دەروازەیەک بۆ بیردۆزی گرووپەکان

An Introduction to Groups Theory

نووسەر: مەحفووز ڕۆستەمزادە(Mahfouz Rostamzadeh)

http://mahfouzrostamzadeh.blog.ir/page/Math-in-Kurdish

گرووپ(group) یەکێک لە پێکهاتە جەبریەکانی(algebraic structures) بیرکاریە کە دەورێکی گرنگی لە جەبری پوختە(abstract algebra) هەیە و لە زانستەکانیتر وەکوو کریستاڵناسی(crystallology)، فیزیا(physics)، کوانتۆم(quantom) و ... بەکاردەهێنرێ. بیرۆکەی گرووپەکان کاتێک دەستی پێکرد کە زانایانی بیرکاری تێبینیان کرد کە ئەو پێکهاتانەی دەیخوێنن، لە هەندێ تایبەتمەندی هاوبەشن و ئەگەر بتوانن هەمووی ئەم تایبەتمەندیانە لە یەک پێکهاتە کۆ بکەنەوە و وەکوو چەمکێکی نوێ لەسەری لێکۆڵینەوە بکەن، دەتوانن لە فەوتاندنی کات بەرگری بکرێ. ئەو لقەی بیرکاری کە خوێندن و تۆیژینەوە لە سەر گرووپەکان دەکات بە **بیردۆزی گرووپەکان**(Group Theory) ناسراوە.

مێژوو:

بیردۆزی گرووپەکان بە چوار لقی سەرەکی بیرکاری، واتە جەبری کلاسیک(کۆن)(classical algebra)، بیردۆزی ژمارەکان(number theory)، ئەندازە(geometry) و شیکاری(analysis) گەشەی پێدرا. جەبری کلاسیک لەساڵی 1770 بە کارەکانی لاگرانژ(Lagrange) لە سەر هاوکێشە ڕادەدارەکان بنەڕەتی نێردرا. بیردۆزی ژمارەکان لەلایەن گاوس(Gauss) لە ساڵی 1801 لێکۆڵینەوەی زۆرتریان لە سەر کرا. کلاین(Klein) لە سەر ئەندازە و پەیوەندی نێوان جێگۆڕکێ ئەندازەییکان(geometric transformations) و گرووپەکان لێکۆڵینەوەی زۆری کردووە، تا ڕادەیەک بە کلاین دەڵێن باوکی ئەم بەشە لە بیردۆزی گرووپەکان. دامەزرێنەری شیکاری پوانکارە(Poincaré)، لی(Lie) و کلاین بوونە.

ئولێر(Euler)، گاوس، لاگرانژ، ئابێل(Abel) و گالۆا(Galois) یەکەم کەسانێکن لە سەر بیردۆزی گرووپەکان تۆیژینەوەیان کردووە. بە تایبەت گالۆا بە بۆنەی سەلمێنراوی بنەمایی خۆی کە پەیوەندی گرووپەکان و ئەڵقەکان(rings) باس دەکات و لەم سەردەمەیش بە ناوی بیرۆزی گالۆا ناو دەبرێت دەورێکی گرنگی هەبووە.

یەکەم کاردانەوەی گرووپەکان، لە شی کردنی کاریگەری گۆڕینەکانی(Permutation) ڕەگی هاوکێشە ڕادەدارەکان بوو کە لە لایەن لاگرانژ بەکار هێنراوە و بووە بە بنەمای ڕێکخستنی سەلمێنراوی جێگیرکاری(substitution). ئەو سەلمێنرای کە ڕەگی هەمووی ئەو هاوکێشە ڕادەدارانە کە بە دەستی هێنابوون نەخشەیکی ڕێژەیین لە ڕەگی هاوکێشە بەرامبەرەکانیان. دوای لاگرانژ، ڕافینی(Ruffini) بە تێکۆشانەکانی لە سەر سەلماندنی نەبوونی شیکاریەک بۆ هاوکێشەکانی پلەی پێنجەم و بانتر، هەنگاوێکی‌تری لە بیردۆزی گرووپەکان نا. دوای ئەو، گالۆا یەکەم بەرهەمی خۆی لە سەر بیردۆزی گرووپەکان لە تەمەنی 18 ساڵان (1829) بڵاو کردەوە. بەڵام یارمەتیەکانی ئەو تا بەر لە بڵاوبوونەوەی مەقالەکانی لە ساڵی 1846 گرینگیان پێ نەدرا. دوای ئەو ئارتۆر کەیلی(Keyly) و ئاگۆستین لویی کۆشی(Cauchy) زانیان بە گرنگ بوونی کارەکانی گالۆا و دەستیان کرد بە تۆیژینەوەی زۆرتر لە سەریان. لە زانایانی بیرکاری دیکەی سەدەی 19 کە لە سەر بیردۆزی گرووپەکان کاریان کردووە دەتوانین لە هێرمیت(Hermit)، فرۆبێنیوس(Frobenius)، کرۆنەکر(Kronecker) و ماتیۆ(Mathew) ناو ببەین.

بەڵام تا ئەو کاتە پێناسەیکی ئەکزیۆمی تەواو لە سەر گرووپەکان نەبوو. لە ساڵی 1854 کەیلی یەکەم پێناسەی بە شێوازی ئەکزیۆمی بۆ گرووپەکان پێشکەش کرد بەڵام زۆری نەبرد کە قبوڵ نەکرا. لە ساڵی 1870 کرۆنەکر دیسان ڕێبازی ئەکزیۆمی بۆ پێناسە کردنی گرووپەکان بنەڕەت نا. هەروا وێبێر(Weber) لە ساڵی 1882 پێناسەیکی بۆ گرووپە کۆتاییدارەکان پێشکەش کرد و لە ساڵی 1883 پێناسەیکیشی بۆ گرووپە ناکۆتاییەکان ناساند. بەڵام والتر (Walter) لە ساڵی 1882 یەکەم پێناسەی مۆدێرنی گرووپەکانی بڵاو کردەوە. لە لایەن لی، لێکۆڵینەوە لە سەر گرووپەکانی لی(Lie groups) و ژێرگرووپە دابڕاوەکانیان(discrete subgroups) و گرووپە جێگۆڕکێیەکان(transformation groups) بە شێوازێکی درووست دەستی پێکرد. تاکوو ئێستاش بیردۆزی گرووپەکان وەکوو بیردۆزێکی بنەمایی لە جەبری پوختە کاری لە سەر دەکرێت و سەرچاوەیکی زۆر گرنگی تۆیژینەوەیە بۆ زانایانی بیرکاری.

پێناسەی گرووپ:

کۆمەڵەی G بە کرداری دووانەیی $* : G \times G \to G$، وەکوو کرداری کۆ یان لێکدان، پێی دەوترێت گرووپ ئەگەر ئەم سیفەتانەی خوارەوەی هەبێ:

(G_1) سیفەتی داخراو(closure property):

(G_1) $\quad \forall\, a, \mathrm{b} \in \mathrm{G};\, a * \mathrm{b} \in \mathrm{G}$

کە واتە بۆ هەر دوو ئەندامی گرووپەکە، کۆی یان لێکدانیان دیسان لە ناو گرووپەکە بێت.

(G_2) سیفەتی بێلایەنی(identity property):

(G_2) $\quad \exists\, e \in \mathrm{G} :\ \forall a \in \mathrm{G};\, e * a = a = a * e$

کە واتە ئەندامێک وەکوو e هەبێت کە لە سەر کردارەکە بێ لایەن بێت.

(G_3) سیفەتی دژی(invertibility property):

$(\boldsymbol{G_3}) \quad \forall\, a \in \mathrm{G}\ \exists\, \boldsymbol{a'} \in \mathrm{G}:\ a' * a = e = a * a'$

کە واتە بۆ هەر ئەندامی a لە گرووپەکە، ئەندامێکیترمان وەکوو a' هەبێت کە $a' * a$ یان $a * a'$ ببێت بە ئەندامە بێ لایەنەکەی گرووپەکە.

$(\boldsymbol{G_4})$ سیفەتی بەیەکتربەستن(associativity property):

$(\boldsymbol{G_4}) \quad \forall\, a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}:\ a * (\mathrm{b} * \mathrm{c}) = (a * b) * c$

ئەبێ ئاگادار بین کە کرداری گرووپ بەگشتی سیفەتی ئاڵوگۆڕی نیە، واتە هەمیشە وانیە کە $a * b = b * a$.

بەڵام ئەو گرووپانەی کە سیفەتی ئاڵوگۆڕیان هەیە پێیان دەوترێ **گرووپی ئاڵوگۆڕ(commutative group)** و دەورێکی گرنگیان لە بیرکاری هەیە و بە بۆنەی لێکۆڵینەوەکانی ئابێل لە سەریان بە گرووپی ئابێلیش ناسراون. ئەگەر گرووپی G ژمارەی ئەندامانی کۆتاییدار بێت، پێی دەوترێت **گرووپی کۆتاییدار(finite group)** و ئەگەر ژمارەی ئەندامانی ناکۆتایی بێت پێی دەڵێین **گرووپی ناکۆتایی(infinite group)**. بە ژمارەی ئەندامانی گرووپ دەڵێین **کەڕەتی گرووپ(order of group)** و بە |G| نیشانی دەدەین.

زۆر جار کرداری * بە . یان + نیشان دەدەین.

نموونە:

ژمارە تەواوەکان بە کرداری کۆ(واتە $(\mathbb{Z}, +)$) گرووپێکی ئاڵوگۆڕە بە کەڕەتی ناکۆتایی. چوون:

1. بۆ هەر دوو ژمارەی تەواوی m و n هەمیشە m+n دیسان دەبێتەوە ژمارەیکی تەواو.
2. بۆ هەر ژمارەیکی تەواوی n، ژمارەی سیفر ئەندامە بێلایەنەکەیە و $n + 0 = 0 + n = n$.
3. بۆ هەر ژمارەیکی تەواوی n، ژمارە هەڵگەڕاوەی n− ژمارە دژەکەیەتی و

$$-n + n = n + (-n) = 0$$

4. بۆ هەر سێ ژمارەی تەواوی m ، n و p هەمیشە $m + (n + p) = (m + n) + p$.
5. گرووپی $(\mathbb{Z}, +)$ گرووپێکی ئاڵوگۆڕە، واتە هەمیشە $a + b = b + a$.
6. چوون ژمارەی ئەندامانی $\mathbb{Z}$ ناکۆتاییە، گرووپی $(\mathbb{Z}, +)$ گرووپێکە بە کەڕەتی ناکۆتایی.

نموونە:

ژمارە ڕاستیەکان بە کرداری کۆکردنەوە و لێکدان گرووپێکی ئاڵوگۆڕە بە کەڕەتی ناکۆتایی.

سیفەت	کۆکردنەوە	لێکدان
ئاڵوگۆڕ	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
یەکتریبەستن	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
دانەی بێ لایەنی سفر ویەك لە کرداری کۆکردنەوەی ولێکدان یەك لەدوای یەك	$a+0=a$	$a\times 1=a$
پێچەوانە و هەڵگەڕاوە «دژەکۆکردنەوە و دژە لێکدان»	$a+(-a)=0$	$b\times\frac{1}{b}=1;\ b\neq 0$

بەڵام ژمارە تەواوەکان بە کرداری لێکدان، واتە $(\mathbb{Z},\cdot)$، ناتوانێ گرووپ بێت. چوونکە بۆ نموونە بۆ ژمارەی 2، پێچەوانەی لێکدانەکەی، واتە $\frac{1}{2}$، ژمارەیکی تەواو نیە.

ژێرگرووپ(subgroup)

بە کۆمەڵەی H دەوترێت **ژێرگرووپ** ئەگەر خۆی ژێرکۆمەڵەی گرووپێکیتر وەکوو $(G,\cdot)$ بێت و ئەم تایبەتمەندیانەی خوارەوەی هەبێت و دەنووسین $H\leq G$:

1. بۆ هەر ئەندامی a لە H، دژەکەی دووبارە لە نێوی H بێت، واتە ئەگەر $a\in H$، دیسان $a^{-1}\in H$.
2. بۆ هەر ئەندامی a و b لە H، دیسان $a.b\in H$.

بە کورتی دەتوانین بڵێین $(G,\cdot)\leq(H,\cdot)$ ئەگەر و تەنها ئەگەر بۆ هەر دوو ئەندامی a و b لە H، دیسان $a^{-1}.b\in H$.

نموونە:

ژمارە تەواوەکان $\mathbb{Z}$ ژێرکۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکانن و بە کرداری +، هەروا پێشتر باسمان کرد، هەردووکیان گرووپن. چوون پێچەوانەکەی $\mathbb{Z}$ هەر ئەو پێچەوانەی $\mathbb{R}$ و دەتوانین بڵێین $\mathbb{Z}$ بە کرداری کۆکردنەوە ژێرگرووپێکی $\mathbb{R}$ بە کرداری کۆکردنەوەیە، واتە $(\mathbb{Z},.)\leq(\mathbb{R},.)$.

نموونە:

ئەگەر $G=\{a,b,c,e\}$ و کرداری **.** لە سەری G وا پێناسە بکەین:

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$(G,.)$ گرووپێکی ئاڵوگۆڕە بە ئەندامی بێلایەنی e و دژی هەر ئەندامێک ئەبێتو خۆی. $H=\{e,a\}$ دەبێتە ژێرگرووپی ئاڵوگۆڕی G. کەرەتی G دەبێتە 4 و کەرەتی H دەبێتە 2.

پۆلێنکردنی بیردۆزی گرووپەکان

- Permutation groups گرووپە گۆڕینەکان
- Matrix groups گرووپە ڕیزکراوەکان
- Transformation groups گرووپە جێگۆڕکێیەکان
- Abstract groups گرووپە پوختەکان
- Topological and algebraic groups گرووپە شێوەناسیەکان (تۆپۆلۆژیەکان) و جەبریەکان

لقەکانی بیردۆزی گرووپەکان

- Finite group theory بیردۆزی گرووپە کۆتاییدارەکان
- Representation of groups نواندنی گرووپەکان
- Lie theory بیردۆزی لی
- Combinatorial and geometric group theory بیردۆزی گرووپە تێکەڵکراوەکان و ئەندازەییەکان

جێبەجێکردنەکانی بیردۆزی گرووپەکان

بیردۆزی گرووپەکان لە هەندێ زانستیتر جێبەجێکردنی هەیە. دەتوانین بە ئەم زانستانەی خوارەوە ئاماژە بکەین:

- Galois theory بیردۆزی گاڵوا
- Algebraic topology جەبری شێوەناسی
- Algebraic geometry and cryptography ئەندازەی جەبری و نهێنی کردن
- Algebraic number theory بیردۆزی جەبری ژمارە
- Harmonic analysis شیکاری هارمونیک
- Combinatorics تێکەڵکردنەکان
- Music موسیقا

- Physics فیزیا
- Chemistry and materials science کیمیا و زانستی کەرەستەکان
- Statistical Mechanics میکانیکی ئاماری

سەرچاوەکان

1. Borel, Armand (1991), *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics **126** (2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-0-387-97370-8, MR 1102012
2. Carter, Nathan C. (2009), *Visual group theory*, Classroom Resource Materials Series, Mathematical Association of America, ISBN 978-0-88385-757-1, MR 2504193
3. Cannon, John J. (1969), "Computers in group theory: A survey", *Communications of the Association for Computing Machinery* **12**: 3–12, doi:10.1145/362835.362837,MR 0290613
4. Frucht, R. (1939), "Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", *Compositio Mathematica* **6**: 239–50, ISSN 0010-437X
5. Golubitsky, Martin; Stewart, Ian (2006), "Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (03): 305–364, doi:10.1090/S0273-0979-06-01108-6, MR 2223010 Shows the advantage of generalising from group to groupoid.
6. Judson, Thomas W. (1997), *Abstract Algebra: Theory and Applications* An introductory undergraduate text in the spirit of texts by Gallian or Herstein, covering groups, rings, integral domains, fields and Galois theory. Free downloadable PDF with open-source GFDL license.
7. Kleiner, Israel (1986), "The evolution of group theory: a brief survey", *Mathematics Magazine* **59** (4): 195–215, doi:10.2307/2690312, ISSN 0025-570X,JSTOR 2690312, MR 863090
8. La Harpe, Pierre de (2000), *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, ISBN 978-0-226-31721-2
9. Livio, M. (2005), *The Equation That Couldn't Be Solved: How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry*, Simon & Schuster, ISBN 0-7432-5820-7 Conveys the practical value of group theory by explaining how it points to symmetries in physics and other sciences.
10. Mumford, David (1970), *Abelian varieties*, Oxford University Press, ISBN 978-0-19-560528-0, OCLC 138290
11. Ronan M., 2006. *Symmetry and the Monster*. Oxford University Press. ISBN 0-19-280722-6. For lay readers. Describes the quest to find the basic building blocks for finite groups.
12. Rotman, Joseph (1994), *An introduction to the theory of groups*, New York: Springer-Verlag, ISBN 0-387-94285-8 A standard contemporary reference.
13. Schupp, Paul E.; Lyndon, Roger C. (2001), *Combinatorial group theory*, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-41158-1

14. *Scott, W. R. (1987) [1964], Group Theory, New York: Dover, ISBN 0-486-65377-3* Inexpensive and fairly readable, but somewhat dated in emphasis, style, and notation.
15. *Shatz, Stephen S. (1972), Profinite groups, arithmetic, and geometry, Princeton University Press, ISBN 978-0-691-08017-8, MR 0347778*
16. *Weibel, Charles A. (1994), An introduction to homological algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-55987-4,OCLC 36131259, MR 1269324*

ووشەنامە

English	فارسی	کوردی
statistics	آمار	ئامار
axiom	بنداشت	ئەکزیۆم
axiomatic	بنداشتی	ئەکزیۆمی
commutative	جابەجایی	ئاڵوگۆڕ
geometry	هندسه	ئەندازە
algebraic geometry	هندسه جبری	ئەندازەی جەبری
associative	شرکت‌پذیر	بەیەکتربەستن
theory	نظریه	بیردۆز
identity	همانی/خنثی	بێلایەن
classification	ردەبندی	پۆلێنکردن
inverse	وارون	پێچەوانە
structure	ساختار	پێکهاتە
combinatorics	ترکیبیات	تێکەڵکردنەکان
algebra	جبر	جەبر
abstract algebra	جبر مجرد	جەبری پوختە
algebraic topology	توپولوژی جبری	جەبری شێوەناسی
transformation	تبدیل	جێگۆڕکێ
application	کاربرد	جێبەجێکردن
discrete	گسسته	دابڕاو
closed	بسته	داخراو
invertiblity	وارون	دژ
polynomials	چند جملەای‌ها	ڕادەدارەکان

rational	گویا	ڕێژەیی
solution	ریشه	ڕەگ
matrix	ماتریس	ڕیزکراوە
science	علم	زانست
integer numbers	اعداد صحیح	ژمارە تەواوەکان
real numbers	اعداد حقیقی	ژمارە ڕاستیەکان
subset	زیرمجموعه	ژێرکۆمەڵە
subgroup	زیرگروه	ژێرگرووپ
theorem	قضیه	سەلمێنراو
analysis	آنالیز	شیکاری
harmonic analysis	آنالیز هارمونیک	شیکاری هارمونیک
topology	توپولوژی	شێوەناسی(تۆپۆلۆژی)
physics	فیزیک	فیزیا
operation	عمل	کردار
binary operation	عمل دوتایی	کرداری دووانەیی
order	مرتبه	کەڕەت
material	ماده	کەرەست
quantom	کوانتوم	کوانتۆم
finite	متناهی	کۆتاییدار
set	مجموعه	کۆمەڵە
chemistry	شیمی	کیمیا
Group	گروه	گرووپ
Lie group	گروه لی	گرووپی لی
permutation	جایگشت	گۆڕینەکان
multiplication	ضرب	لێکدان
mechanics	مکانیک	میکانیک
infinite	نامتناهی	ناکۆتایی
representation	نمایش	نواندن
cryptography	کدگذاری	نهێنی کردن
map/function	نگاشت/تابع	نەخشە
equation	معادله	هاوکێشە
inverse	معکوس/قرینه	هەڵگەڕاوە