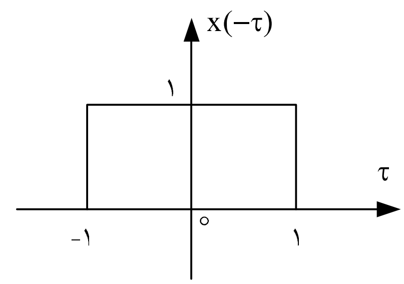
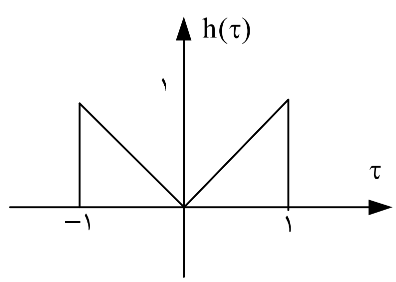
پاسخ سوالات کنکور کارشناسی ارشد سال ۱۳۸۹

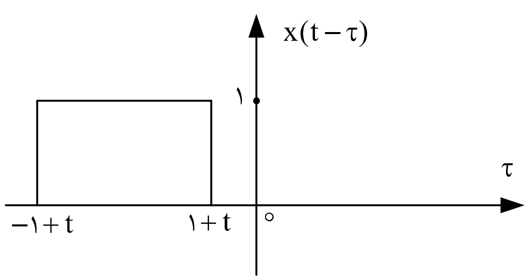
۱- گزینه ۲ صحیح است.

راه اول (روش معمول):

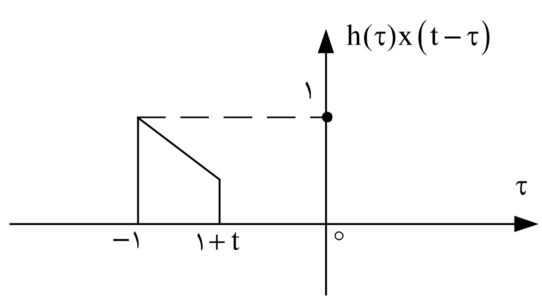
برای محاسبه کانولوشن دو سیگنال در بازه زمانی $-۲ < t < -۱$ ، ابتدا $x(\tau)$ را قرینه می‌کنیم. سپس $x(-\tau)$ را به اندازه t واحد $\left(-۲ < t < -۱\right)$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم:







$x(t-\tau)$ همان $x(-\tau)$ می‌باشد که به اندازه t واحد $\left(-۲ < t < -۱\right)$ به سمت چپ انتقال یافته است. با ضرب $x(t-\tau)$ در $h\left(\tau\right)$ داریم:



برای محاسبه $h\left(t\right) * x\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\tau\right) x\left(t-\tau\right) d\tau$ در $-۲ < t < -۱$ کافیست که مساحت شکل فوق را محاسبه کنیم:

$$\int_{-1}^{1+t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{1+t}(-\tau)d\tau = \frac{-\tau^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1+t} = \frac{-(1+t)^2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-t^2}{2}-t \quad , \quad -2<t<-1$$

شکل فوق در $-2<t<-1$ یک سهمی با تقارن رو به پایین است که فقط مطابق شکل گزینه ۲ در $-2<t<-1$ می‌باشد. پس دیگر نیازی به محاسبه کانولوشن در بقیه زمان‌ها نیست و گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

راه دوم (روش تحلیلی):

چون $h(t)$ و $x(t)$ برای بازه زمانی $[-1,1]$ مقدار دارند، پس کانولوشن آنها برای بازه $[-2,2]$ مقدار خواهد داشت.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

