آنالیز ریاضی ۱

۱-$C[\cdot\,,۱]$ مجموعه تمام توابع پیوسته بر بازه‌ی $[\cdot\,,۱]$ است. اگر $\parallel f \parallel = \sup\{\,|f(x)| \quad ; \cdot \le x \le ۱\}$ و g و h توابعی با ضابطه $g(x) = ۴\sqrt{x}$ و $h(x) = x^۲$ فرض شوند، مقدار $d(h,g) = \parallel g - h \parallel$ را بدست آورید. (ابراهیمی)

۲- فرض کنید X و Y , Z سه فضای متریک و $g: X \to Y$, $h: X \to Z$ و $f: Y \to Z$ به طوری‌که $fog=h$ که در آن h پیوسته و g نگاشتی باز است.ثابت کنید f پیوسته است. (انوری)

۳- اگر $(X\,,d)$ یک فضای متریک و $x_\cdot\,, y_\cdot \epsilon X$ ، تابع f را باضابطه $f(x) = \frac{d(x\,,x_\cdot)}{۱+d(x,x_\cdot)} + d(x_\cdot,y_\cdot)$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید f پیوسته یکنواخت و کران‌دار است. (جهانتیغ)

۴- اگر سری با جملات مثبت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، در مورد همگرایی سریهای $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{۱+a_n}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{۱+n^۲a_n}$ چه می‌توان گفت؟ (مریم رحمانی)

۵- در مورد سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+۲+۳+\cdots+n}$ کدام گزینه صحیح است؟ (ملیحه ریاحی)

الف) دارای تجدید آرایش همگراست. ب) دارای یک تجدید آرایش واگراست.

ج) هر تجدید آرایش از آن همگراست. ج) هر تجدید آرایش از آن واگراست.

۶- فرض کنید f بر $[a\,,b]$ پیوسته باشد اگر g را بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شود ثابت کنید g بر $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است. (مطهره ریاحی)

$$f(x) = \begin{cases} f(a) & x < a \\ f(x) & a \le x \le b \\ f(b) & b < x \end{cases}$$

۷- فرض کنید S زیر مجموعه‌ی همبند و ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد و $f\,,g : S \to [\cdot\,,۱]$ پیوسته یاشند و g تابعی پوشا باشد. نشان دهید وجود دارد $c \in S$ به طوریکه $f(c) = g(c)$ (کارگر)

۸- فرض کنید $(X\,,d)$ یک فضای متریک و $S = \{x_۱\,, x_۲, \ldots\}$ زیر مجموعه‌ی شمارایی از X باشد $f: X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{n} & x = x_n, n = ۱,۲, \ldots \\ \cdot & x \in X - S \end{cases}$$

ثابت کنید f در هر نقطه‌ی S ناپیوسته و در هر نقطه‌ی $X - S$ پیوسته است. (چاکرالحسینی)

۹- فرض کنید X یک فضای متریک و E زیرمجموعه‌ی همبند از X باشد و $f: E \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $x \in E$, $f(x) \ne \cdot$.

ثابت کنید که اگر در نقطه‌ای چون $x_\cdot \in E$ داشته باشیم $f(x_\cdot) > \cdot$، انگاه برای هر $x \in E$ داریم $f(x) > \cdot$ (شاه بخش)

۱۰- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $\forall\, x,y\in\mathbb{R}\,,\ g\left(\frac{x+y}{۲}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{۲}$ ثابت کنید $g(x)=cx+a$ (**ملیحه ریاحی**)

.

۱۱- فرض کنید f بر $[a\,,b]$ پیوسته باشد تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم ثابت کنید g بر $[a\,,b]$ پیوسته است. (**حمزه نژادی**)

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \quad , \quad x=a \\ \sup\{\, f(t) \quad ,: a\le t\le x\}\ , \quad x>a\end{cases}$$

۱۲- فرض کنید $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ تابعی یکنوا باشد ثابت کنید هر زیر بازه از $[a\,,b]$ یکی از نقاط پیوستگی f را در بر دارد.(**زلفی پور**)

۱۳- اگر $\sum a_n$ همگرای مشروط باشد در مورد همگرایی $\sum(|a_n|-a_n)$ چه می‌توان گفت. (**علی‌قاسمی**)

