Third Edition

CHAPTER

2

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

John T. DeWolf

Lecture Notes:

J. Walt Oler

Texas Tech University

تنش و کرنش
در
بارگذاری محوری

تنش و کرنش – بارگذاری محوری

- کفایت یک عضو سازه ای در برابر بارهای وارده، علاوه بر تحمل نیروها در محدوده تنش مجاز، بـه میزان تغییرشکل های آن عضو در اثر بارهای وارده نیز بستگی دارد. تنها تحلیل اسـتاتیکی نیروهـا کافی نیست.

- اگر تغییرشکل اعضای سازه ای تحت اثر بارهای وارده را در محاسبات در نظر بگیریم، مـی تـوانیم بسیاری از سازه های نامعین استاتیکی را حل کنیم.

- تعیین توزیع تنش ها در یک عضو سازه ای، مستلزم تعیین میزان تغییرشکل هاست.

- در این فصل درباره تغییرشکل اعضای سازه ای تحت اثر بارهای محوری بررسی و مطالعـه خـواهیم کرد.

کرنش:

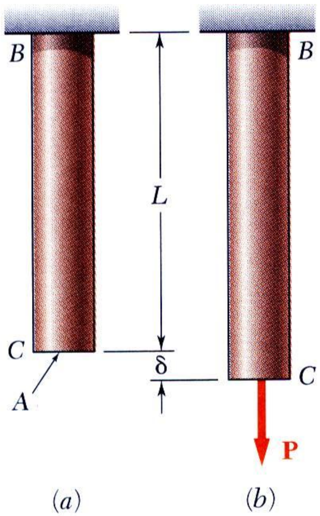


Fig. 2.1

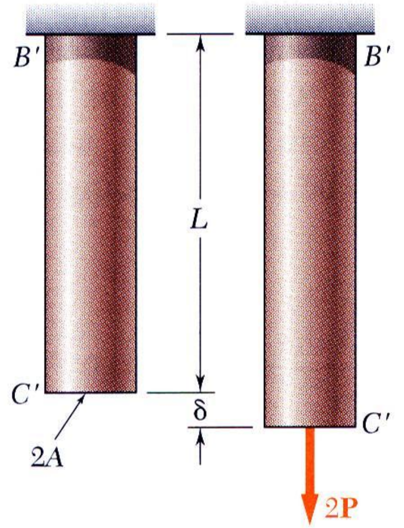


Fig. 2.3

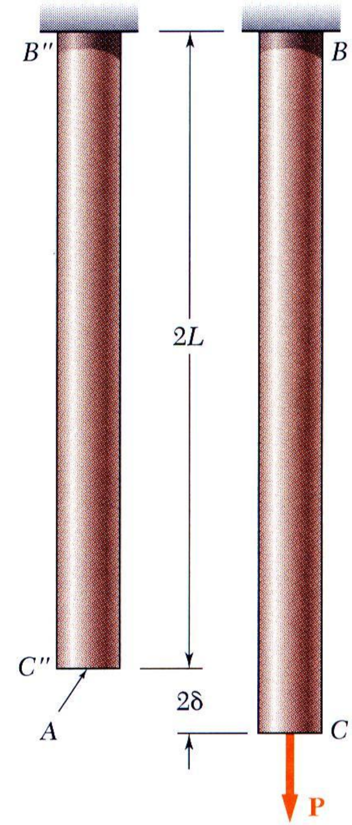


Fig. 2.4

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \text{normal strain}$$

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

آزمایش تنش کرنش:

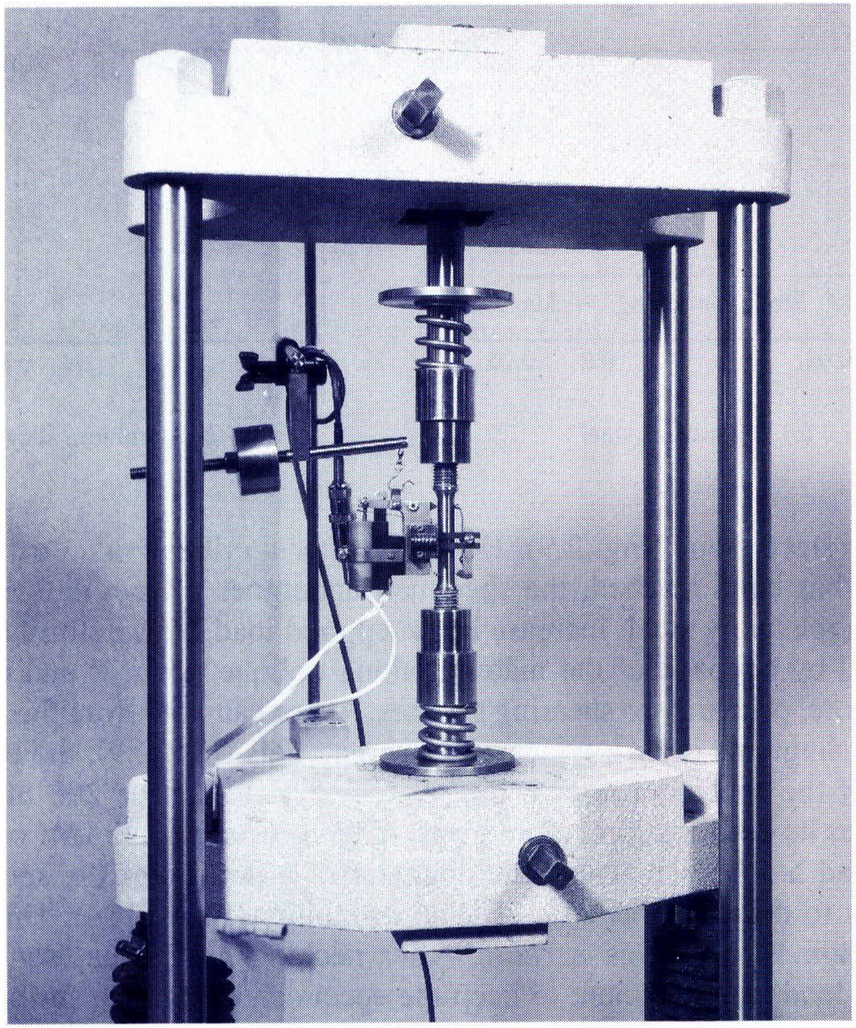


Fig. 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.

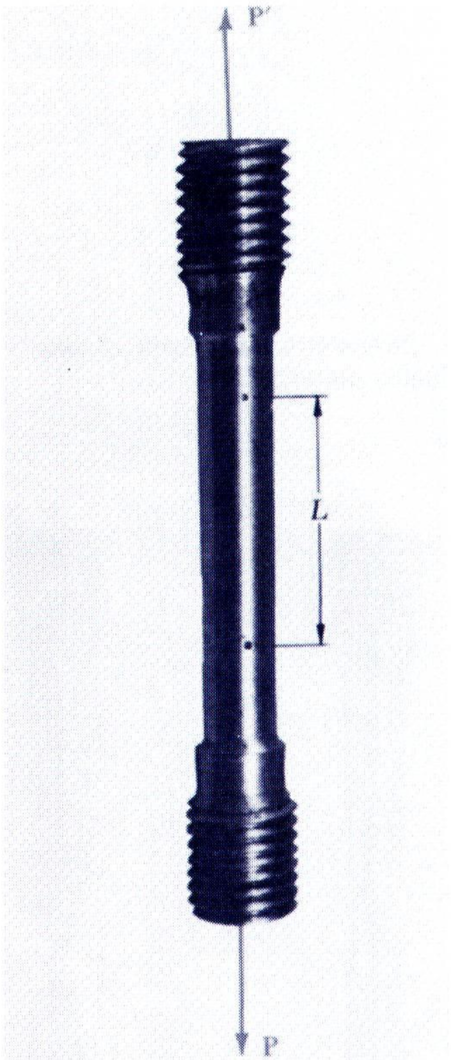
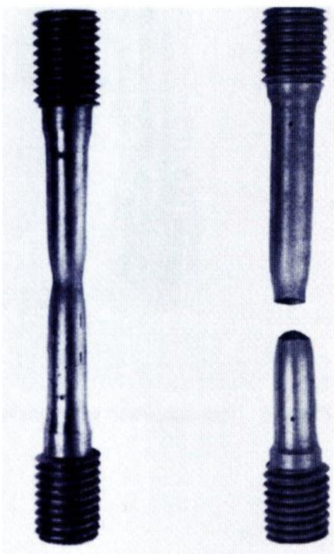
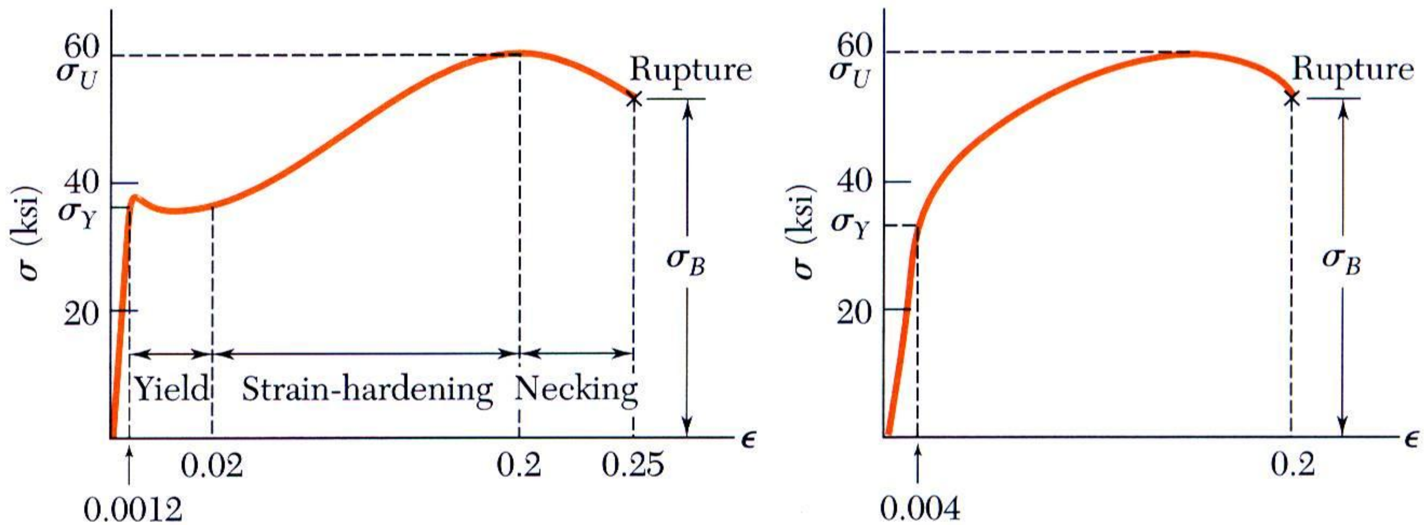


Fig. 2.8 Test specimen with tensile load.