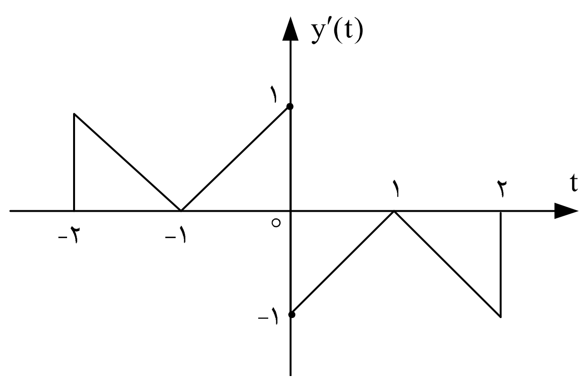
$x(t)$ مقدار ثابتی دارد و $h(t)$ نیز از توابع خطی تشکیل شده است. پس ضرب $h(\tau)$ و $x(t-\tau)$ شامل توابع خطی می‌باشد. در نتیجه انتگرال آن بصورت منحنی‌های درجه دو خواهد بود. پس گزینه های ۳ و ۴ نادرست می‌باشند. برای محاسبه کانولوشن از $t=-2$، باید $x(\tau)$ را قرینه کنیم و سپس آن را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را روی $h(\tau)$ به سمت راست بلغزانیم. با حرکت آن به سمت راست و روی $h(\tau)$ مقدار همپوشانی زیاد می‌شود، پس منحنی در اوایل شکل $y(t)$ $(-2<t<-1)$، باید صعودی باشد ولی چون خط $h(\tau)$ در زمانهای منفی به سمت پایین است، شتاب آن (سرعت زیاد شدن همپوشانی) منفی می‌شود. پس تقارن منحنی در اوایل شکل $y(t)$ $(-2<t<-1)$، باید به سمت پایین باشد که فقط گزینه ۲ اینچنین است.

راه سوم: (روش سریع و ابتکاری مخصوص این تست و تست‌های مشابه):

طبق مطالب بیان شده در فصل دوم، برای محاسبه کانولوشن $y(t)=x(t)*h(t)$ می‌توانیم $y'(t)=x'(t)*h(t)$ را محاسبه و سپس از آن انتگرال بگیریم تا $y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$ بدست آید. اما مشتق $x(t)$ برابر است با:

$$x'(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1) \quad \Rightarrow \quad y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t+1)-h(t-1)$$

با رسم $y'(t)=h(t+1)-h(t-1)$ داریم:



حال با محاسبه انتگرال شکل فوق (به صورت حسی و تقریبی) به راحتی به گزینه ۲ خواهیم رسید.

۲- گزینه ۱ صحیح است.

از خاصیت دوگانی تبدیل فوریه زمان‌گسسته و سری فوریه زمان‌پیوسته می‌دانیم که ضرایب فوریه سیگنال $X\left(e^{jt}\right)$ برابر $x[-k]$ می‌باشد. همچنین از خاصیت مقیاس‌دهی زمانی از خواص سری فوریه زمان‌پیوسته می‌دانیم که ضرایب فوریه یک سیگنال زمان‌پیوسته با مقیاس‌دهی زمانی تغییر نمی‌کند، پس ضرایب فوریه سیگنال $X\left(e^{j\alpha t}\right)$ ($\alpha > ۰$) نیز برابر همان $x[-k]$ می‌باشد. پس ضرایب فوریه $X\left(e^{j۲t}\right)$ نیز برابر $x[-k]$ است.

۳- گزینه ۱ صحیح است.

$$x[n]=\delta[n+۲]-۲\delta[n+۱]+\delta[n] \quad \Rightarrow \quad X(z)=z^{۲}-۲z+۱ \quad , \quad ROC:|z|<\infty$$
$$y[n]=\delta[n+۲]-\delta[n+۱] \quad \Rightarrow \quad Y(z)=z^{۲}-z \quad , \quad ROC:|z|<\infty$$
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{۲}-z}{z^{۲}-۲z+۱}=\frac{z(z-۱)}{(z-۱)^{۲}}=\frac{z}{z-۱}=\frac{۱}{۱-z^{-۱}}$$

ناحیه همگرایی $H(z)$ باید طوری انتخاب شود که با نواحی همگرایی $X(z)$ و $Y(z)$ اشتراک داشته باشد. قطب $H(z)$ برابر $z=۱$ می‌باشد و هر دو ناحیه همگرایی $|z|>۱$ و $|z|<۱$ برای آن قابل قبول است (زیرا هر دو با نواحی همگرایی $X(z)$ و $Y(z)$ اشتراک دارند).