۱۴- فرض کنید f روی $(a\,,b)$ تعریف شده باشد وبه ازای هر $x\in(a,b)$ ، عددی مثبت مانند r_x وجود دارد که f روی

$(x-r_x\,,x+r_x)$ صعودی است. ثابت کنید f روی $(a\,,b)$ صعودی است. (**علی‌بیگی**)

۱۵- فرض کنید $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ تابعی یک به یک باشد که در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند. در اینصورت f اکیدا یکنواست. (**علی-بیگی**)

۱۶- فرض کنید $(X\,,d)$ یک فضای متریک فشرده و $f:X\to X$ تابعی پیوسته باشد و $A=\bigcap_{n=۱}^{\infty}f^n(X)$. ثابت کنید A فشرده و ناتهی است و $f(A)=A$. نماد f^n ترکیب n مرتبه تابع f با خودش است.(**رییسی**)

۱۷- فرض کنید $(X\,,d)$ یک فضای متریک فشرده باشد و $f:X\to X$ تابعی باشد که به ازای هر $x\,,y\ \in X$،

$$d\big(f(x),f(y)\big)<d(x\,,y).$$

نشان دهید f نقطه ثابت دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید که شرط فشرده بودن X را نمی‌توان با شرط تام بودن آن عوض کرد.(**چاکرالحسینی**)

۱۸- فرض کنید $\sum_{n=۱}^{\infty}{a_n}^۲$ همگرا و $s_n=\sum_{k=۱}^{n}\frac{\sqrt{k}a_k}{n}$ اگر جملات دنباله $\{a_n\}$ نامنفی باشند ثابت کنید s_n همگراست. (**بختیارپاکزاد**)

۱۹- $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله مثبت هستند که برای هر عدد طبیعی n نامساوی $\frac{a_{n+۱}}{a_n}\le\frac{b_{n+۱}}{b_n}$ برقرار است، ثابت کنید همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum(a_n+b_n)$ را ایجاب می‌کند.(**کیانی**)

۲۰- فرض کنید $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ و f' بر $(a\,,b)$ کراندار باشد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ وجود دارد. (**سعیدی**)

۲۱-فرض کنید f بر $(۰\,,\infty)$ مشتق پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+f'(x)\big)=L<\infty$ در اینصورت در مورد $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$ چه می‌توان گفت؟ ادعای خود را ثابت کنید. (**جباری**)

۲۲- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to[۰,\infty)$ مشتق پذیر بوده و تابع g با ضابطه $g(x)=\frac{f(x)}{x^۲+۱}$ نزولی باشد. ثابت کنید f بر بازه $(-\infty\,,۰)$ نزولی است. (**صحراییان**)

۲۳- فرض کنید g و f دو تابع مشتق پذیر بر $\mathbb{R}$ باشند و برای $a \in \mathbb{R}$ داریم $f(a) \geq g(a)$. همچنین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) > g'(x)$. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ که $a < x$ داریم $f(x) > g(x)$.(**خالصی**)

۲۴- اگر f تابعی حقیقی روی $\mathbb{R}$ و در نقطه $x_.$ مشتق پذیر باشد. همچنین اگر N و M اعداد طبیعی باشند آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(f\left(x_. + \frac{N}{n}\right) - f\left(x_. - \frac{M}{n}\right)\right)\right)$$

را بدست آورید.(**مریم رحمانی**)

۲۵- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \in \mathbb{Q}^c \\ \cos x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ و $g(x) = [x]$ (تابع جز صحیح) در مورد مشتق پذیری تابع fog روی $\mathbb{R}$ چه می‌توان گفت؟ (**شکوهی**)

۲۶- فرض کنید $f: (۰\,,۱) \to [۱\,,۲]$ تابعی مشتق پذیر و پوشا باشد ثابت کنید f' حداقل دو ریشه در این بازه دارد. (**جهانتیغ**)

۲۷- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \in \mathbb{Q}^c \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ روی بازه $(-۱\,,۱)$ تعریف شده است در این صورت مشتق پذیری تابع $g(x) = x^{۲}f(x)$ را روی بازه $(-۱\,,۱)$ بررسی کنید. (**کارگر**)

۲۸- فرض کنید $f: [a\,,b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد ثابت کنید $f'([a\,,b])$ همبند است. (**زلفی پور**)

