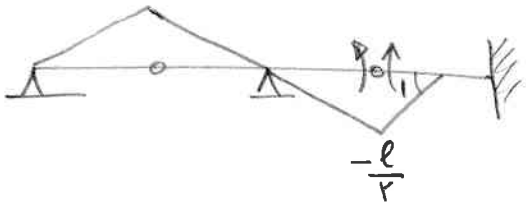






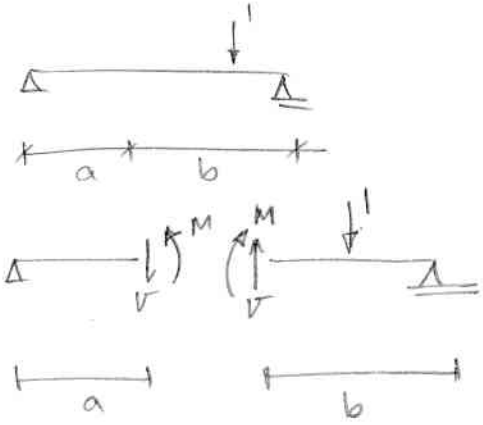


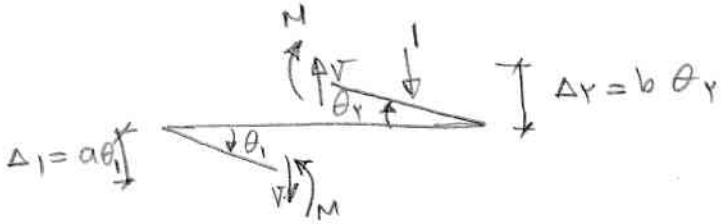
CD ب M



DE ب M

سم خط تأثیر برش





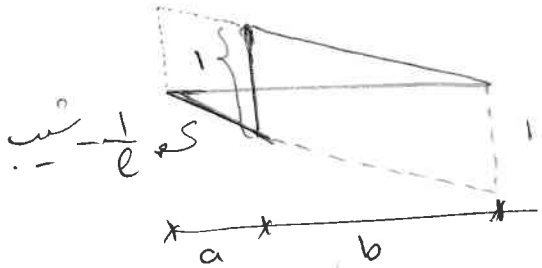
$$W = 0$$

$$V \cdot \Delta_1 - M\theta_1 + V \cdot \Delta_2 + M\theta_2 - 1 * y(x) = 0$$

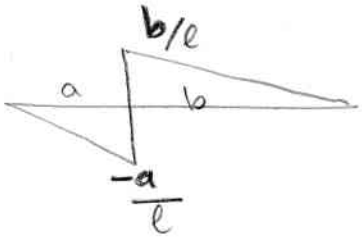
$$\Rightarrow V(\Delta_1 + \Delta_2) + M(\theta_1 + \theta_2) = y(x)$$

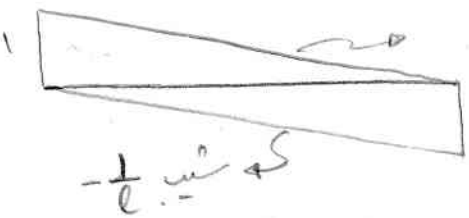
$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 = 1 \longrightarrow \\ \theta_1 = \theta_2 = \dfrac{-1}{l} \end{cases}$$

برش در نمودار برش یکی می‌شود
و کار برش برابر خود برش می‌شود



شیب $-\frac{1}{l}$ که





شیب $-\frac{1}{l}$ که

هر نموداری را خواستیم در هر نقطه برای برش بدست آوریم قسمت چپ آنرا از نمودار پایینی می‌زنیم
و قسمت راست آنرا از نمودار بالایی

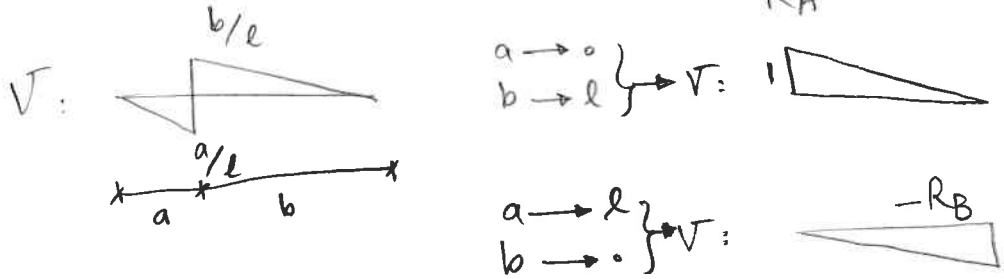
برای رسم خط تأثیر برش محل صدر نظر را منفصل می‌کنیم (منفصل برشی) سپس بدون نیکه اجازه چرخش نسبی بدهیم تغییر مکان نسبی واحد ایجاد می‌کنیم، تغییر شکلی که سازه پیدا می‌کند همانند خط تأثیر برش محل مورد نظر است

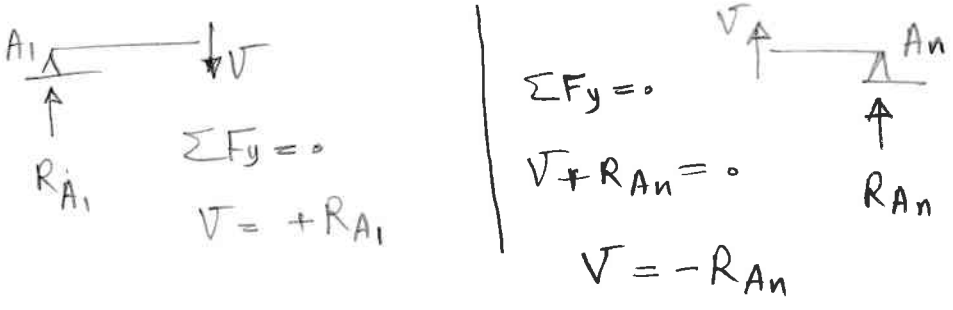
* نکته: در خط تأثیر برش، شیب نمودار خط تأثیر مستقل از مکان گره مورد نظر است و همواره برابر است با $-\frac{1}{\ell}$

بنابراین اگر نمودار خط تأثیر برش داده شده باشد همانچه شیب آنرا معکوس و قرینه کنیم طول تیر بدست می‌آید

اگر طول عضو را داشته باشیم از روی نمودار خط تأثیر برش آنرا برابر بدست می‌آوریم

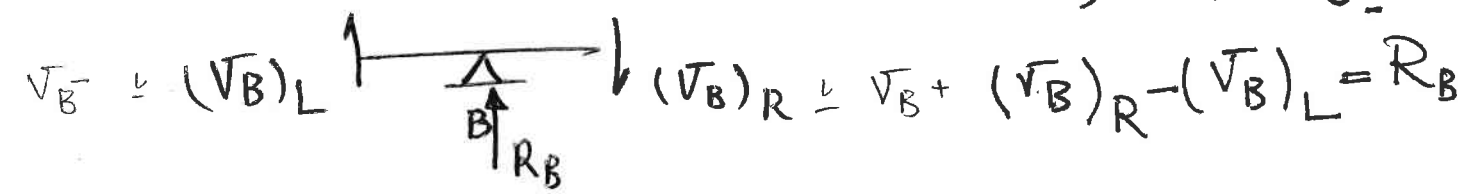
نکته: خط تأثیر برش در تکیه‌گاه انتهایی سمت چپ سازه همان خط تأثیر عکس العمل تکیه‌گاه انتهایی است چپ است ولی خط تأثیر برش در تکیه‌گاه سمت راست سازه قرینه خط تأثیر عکس العمل تکیه‌گاه انتهایی سمت راست است. این مطالب کلی که برای هر سازه‌ای چه معین و چه نامعین صحیح است نشان می‌دهد که برای آنکه برش یک تکیه‌گاه انتهایی ماکزیمم شود، بار متمرکز باید در محل آن تکیه‌گاه قرار گیرد





نکته: در محل یک تکیه‌گاه گیداری برش چپ و راست مخالف‌اند چون سازه فقط از یک طرف امتداد دارد ولی در محل یک تکیه‌گاه میانی که از هر دو طرف آن سازه ادامه دارد. بایستی طراح دقیقاً مشخص کند که برش راست تکیه‌گاه مد نظر است یا برش چپ تکیه‌گاه در این حالت همواره تفاضل خط تأثیر برش راست تکیه‌گاه میانی از خط تأثیر برش چپ تکیه‌گاه میانی برابر است با خط تأثیر عکس العمل آن تکیه‌گاه میانی

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$

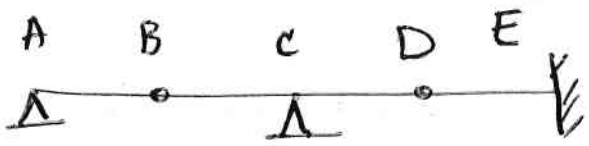


نکته: اگر در محل مفصل خمشی خط تأثیر برش گم شود چون لنگر خمشی برابر صفر است کار لنگر خمشی در کار مجازی همواره برابر صفر است حتی اگر شیب چپ و راست مفصل خمشی یکسان نباشد و در نتیجه در خط تأثیر برش در محل مفصل خمشی نیازی نیست که شیب خط تأثیر در چپ و راست مفصل خمشی برابر باشد.

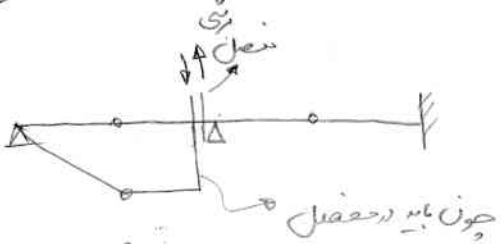
نکته: اگر در محل مفصل برشی خط تأثیر لنگر خمشی رسم شود چون برش برابر صفر است، کار برش در کار مجازی همواره برابر صفر است حتی اگر تغییر مکان چپ و راست مفصل برشی یکسان نباشد و در نتیجه در خط تأثیر لنگر خمشی در محل مفصل برشی نیازی به تغییر مکان یکسان در چپ و راست مفصل برشی نیست و تغییر مکان نسبی خواهیم داشت