حالت اول: $H(z)=\frac{۱}{۱-z^{-۱}} \quad , \quad |z|>۱$

حالت دوم: $H(z)=\frac{۱}{۱-z^{-۱}} \quad , \quad |z|<۱$

در حالت اول سیستم علّی است زیرا ROC سمت راستی و شامل $z=\infty$ می‌باشد و همچنین ناپایدار است زیرا ROC شامل دایره یکه نیست.

در حالت دوم سیستم غیرعلّی است زیرا ROC سمت راستی نیست و همچنین ناپایدار است زیرا ROC شامل دایره یکه نیست.

پس این سیستم می‌تواند علّی یا غیرعلّی باشد و حتماً ناپایدار است. در نتیجه گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

توصیه می شود برای درک بهتر نسبت به این سیستم، از $H(z)$ در دو حالت، عکس تبدیل Z بگیرید و سپس $h[n]$ را با $x[n]$ کانولوشن کنید تا $y[n]$ بدست آید. $h[n]$ در حالت اول برابر $u[n]$ و در حالت دوم برابر $-u[-n-۱]$ می‌شود که در هر دو حالت اگر با $x[n]$ کانولوشن شود، حاصل برابر $y[n]$ خواهد شد.

۴- گزینه ۲ صحیح است.

نکته مربوط به سیستم‌های بدون‌حافظه و TI:

اگر یک یا چند ورودی در لحظات مختلف با هم برابر باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز در همه آن لحظات با هم برابر می‌باشند. یعنی:

$$\begin{cases} \text{اگر } x(t_1)=x(t_2) \longrightarrow y(t_1)=y(t_2) \\ \text{اگر } x_1(t_1)=x_2(t_2) \longrightarrow y_1(t_1)=y_2(t_2) \end{cases}$$

در این تست $x_2(t)$ برای $-1<t<1$ برابر ۱ می‌باشد. همچنین $x_1(t)$ نیز در $t=1$ برابر ۱ می‌باشد. پس $y_2(t)$ برای $-1<t<1$ باید برابر $y_1(t)$ در $t=1$ باشد. در نتیجه: $-1<t<1 \quad , \quad y_2(t)=y_1(1)=0$.

از طرف دیگر $x_2(t)$ برای $t>1\,,\,t<-1$ برابر ۰ می‌باشد. همچنین $x_1(t)$ نیز در $t=0$ برابر ۰ می‌باشد. پس $y_2(t)$ برای $t>1\,,\,t<-1$ باید برابر $y_1(t)$ در $t=0$ باشد. در نتیجه: $t>1\,,\,t<-1 \quad , \quad y_2(t)=y_1(0)=1$

۵- گزینه ۴ صحیح است.

خروجی در هر لحظه t به ورودی در همان لحظه t یا لحظه $t-2$ بستگی دارد، پس سیستم علّی و حافظه‌دار است.

بدیهی است که اگر ورودی محدود باشد، خروجی نیز محدود می‌شود، پس سیستم پایدار است.

چون در شرطها ورودی داریم، پس با α برابر شدن ورودی، خروجی α برابر نمی‌شود، پس سیستم غیرخطی است.

بررسی TI بودن:

$$t \longrightarrow t-t_0: \quad y(t-t_0)=\begin{cases} 0 & , \quad x(t-t_0)<0 \\ x(t-t_0)+x(t-t_0-2) & , \quad x(t-t_0)\geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$x(\bullet) \longrightarrow x(\bullet-t_0): \qquad \begin{cases} 0 & , \quad x(t-t_0)<0 \\ x(t-t_0)+x(t-2-t_0) & , \quad x(t-t_0)\geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

چون عبارات (۱) و (۲) با هم برابر هستند، پس سیستم TI است.