۲۹- فرض کنید f تابعی نامنفی و f'' بر $(۰\,,۱)$ موجود باشد. اگر حداقل به ازای دو مقدار x در $(۰\,,۱)$، $f(x) = ۰$ آنگاه معادله

$f''(x) = ۰$ در $(۰\,,۱)$ چند ریشه دارد. (با ذکر دلیل) (**بختیار پاکزاد**)

۳۰- فرض کنید $f: [a\,,b] \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید f' بر $[a\,,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \;\; ; f'(x) = \alpha\}$ بسته باشد. (**جباری**)

۳۱- فرض کنید $[۰\,,۱] \cap \mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در اینصورت در مورد پیوستگی تابع $f(x) = \sum_{r_n \leq x} \frac{۱}{۲^n}$ روی بازه $[۰\,,۱]$ چه می‌توان گفت؟ ادعای خود را ثابت کنید. (**مطهره ریاحی**)

۳۲- تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر است.

الف) اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f''(x) < ۰$ ثابت کنید f کران پایین ندارد.

ب) فرض کنید عددی مثبت مانند M وجود دارد که به ازای هر x، اگر $|x| > M$ آنگاه $f''(x) < ۰$ و $f(x) > ۰$. ثابت کنید پیوستگی f

بر $\mathbb{R}$ یکنواخت است. (**سعیدی**)

۳۳- ثابت کنید اگر تابع f روی بازه $[a\,,b]$ پیوسته و مشتق آن به جز در تعداد متناهی از نقاط $[a\,,b]$ مساوی صفر باشد، آنگاه تابع f

روی $[a\,,b]$ ثابت است. (خالصی)

۳۴- هرگاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f'(a)$ وجود داشته باشد، نشان دهید

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{۲h}$$

با ذکر مثالی نشان دهید که وجود این حد مشتق پذیری در نقطه a را ایجاب نمی‌کند. (علی‌قاسمی)

۳۵- فرض کنید $f:[۰\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ در $(۰\,,+\infty)$ مشتق پذیر است. (عسکرنوه)

الف) هرگاه $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید برای هر $h>۰$ داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=b$$

ب) اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{a}<\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید $b=۰$.

ج) $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ نشان دهید $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=b$

۳۶- فرض کنید $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی $(a\,,b)$ مشتق پذیر باشد. هرگاه $\lim_{x\to a} f'(x)=\mathrm{b}<\infty$ ثابت کنید $f'(a)$ وجود دارد و برابر b است. (کیانی)

۳۷- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اگر برای هر همسایگی v از $x_۰$ وجود داشته باشد $x\in v$ ، $x\neq x_۰$ که $f(x)=f(x_۰)$ آنگاه یا $f'(x_۰)$ وجود ندارد یا $f'(x_۰)=۰$. (صادقی)

۳۸- اگر g و f دو تابع محدب باشند در مورد محدب بودن fog چه می‌توان گفت؟ (صادقی)

۳۹- فرض کنید f روی بازه‌ی باز I محدب باشد ثابت کنید اگر f روی این بازه مشتق پذیر باشد آنگاه f' روی این بازه پیوسته است.(حمزه نژادی)

۴۰- فرض کنید f یک تابع محدب روی بازه $(a\,,b)$ باشد. و $[c\,,d]\subset(a,b)$ قرار دهید $M=\max\{f'_+(c)\,,f'_-(d)\}$ ثابت کنید به ازای هر $x\,,y\in[c\,,d]$ داریم: $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$. (ابراهیمی)

۴۱- مجموعه‌ی $A\subseteq R$ و تابع $f:A\to A$ مفروضند:

الف) فرض کنید a یک نقطه حدی مجموعه‌ی A باشد و به ازای هر عدد مثبت ε، مجموعه‌ی $\{x\epsilon A : |f(x)|\geq\varepsilon\}$ متناهی باشد نشان دهید $\lim_{x\to a} f(x)=۰$ (ربیسی)

۴۲- فرض کنید $(X\,,d)$ یک فضای متریک و $f:X\to\mathbb{R}$ پیوسته و $H\subseteq X$ مجموعه‌ای همبند باشد. ثابت کنید اگر

$$inf\{f(x)\ :\ x\epsilon H\}<k<\sup\{f(x)\ ;\ x\in H\}$$

آنگاه وجود دارد $c\in H$ به طوری که $f(c)=k$ (شکوهی)