نکته: اگر در نقطه‌ای از سازه مفصل برشی وجود داشته باشد، در کلیه خطوط تأثیر آن سازه دیده می‌شود که شیب خط تأثیر در چپ و راست مفصل برشی یکسان است. (چون در جهت آزادی جرخشی مفصل برشی یک واحد است) الا اینکه مسدود و آن صفر در هم خط تأثیر لنگر خمشی در همان محل مفصل برشی است. چون در این حالت ما خودمان محل مفصل برشی را مفصل خمشی کرده و به میزان واحد تغییر شیب ایجاد کرده‌ایم

مثال: خطوط تأثیر برش را در B، چپ C، راست C، D و همچنین وسط هر یک از تیرهای AB، BC، CD و DE در تیر زیر رسم کنید



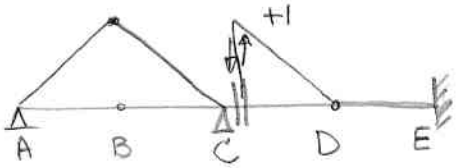
$(V_C)_L$:



برشی شیب چپ و راست برابر باشد

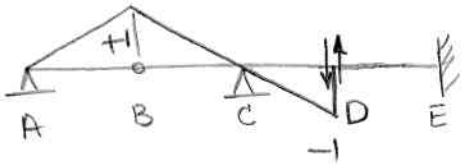
V_B:

$(V_C)_R$:

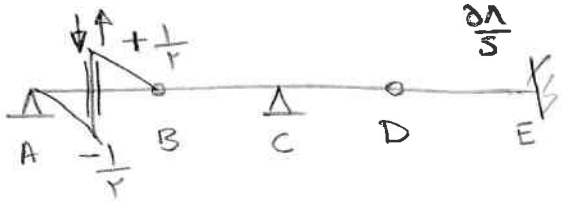


چون در مفصل برشی شیب چپ و راست باید با هم برابر باشند از C تا B هم مثل شیب از D تا C می‌رویم

V_D:

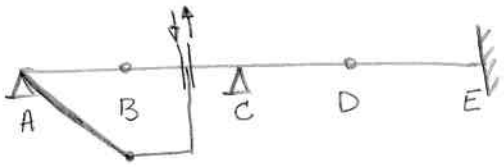


AB بسط V:

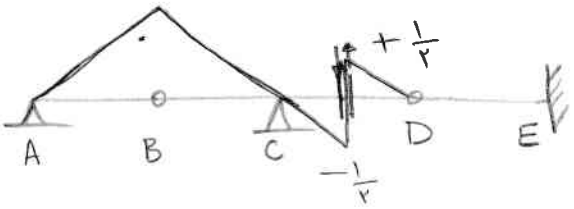


$\frac{\delta\Lambda}{S}$

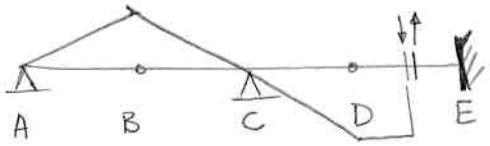
BC بسط V:



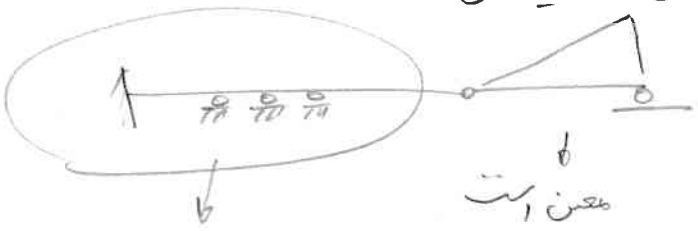
CD بسط V



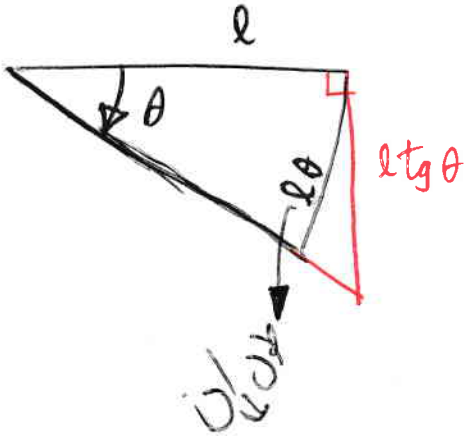
DE بسط V

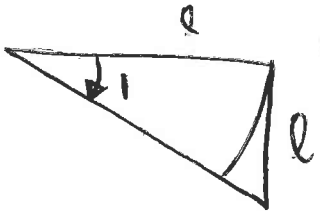


مثالی از سازه نامعین با شکل خط تاثیر خطی



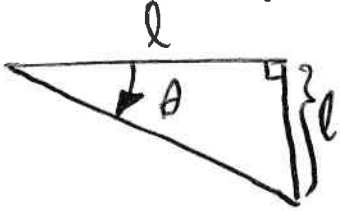
نکته: برخلاف تصور، دوران واحدی که در رسم خطوط تاثیر تکیه‌گاه خنثی در محل مورد نظر اعمال می‌شود واحدش رادیان نیست و واحد آن درجه و گرادیان هم نیست.





