ک 126: پیوستگی تابع زیر را در نقطه (0,1) بررسی کنید؟ $F(x,y)=\frac{x^2+2y}{x+y^2}$

پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید؟

ک 127: $F(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}\quad (0,\sqrt{5})$ پ 334: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ک 127: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x+y} & (x,y)\neq(1,-1)\\ 3 & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$ ک 127: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

پ 334: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{sinxy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ پ 334: $F(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

## مشتق گیری از توابع چند متغیره:

### تعبیر هندسی

پ340: نمودار معادله z=F(x,b) در واقع اثر سطح z=F(x,y) در صفحه y=b است. بنابراین $F_x(a,b)=\frac{\partial F}{\partial x}$ ضریب زاویه منحنی z=F(x,y) در نقطه (a,b,F(a,b)) است.

نکته ارشدی: معادله خط مماس L بر این منحنی در صفحه y=b عبارت است :

$$z-F(a,b)=F_x(a,b)(x-a)$$

نکته ارشدی: معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس را داریم:

$$y=b\ ,\qquad x-a=\frac{z-F(a,b)}{F_x(a,b)}$$

نمودار معادله z=F(a,y) در واقع اثر سطح z=F(x,y) در صفحه y=a است. بنابراین $F_{\mathrm{y}}(\mathrm{a},\mathrm{b})=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}$ ضریب زاویه منحنیz=F(x,y) در نقطه (a,b,F(a,b)) است.

نکته ارشدی: معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس را داریم:

$$x=a\ ,\qquad y-b=\frac{z-F(a,b)}{F_{\mathrm{y}}(\mathrm{a},\mathrm{b})}$$

ک 128: فرض کنید Z=F(x,y) یک تابع دو متغیره باشد اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}$ موجود باشد گوئیم مشتق جزئی مرتبه اول F نسبت به x موجود است لذا برای محاسبه$\acute{F}_x$ متغیرy را در F(x,y) ثابت نگه می داریم و مقدار آن را با نمادهای زیر نشان میدهیم.

$$\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\ ,\qquad F_{\mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\qquad \acute{F}_x$$

به طور مشابه اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}$ موجود باشد گوئیم مشتق جزئی مرتبه اول F نسبت به y موجود است لذا برای محاسبه$\acute{F}_y$ متغیرx را در F(x,y) ثابت نگه می داریم و مقدار آن را با نمادهای زیر نشان میدهیم.

$$\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\ ,\qquad F_{\mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\qquad \acute{F}_y$$

در مثالهای زیر $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}$ و $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}$ را داریم؟

$F(x,y)=2xy$

$F(x,y)=x^2y^3$

پ346: $F(x,y)=9+2x-3y^2$

ک 346: $F(x,y)=x^2y^3+2xy-2$

پ338: $F(x,y,z)=x^2cosy+z^2$ $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$ در این تابع را نیز بدست آورید

383پ: مقادیر مشتق جزئی مرتبه اول $F(x,y) = x^3y^2 + 2xy - 4y$ را در نقطه (1,2) بدست آورید؟

338پ: $F(x,y,z) = x^3y^2 sinz + e^{yz}$ در این تابع را نیز بدست آورید $\frac{\partial F}{\partial z}$

129ک: $F(x,y) = \frac{x}{y+x^2}$

## مشتقات جزئی مرتبه های بالاتر

پ343 و ک 129:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = F_{xx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = F_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = F_{yx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = F_{xy}$$

همه مشتق های جزئی مرتبه اول و دوم توابع زیر را بدست آورید؟

ک 129: $F(x,y) = x^3y^4$

پ 343: $F(x,y) = sinxy^2$

مشتق جزئی مرتبه دوم $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ تابع زیر را در نقطه(2,4) بدست آورید؟ (کارشناسی ارشد حسابداری 92

