تابع متناوب

گوئیم تابع **f** متناوب با دوره ی تناوب $c \neq 0$ است هر گاه برای هر **x** در دامنهٔ **f**، $x \pm c$ نیز در دامنهٔ **f** بوده و

$$f(x \pm c) = f(x)$$

تذکر: کوچکترین دوره تناوب مثبت یک تابع متناوب را (در صورت وجود) دوره ی تناوب اصلی آن نامیده و با **T** نشان می دهند.

مثال: دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ را بیابید.

$$f(x+c) = f(x) \rightarrow \sin a(x+c) = \sin ax \rightarrow \sin(ax+ac) = \sin ax$$

برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید $ac = 2k\pi$ که $(k \neq 0, k \in z)$ در نتیجه $c = \frac{2k\pi}{a}$

لذا کوچکترین دوره ی تناوب تابع به ازای **k = 1** حاصل شده و $T = \frac{2\pi}{|a|}$ خواهد بود.

نکتهٔ 1: دوره تناوب توابع $y = Cosax, y = Sinax$ عبارت است از: $T = \frac{2\pi}{|a|}$ ودوره تناوب توابع $y = Cotax, y = \tan ax$ عبارت است از: $T = \frac{\pi}{|a|}$.

نکته 2: دورهٔ تناوب توابع $y = Cos^m ax, y = Sin^m ax$ بستگی به توان **m** دارد:

الف) اگر **m** زوج باشد، دورهٔ تناوب نصف می شود: $T = \frac{\pi}{|a|} \leftarrow m$ زوج

ب) اگر **m** فرد باشد، دورهٔ تناوب تغییری نمی کند: $T = \frac{2\pi}{|a|} \leftarrow m$ فرد

نکته 3: تابع $f(x) = nx - [nx]$ تنها تابع جبری است که متناوب می باشد و دورهٔ تناوب آن: $T = \frac{1}{n}$

نکته 4: در محاسبهٔ دورهٔ تناوب $y=|f(x)|$، اگر **f(x)** متناوب بوده و تغییر علامت دهد، دورهٔ تناوب آن نصف می شود و اگر **f(x)** تغییر علامت ندهد، دورهٔ تناوب تغییری نمی کند.

نکتهٔ 5: توان زوج، فرد و قدر مطلق در محاسبهٔ دورهٔ تناوب توابع تانژایت و کتانژایت بی تأثیر است.

نکتهٔ 6: اگر تابعی از مجموع یا تفاضل چند تابع تشکیل شده باشد، دورهٔ تناوب این تابع برابر ک. م. م دورهٔ تناوب ها است و اگر تابع از حاصل ضرب چند نسبت مثلثاتی تشکیل شده باشد، ابتدا آنرا به مجموع تبدیل نموده، سپس دورهٔ تناوب آنرا پیدا می کنیم.

مثال: نشان دهد تابع $y=Sin۵xCos۳x$ متناوب بوده و دورهٔ تناوب (اصلی) آنرا تعیین کنید.

$$y=Sin۵xCos۳x=\frac{۱}{۲}[Sin۸x+Sin۲x]=\frac{۱}{۲}[Sin۸(x+c)+\sin۲(x+c)]$$

$$\rightarrow\begin{cases}Sin(۸x+۸c)=Sin۸x\rightarrow ۸c=۲k\pi\rightarrow c=\dfrac{k\pi}{۴}\xrightarrow{k=۱}c_۱=\dfrac{\pi}{۴}\\ Sin(۲x+۲c)=Sin۲x\rightarrow ۲c=۲k\pi\rightarrow c=k\pi\xrightarrow{k=۱}c_۲=\pi\end{cases}\rightarrow T=[c_۱,c_۲]=\pi$$

معادلات مثلثاتی

تعریف: **هر معادله که شامل یک یا چند نسبت مثلثاتی باشد، معادله مثلثا تی نامیده می‌شود.** مانند معادله مقابل که ریشه هایش عبارتند از: $۲\sin x-\sqrt{۲}=۰\rightarrow Sinx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\ldots$

تذکر: یک معادله مثلثاتی ممکن است در حالت کلی به یکی از صورتهای زیر بوده و یا پس از انجام عملیات جبری به یکی از صورتهای زیر تبدیل شود:

$۱)Sinx=a$

$۲)Cosx=a$

$\Rightarrow -۱\le a\le ۱$

$۳)\tan x=a$

$۴)\cot x=a$

$\Rightarrow a\in R$ و یا $a\in(-\infty,+\infty)$

نکته: جوابهای کلی معادلات مثلثاتی در حالت های مختلف بصورت زیر نوشته می شوند.

برای یافتن جوابهای خاص یک معادله در یک فاصله مشخص مانند $[0,2\pi]$ کافی است به $k(k \in z)$ عدد داده و این جوابها را بیابیم.

الف) $Sinx = Sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

ج) $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

ب) $Cosx = Cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

د) $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

حالات خاص معادلات مثلثاتی:

1) $Sinx = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

2) $Sinx = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

3) $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

4) $\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

5) $\cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$

6) $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال 1) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $Sin8x = Cos3x$

ب) $3\tan x + 3\cot x = 4\sqrt{3}$

مثال 2) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جوابهای آنها را در بازه $[0,2\pi]$ بدست آورد.

الف) $2\sin^2 x + Sinx - 3 = 0$

ب) $Cos2x - Cosx + 1 = 0$

رسم نمودار توابع مثلثاتی

مهمترین تفاوتی که توابع مثلثاتی با سایر توابع دارند این است که توابع مثلثاتی متناوب می باشند. پس ابتدا دورهٔ تناوب تابع مثلثاتی را بدست آورده سپس تابع را در یک دورهٔ تناوب رسم می کنیم.

همچنین توابع مثلثاتی فقط در حالتی که کسری باشند دارای مجانب (قائم) بوده و در غیر این صورت اصلاً مجانب نخواهند داشت.

مثال)جدول تغییرات و نمودار تابع زیر را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید.

$$y=\frac{\sin x}{1-2\sin x}$$

x	y
$\frac{\pi}{6}$	∞
$\frac{5\pi}{6}$	∞
0	0
π	0
2π	0
$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{3}$

مرحله اول :
$$\begin{cases} y\to\infty \\ 1-2Sinx=0\to Sinx=\frac{1}{2}\to x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$
مجانب های قائم

مرحله دوم :
$$\begin{cases} x=0\to y=0 \\ y=0\to Sinx=0\to x=0,\pi,2\pi \end{cases}$$
نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات

مرحله سوم :
$$y'=\frac{Cosx(1-2Sinx)-(-2Cosx)(\sin x)}{(1-2Sinx)^2}=\frac{Cosx}{(1-2\sin x)^2}=0\to Cosx=0$$
$$\to\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}\to y=-1 \\ x=\frac{3\pi}{2}\to y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

مرحله چهارم: تشکیل جدول تغییرات و رسم منحنی

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		+	||	+	0	−	||	−		−	0	+	
y	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	0
					Max						Min