نمودار تنش – کرنش: مصالح شکل پذیر:



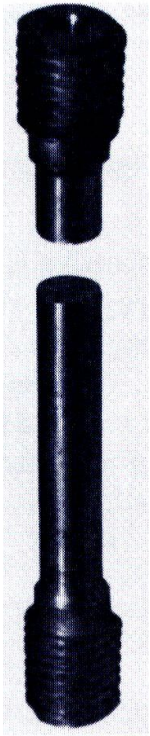
(a) (b)



(a) Low-carbon steel

(b) Aluminum alloy

نمودار تنش – کرنش: مصالح ترد:



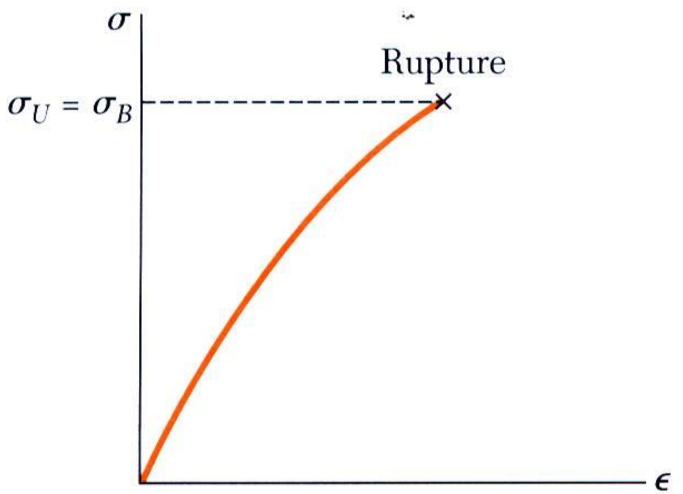


Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.

قانون هوک : مدول الاستیسیته

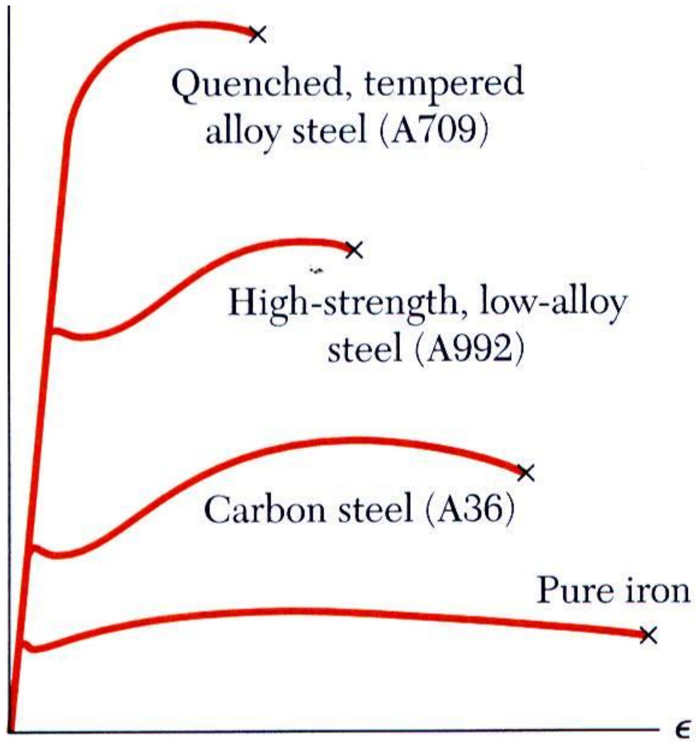


Fig. 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

- قبل از نقطه جاری شدن

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \text{Youngs Modulus or Modulus of Elasticity}$$

- مقاومت یک آلیاژ تابعی است از عواملی نظیر، شیوه ساخت، ترکیبات آن، تغییرات دمایی و ...
- ولی مدول الاستیسیته (ارتجاعی) آن ثابت است.

رفتار الاستوپلاستیک:

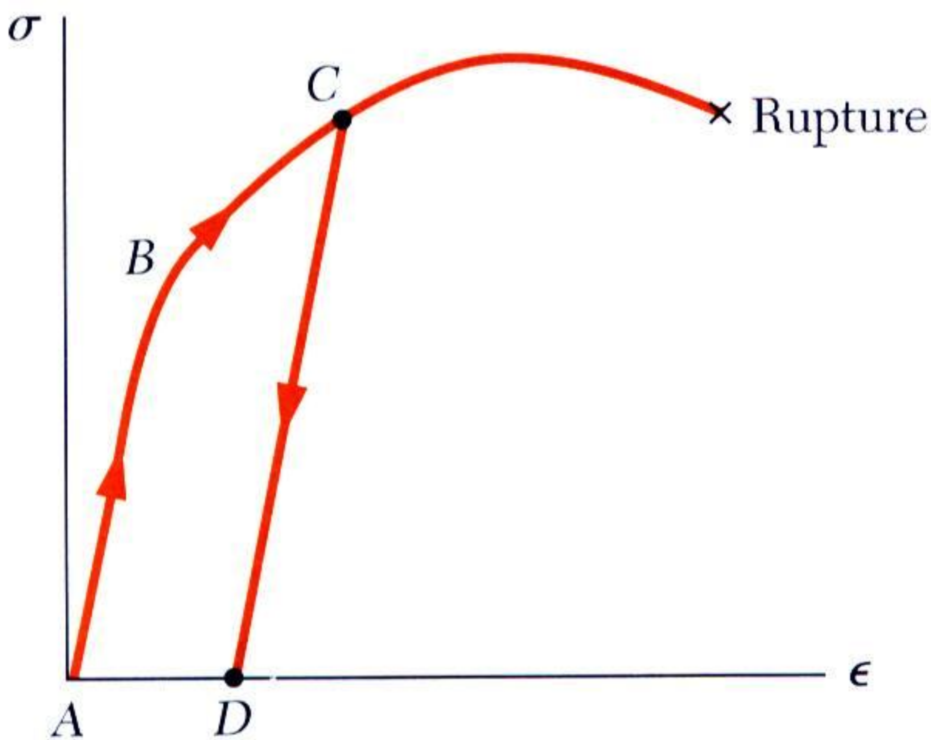


Fig. 2.18

- تا قبل از رسیدن به حد جاری شدن، چنان چه بارگذاری حذف گردد، تغییرشکل ها نیز صفر می شوند. به این محدوده، حد رفتار خطی یا حد الاستیک گویند.

- اگر بارگذاری به حدی ادامه پیدا کند که در صورت باربرداری، تغییرشکل ها صفر نشوند و تغییرشکل ماندگار در عضو داشته باشیم، می گوییم رفتار عضو پلاستیک یا خمیری است. به عبارت دیگر عضو وارد حد پلاستیک (خمیری) شده است.

خستگی:

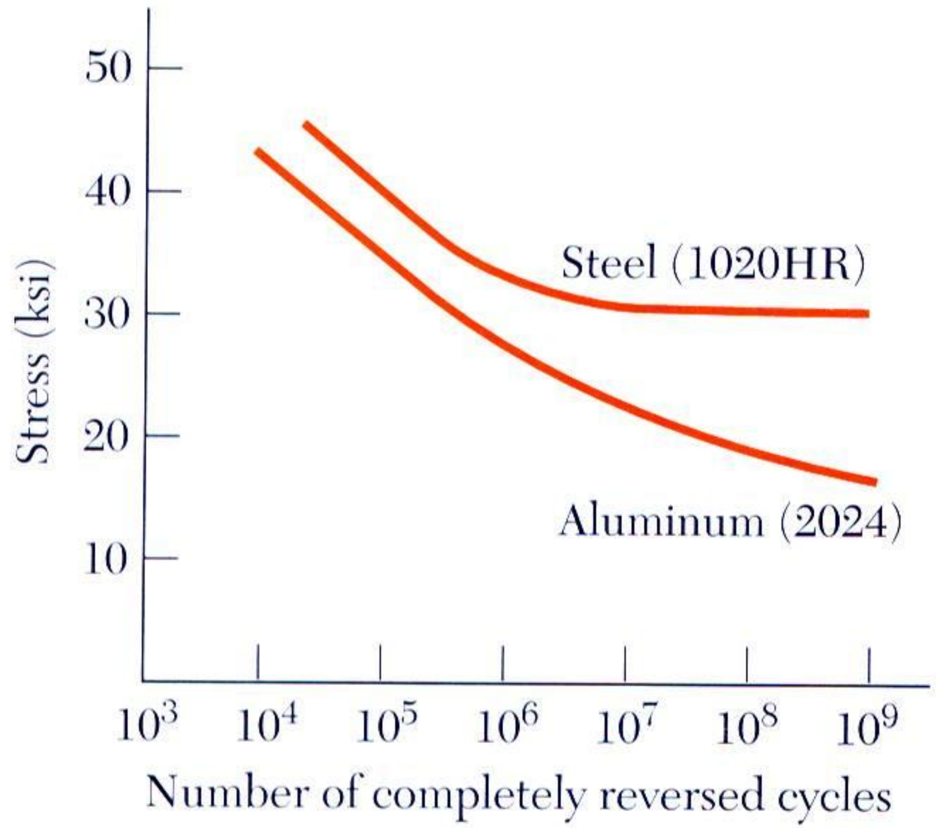


Fig. 2.21

- Fatigue properties are shown on S-N diagrams.

- چنان چه یک عضو سازه ای تحت اثر دفعات متعدد بارگذاری و باربرداری قرار بگیرد، مقاومت آن کاهش می یابد. به این پدیده اصطلاحاً خستگی گویند.

- پدیده خستگی معمولا در قطعات ماشین آلات اتفاق می افتد. که به عنوان نمونه می توان به جرثقیل ها و بالابرها و کابلهای نگه دارنده آسانسورها اشاره کرد.

تغییرمکان تحت اثر بارهای محوری

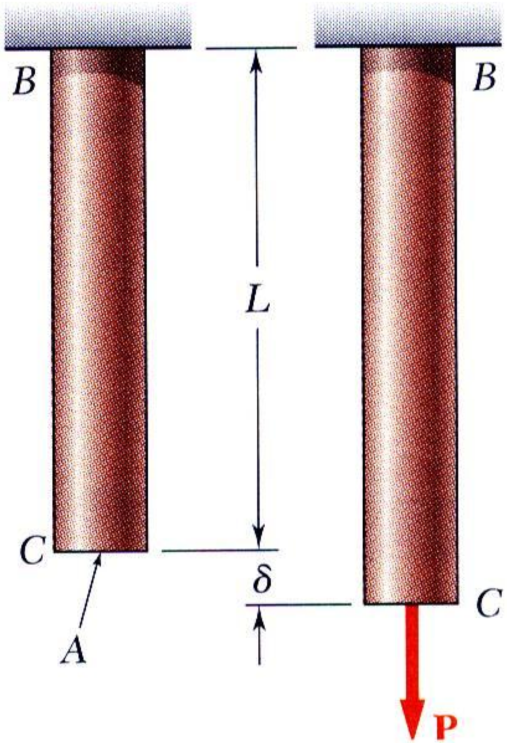


Fig. 2.22

❖با استفاده از قانون هوک داریم:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

❖با توجه به تعریف کرنش داریم:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

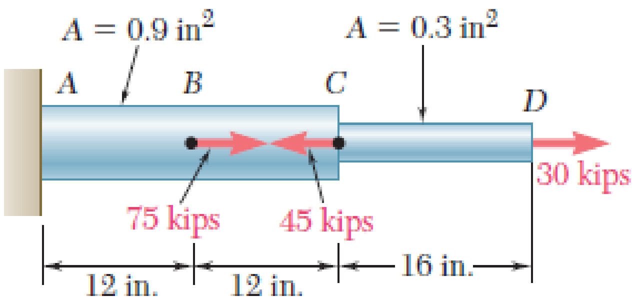
❖با جایگزینی در معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

❖در سازه های با مقاطع و بارگذاری های متغیر خواهیم داشت:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

مثال 2-1



- سازه را در محل اثر بارها تقسیم بندی می کنیم:

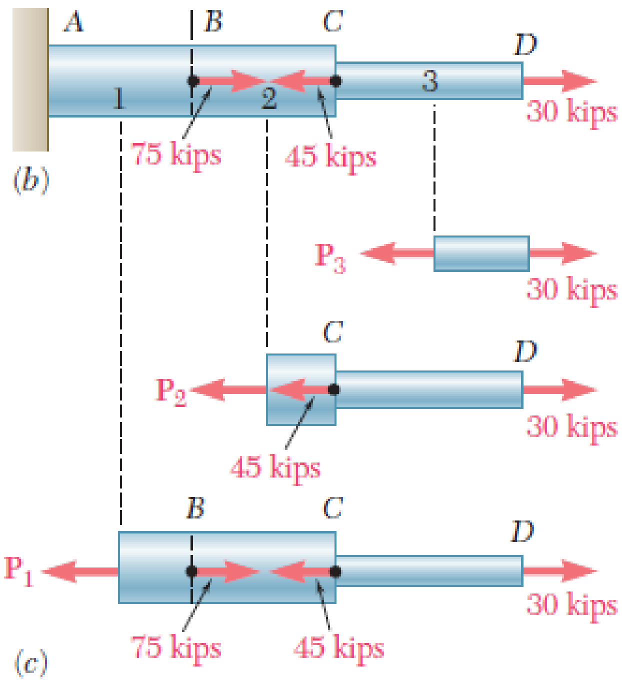
- برای به دست آوردن نیروهای داخلی، دیاگرام آزاد کل سازه و دیاگرام آزاد هر قسمت را رسم می کنیم.

$$E = 29\times10^{-6}\,\text{psi}$$

- تغییر شکل های سازه فوق را تحت اثر بارهای وارده محاسبه کنید.

SOLUTION:

- میله را مطابق شکل زیر به سه بخش تقسیم می کنیم:



$$P_1 = 60\times10^3\,\text{lb}$$

$$P_2 = -15\times10^3\,\text{lb}$$

$$P_3 = 30\times10^3\,\text{lb}$$

$$L_1 = L_2 = 12\,\text{in.} \qquad L_3 = 16\,\text{in.}$$

$$A_1 = A_2 = 0.9\,\text{in}^2 \qquad A_3 = 0.3\,\text{in}^2$$

- تغییرمکان کلی سازه را محاسبه می کنیم:

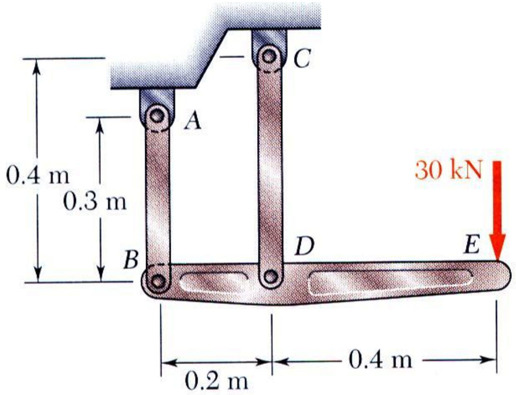
$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{29\times10^6}\left[\frac{\left(60\times10^3\right)12}{0.9} + \frac{\left(-15\times10^3\right)12}{0.9} + \frac{\left(30\times10^3\right)16}{0.3}\right]$$

$$= 75.9\times10^{-3}\,\text{in.}$$

$$\boxed{\delta = 75.9\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

مثال 2-2:



جسم صلب BDE توسط میله های AB و CD به تکیه گاه متصل است.

AB→E=70Gpa , A=500 mm^2

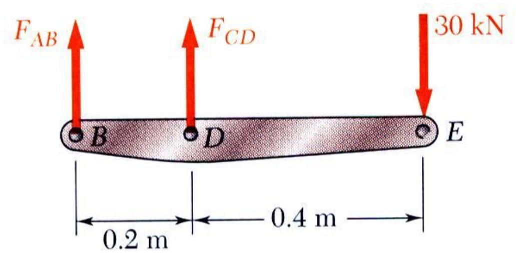
CD→E=200Gpa , A=600 mm^2

تغییرمکان نقاط B,D,E را تحت اثر بارگذلاری نشان داده شده محاسبه کنید

مثال 2-2:

SOLUTION:

Free body: Bar *BDE*



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.6\,\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\,\text{m}$$

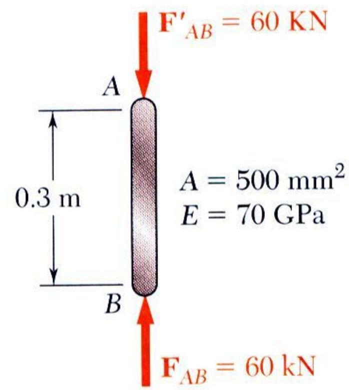
$$F_{CD} = +90\,\text{kN} \quad \textit{tension}$$

$$\sum \mathrm{M_D} = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.4\,\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\,\text{m}$$

$$F_{AB} = -60\,\text{kN} \quad \textit{compression}$$

Displacement of *B*:



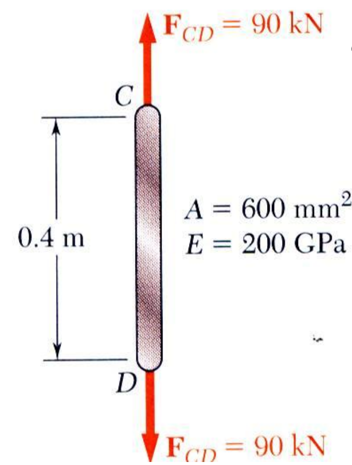
$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(-60 \times 10^3\,\text{N})(0.3\,\text{m})}{(500 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(70 \times 10^9\,\text{Pa})}$$

$$= -514 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_B = 0.514\,\text{mm} \uparrow}$$

Displacement of *D*:



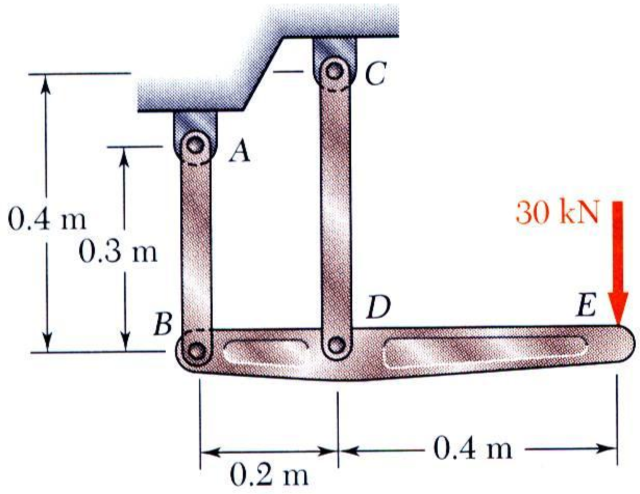
$$\delta_D = \frac{PL}{AE}$$

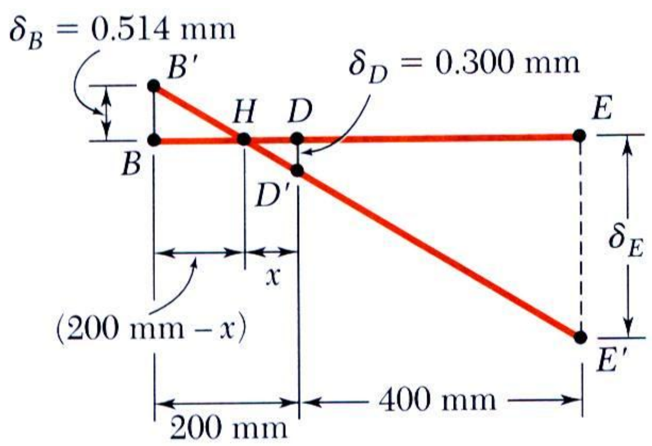
$$= \frac{(90 \times 10^3\,\text{N})(0.4\,\text{m})}{(600 \times 10^{-6}\,\text{m}^2)(200 \times 10^9\,\text{Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\,\text{mm} \downarrow}$$

مثال 2-2:





Displacement of D:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514\,\text{mm}}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(200\,\text{mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7\ \text{mm}$$

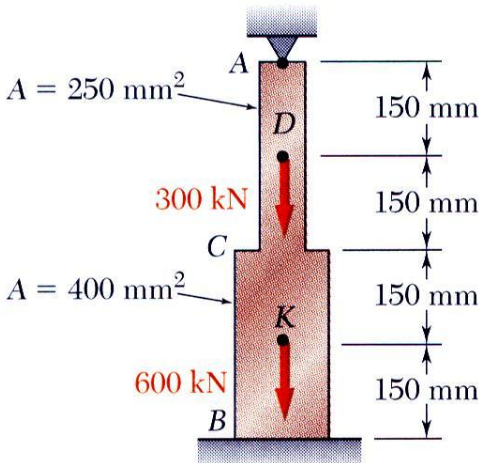
$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(400 + 73.7)\text{mm}}{73.7\ \text{mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\,\text{mm}$$

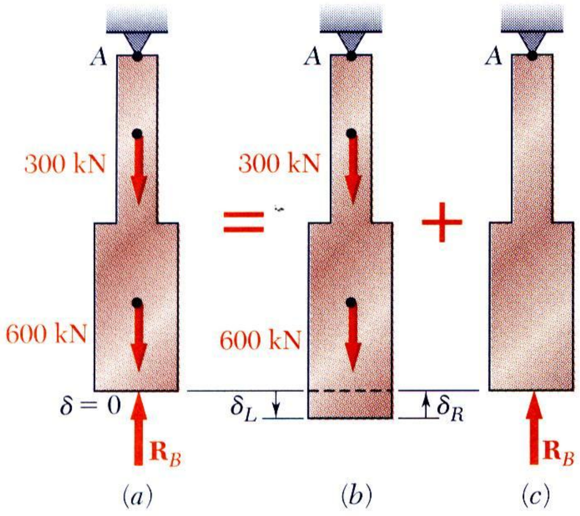
$$\boxed{\delta_E = 1.928\,\text{mm} \downarrow}$$

مسائل نامعین استاتیکی:



- سازه هایی که واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی اعضای آن را نتوانیم فقط با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی محاسبه کنیم، نامعین استاتیکی می نامیم.

- به عبارت دیگر اگر سازه ای با قیدهای تکیه گاهی بیش از حداقل تکیه گاه های موردنیاز جهت پایداری، به زمین متصل باشد، می گوییم سازه نامعین استاتیکی است.

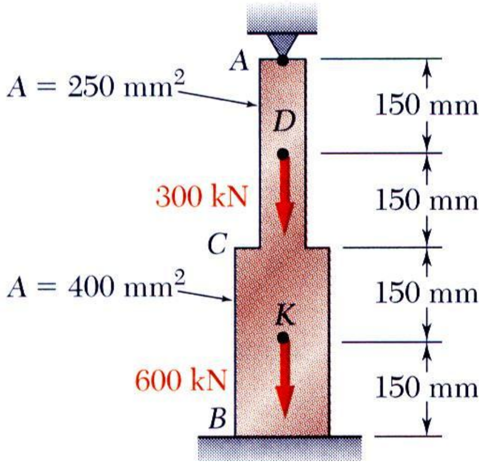


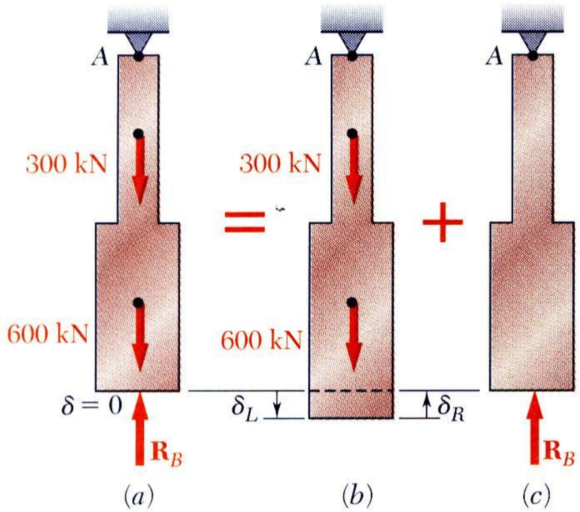
- واکنش تکیه گاهی مازاد را با یک نیروی مجهول هم راستا با نیروهای وارده جایگزین می کنیم.

- تغییرمکان حاصل از این نیرو بایستی با برآیند تغییرمکان حاصل از سایر نیروها برابر باشد.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

مثال 3-2:





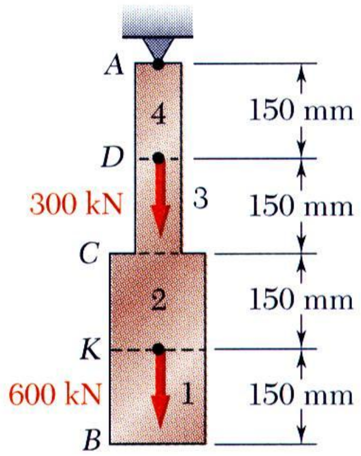
- در سازه فولادی روبرو، واکنش های تکیه گاهی را بدست آورید.

SOLUTION:

- سازه را از تکیه گاه B آزاد کرده و با نیروی فرضی در نقطه B جایگزین می کنیم.
- تغییرمکان نقطه B در اثر بارهای وارده را محاسبه می کنیم.
- تغییرمکان نقطه B در اثر نیروی فرضی وارده در تکیه گاه B را محاسبه می کنیم.
- مجموع تغییرمکان ها در نقطه B را برابر صفر قرار می دهیم.
- پس از بدست آوردن واکنش تکیه گاهی در B، واکنش تکیه گاهی A را با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی محاسبه می کنیم.

مثال 3-2:

SOLUTION:

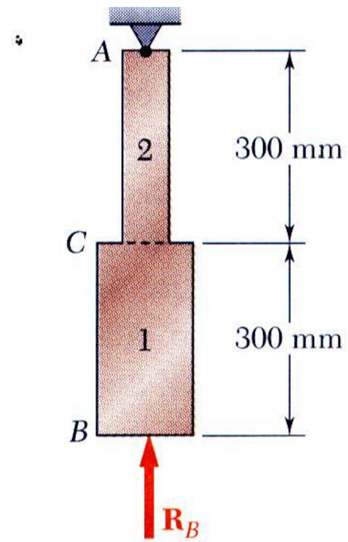


$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600\times10^3\,\mathrm{N} \quad P_4 = 900\times10^3\,\mathrm{N}$$

$$A_1 = A_2 = 400\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\mathrm{m}$$

$$\delta_\mathrm{L} = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125\times10^9}{E}$$



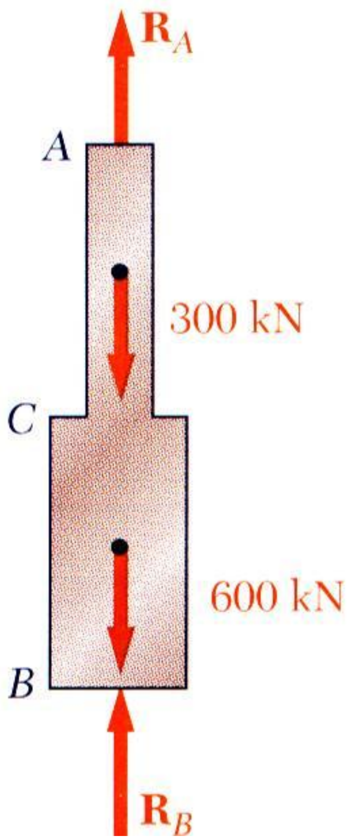
$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_2 = 250\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300\,\mathrm{m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = -\frac{\left(1.95\times10^3\right)R_B}{E}$$

مثال 3-2:



$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125\times10^9}{E} - \frac{\left(1.95\times10^3\right)R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577\times10^3\,\mathrm{N} = 577\,\mathrm{kN}$$

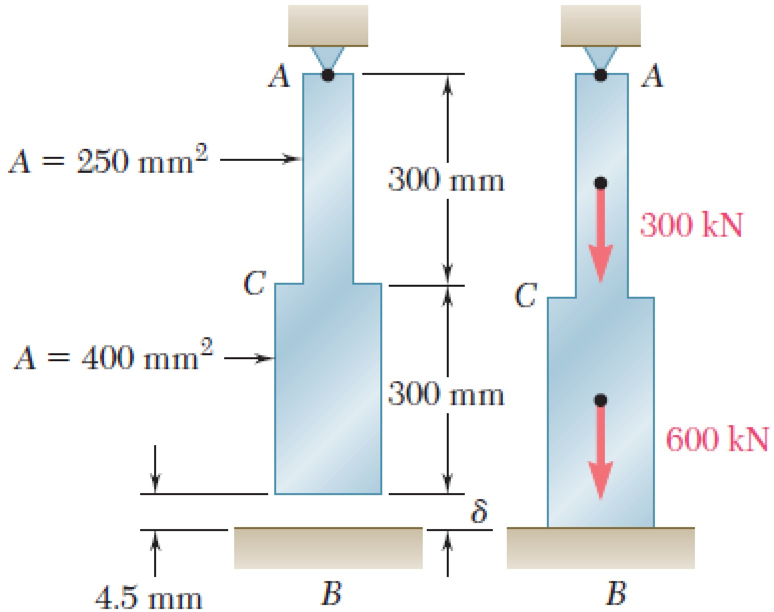
$$\sum F_y = 0 = R_A - 300\,\mathrm{kN} - 600\,\mathrm{kN} + 577\,\mathrm{kN}$$

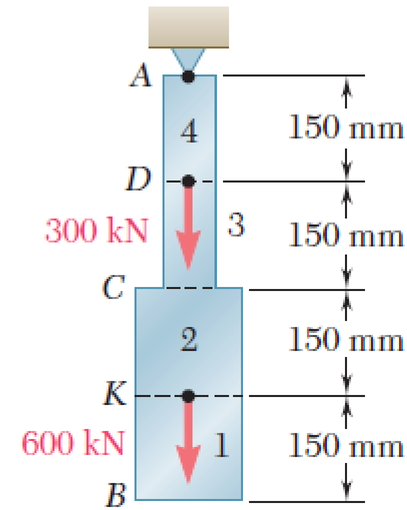
$$R_A = 323\,\mathrm{kN}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= 323\,\mathrm{kN} \\ R_B &= 577\,\mathrm{kN} \end{aligned}}$$

مثال 4-2:

❖ در سازه فولادی روبرو، چنانچه میله هـای فـولادی 4.5mm کوتاهتر ساخته شده باشند، واکنش های تکیه گاهی را بدست آورید. (E=200Gpa)





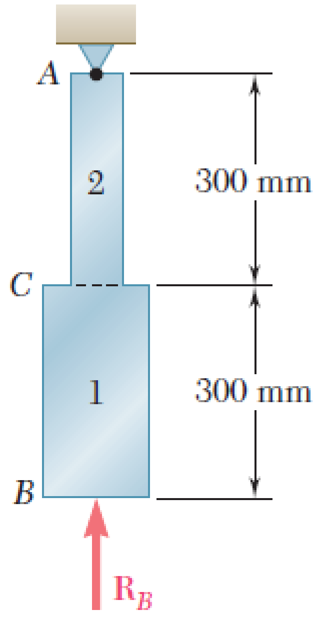
$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600\times10^3\,\mathrm{N} \quad P_4 = 900\times10^3\,\mathrm{N}$$

$$A_1 = A_2 = 400\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\mathrm{m}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125\times10^9}{E}$$

مثال 4-2:



$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \quad A_2 = 250\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300\,\mathrm{m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = -\frac{\left(1.95\times10^3\right)R_B}{E}$$

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

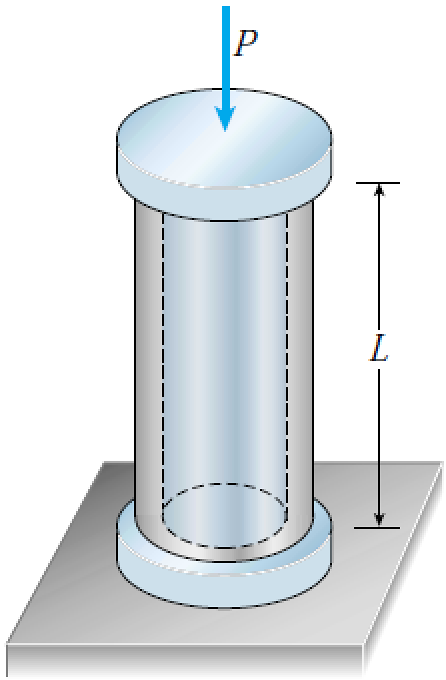
$$R_B = 115.4 \times 10^3\ \mathrm{N} = 115.4\ \mathrm{kN}$$

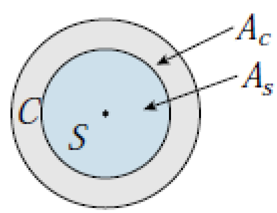
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300\ \mathrm{kN} - 600\ \mathrm{kN} + R_B = 0$$

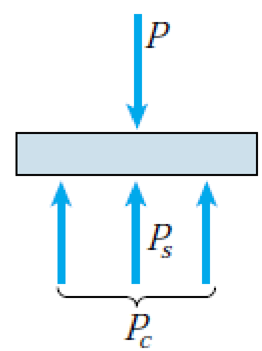
$$R_A = 900\ \mathrm{kN} - R_B = 900\ \mathrm{kN} - 115.4\ \mathrm{kN} = 785\ \mathrm{kN}$$

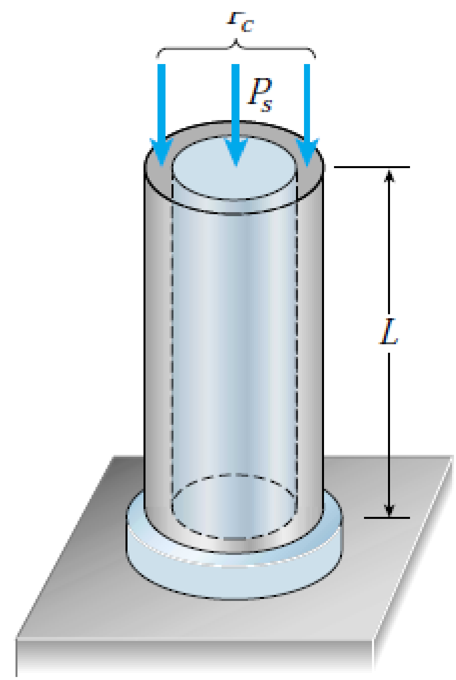
مثال 2-5:

❖ سیلندر شکل مقابل را در نظر بگیرید که از هسته فولادی و پوسته مسی تشکیل یافته است. اگر بار P بر سیلندر وارد شود، بار وارد بر هر بخش و نیز تغییرمکان آن را محاسبه کنید.









مثال 5-2:

معادله تعادل نیروها را می نویسیم:

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \qquad P_s + P_c - P = 0$$

معادله سازگاری تییرشکل ها را می نویسیم:

$$\delta_s = \delta_c$$

$$\delta_s = \frac{P_s L}{E_s A_s} \qquad \delta_c = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

$$\boxed{P_s = P\left(\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c}\right) \qquad P_c = P\left(\frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c}\right)}$$

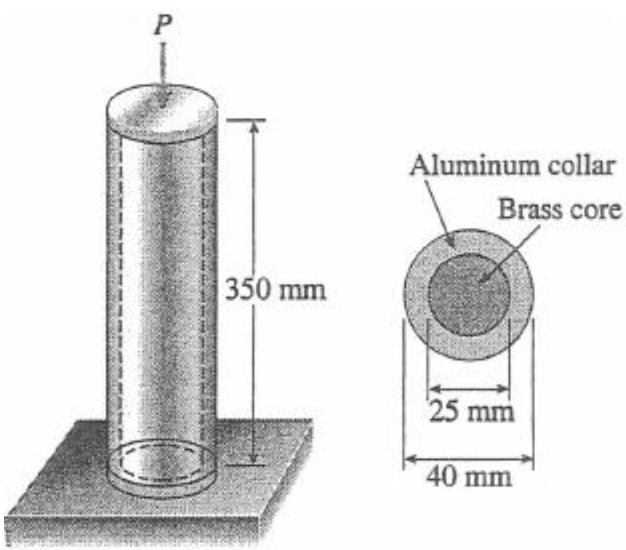
$$\boxed{\delta = \frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}}$$

مثال 6-2:

سازه شکل زیر را در نظر بگیرید.

الف: چنان چه تحت اثر بار P طـول میلـه هـا 0.1 درصـد کاهش یابد، مقدار P را بدست آورید.

ب: اگر تنش مجاز آلومینیوم و برنج به ترتیــب، 80Mpa و 120Mpa باشد، حداکثر بار وارده را محاسبه کنید.



$$A = \text{aluminum}$$
$$B = \text{brass}$$
$$L = 350 \text{ mm}$$
$$d_a = 40 \text{ mm}$$
$$d_b = 25 \text{ mm}$$
$$A_a = \frac{\pi}{4}(d_a^2 - d_b^2) = 765.8 \text{ mm}^2$$
$$E_a = 72 \text{ GPa} \quad E_b = 100 \text{ GPa} \quad A_b = \frac{\pi}{4}d_b^2 = 490.9 \text{ mm}^2$$

مثال 6-2:

($\delta = 0.1\%$ of $L = 0.350$ mm)

$$\delta = \frac{PL}{E_a A_a + E_b A_b} \quad \text{or} \quad P = (E_a A_a + E_b A_b)\left(\frac{\delta}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} E_a A_a + E_b A_b &= (72 \text{ GPa})(765.8 \text{ mm}^2) \\ &\quad +(100 \text{ GPa})(490.9 \text{ mm}^2) \\ &= 55.135 \text{ MN} + 49.090 \text{ MN} \\ &= 104.23 \text{ MN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= (104.23 \text{ MN})\left(\frac{0.350 \text{ mm}}{350 \text{ mm}}\right) \\ &= 104.2 \text{ kN} \quad \longleftarrow \end{aligned}$$

مثال 2-6:

$$\sigma_a = 80\text{ MPa} \quad \sigma_b = 120\text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{PE_a}{E_a A_a + E_b A_b} \quad P_a = (E_a A_a + E_b A_b)\left(\frac{\sigma_a}{E_a}\right)$$

$$P_a = (104.23\text{ MN})\left(\frac{80\text{ MPa}}{72\text{ GPa}}\right) = 115.8\text{ kN}$$

$$\sigma_b = \frac{PE_b}{E_a A_a + E_b A_b} \quad P_b = (E_a A_a + E_b A_b)\left(\frac{\sigma_b}{E_b}\right)$$

$$P_b = (104.23\text{ MN})\left(\frac{120\text{ MPa}}{100\text{ GPa}}\right) = 125.1\text{ kN}$$

Aluminum governs. $P_{\max} = 116\text{ kN}$

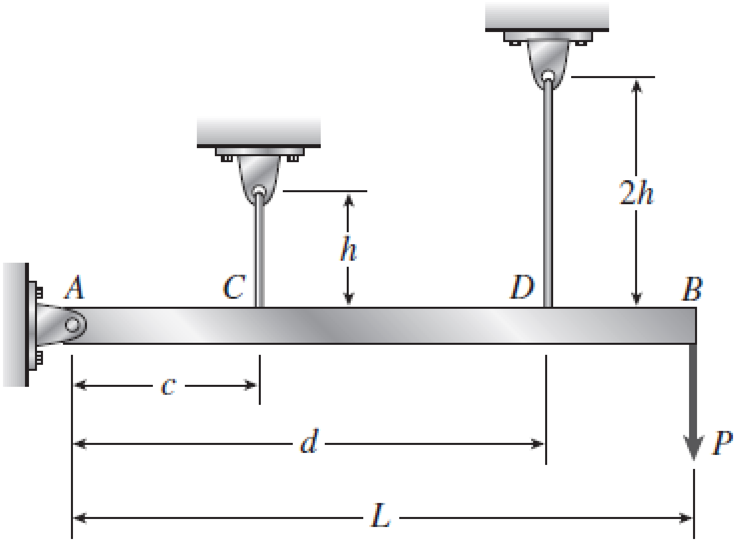
مثال:

- سازه زیر را در نظر بگیرید. با توجه به مفروضات داده شده، مطلوب است:

1) تنش ایجاد شده در کابل های C و D.

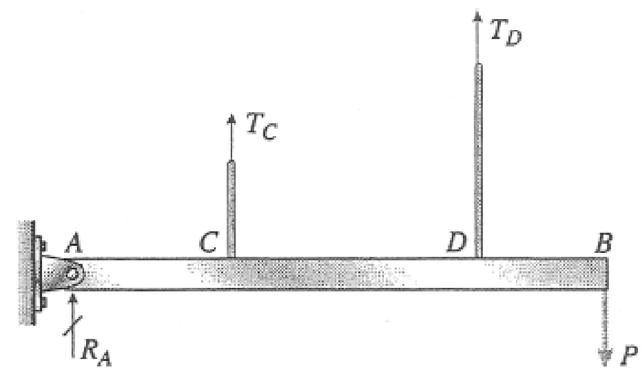
2) تغییرمکان نقطه B.

h=18in
c=20in
d=50in
L=66in
$E=30\times10^{6}$ psi
$A=0.0272In^{2}$
P=340lb



مثال:

- دیاگرام آزاد نیروها را رسم می کنیم.



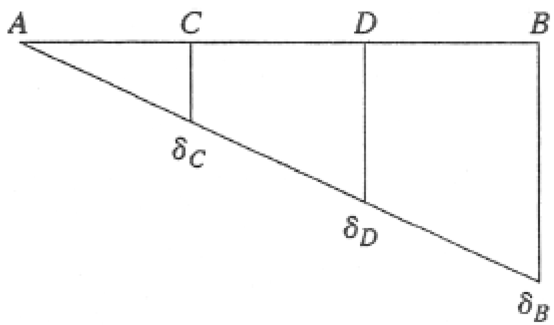
معادله لنگر حول نقطه A را می نویسیم:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow T_C(c) + T_D(d) = PL$$

$$T_C(20) + T_D(50) = 340 \times 66$$

$$\boxed{2T_C + 5T_D = 2244\ lb}$$

- دیاگرام آزاد تغییرشکل ها را رسم می کنیم.



- با استفاده از تشابه مثلث ها، معادله سازگاری تغییرمکان ها را می نویسیم:

$$\frac{\delta_c}{c} = \frac{\delta_d}{d} \rightarrow \frac{T_C h}{cEA} = \frac{T_D 2h}{dEA}$$

$$\boxed{\frac{T_C}{c} = \frac{2T_D}{d} \rightarrow T_D = 1.25T_C}$$

- با جایگذاری معادله بدست آمده در معادله قبلی خواهیم داشت:

$$\boxed{2T_C + 5 \times 1.25T_C = 2244 \rightarrow T_c = 272\ lb}$$

مثال:

- پس از بدست آوردن نیروی کابل C، تنش در کابل C را محاسبه می کنیم:

$$\boxed{\sigma_c = \frac{T_C}{A_C} = \frac{272}{0.0272} = 10000\ psi = 10\ ksi}$$

- نیروی کابل D و تنش کابل D را محاسبه می کنیم:

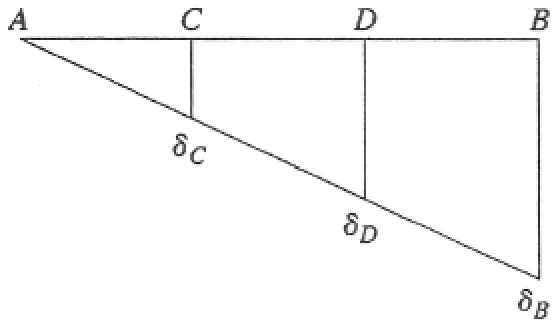
$$T_D = 1.25 T_C \rightarrow T_D = 1.25 \times 272 = 340\ lb$$

$$\boxed{\sigma_c = \frac{T_D}{A_D} = \frac{340}{0.0272} = 12500\ psi = 12.5\ ksi}$$

- برای محاسبه تغییرمکان نقطه B ابتدا باید تغییرمکان در نقطه C و D را محاسبه کنیم:

$$\delta_C = \frac{T_C h}{EA} = \frac{272 \times 18}{30 \times 10^6 \times 0.0272} = 0.006\ \text{in}$$

$$\delta_D = \frac{T_D 2h}{EA} = \frac{340 \times 2 \times 18}{30 \times 10^6 \times 0.0272} = 0.015\ \text{in}$$



$$\boxed{\frac{\delta_B}{L} = \frac{\delta_D}{d} \rightarrow \frac{\delta_B}{66} = \frac{0.015}{50} \rightarrow \delta_B = 0.0198\ \text{in}}$$

مثال:

- سازه زیر را در نظر بگیرید. با توجه به مفروضات داده شده، مطلوب است: تنش ایجاد شده در هر یک از بخش های سازه.

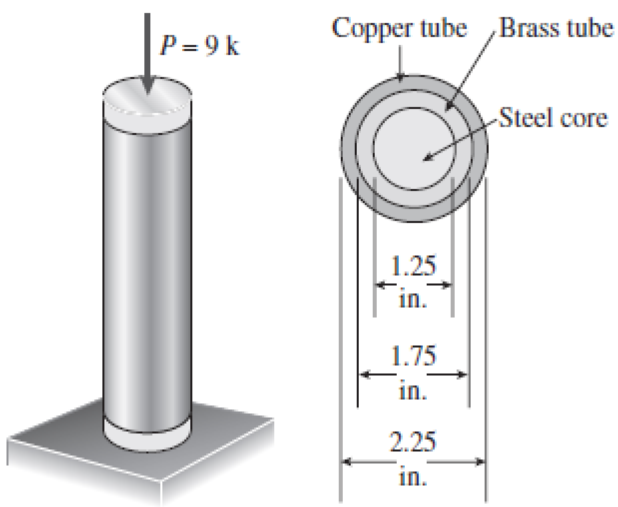
$$d_c = 2.25 \text{ in}, \qquad d_b = 1.75 \text{ in}, \qquad d_s = 1.25 \text{ in}$$

$$E_c = 18000 \text{ ksi}, \qquad E_b = 16000 \text{ ksi}, \qquad E_s = 30000 \text{ ksi}$$

$$A_c = \frac{\pi}{4}\left(d_c^2 - d_b^2\right) = 1.57\ in^2$$

$$A_b = \frac{\pi}{4}\left(d_b^2 - d_s^2\right) = 1.18\ in^2$$

$$A_s = \frac{\pi}{4}\left(d_s^2\right) = 1.23\ in^2$$



- معادله تعادل نیروها را می نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow P_s + P_b + P_c = P = 9\text{ksi}$$

- معادلـه سـازگاری تغییرشـکل هـا را مـی نویسیم:

$$\delta_s = \delta_b = \delta_c \rightarrow \frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_b L}{E_b A_b} = \frac{P_c L}{E_c A_c}$$

$$P_b = \frac{P_s E_b A_b}{E_s A_s}, \qquad P_c = \frac{P_s E_c A_c}{E_s A_s}$$

- پس از جایگذاری معادله دوم در معادله اول خواهیم داشت:

$$P_s + \frac{P_s E_b A_b}{E_s A_s} + \frac{P_s E_c A_c}{E_s A_s} = P$$

$$P_s\left(1 + \frac{16\times10^3\times1.18}{30\times10^3\times1.23} + \frac{18\times10^3\times1.57}{30\times10^3\times1.23}\right) = 9$$

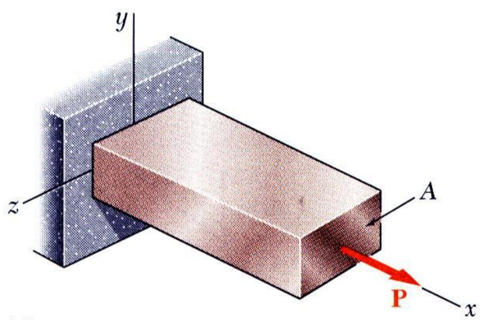
$$P_s(1 + 0.51 + 0.77) = 9 \rightarrow P_s = 3.95\text{K}$$

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{3.95}{1.23} = 3.21\text{Ksi}$$

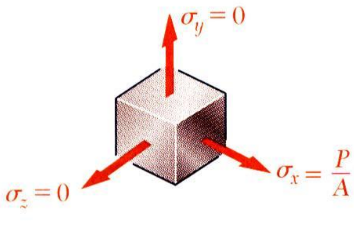
$$P_b = \frac{P_s E_b A_b}{E_s A_s} = 2.02\text{K} \rightarrow \sigma_b = 1.71\text{Ksi}$$

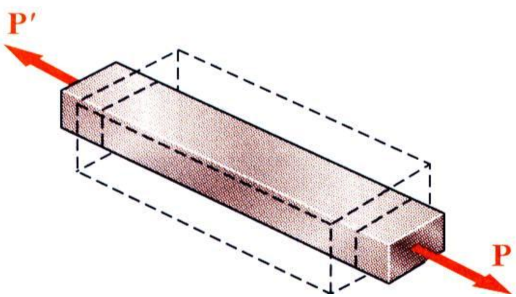
$$P_c = \frac{P_s E_c A_c}{E_s A_s} = 3.03\text{K} \rightarrow \sigma_c = 1.93\text{Ksi}$$

ضریب پواسون:



(a)





برای یک عضو میلیه ای تحت اثر بارگذاری محوری در یک راستا داریم:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

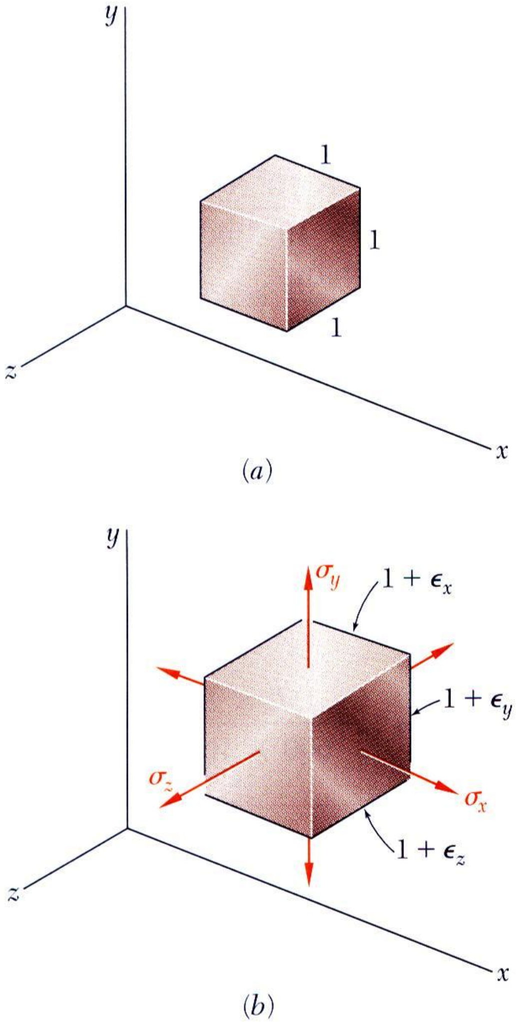
- کشیدگی در راستای X، جمع شدگی و انقباض در راستاهای دیگر را به دنبال دارد، با فرض ثابت بودن خواص مصالح در تمامی راستاها:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

ضریب پواسون این گونه تعریف می شود:

$$\nu = \left|\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

تعمیم قانون هوک:



برای یک المان تحت اثر بارگذاری چند محوره، مولفه های کـرنش را بر اساس اصل جمع آثار قوا، با رعایت شروط دوگانه زیـر، ایـن گونـه محاسبه می کنیم:

1) رابطه تنش و کرنش خطی است.

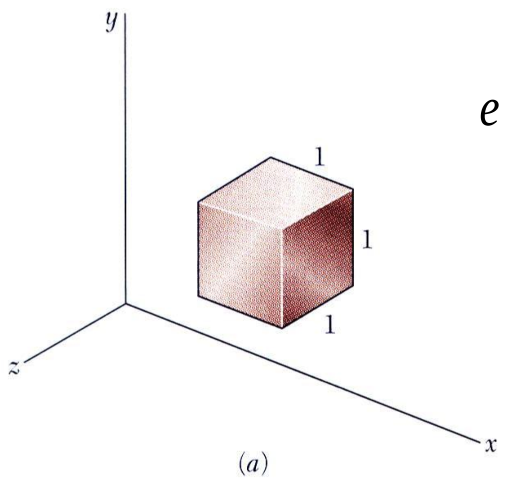
2) مقادیر تغییرشکل ها بسیار کوچک است.

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

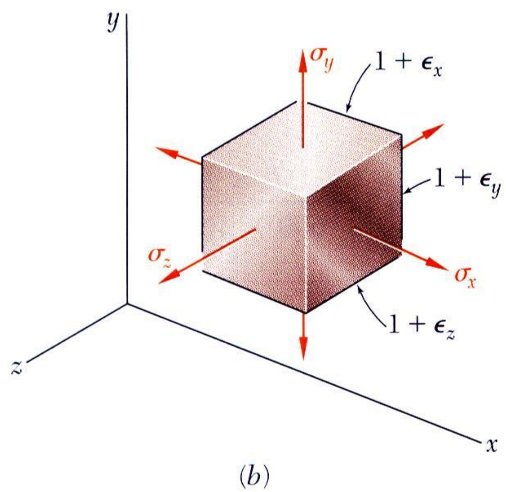
مدول بالک (مدول انبساط حجم)



(a)

- تغییر حجم یک المان مکعبی فرضی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$e = 1 - \left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right] = 1 - \left[1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right]$$
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$



(b)

برای المان تحت اثر فشار یکنواخت واهیم داشت:

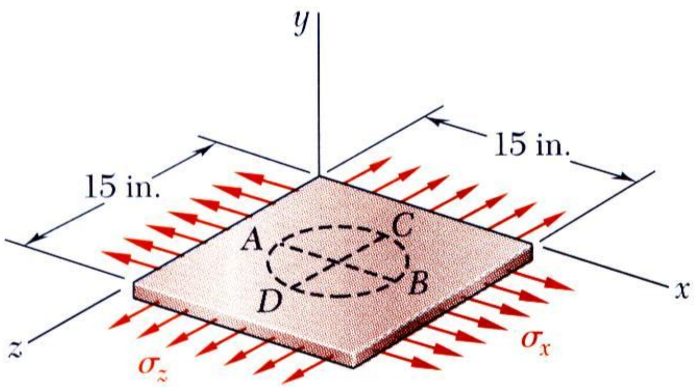
$$e = -p\frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \text{bulk modulus}$$

- با توجه به تعریف مدول بالک نتیجه می گیریم:

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

مثال:



دایره به قطر d=9 in ترسیم شده بر روی صفحه آلومینیومی به ضخامت t=0.75 in را در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر صفحه آلومینیومی، منجر به ایجاد تنش های نرمال σ_x=12 ksi و σ_y=20 ksi می گردد. مطلوب است محاسبه:

1) تغییرطول قطر AB

2) تغییرطول قطر CD

3) تغییر ضخامت صفحه

4) تغییر حجم صفحه

$$E = 10x10^6\ psi,\quad \nu = 1/3$$

حل:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10\times10^6\,\text{psi}}\left[(12\,\text{ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20\,\text{ksi})\right]$$

$$= +0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= -1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= +1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_{B/A} = +4.8\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_{C/D} = +14.4\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.})(0.75\,\text{in.})$$

$$\boxed{\delta_t = -0.800\times10^{-3}\,\text{in.}}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.067\times10^{-3}\,\text{in}^3/\text{in}^3$$

$$\Delta V = eV = 1.067\times10^{-3}(15\times15\times0.75)\,\text{in}^3$$

$$\boxed{\Delta V = +0.187\,\text{in}^3}$$

کرنش برشی:

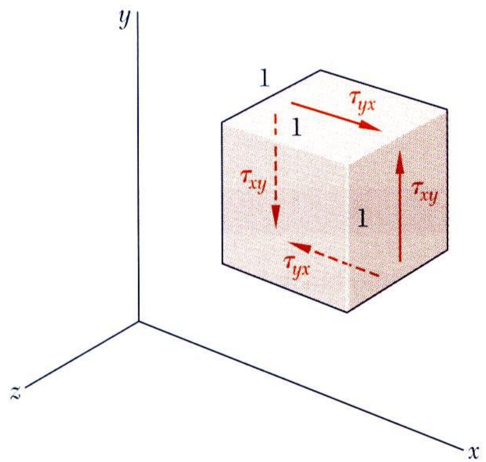


Fig. 2.46

یک المان مکعبی تحت اثر تنش های برشی در وجوه خود به صورت یک متوازی الاضلاع تغییرشکل می دهد. متعاقـب آن کرنش برشی را به صورت تغییر زاویه بین وجوه المان مکعبی تعریف می کنیم.

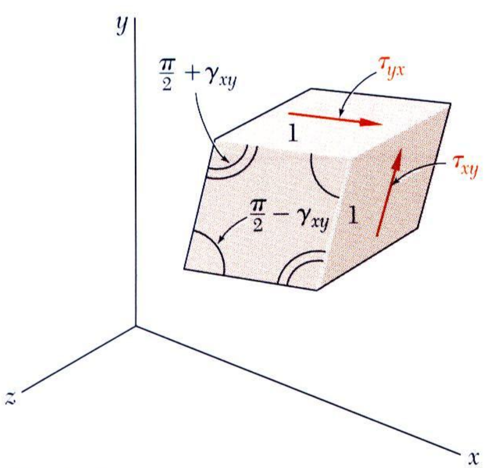


Fig. 2.47

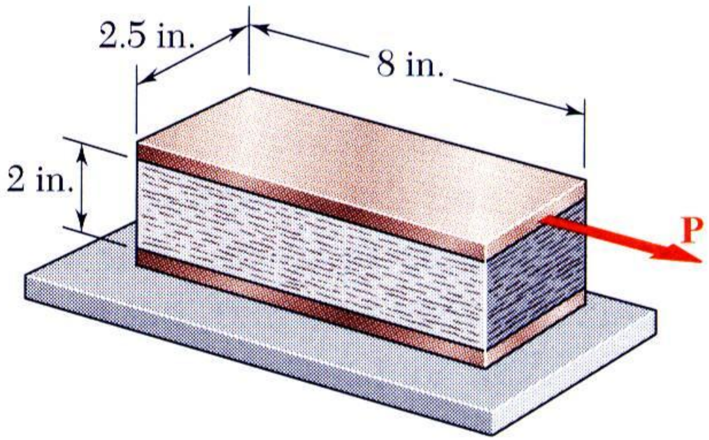
اگر همانند نمودار تنش و کرنش محوری، تغییرات کرنش برشی در مقابل تنش برشی را در یک نمودار رسـم کنـیم، نمـودار حاصـل مشـابه همـان نمودار قبلی است، با این تفاوت که مقـادیر مقاومـت برشـی تقریبـا نصـف مقاومت محوری است.

مشابه مدول الاستیسیته در ارتباط با تنش و کرنش محوری، مدول برشی به صورت زیر تعریف می شود.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

به ثابت G مدول برشی یا مدول صلبیت گفته می شود.

Example 2.10

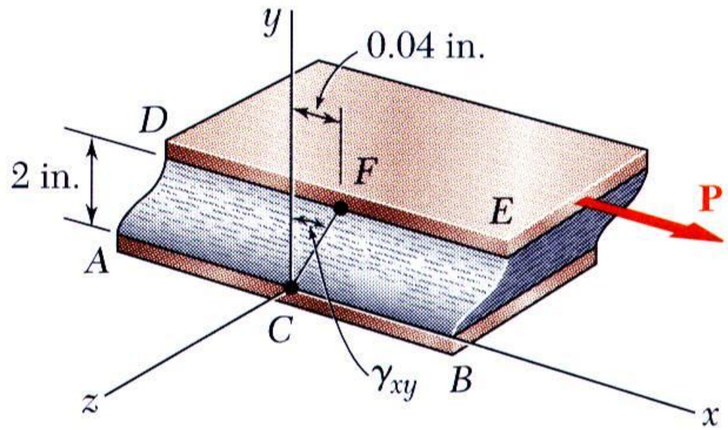


بلوک مستطیلی ساخته شده از مصالح با مدول برشی $G=90\ \text{ksi}$ بین دو صفحه صلب افقی محدود شده است. صفحه زیرین ثابت بوده و صفحه رویی در اثر بار افقی P کشیده می شود. اگر بدانیم جابجایی افقی صفحه بالایی $0.04\ \text{in}$ می باشد، مطلوب است محاسبه:

1) کرنش برشی
2) مقدار بار P

مراحل حل مساله:

- با استفاده از جابجایی افقی داده شده، تغییر زاویه یا همان کرنش برشی را محاسبه می کنیم.
- با استفاده از رابطه تنش برشی و کرنش برشی (قانون هوک)، تنش برشی را محاسبه می کنیم.
- با استفاده از تعریف تنش برشی، مقدار بار P را بدست می آوریم.



- با استفاده از جابجایی افقی داده شده، تغییر زاویه یا همان کرنش برشی را محاسبه می کنیم.

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04\text{in.}}{2\,\text{in.}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020\text{rad}$$

- با استفاده از رابطه تنش برشی و کرنش برشی (قانون هوک)، تنش برشی را محاسبه می کنیم.

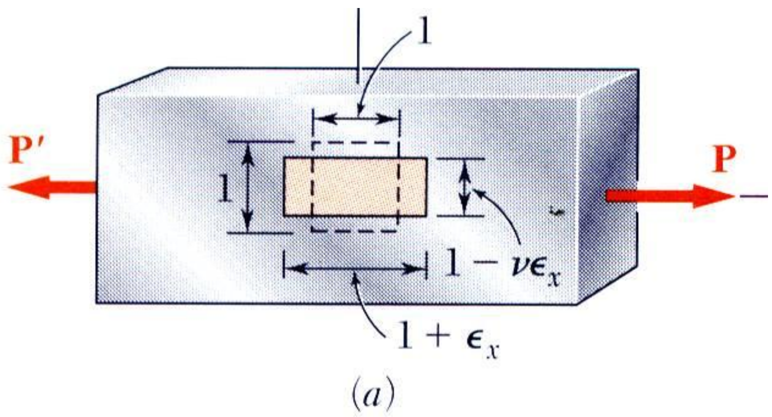
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \left(90\times10^{3}\text{psi}\right)\left(0.020\text{rad}\right) = 1800\text{psi}$$

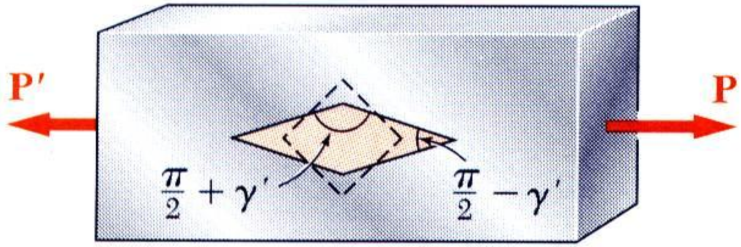
- با استفاده از تعریف تنش برشی، مقدار بار P را بدست می آوریم.

$$P = \tau_{xy} A = \left(1800\text{psi}\right)\left(8\,\text{in.}\right)\left(2.5\,\text{in.}\right) = 36\times10^{3}\text{lb}$$

$$\boxed{P = 36.0\,\text{kips}}$$

رابطه E و G و ν





$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

$$\frac{E}{2G} = (1 + \nu) \rightarrow G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

تنش و کرنش حرارتی

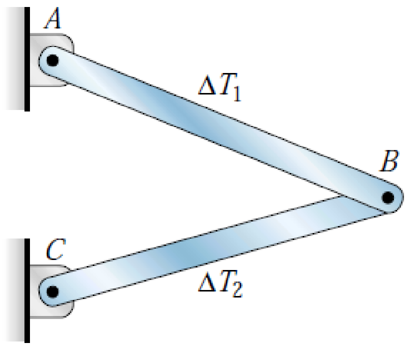
- تغییرات دمایی منجر به انبساط و انقباض مصالح ساختمانی می شود.
- انبساط و انقباض حرارتی اعضای سازه ای، متعاقباً منجر به ایجاد تنش و کرنش در اعضا می گردد.
- چنان چه تغییرات دمایی درتمامی جهات یکسان باشد، کرنش حرارتی در تمامی جهات برابر و هم علامت خواهد بود.
- انبساط حرارتی را با کرنش حرارتی مثبت و انقباض حرار تی را با کرنش حرارتی منفی نمایش می دهیم.

$$\delta_T = \alpha L(\Delta T) \xrightarrow{\epsilon = \frac{\delta}{L}} \epsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

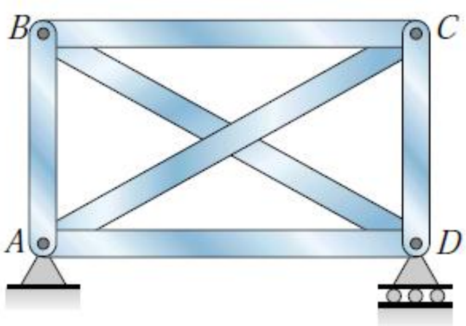
α ضریب انبساط حرارتی است که از مشخصات اختصاصی مصالح می باشد.

❑ مادامی که قید یا مانعی برای کرنش حرارتی وجود نداشته باشد، تغییر دما تنشی در عضو ایجاد نمی کند.

تنش و کرنش حرارتی



- در سازه های معین استاتیکی، کرنش حرارتی منجر به ایجاد تنش حرارتی نمی گردد.
- در سازه های نامعین استاتیکی اگر نامعینی سازه ناشی از قیدهای تکیه گاهی بیشتر باشد. کرنش حرارتی منجر به ایجاد تنش حرارتی در اعضای سازه ای می گردد.

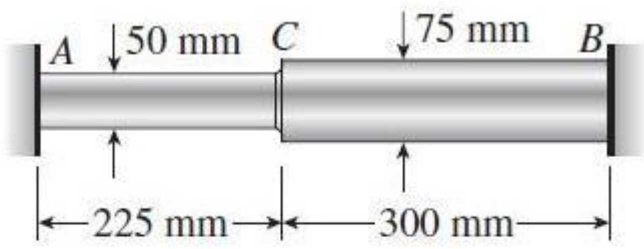


- در سازه های نامعین استاتیکی اگر نامعینی سازه ناشی از اعضای سازه ای بیش تر باشد، کرنش حرارتی منجر به ایجاد تنش حرارتی در اعضای سازه ای نمی گردد.

مثال

میله ACB را در نظر بگیرید. چنان چه $E=6GPa$ و $\alpha=100\times10^{-6}1/c$ باشد و این میلیه تحت اثر افزایش دمای 30 درجه سانتیگراد قرار بگیرد، مطلوب است محاسبه:

- نیروی فشاری ایجاد شده در میله ABC
- حداکثر تنش فشاری ایجاد شده در میله ABC
- جابجایی نقطه C



- $A_1 = \frac{\pi}{4}d_1^2 = \frac{\pi}{4}50^2 = 1962.5mm^2$
- $A_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2 = \frac{\pi}{4}75^2 = 4415.6mm^2$

مثال:

مشابه روش حل مسائل نامعین استاتیکی، تکیه گاه B را آزاد می کنیم:

$$\delta_{TB} = \alpha(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)(\Delta\mathrm{T}) = 100 \times 10^{-6} \times 525 \times 30 = 1.575\mathrm{mm}$$

$$\delta_{\mathrm{RB}} = \frac{\mathrm{R_B L_1}}{\mathrm{EA_1}} + \frac{\mathrm{R_B L_2}}{\mathrm{EA_2}} = \mathrm{R_B}\left(\frac{225}{60 \times 10^3 \times 1962.5} + \frac{300}{60 \times 10^3 \times 4415.6}\right)$$

$$R_B = 517.5KN$$

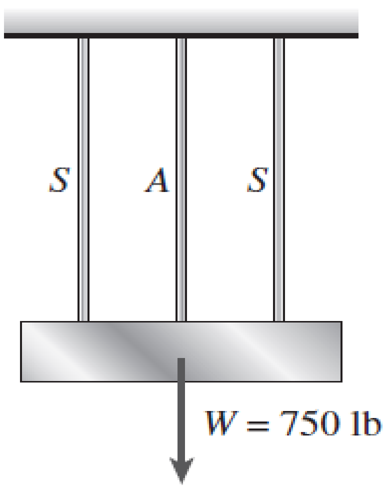
$$\sigma_{Max} = \frac{R_B}{A_1} = \frac{517.5\ KN}{1962.5\ mm} = 263.7\ MPa$$

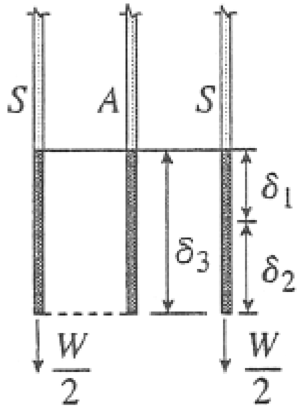
$$\delta_c = \alpha(\mathrm{L}_1)(\Delta\mathrm{T}) - \frac{\mathrm{R_B L_1}}{\mathrm{EA_1}} \rightarrow \delta_{\mathrm{c}} = -0.314\ \mathrm{mm}$$

مثال:

شکل زیر را در نظر بگیرید. یک جسم صلب به وزن 750lb از سه میله متشکل از دو میله فولادی و یک میله آلومینیومی آویزان شده است. قطر میله ها 1/8in می باشد و طول آن ها قبل از بارگذاری برابر است. میله ها را چقدر حرارت دهیم تا تمام وزن جسم صلب توس میله های فولادی تحمل شود.

$$E_s = 30 \times 10^6 \text{psi} \ , \alpha_s = 6.5 \times 10^{-6} \ , \alpha_a = 12 \times 10^{-6}$$





برای این که تمامی وزن جسم صلب توسط میله های فولادی تحمل شود، بایستی تغییر طول میله آلومینیومی در اثر حرارت با تغییر طول میله فولادی در اثر حرارت و بارگذاری برابر شود

$$\delta_1 = \alpha_s L(\Delta T)$$

$$\delta_2 = \frac{WL}{2E_S A_S}$$

$$\delta_3 = \alpha_a L(\Delta T)$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$$

$$\alpha_s L(\Delta T) + \frac{WL}{2E_S A_S} = \alpha_a L(\Delta T)$$

$$6.5 \times 10^{-6} \times (\Delta T)$$

$$+ \frac{750}{2 \times 30 \times 10^6 \times 0.012}$$

$$= 12 \times 10^{-6}(\Delta T)$$

$$\Delta T = 189°\text{F}$$