$1\,Rad \simeq 57^\circ$

یک واحد دوران یک واحد انتزاعی است و با هیچ توصیه هندسی همخوانی ندارد که قرارداد:

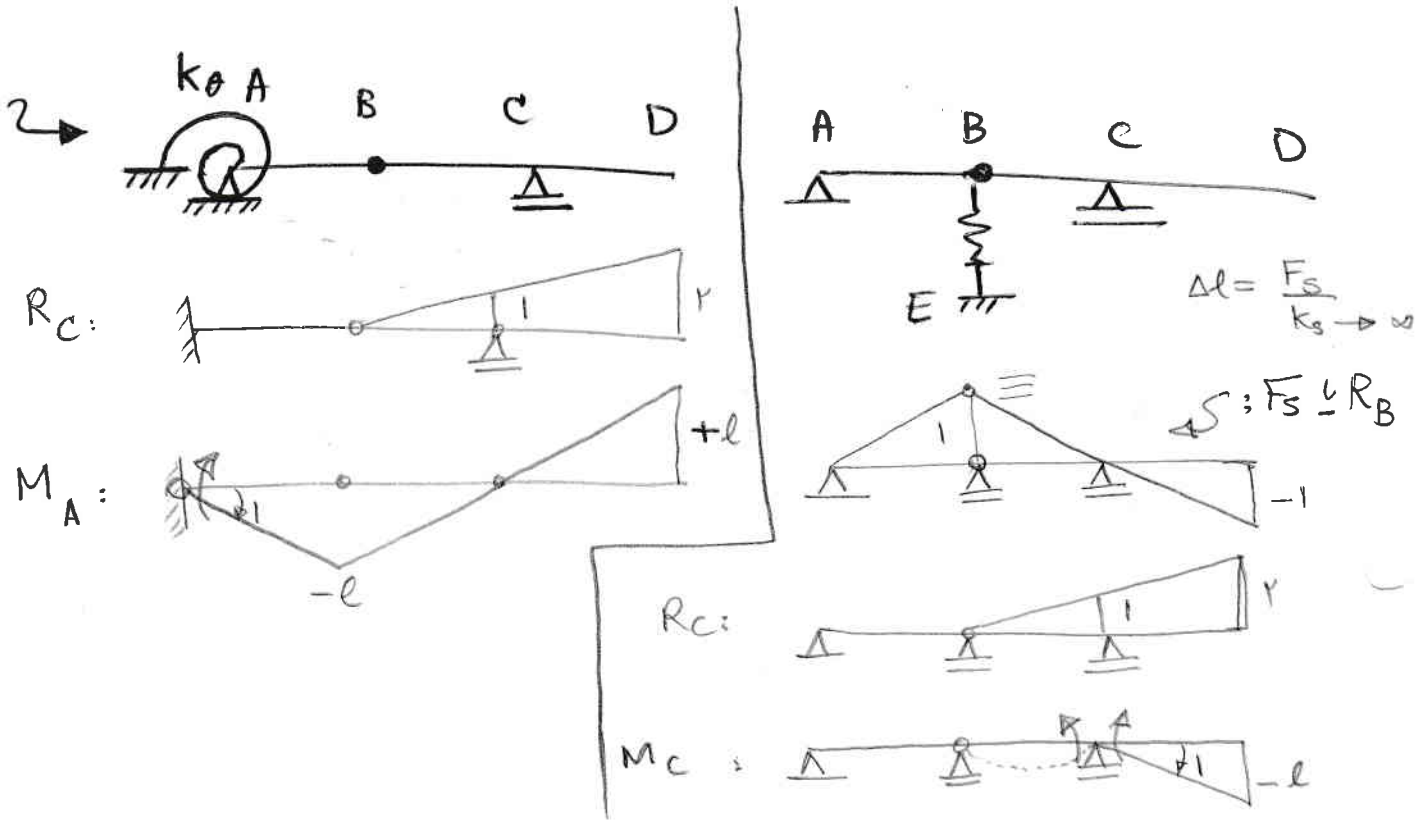


$\xrightarrow{if\ \theta=1} = l$

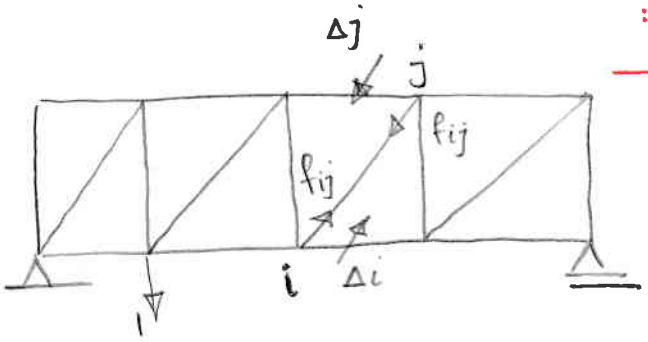
نکته جالب نظر که استفاده از روند رسم نمودارهای برش و لنگر خمشی تیرهای معین فیزیکی شده در صورتی که سازه معین دارای قیدهای پیچشی یا انتقالی باشد تحت اثر بارگذاری، تعاریف برش و لنگر خمشی و نمودارهای آنها، مستقل از مقادیر سختی قیدهای پیچشی و انتقالی سازه است

برش و لنگر خمشی

نتیجه مهمی که از مطالب فوق حاصل می شود اینست که اگر سازه معین دارای قیدهای پیچشی یا انتقالی باشد، می توان برای سهولت کار سختی این قیدها را به بینهایت میل داد و سپس در سازه جدیدی که حاصل می شود اقدام به رسم خط تاثیر یا اثر معرد نمود. می دانیم که در این حالت تکیه گاه مفصلی دارای قید پیچشی به تکیه گاه گیردار و قید انتقالی فنر به تکیه گاه غلطکی تبدیل می شود. در حالتی که سازه نامعین باشد و دارای قیدهای پیچشی یا انتقالی باشد به هیچ وجه نمی توان سختی فنرها را به بینهایت میل داد و از سازه معادل بدست آمده برای رسم خطوط تاثیر استفاده کرد. چون در سازه نامعین تحت اثر بارگذاری برخلاف سازه معین مقادیر برش و لنگر خمشی و نمودارهای آنها به مقدار سختی قیدها وابسته است. بعبارت دیگر خطوط تاثیر سازه های نامعین دارای قیدهای پیچشی یا انتقالی بستگی به مقدار سختی این قیدها دارد.



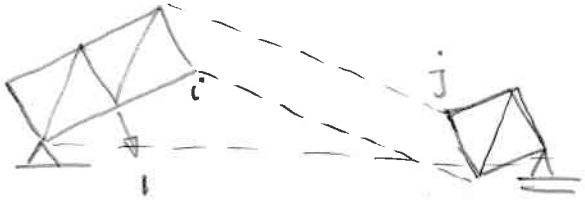
رسم خط تأثیر نیروی محوری اعضای خرپا:



فرض می‌کنیم که نادی به اندازهٔ واحد به هم نزدیک می‌شوند تا کار F_{ij} به اندازهٔ خودش شود (کار F_{ij} به اندازهٔ 1 واحد شود) یا 1 شود

معادلهٔ کار مجازی ←

$$f_{ij} * \Delta i + f_{ij} * \Delta j - 1 * y(x) = 0$$



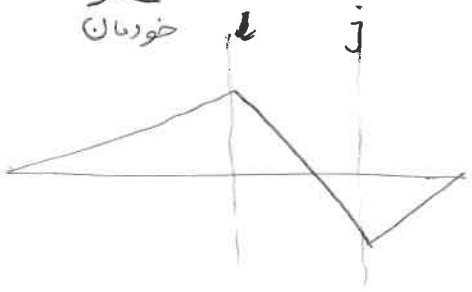
$y(x)$ تغییر مکان گره‌ای است که بار واحد بر آن اثر کرده است

$$f_{ij}\underbrace{(\Delta i + \Delta j)}_{1} = y(x)$$

$$\hookrightarrow \underline{f_{ij} = y(x)}$$

چون به اندازهٔ واحد آنها را به هم نزدیک کردیم

خودمان



خط تأثیر نیروی محوری عضو آنا

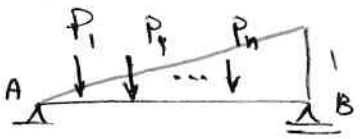
برای رسم خط تأثیر نیروی محوری یکی عضو خرپا آن عضو را از خرپا برداشته و دو گره دو سر عضو را به میزان واحد به یکدیگر نزدیک می‌کنیم، تغییر مکان گره‌هایی از خرپا که بار واحد بر آنها اعمال می‌شود بیانگر شکل خط تأثیر نیروی محوری عضو مورد نظر است. با بیستی توجه داشت که این قاعده همواره صحیح است ولی برای تعدادی از خرپاها بعلت هندسه شان چنانکه نیست بدین معنا که در بعضی خرپاها وقتی عضو مورد نظر را از خرپا برمی داریم و گره‌های دو سر آن عضو را به میزان واحد به یکدیگر نزدیک می‌کنیم، تشخیص نحوهٔ تغییر شکل خرپا امکان پذیر نیست برای این خرپاها با بستی بار واحد را در دو یا چند گره خاص خرپا وارد کرد و با استفاده از روشهای متصل و منقطع نیروی عضو مورد نظر را تحت اثر بار واحد در هر یک از این گره‌ها محاسبه کرد. مقادیر نیروی محاسبه شده در حقیقت عرض خط تأثیر نیروی عضو مورد نظر هستند و با استفاده از این مقادیر با توجه به خطی بودن شکل خط تأثیر

خط تأثیر مورد نظر رسم می‌شود

نکته: اگر تکیه‌گاه‌های خرپا را با یک خط به یکدیگر وصل کنیم معمولاً مفصل‌های خرپا که بر این خط واقع هستند نقاط اثر یال واحدی باشند

کاربرد خط تأثیر: (چگونه از نمودار خط تأثیر به بارگذاری سازه برسیم)