$z = xe^{y-x^2} + xy^2$

## مشتق ترکیب توابع و ضمنی

## قاعده زنجیره ای : THE CHAIN RULE

فرض می کنیم مشتقات جزئی مرتبه اول z=F(x,y) پیوسته بوده و توابع u(x,y) و v(x,y) مشتق پذیر باشند در این صورت z تابعی مشتق پذیر است و داریم:

$$z = F(u,v) = \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial y}$$

**مجموعه کتب کارشناسی ارشد رشته حسابداری انتشارات علوی: علوی اینترنت 235:**

در تابع $z = F\left(x^2 + y^2, {}^{y}/_{x}\right)$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ یا $z_x$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ یا $z_y$ را حساب کنید؟

جزوه ایترنت دست نوشت: درتابع $z = \frac{u}{v} - \frac{v}{u}$ و $u = x^2 - y^2$ و $v = xy$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید؟

علوی 235: درتابع $z = ln\sqrt{u^2 + v^2}$ و $u = xe^{y}$ و $u = xe^{-y}$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید؟

$y = \ln u \quad \acute{y} = \frac{\acute{u}}{u} \ , \ y = \sqrt{u} \quad \acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$

جزوه اینترنت چاپی: درتابع $z = u^2 - uv + 2v^2$ و $u = \frac{1}{x+1}$ و $u = 1 + \sqrt{x}$ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه x=1 محاسبه کنید؟ در منزل

## مشتق توابع ضمنی:

ماهان92: توابعی که $X,Y$ از هم مجزا نباشند را تابع ضمنی می گویند تمام توابعی که تا بحال دیده ایم حالت خاصی از توابع ضمنی اند. برای مشتق این توابع $F(X,Y)=0$ در نظر میگیرم و داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad\qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}$$

سایت http://Fa.wikipedia.org/ و : دانشنامه رشد: چه موقع می‌توان انتظار داشت که توابع مختلف $(y=F(x$ که با رابطه $F(x,y)=0$ تعریف می‌شوند مشتقپذیر باشند؟

پاسخ: هنگامی که نمودار رابطه به اندازه کافی هموار باشد تا در هر نقطه آن خطی مماس وجود داشته باشد، از جمله این موارد وقتی است که فرمول $F$ ترکیبی جبری از توانهای $y,x$ باشد. برای محاسبه مشتق توابعی که بطور ضمنی تعریف می‌شوند، $Y$را به عنوان تابعی هر چند ناشناخته، مشتق پذیر از $x$ در نظر می‌گیریم و از دو طرف معادله نسبت به $x$ مشتق می‌گیریم. این روش را مشتق گیری ضمنی می‌نامند.

ماهان 92: مشتق ضمنی تابع زیر را بر حسب $X$ بدست آورید؟

$$x^2y^4 + y^5 + x^3 + x^3y^2 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} =$$

پ 363:

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} =$$

ک133: در توابع $F(x,y,z)$ نیز ابتدا تابع را به صورت $F(x,y,z)=0$ در می اوریم و برای محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ یک بار $x,y$ را ثابت نگه می داریم و مشتق $F$ نسبت به $z$ را محاسبه می کنیم و بار دیگر $y,z$ را ثابت نگه می داریم و مشتق $F$ نسبت به $x$ را محاسبه می کنیم و داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_z(x,y)}$$

به طور مشابه برای حل $\frac{\partial z}{\partial y}$ نیز داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y)}{F_z(x,y)}$$

ک133: در تابع $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ مشتقات ضمنی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید؟

ک133: در تابع $xz + ylnz = x^2y$ مشتقات ضمنی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورید؟

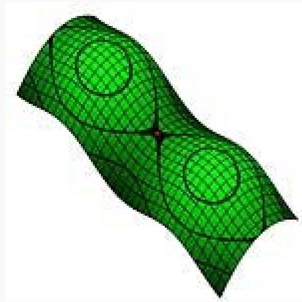
## ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره:

ک151و جهش: فرض می کنیم z=F(x,y) یک تابع با مشتقات اول و دوم پیوسته باشد دستگاه $F_x(x,y) = 0$ و $F_y(x,y) = 0$ را حل می کنیم فرض می کنیم $(x_0, y_0)$ جواب دستگاه باشند سپس با محاسبه $\Delta = F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2$ داریم :