بررسی معکوس‌پذیری:

روش ۱: با توجه به رابطه سیستم همه مقادیر ورودی به خروجی منتقل نمی‌شود، زیرا در ضابطه اول که مخصوص ورودی‌های منفی است، خروجی به ورودی وابسته نیست. بنابراین سیستم معکوس‌ناپذیر است.

روش ۲: سعی می‌کنیم ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم:

$$\begin{cases} y(t)=0 & , \quad x(t)<0 \quad \longrightarrow \quad \text{————} \\ y(t)=x(t)+x(t-2) & , \quad x(t)\geq 0 \quad \longrightarrow \quad x(t)\overset{?}{=}T\left[y(t)\right] \ , \ x(t)\geq 0 \end{cases}$$

در ضابطه اول، ورودی را نمی‌توانیم بر حسب خروجی بنویسیم. در ضابطه دوم نیز حتّی اگر بتوانیم ورودی را بر حسب خروجی بنویسیم، از آنجا که شرطها روی ورودی است، پس برای معکوس‌پذیری لازم است که همه ورودی‌ها در شرطها پوشش داده شوند که اینطور نیست، زیرا فقط ورودی‌های مثبت $\left(x(t)\geq 0\right)$ در ضابطه دوم پوشش داده شده‌اند. در واقع ورودی‌های منفی را نمی‌توانیم از روی خروجی بدست آوریم. در نتیجه سیستم معکوس‌ناپذیر است.

۶- گزینه ۳ صحیح است.

نکته مربوط به سیستم‌های LTI:

- در یک سیستم LTI نواحی همگرایی $X(s)$ و $Y(s)$ باید با هم اشتراک داشته باشند و ناحیه همگرایی $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ نیز باید با نواحی همگرایی $X(s)$ و $Y(s)$ اشتراک داشته باشد.

$$x(t)=u(t)-u(t-1) \longrightarrow X(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s} \ , \ \text{ROC: } \text{کل صفحه } s$$

$$y_1(t)=u(t)-u(t-2/5) \longrightarrow Y_1(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2/5s}}{s} \ , \ \text{ROC: } \text{کل صفحه } s$$

$$y_2(t)=u(t)-u(t-1/5) \longrightarrow Y_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-1/5s}}{s} \ , \ \text{ROC: } \text{کل صفحه } s$$

توجه شود که در تبدیل‌های لاپلاس فوق، قطب $s=0$ با صفر $s=0$ ساده می‌شود، پس $X(s)$ و $Y_1(s)$ و $Y_2(s)$ قطب ندارند.

$$H_1(s)=\frac{Y_1(s)}{X(s)}=\frac{1-e^{-2/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \text{Re}[s]>0 \ \text{ یا } \ \text{Re}[s]<0$$

$$H_2(s)=\frac{Y_2(s)}{X(s)}=\frac{1-e^{-1/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \text{Re}[s]>0 \ \text{ یا } \ \text{Re}[s]<0$$

توجه شود که قطب‌های $H_1(s)$ و $H_2(s)$ در $s=j2k\pi$ (به ازای بعضی k ها) قرار دارند.

ملاحظه می‌شود که نواحی همگرایی $X(s)$ و $Y_1(s)$ اشتراک دارند و ناحیه همگرایی $H_1(s)$ نیز با هر دوی آنها اشتراک دارد، پس سیستم ۱ می‌تواند LTI با تابع تبدیل $H_1(s)$ باشد (که البته هر دو ناحیه همگرایی $\text{Re}[s]>0$ و $\text{Re}[s]<0$ برای $H_1(s)$ قابل قبول است). در مورد سیستم ۲ نیز همین مطلب صادق است، در نتیجه سیستم ۲ نیز می‌تواند LTI با تابع تبدیل $H_2(s)$ باشد.

نکته: هر زوج ورودی – خروجی کراندار با بازه زمانی محدود می‌توانند مربوط به یک سیستم LTI باشند. (چرا؟)

توصیه می شود برای درک بهتر نسبت به LTI بودن این دو سیستم از $H_1(s)$ و $H_2(s)$ برای هر دو ناحیه همگرایی $\mathrm{Re}[s]>0$ و $\mathrm{Re}[s]<0$، عکس تبدیل لاپلاس بگیرید و حاصل را با $x(t)$ کانولوشن کنید تا خروجیهای $y_1(t)\,,\,y_2(t)$ بدست آیند. عکس تبدیل لاپلاس $H_1(s)$ و $H_2(s)$ با توجه به فرمول تبدیل لاپلاس سیگنال‌های نیمه متناوب یا بسط $H_1(s)$ و $H_2(s)$، برابر می‌شوند با:

$$H_1(s)=\frac{1-e^{-2/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \mathrm{Re}[s]>0 \qquad \Rightarrow \qquad h_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\delta(t-k)-\delta(t-2/5-k)\right]$$

$$H_1(s)=\frac{1-e^{-2/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \mathrm{Re}[s]<0 \qquad \Rightarrow \qquad h_1(t)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\delta(t+k)-\delta(t-2/5+k)\right]$$

$$H_2(s)=\frac{1-e^{-1/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \mathrm{Re}[s]>0 \qquad \Rightarrow \qquad h_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[\delta(t-k)-\delta(t-1/5-k)\right]$$

$$H_2(s)=\frac{1-e^{-1/5s}}{1-e^{-s}} \quad , \quad \mathrm{Re}[s]>0 \qquad \Rightarrow \qquad h_2(t)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\delta(t+k)-\delta(t-1/5+k)\right]$$

توجه مهم: برای بررسی LTI بودن یک سیستم می‌توان از تبدیل فوریه نیز استفاده کرد، ولی در آنصورت باید نکاتی را مد نظر قرار داد. به همین دلیل توصیه می‌شود همیشه از تبدیل لاپلاس استفاده کنید مگر اینکه تبدیل لاپلاس سیگنال ورودی یا خروجی وجود نداشته باشد (مانند تست ۱۵ آزمون ۱۳۸۴)

۷- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه $H_i(s)=\dfrac{1}{H(s)}$ می‌باشد، پس کافی است جای صفرها و قطب‌ها را عوض کنیم. بنابراین $H_i(s)$ دو قطب در $s=1$ و $s=2$ خواهد داشت. ناحیه همگرایی سیستم معکوس (یعنی $H_i(s)$) باید طوری باشد که با ناحیه همگرایی سیستم اصلی (یعنی $H(s)$) اشتراک داشته باشد. در نتیجه از بین سه ناحیه همگرایی $\mathrm{Re}[s]<1$ و $\mathrm{Re}[s]>2$ و $1<\mathrm{Re}[s]<2$ که می‌توان برای $H_i(s)$ در نظر گرفت، فقط ناحیه همگرایی اول قابل قبول می‌باشد.

۸- گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به خواص تبدیل Z داریم:

$$h[n]=h[-n] \quad \xleftrightarrow{Z} \quad H(z)=H\left(\frac{1}{z}\right)$$

بنابراین اگر z_0 قطب (صفر) $H(z)$ باشد، $\dfrac{1}{z_0}$ نیز قطب (صفر) $H(z)$ خواهد بود. پس کافی است سیستم‌هایی را انتخاب کنیم که قطب‌های آن معکوس همدیگر باشند. بنابراین سیستم‌های ۱ و ۴ قابل قبول می‌باشند.

۹- گزینه ۳ صحیح است.

$$y''(t)-y(t)=x'(t)+2x(t)\quad\longrightarrow\quad s^2Y(s)-Y(s)=sX(s)+2X(s)$$

$$\Rightarrow\quad H(s)=\frac{s+2}{s^2-1}=\frac{s+2}{(s-1)(s+1)}\quad,\quad \text{Re}[s]>1$$

چون سیستم علّی است، پس ناحیه همگرایی $H(s)$ سمت راستی و بصورت $\text{Re}[s]>1$ می‌باشد.

پاسخ به e^{at} در یک سیستم LTI برابر $H(a)e^{at}$ می‌باشد. البته اگر a در ناحیه همگرایی $H(s)$ نباشد، $H(a)$ بینهایت و در نتیجه خروجی نامحدود خواهد شد.

داریم:

$$x_1(t)=e^{2t}\quad\longrightarrow\quad y_1(t)=H(2)e^{2t}=\frac{4}{3}e^{2t}$$
$$x_2(t)=e^{-2t}\quad\longrightarrow\quad y_2(t)=H(-2)e^{-2t}=\infty$$

توجه شود که چون ۲- در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار ندارد، پس $H(-2)$ نامحدود می‌باشد.

۱۰- گزینه ۳ صحیح است.

چون $|H(j\omega)|$ زوج و $\measuredangle H(j\omega)$ فرد می‌باشد، پس $h(t)$ حقیقی است، بنابراین پاسخ به $\sin\omega_0 t$ برابر $|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\measuredangle H(j\omega_0))$ می‌باشد.

با توجه به اینکه $\left|H\left(j\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{4}$, $\measuredangle H\left(j\frac{1}{2}\right)=-4\left(\frac{1}{2}\right)=-2$ می‌باشد، پس پاسخ به ورودی $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ برابر $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{t}{2}-2\right)$ می‌شود.

۱۱- گزینه ۳ صحیح است.

از جدول تبدیل فوریه زمان‌گسسته می‌دانیم که تبدیل فوریه سیگنال زمان‌گسسته متناوب $x[n]$ با ضرایب فوریه a_k برابر $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$ می‌باشد. پس $X(e^{j\omega})$ داده شده مربوط به یک سیگنال متناوب با دوره تناوب $N=4$ و ضرایب فوریه $a_k=\frac{(-1)^k}{2}$ می‌باشد. زیرا طبق صورت تست، $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi\frac{(-1)^k}{2}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{4}k\right)$ است.

اما رابطه $x[n]$ با a_k بصورت زیر است:

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{۲\pi}{N}n}=\sum_{k=\circ}^{۳}\frac{(-۱)^k}{۲}e^{jk\frac{\pi}{۲}n}$$

$$\Rightarrow \quad x[۶]=\sum_{k=\circ}^{۳}\frac{(-۱)^k}{۲}e^{jk۳\pi}=\sum_{k=\circ}^{۳}\frac{(-۱)^k}{۲}(-۱)^k=\sum_{k=\circ}^{۳}\frac{۱}{۲}=۲$$

راه دیگر:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi k}\,\pi\,\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{۲}\right)$$

$\delta\left(\omega-k\frac{\pi}{۲}\right)$ فقط به ازای $k=\frac{۲\omega}{\pi}$ مقدار دارد، پس k را برابر $\frac{۲\omega}{\pi}$ قرار می‌دهیم:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi\left(\frac{۲\omega}{\pi}\right)}\pi\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{۲}\right)=e^{j۲\omega}.\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-k\frac{۲\pi}{۴}\right)$$

اما از جدول تبدیل فوریه زمان‌گسسته می‌دانیم که:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN] \xleftrightarrow{F} \frac{۲\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{۲\pi}{N}k\right)$$

پس عکس تبدیل فوریه $\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-k\frac{۲\pi}{۴}\right)$ برابر $۲\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-۴k]$ می‌باشد.

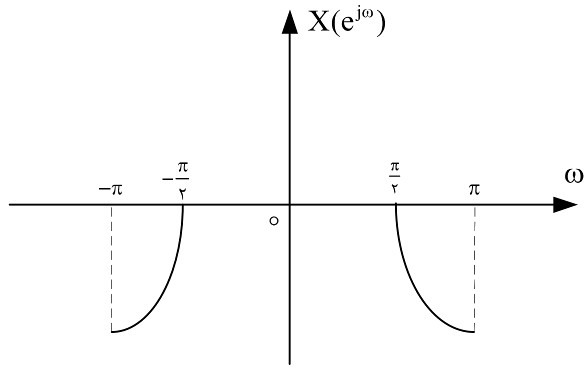
در نتیجه از خاصیت انتقال زمانی در جدول تبدیل فوریه داریم:

$$x[n]=۲\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-۲-۴k]$$

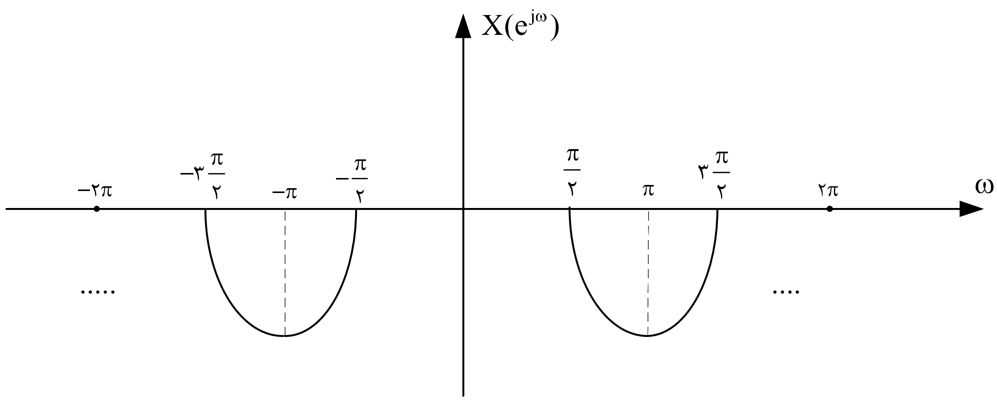
با رسم $x[n]$ خواهید دید که $x[۶]=۲$ می‌شود.

۱۲- گزینه ۴ صحیح است.

با رسم $X(e^{j\omega})$ در بازه $-\pi<\omega<\pi$ داریم:

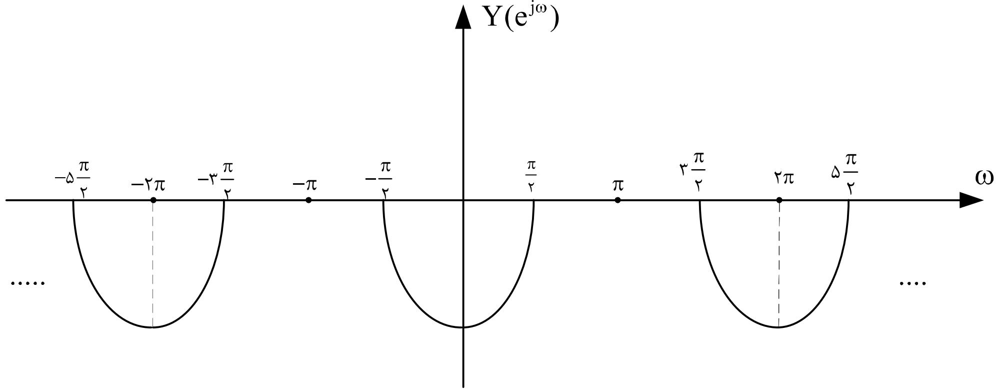


با توجه به اینکه $X\left(e^{j\omega}\right)$ با دوره تناوب 2π متناوب است، پس شکل کامل آن بصورت زیر می‌شود.



$$y[n]=(-1)^n x[n]=e^{j\pi n}x[n] \quad \longrightarrow \quad Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

پس شکل $Y\left(e^{j\omega}\right)$ بصورت زیر است:



از آنجا که $\left|Y\left(e^{j\pi}\right)\right| >> \left|Y\left(e^{j0}\right)\right|$ می‌باشد، پس $Y\left(e^{j\omega}\right)$ می‌تواند به عنوان پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین‌گذر در نظر گرفته شود.

۱۳- گزینه ۲ صحیح است.

الف)

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}} \;,\; |z|>3 \longleftarrow \text{سیستم علّی}$$

$$H^{-1}(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{1+2z^{-1}}$$

$H^{-1}(z)$ با توجه به قطب $z=-2$ می‌تواند دو ناحیه همگرایی $|z|>2$ یا $|z|<2$ را داشته باشد. اما ناحیه همگرایی $H^{-1}(z)$ باید طوری باشد که با ناحیه همگرایی $H(z)$ اشتراک داشته باشد، پس فقط ناحیه همگرایی $|z|>2$ قابل قبول می‌باشد که چون شامل دایره یکه نیست پس سیستم معکوس، پایدار نیست.

ب)

$$x(t)=3\sin 2\pi t=\frac{3}{2j}e^{j2\pi t}-\frac{3}{2j}e^{-j2\pi t}$$

$$y(t)=5\sin^2 \pi t-2/5=5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\pi t\right)-2/5=-\frac{5}{4}e^{j2\pi t}-\frac{5}{4}e^{-j2\pi t}$$

می‌دانیم که در یک سیستم LTI اگر در خروجی، نمایی e^{at} (a در حالت کلی ثابت مختلط) داشته باشیم، در ورودی نیز باید این نمایی موجود بوده باشد. در خروجی این سیستم، نمایی‌های $e^{j2\pi t}$ و $e^{-j2\pi t}$ داریم؛ همچنین در ورودی نیز این نمایی‌ها موجود هستند. پس LTI بودن این سیستم نقض نمی‌شود و این سیستم می تواند LTI باشد.

۱۴- گزینه ۳ صحیح است.

از دو طرف معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

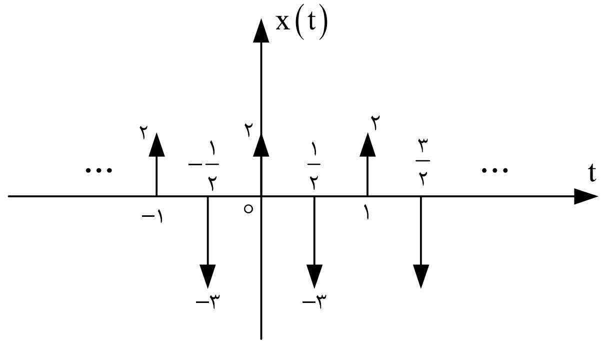
$$s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=X(s) \quad \Rightarrow \quad H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

قطب‌های $H(s)$ برابر $s=2$, $s=-1$ می‌باشند. می‌دانیم شرط لازم برای اینکه یک سیستم LTI توأماً علی و پایدار باشد این است که قطب‌های $H(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند که در این سیستم اینطور نیست. پس این سیستم نمی‌تواند توأماً علی و پایدار باشد.

۱۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}۲(-۱)^k\,\delta\left(t-\frac{k}{۲}\right)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{۱}{۲}-k\right)$$

دوره تناوب هر دو قطار ضربه فوق برابر ۱ می‌باشد، پس دوره تناوب $x(t)$ نیز برابر ۱ خواهد بود. با رسم $x(t)$ داریم:



$$a_k=\frac{۱}{T}\int_T x(t)e^{jk\frac{۲\pi}{T}t}=\int_{-\frac{۱}{۴}}^{\frac{۳}{۴}}\left[۲\delta(t)-۳\delta\left(t-\frac{۱}{۲}\right)\right]e^{jk۲\pi t}=۲-۳e^{jk۲\pi\left(\frac{۱}{۲}\right)}=۲-۳(-۱)^k$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\frac{۲\pi}{T}t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[۲-۳(-۱)^k\right]e^{jk۲\pi t}$$

پاسخ به $x(t)$ برابر است با:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[۲-۳(-۱)^k\right]H(jk۲\pi)e^{jk۲\pi t}$$

که $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم LTI است و فقط برای $-۳\pi<\omega<۳\pi$ مقدار دارد و برابر ۱ است، پس $H(jk۲\pi)$ فقط برای $k=۰$ و $k=\pm۱$ مقدار خواهد داشت و برابر ۱ خواهد بود. بنابراین $y(t)$ برابر می‌شود با:

$$y(t)=\left[۲-۳(-۱)^{-۱}\right](۱)e^{-j۲\pi t}+\left[۲-۳(-۱)^{۰}\right](۱)+\left[۲-۳(-۱)^{۱}\right](۱)e^{j۲\pi t}=-۱+۱۰\cos۲\pi t$$