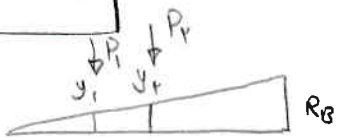
۱) سازه تحت اثر مجموعه بارهای متمرکز



$$R_B \times 1 - P_1 y_1 - P_2 y_2 - \cdots - P_n y_n = 0$$

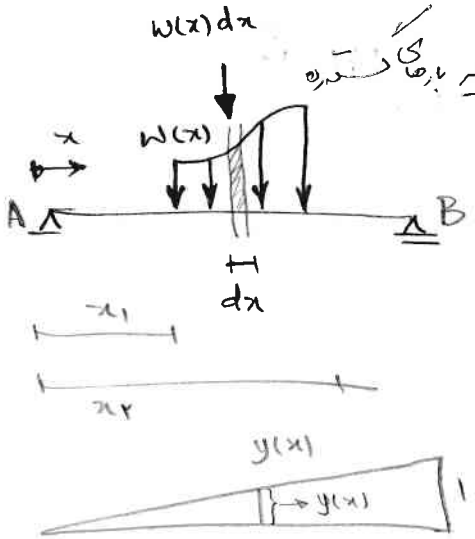
$$\Rightarrow R_B = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots + P_n y_n$$

$$\boxed{R_B = \sum_{i=1}^{n} P_i y_i}$$



برای یک نیروی خاص مطالب این بخش هم برای خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B ارائه شده است ولی برای عام حالات یعنی برای خط تأثیر برش، خط تأثیر خمش و خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی درست است.

۲) سازه تحت تأثیر بارهای گسترده



$$dR_B = w(x)\,dx \cdot y(x)$$

$$R_B = \int dR_B = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\,y(x)\,dx$$

تعبیر دیگر: سطح زیر نمودار $w(x) \times y(x)$

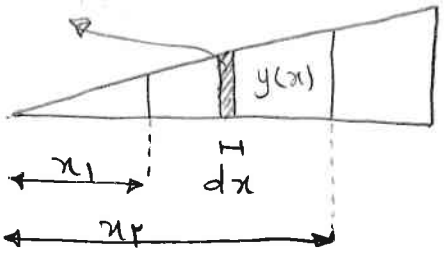
حالت خاص:

$$w(x) = w_0 = \text{Constant}$$

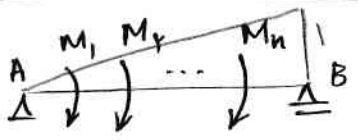
$$R_B = w_0 \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = w_0 \cdot A$$

A: سطح زیر نمودار خط تأثیر در فاصله‌ای که بار گسترده یکنواخت اثر می‌کند

$$dA = y(x)\,dx$$



۳) سازه تحت اثر مجموعه گشتاورهای متمرکز



گشتاور در جهتی ضرب می‌شود که جهت خمش حاصل از $y'(x)$ را داشته باشد

حتی اگر گشتاور مجازی در تغییر مکان ضرب می‌شود

نکته: گشتاور خمشی در یک نقطه از تیر ساعتگرد باشد مثبت و در صورتی که پادساعتگرد باشد منفی در نظر گرفته می‌شود

$y'(x)$ شیب سازه است، در تیر معین و نامعین رابطه R_B برقرار است

که در سازه معین $y'(x)$ خطی است، در سازه نامعین $y'(x)$ به صورت منحنی است

* در اصل $y'(x)$ شیب خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B است

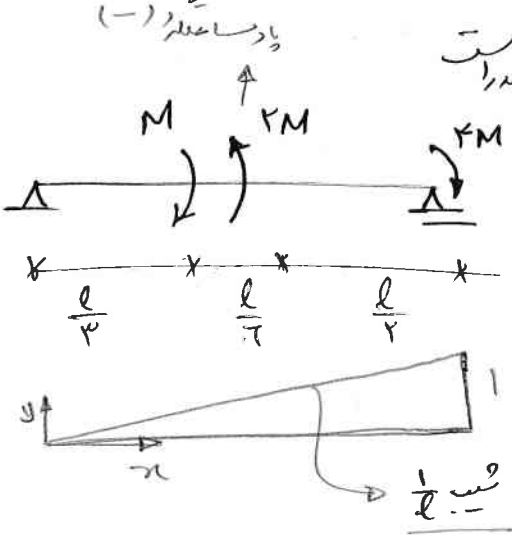
$$R_B \times 1 - M_1 y'_1 - M_2 y'_2 - \dots - M_n y'_n = 0$$

$$\rightarrow R_B = M_1 y'_1 + M_2 y'_2 + \dots + M_n y'_n$$

$$\boxed{\rightarrow R_B = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot y'_i}$$

مثال: عکس‌العمل تکیه‌گاه B تانشی در گشتاورهای خمشی متمرکز اعمالی چقدر است

از روش خط تاثیر (روش تحلیلی):



$$\rightarrow R_B = M \times \frac{1}{\ell} + (-2M)\left(\frac{1}{\ell}\right) + (4M) \times \frac{1}{\ell}$$

$$\rightarrow R_B = \frac{3M}{\ell}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\ell}$$

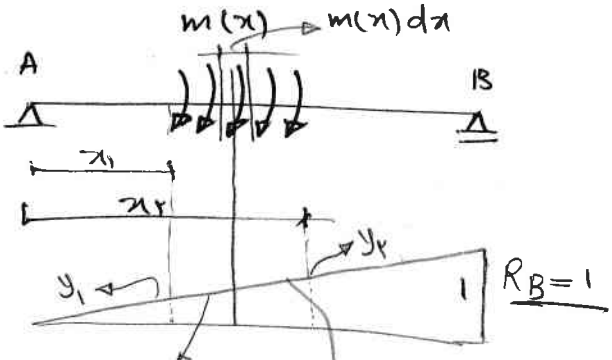
از استاتیک (چون سازه معین است) و گرفتن از خط تاثیر می‌دانیم $\sum M_A = 0$

$$R_B \times \ell = 4M + M - 2M = 4M$$

$$\boxed{\rightarrow R_B = \frac{3M}{\ell}}$$

۴) سازه تحت اثر گشتاور خمشی گسترده:

این مطالب فقط برای خط تاثیر R_B درست نیست، برای برش (خط تاثیر برش) و خط تاثیر گشتاور هم درست است



$$dR_B = m(x)dx \times y'(x)$$

$$R_B = \int dR_B = \int_{x_1}^{x_2} m(x)y'(x)dx$$

در این محدوده خطی نیست و در هر نقطه یک شیب یا یک $y'(x)$ دارد

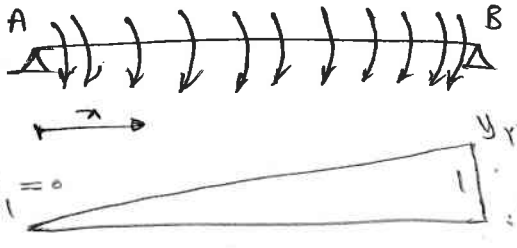
حالت خاص $m(x) = m_0$

$$R_B = m_0 \int_{x_1}^{x_2} y'(x)dx = m_0 \left[y(x) \right]_{x_1}^{x_2} = m_0 (y_2 - y_1)$$

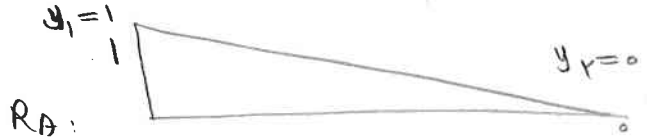
$\left.\begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \rightarrow \text{عرض خط تأثیر در نقطهٔ اول} \\ y(x_2) = y_2 \rightarrow \text{عرض خط تأثیر در نقطهٔ دوم} \end{array}\right\}$

y_1, y_2 و x_1, x_2 کاری نداریم فقط به تعداد آن‌ها که تکیه‌گاه خنثی گذاشته وجود دارد. تعداد و شکل خط تأثیر بین دو نقطه مدنظر اول و آخر تکیه‌گاه گذاشته کار داریم. مثلاً:

m_0, l, EI

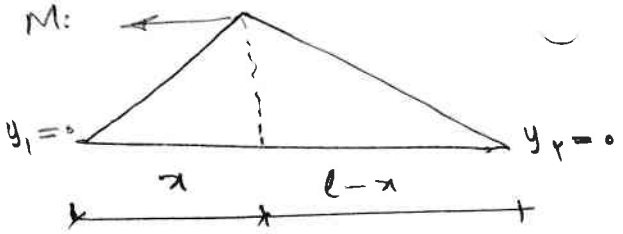


$$R_B = m_0(y_2 - y_1) = m_0(1-0) = m_0 \uparrow$$



$$R_A = m_0(y_2 - y_1) = m_0(0-1) = -m_0$$

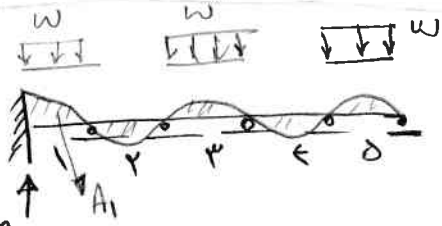
$\frac{ab}{l} = \frac{x(l-x)}{l}$



$$M(x) = m_0(y_2 - y_1) = m_0(0-0) = 0$$

$$M(x) = m_0(y_2 - y_1) = m_0(0-0) = 0$$

بارگذاری $\left\{\begin{array}{l} \text{مرده} \quad \text{Dead load} \\ \text{زنده} \quad \text{live load} \end{array}\right.$



بارگذاری سطرنجی:

* سوال: بار را در چه دهانه‌ای بگذاریم تا عکس‌العمل تکیه‌گاه A ماکزیمم شود؟

بارگذاری‌ای که نیروی R_A ماکزیمم شود چیه صورت است؟

بارگذاری سطرنجی: Chess loading

(فرقی بین تکیه‌گاه غلطکی و مفصلی در خط تأثیر نیست)

اگر بارهای دهانه‌هایی که عرض خط تأثیر مثبت است اعمال شود بیشترین عکس‌العمل تکیه‌گاهی فنری که A داریم

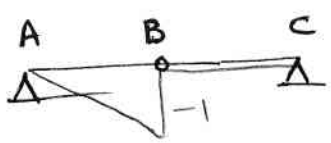
$$R_A \cdot 1 - W \cdot A_1 - W \cdot A_3 - W \cdot A_5 = 0$$

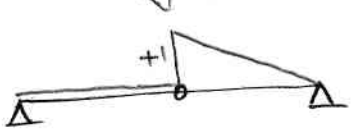
$$(R_A^+)_{max} = W \cdot A_1 + W A_3 + W \cdot A_5$$

رابطه کاربردی

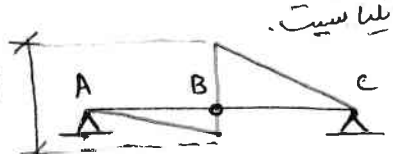
مثبتی است چون بارگذاری شده‌ای تغییر مکان در خلاف جهت آن است

تکته: خط تأثیر سازه‌های نامعین لزوماً یکتا نیست. مثلاً:

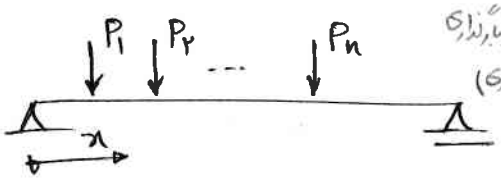




چون نتیجه تحلیل آن سازه‌ها یکتا نیست.



تا اشکال خط تأثیر درست است. چون سازه نامعین است پس برای سازه نامعین خط تأثیر رسم می‌کنیم

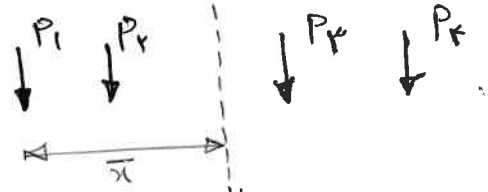


موقعیت برآیند بارگذاری (مرکز ثقل بارگذاری) $\bar{x} = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i}$

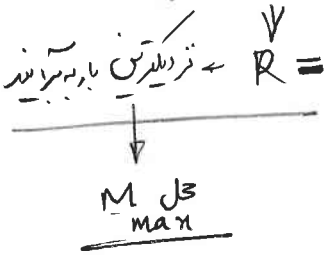
* چند بار متمرکز که فاصله‌ی مکانی لازم دارند از یک تیر عبور می‌کنند:

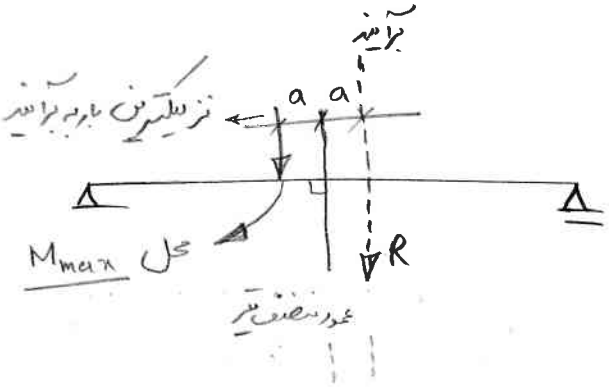
* سوال: محل Mmax کجاست و Mmax چقدر است؟

: مثلاً



$\sum P_i \cdot x_i$: فاصله برآیند نیروها حول یک نقطه دلخواه

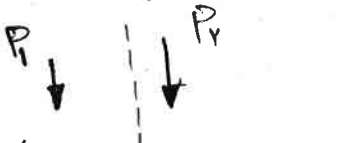




Mmax تیر زیر نزدیکترین بار به برآیند بارهایی روی تیر است که حالتیکه عمود منصف فاصله بین برآیند و نزدیکترین بار به برآیند را نصف کند

Mmax همیشه زیر برآیند (R) و نزدیکترین بار به آن یک فاصله‌ی مساوی (a) از عمود منصف تیر داشته باشد

* نکته: اگر دو بار هم جهت باشند برآیند آنها بین آنها خواهد بود و نزدیک بار بزرگتر ولی اگر دو بار مختلف الجهت باشند برآیند آنها در خارج آنها و باز هم نزدیک به بار بزرگتر.

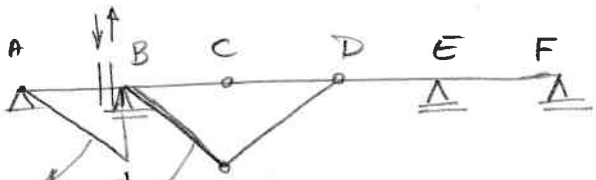


---

۲۲۳ ← (۴)

$(V_B)_R$:

$(V_B)_L$:

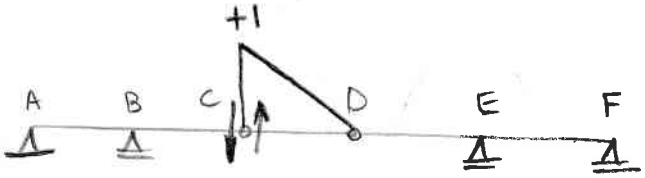


سمت چپ و راست منفصل برهی شیب یکسان دارند

۲۲۳- رسم خط تاثیر تیر بالا؟

۲۲۳- کدام شکل خط تاثیر صحیح نیست؟

صحیح است ← V_C :



گزینه (۴)