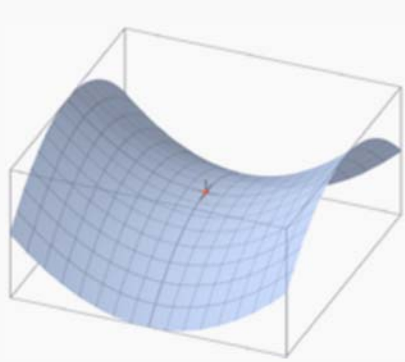
1- اگر $\Delta > 0$ و $F_{xx} > 0$ تابع در نقطه $(x_0, y_0)$ مینیمم نسبی دارد.
2- اگر $\Delta > 0$ و $F_{xx} < 0$ تابع در نقطه $(x_0, y_0)$ ماکزیمم نسبی دارد.
3- اگر $\Delta < 0$ آنگاه تابع در نقطه $(x_0, y_0)$ اکسترمم نسبی نیست این نقطه را نقطه زینی می گویند.
4- اگر $\Delta = 0$ نتیجه ای از این آزمون بدست نمی آید که باید از روش های دیگری استفاده نمود.

تعریف : اگر تابع z در نقطه $(x_0, y_0)$ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد گوئیم z در آن نقطه اکسترمم نسبی دارد.

تعریف: http://Fa.wikipedia.org/ : در ریاضیات، یک نقطهٔ زینی نقطه‌ای در دامنه یک تابع است که یک نقطه سکون بوده ولی اکسترمم موضعی نیست. نام آن از این موضوع گرفته شده که در حالتی که دامنه تابع $\mathbb{R}^2$ باشد، نمونه مشخص نقطهٔ زینی، سطحی است که در یک راستا به بالا و در راستای دیگر به پایین خم می‌شود (مانند یک زین یا گردنه .(در حالت دوبعدی، خطوط کانتوری تابع در نقطهٔ زینی یکدیگر را قطع می‌کنند.



نقطهٔ زینی بین دو تپه (محل تقاطع خطوط کانتوری به شکل( $8$ )



یک نقطهٔ زینی (با رنگ قرمز) بر روی نمودار $z = x^2 - y^2$

294جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (1,-1) بدست آورید؟(ارشد معدن 83)

$$F(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$$

294جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (3,2) بدست آورید؟(ارشد سیستم 78)

$$F(x,y) = 1 + 2x + 3y - xy$$

295جهش: اکسترمم نسبی تابع را در نقطه (0,0) بدست آورید؟(ارشد ریاضی 78)

$$F(x,y) = x^2y - y^2 - x^3 + xy$$

## نقطه بحرانی:

$(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \in D_z$ را یک نقطه بحرانی z=F(x,y) می گوئیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

1- $F_x(x,y) = 0$ و $F_y(x,y) = 0$

2- مشتق وجود نداشته باشد.

ک153: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

جهش 294: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟(ارشد مکانیک 81)

$$F(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y$$

ک152: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟(ارشد مکانیک 81)منزل

$$F(x,y) = 2xy - 5y^2 + 4x - 2x^2 + 4y - 4$$

ک 152 و پ 390: نقاط بحرانی و اکسترمم تابع را در صورت وجود بیابید؟ منزل

$$F(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

فرض می کنیم $(x_0, y_0) \in D_z$ و یک نقطه بحرانی باشد با توجه به تعریف نقاط بحرانی، $F_x = 0$ و $F_y = 0$ را با توجه به مفهوم مشتق چگونه ارزیابی می کنید؟

**انتگرال:**

**حساب و دیفرانسیل – جیمز استورات ترجمه: ارشک حمیدی – قسمت اول جلد اول ویرایش ششم – انتشارت فاطمی**

مثال: با استفاده از مستطیلها می خواهیم مساحت زیر سهمی $y=x^2$ از 0 تا 1 را تخمین بزنیم؟

شکل:

برای محاسبه مساحت می توانیم دو شکل زیر را داشته باشیم: