تحلیل سازه‌های ۱

مجموعهٔ مهندسی عمران

مهندس سیدامیر حسینی

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

پارسه

فصل اول پایداری و معینی سازه‌ها

فصل دوم خرپاها

فصل سوم خطوط تأثیر

فصل چهارم تغییر شکل سازه‌ها

فصل پنجم تحلیل سازه‌های نامعین

فصل ششم تقارن در سازه

فصل اول

پایداری و معینی سازه‌ها

مقدمه:

سازه: هر جسمی که برای تحمل و انتقال نیرو مورد استفاده قرار گیرد، سازه محسوب می‌شود.

طبقه بندی سازه‌ها از لحاظ هندسی:

۱ـ سازه‌های حجمی: در این سازه‌ها طول و عرض و ارتفاع، قابل مقایسه با هم بوده و عامل اصلی مقاومت در برابر نیروهای وارد بر سازه، وزن سازه است. مثل: سد خاکی، دیوار حائل، سد وزنی. در این سازه، هرچه حجم بیشتر باشد، پایداری بیشتر است.

۲ـ سازه‌های پوسته ای (صفحه‌ای): در این سازه‌ها عامل مقاومت و پایداری در برابر نیروهای وارده، شکل هندسی سازه است. مثل: سد قوسی، گنبد، دالهای بتنی و ...

۳ـ سازه‌های اسکلتی: این سازه‌ها، سازه‌هایی متشکل از اعضای خطی شکل مانند تیر و ستون هستند. در این سازه‌ها عامل پایداری و مقاومت در برابر نیروهای وارده علاوه بر شکل هندسی مناسب، نحوه اتصال اعضا می باشد که بر دو گروهند:

الف) سازه‌های اسکلتی فضایی: هر گاه کلیهٔ عناصر در یک صفحه نباشند.

ب) سازه‌های اسکلتی مسطح: هر گاه کلیه عناصر در یک صفحه باشند و بارگذاری در صفحه سازه انجام شود. (دو شرط لازم برای سازه اسکلتی)

سازه اسکلتی مسطح

در این دوره بحث تحلیل سازه‌ها فقط روی سازه‌های اسکلتی مسطح است.

اهداف و مراحل تحلیل سازه:

۱ـ بررسی پایداری سازه:

دربررسی پایداری یک سازه در واقع باید به این سؤال پاسخ دهیم که آیا سازه پایدار است یا نه؟ در این مرحله معینی یا نامعینی سازه نیز بررسی می‌شود.

۲ـ محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاهی

۳ـ تعیین نیروی داخلی:

بطور کلی در مراحل تحلیل، تحلیل ما خطی است و رفتار اجزاء خطی فرض می‌شود (یعنی قانون هوک صادق است) و تغییر شکل‌ها کوچک هستند پس همواره اصل جمع آثار قوا صادق است. در این مرحله با یافتن نیروهای داخلی می‌توان، نیروهای داخلی را به تنش تبدیل کرد و کنترل کرد که آیا تنش‌ها در حد خطی هستند یا خیر. اگر تنش از حد خطی خارج شود دیگر این روش‌های تحلیل معتبر نمی‌باشد.

۴ـ محاسبه تغییر شکل سازه:

محاسبه تغییر شکل‌ها بطور کلی برای اهداف زیر صورت می‌گیرد:

الف) معیاری برای طراحی

ب) کنترل رفتار خطی هندسی و کنترل ضابطه تغییر شکل‌های کوچک

ج) استفاده در تحلیل سازه‌های نامعین (روابط سازگاری تغییر شکل‌ها)

توجه داشته باشید که اگر سازه تغییر شکل‌های بزرگی در مقایسه با ابعاد اولیه داشته باشد، تحلیل سازه اعتبار خود را از دست می‌دهد.

معادلات حاکم بر سازه‌ها:

۱ـ معادلات تعادل ایستایی: این معادلات برای تحلیل سازه‌های معین کفایت می کند که بستگی به فضای مسأله دارد. به طور کلی این معادلات عبارتند از:

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

۲ـ معادلات سازگاری تغییر شکلها: این معادلات برای تحلیل سازه‌های نامعین حتماً مورد نیاز خواهد بود. این معادلات بین تغییر شکل‌های سازه که مجهولند نوشته می‌شود و از این رو از این معادلات نمی‌توان برای بدست آوردن نیروها استفاده کرد مگر با استفاده از معادلات جدیدی که در زیر معرفی می‌شوند.

۳ـ روابط نیرو، تغییر شکل: با استفاده از این معادلات می‌توان معادلات تغییر شکل‌ها را بر حسب نیروها مرتب کرد (و برعکس).

در واقع در سه دسته معادله فوق:

دسته اول، روابط بین نیروها و دسته دوم روابط بین تغییر شکل‌هاست که به تنهایی قابل حل نیستند لذا از دسته سوم معادلات برای حل روابط اول و دوم استفاده می‌شود.

تشخیص سازه‌ها:

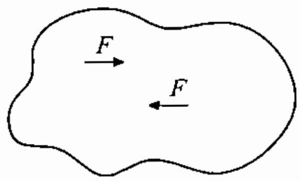
مسیر تحلیل سازه از تشخیص سازه شروع می‌شود. منظور از تشخیص سازه، کنترل پایداری ـ ناپایداری، معینی ـ نامعینی و تعیین درجه نامعینی است.

در زیر اصول لازم برای تشخیص پایداری و ناپایداری را مرور می‌کنیم:

اصول تعادل:

قانون اول نیوتن بیان می‌کند که برای متعادل بودن جسم لازم است برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد.

علاوه بر این شرط، برای متعادل بودن جسم باید جمع گشتاورهای موجود در جسم هم صفر باشد. بطور مثال به جسم زیر توجه کنید: ملاحظه می‌شود که برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است ولی به علت حضور این نیروها، در جسم گشتاوری ایجاد می‌شود که سبب نامتعادل شدن جسم می‌گردد.



به‌طور کلی می‌توان تعادل یک سازه را بدین‌صورت تعریف کرد:

سازه زمانی دارای تعادل است که تحت بارهای خارجی نسبت به زمین تغییر مکان نداشته باشد (ساکن باشد). همچنین اگر قسمتی از سازه از کل سازه جدا شد، پس از رسم جسم آزاد آن، این جسم باید تحت نیروهای داخلی در مقاطع بریده شده و نیز بارهای خارجی وارد بر آن نسبت به زمین در حال سکون باشد.

پس به طور کلی می‌توان گفته‌های فوق را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases}\Sigma\vec{F}=0\\ \Sigma\vec{M}=0\end{cases}$$ شروط لازم برای تعادل جسم صلب

که در فضای سه‌بعدی خواهیم داشت:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \begin{cases}\Sigma\vec{F}_x=0\\ \Sigma\vec{F}_y=0\\ \Sigma\vec{F}_z=0\end{cases} \qquad \Sigma\vec{M}=0 \Rightarrow \begin{cases}\Sigma\vec{M}_x=0\\ \Sigma\vec{M}_y=0\\ \Sigma\vec{M}_z=0\end{cases}$$

توجه کنید که تعداد معادلات تعادل 6 تاست و هرگاه یکی از این معادلات ارضا نشود، جسم نامتعادل خواهد بود.

درجه آزادی:

عبارت است از تعداد پارامترهای مستقل که برای بیان یک جابجایی مورد نیاز است. برای یافتن درجه آزادی جسم باید معادلات تعادل را بررسی کرد. به طور مثال اگر معادله نیرو در جهت x ارضا نشود (یعنی $\sum \vec{F}_x \neq 0$) آنگاه گوئیم جسم در جهت x دارای یک درجه آزادی انتقالی است.

تعادل حالتی است که جسم بدون درجه آزادی می‌باشد.

جسم صلب:

جسمی است که نقاط آن نسبت به هم فاقد جابجایی باشند. از این پس هرگاه بخواهیم جابجایی یک جسم صلب را در فضا تعریف کنیم، از همان 6 معادله تعادل استفاده می‌کنیم.

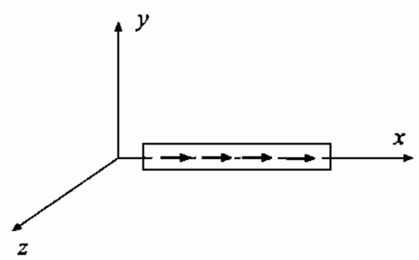
ـ هرگاه جسمی صلب نباشد (نقاط آن نسبت به هم دارای جابجایی باشند) در یک جابجایی، بی‌نهایت درجه آزادی داریم. (ذرات جسم نسبت به هم تغییر مکان دارند)

ـ بطور کلی حداکثر درجه آزادی جسم صلب در فضا 6 می‌باشد (3 مؤلفه انتقالی و 3 مؤلفه دورانی) ولی برای محدود کردن جابجایی جسم و یا حتی متعادل کردن آن باید این درجات آزادی را از بین ببریم که برای این منظور دو روش وجود دارد:

۱ـ ایجاد شرط بارگذاری:

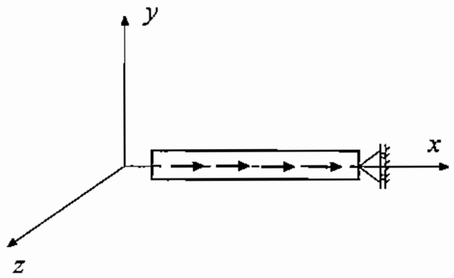
نوع بارگذاری ممکن است بعضی درجات آزادی را از بین ببرد (بعضی معادلات تعادل را ارضاء کند). بطور مثال میله مقابل فقط در راستای x دارای آزادی انتقالی است و در جهات دیگر تمامی معادلات تعادل ارضاء شده‌اند. (از وزن میله صرف‌نظر کنید.)

در واقع در این مثال فقط $\Sigma \vec{F}_x \neq 0$ است یعنی جسم در جهت x جابجایی دارد ولی بقیهٔ 5 معادله همه صفر می‌باشند (به دلیل آن توجه کنید).



۲ـ قرار دادن قیود و مانع در برابر حرکت (تکیه‌گاه):

با این کار هم می‌توان درجات آزادی جسم را از بین برد. ذکر این نکته ضروری است که تعداد قیود لازم برای پایداری یک جسم دارای درجه آزادی، دقیقاً برابر تعداد درجات آزادی جسم می‌باشد. به طور مثال در میلهٔ فوق با قرار دادن یک تکیه‌گاه در مقابل حرکت جسم، می‌توان درجه آزادی جسم را از بین برد.



ـ توجه داشته باشید که در دو مثال فوق از اثر وزن صرفنظر شده است.

شرط مسطح بودن یک سازه:

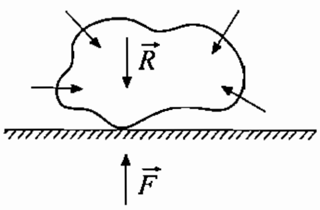
سازه‌ای مسطح نامیده می‌شود که:
اولاً؛ کلیه اجزاء در یک صفحه باشند.
ثانیاً؛ بارگذاری در همان صفحه قرار گرفته باشد.

نکته : یک سازه مسطح دارای حداکثر 3 درجه آزادی است پس حداقل قیود لازم برای پایداری سازه مسطح 3 می‌باشد.

نکته : در مسائل سازه مسطح فقط روابط تعادل زیر مورد نیاز است (به دلیل موضوع فکر کنید):

$$\begin{cases}\Sigma\vec{F}_x=0\\ \Sigma\vec{F}_y=0\\ \Sigma\vec{M}_z=0\end{cases}$$

برای مثال فرض کنید در شکل زیر، برآیند نیروهای وارد بر جسم، نیروی $\vec{R}$ باشد.



در این‌حالت، در محل تکیه‌گاه نیرویی بوجود می‌آید مانند $\vec{F}$ که برایند دو نیروی $\vec{F}$ و $\vec{R}$ صفر می‌باشد پس در محل تکیه‌گاه یک نیروی مجهول به جسم وارد می‌شود که معادلات تعادل را ارضاء می‌کند. (یافتن این نیروی تکیه‌گاهی مجهول یکی از مراحل و اهداف تحلیل سازه است که از آن به عنوان محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاهی یاد شد).
به طور کلی یک دستگاه سه معادله با 3 مجهول کامل می‌شود حال تعداد مختلف مجهولات را در دستگاه 3 معادله تعادل بررسی می‌کنیم:

سازه معین استاتیکی: هرگاه تعداد مجهولات نیرویی یک مسئله (نیروهای مجهول) برابر تعداد معادلات تعادل حاکم بر آن باشد (که برابر است با درجات آزادی در فضا)، دستگاه معادلات تعادل میتواند دارای جواب منحصر به فرد باشد و سازه معین استاتیکی نامیده می‌شود. (Iso static)

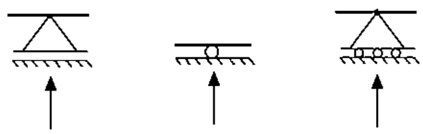
هرگاه تعداد مجهولات کمتر از معادلات تعادل بود سازه قطعاً ناپایدار است. این بدان معنی است که تعداد عکس‌العمل کافی برای از بین بردن درجات آزادی وجود ندارد و سازه دارای جابجایی خواهد بود. (عدم تعادل سازه)

سازه نامعین استاتیکی: هرگاه تعداد مجهولات نیرویی مسئله بیش از تعداد معادلات تعادل ایستایی باشد، این دستگاه میتواند دارای بی نهایت جواب درست باشد. لیکن از آنجا که در مسائل سازه ای پایدار، کلیه نیروهای مجهول واقعاً منحصر به فرد هستند، در حقیقت معادلات دیگری نیز بر سازه حاکم بوده است که از جنس معادلات تعادل نیستند. بنابراین مسئله را نامعین استاتیکی می خوانند و این بدان معناست که مجهولات نیرویی به کمک معادلات تعادل ایستایی به تنهایی قابل تعیین نیستند.

انواع تکیه گاهها در صفحه:

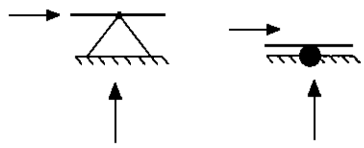
تکیه‌گاه غلتکی (مفصل متحرک)

این تکیه‌گاه فقط جلوی حرکت جسم متکی به آن را در راستای عمود بر سطح اتکا می‌گیرد و در برابر حرکت در امتداد سطح اتکا و دوران هیچ مقاومتی ندارد، پس این تکیه‌گاه فقط در یک جهت عکس‌العمل (مجهول) دارد و یک تکیه‌گاه یک مجهوله می‌باشد.

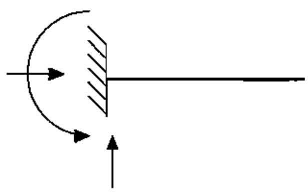


۲ـ تکیه گاه مفصلی (لولایی):

این تکیه‌گاه، جلوی هرگونه حرکت جسم متکی بر آن را در صفحه‌اش می‌گیرد ولی هیچ مقاومتی در مقابل دوران ندارد. در حالت کلی این تکیه‌گاه توسط دو واکنش R_x (مؤلفه تکیه‌گاه در راستای x) و R_y (مؤلفه تکیه‌گاه در راستای y) نشان داده می‌شود، بنابراین این تکیه‌گاه، تکیه‌گاهی دارای دو مجهول است.



۳ـ تکیه گاه گیردار مسطح:

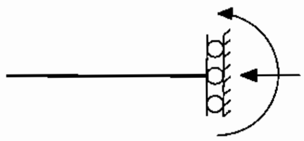


این تکیه‌گاه مانند تکیه‌گاه مفصل است، با این تفاوت که در مقابل دوران هم مقاومت دارد. در واقع این تکیه‌گاه از هر گونه حرکت خطی و دورانی در صفحه جسم جلوگیری می‌کند بنابراین جسم هر سه درجه آزادی جسم در صفحه را مقید می‌کند. پس این تکیه‌گاه دارای سه مجهول است.

نکته : بطور کلی در تکیه‌گاه گیردار تعداد مجهولات با تعداد درجات آزادی فضا یکی می‌باشد مثلاً در صفحه، این تکیه‌گاه 3 مجهوله و در فضا 6 مجهوله می‌باشد. (به دلیل موضوع فکر کنید).

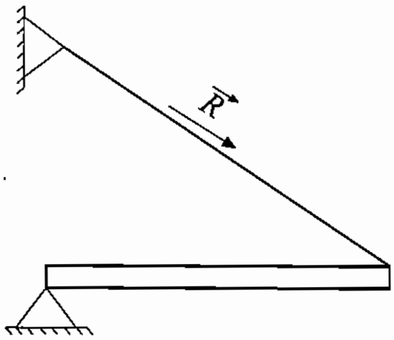
۴ ـ تکیه‌گاه لغزنده گیردار:

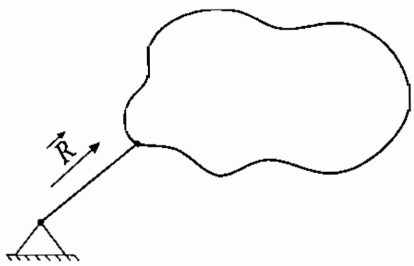
این تکیه‌گاه جلوی حرکت جسم متکی به آن را در جهت عمود بر سطح اتکا می‌گیرد. همچنین توسط این تکیه‌گاه دوران جسم متکی بر آن نیز مقید می‌شود ولی هیچ قیدی در مقابل حرکت جسم در امتداد سطح اتکا وجود ندارد پس این تکیه‌گاه دارای دو مجهول است.



۵ـ تکیه‌گاه رابط یا میله‌ای:

اگر به یک تکیه‌گاه مفصلی، یک میله دو سر مفصل وصل کنیم و بعد این ترکیب را به سازه متصل کنیم و یا در یک سازه از کابل و تکیه‌گاه ساده استفاده کنیم، کابل یا میله در این شرایط سازه‌ای هیچگونه نیروی خمشی و یا برشی تحمل نمی‌کند و نیرویی که از طریق کابل یا میله به تکیه‌گاه می‌رسد، در راستای خود کابل یا میله می‌باشد پس فقط یک مجهول مستقل در این تکیه‌گاه وجود دارد. (آن هم در راستای خود میله یا کابل). این حالت تکیه‌گاه را فقط توسط یک نیروی عکس‌العمل در راستای میله مدل می‌کنیم.



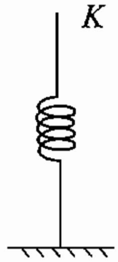


۶ ـ تکیه‌گاه فنری (ارتجاعی):

تکیه‌گاه‌های ارتجاعی، تکیه‌گاه‌هایی هستندکه به سازه اتکا دارند با این شرط که این تکیه‌گاه‌ها هم یک نیروی مجهول به سازه وارد می‌کنند و هم خود دچار تغییر شکل می‌شوند. این تکیه‌گاه، روشی است برای ساده کردن شرایط سازه‌ای در مسائل تحلیل سازه که به دو صورت بکار می‌رود:

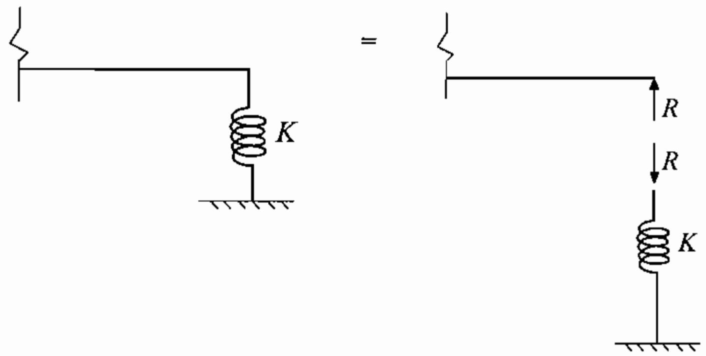
۱ـ فنرهای انتقالی

این تکیه‌گاه یک عکس‌العمل در راستای خود ایجاد می‌کند و به‌صورت زیر نشان داده می‌شود. در اثر این عکس‌العمل علاوه بر وارد شدن نیروی R به سازه، یک نیرو دقیقاً برابر R در فنر ایجاد می‌شود؛ که، این نیروی به‌وجود آمده در فنر سبب تغییر مکان در انتهای آن می‌شود.



در این حالت اگر سختی انتقالی فنر K باشد در این‌صورت تغییر مکان نقطه اتصال سازه به تکیه‌گاه فنری که دقیقاً برابر میزان تغییر مکان انتهای فنر است برابر خواهد بود با:

$$\Delta = \frac{R}{K}$$



مطابق این رابطه می‌توان سختی انتقالی فنر را به‌صورت زیر تعریف کرد:

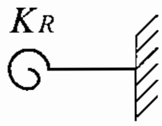
$$\Delta = \frac{R}{K} \Rightarrow K = \frac{R}{\Delta} = \frac{\text{نیرو}}{\text{تغییر مکان انتها}}$$

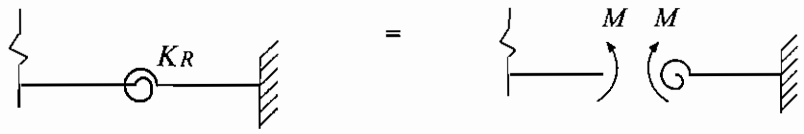
سختی انتقالی (K) عبارت است از نیروی لازم جهت به‌وجود آوردن تغییر مکان واحد در انتهای فنر.

۲ـ فنرهای دورانی

این تکیه‌گاه یک عکس‌العمل دورانی در مقابل دوران جسم متصل به آن ایجاد می‌کند و به‌صورت زیر نشان داده می‌شود. در اثر این عکس‌العمل، یک لنگر M به سازه و لنگری خلاف جهت و دقیقاً برابر M در خود تکیه‌گاه فنری ایجاد می‌شود. این تکیه‌گاه نیز مانند تکیه‌گاه فنری انتقالی به‌طور کامل جلوی دوران را نمی‌گیرد. در این حالت اگر سختی دورانی فنر K_r و لنگر ایجاد شده در آن M باشد میزان دوران فنر (و همین طور انتهای عضو متصل به فنر) برابر است با:

$$\theta = \frac{M}{K_r}$$





پس سختی دورانی فنر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

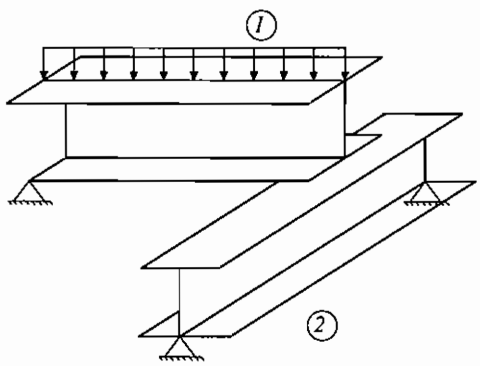
$$\theta = \frac{M}{K_r} \Rightarrow K_r = \frac{M}{\theta} = \frac{\text{لنگر}}{\text{دوران}}$$

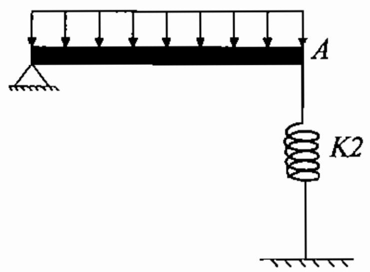
سختی دورانی (K_r) عبارت است از گشتاور لازم جهت به‌وجود آوردن دوران واحد در فنر.

همان‌طور که دیدیم هر فنر در هر امتداد و جهتی که مزاحمت ایجاد می‌کند یک نیروی مجهول به سازه وارد می‌کند (علیرغم جابجایی خود فنر) پس مجهولات موجود دقیقاً برابر با تعداد فنرهاست. (هر فنر = یک مجهول)

فنرها به منظور مدل‌سازی وضعیت سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور مثال تیری را در نظر بگیرید که انتهای آن بر روی تیر دیگری قرار دارد. (مطابق شکل زیر)

در این سیستم تیر 2 یک عکس‌العمل قائم در جهت محور yها و به سمت بالا به انتهای تیر 1 وارد می‌کند ولی با توجه به این‌که تیر 2 خود در نقطه A دارای تغییر مکان است لذا تیر 2 به‌طور کامل جلوی تغییر مکان انتهای A در تیر 1 را نگرفته است لذا تیر 1 را به‌صورت یک فنر انتقالی در انتهای تیر 1 در نظر می‌گیریم. پس این سازه به‌صورت زیر مدل می‌شود.



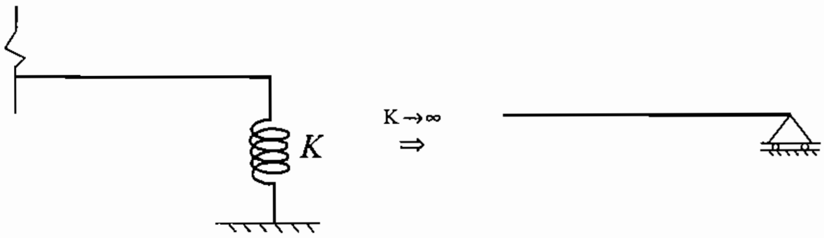


توجه: فنرها زمانی در سازه مدل می‌شوند که تکیه‌گاه به‌طور کامل نتواند جلوی حرکت یا دوران جسم متکی به تکیه‌گاه را بگیرد.

باید دقت داشت اگر در یک سازه که به یک فنر انتقالی متکی است، سختی فنر بی‌نهایت بزرگ شود در این‌صورت داریم:

$$\Delta = \frac{R}{K} \overset{K\to\infty}{\Rightarrow} \Delta \simeq 0$$

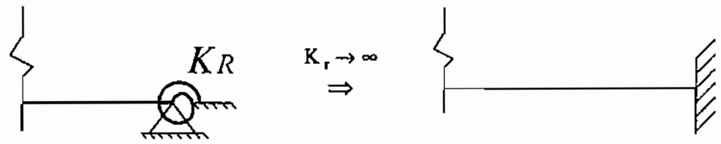
پس در این حالت می‌توان فنر انتقالی بی‌نهایت سخت شده را با تکیه‌گاه مفصلی مدل کرد.



در حالت فنر دورانی نیز اگر سختی دورانی بی‌نهایت بزرگ شود آن‌گاه:

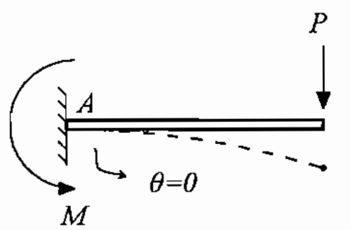
$$\theta = \frac{M}{K_r} \overset{K_r\to\infty}{\Rightarrow} \theta \simeq 0$$

پس در این حالت می‌توان فنر دورانی بی‌نهایت سخت شده را با یک تکیه‌گاه گیردار مدل کرد. (در صورتی که در مقابل تغییر مکان‌های انتقالی مقید باشد.)

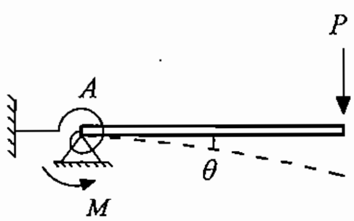


در دو مثال زیر می‌توان تکیه‌گاه A را به‌صورت یک تکیه‌گاه مفصلی و یک فنر دورانی در نظر گرفت که در یک حالت ۱۰۰٪ گیرداری تأمین شده و در حالت دیگر ۱۰۰٪ گیرداری تأمین نشده است.

۱۰۰٪ گیرداری تأمین شده است.



۱۰۰٪ گیرداری تأمین نشده است.

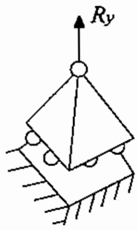


توجه کنید که در هر دو سازه فوق تعداد مجهولات برابر است ولی در محل تکیه‌گاه، در سازه اول، θ نداریم ولی در سازه دوم θ وجود دارد. (به علت میزان گیرداری تکیه‌گاه)

انواع تکیه‌گاههای فضایی:

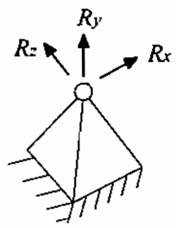
تکیه‌گاه فضایی غلتکی:

این تکیه‌گاه فقط جلوی تغییر مکان جسم متکی به آن را در جهت قائم بر صفحه اتکا می‌گیرد پس این تکیه‌گاه فقط یک عکس‌العمل به سازه در جهت قائم وارد می‌کند و تکیه‌گاهی یک مجهوله است. (این تکیه‌گاه جلوی حرکت جسم در امتداد صفحه اتکا و همچنین دوران را نمی‌گیرد.)



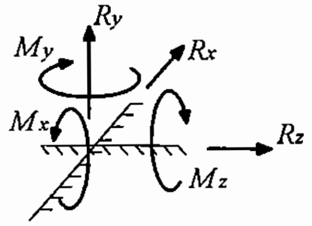
تکیه‌گاه فضایی مفصلی:

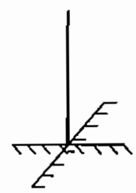
این تکیه‌گاه به طور کامل جلوی حرکت جسم در امتداد و عمود بر صفحه اتکا را می‌گیرد ولی در مقابل دوران جسم متکی به آن قیدی ندارد پس این تکیه‌گاه دارای ۳ مجهول می‌باشد.



تکیه‌گاه فضایی گیردار:

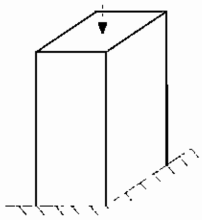
این تکیه‌گاه هم جلوی تغییر مکان‌ها و هم جلوی دوران‌های جسم متکی به تکیه‌گاه را می‌گیرد پس این تکیه‌گاه دارای ۶ مجهول می‌باشد.





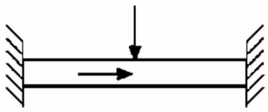
نکته : نوع بارگذاری در تعداد مجهولات موثر است. در واقع در اثر برخی بارگذاری‌ها، در تکیه‌گاه‌ها، همه مجهولات به وجود نمی‌آید و فقط برخی از مجهولات باید لحاظ شود. در این مورد به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱:

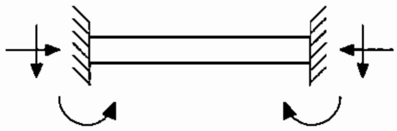


ملاحظه می‌شود که در این سازه، فقط یک نیروی فشاری مؤثر است پس در محل تکیه‌گاه یک نیروی مجهول بوجود می‌آید. (توجه داشته باشید که در محل تکیه‌گاه هیچگونه گشتاور و یا نیروی دیگری بوجود نمی‌آید پس با وجود فضای سه بعدی فقط یک مجهول داریم.)

مثال ۲:

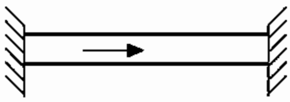


در این مثال در هر تکیه‌گاه دو نیرو و یک گشتاور مجهول وجود دارد که مجهولات این سازه در شکل زیر نشان داده شده است:

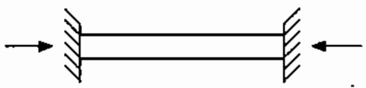


بنابراین در این سازه‌ها، در تکیه‌گاه‌ها تمامی مجهولات به‌وجود آمده‌اند پس سازه در مجموع دارای ۶ مجهول است. در واقع سازه 3 مجهول بیشتر از سازه معین دارد و لذا دارای ۳ درجه نامعینی است.

مثال ۳: در این سازه، که همان سازه بالایی با بارگذاری متفاوتی است در هر تکیه‌گاه فقط یک نیروی محوری در راستای میله بوجود می‌آید.



مجهولات این سازه در شکل زیر نشان داده شده است:

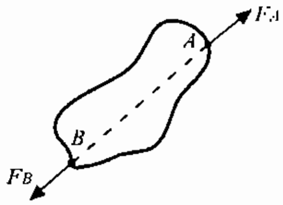


یعنی این سازه یک سازه ۲ مجهولی و معین است. (البته باید از وزن سازه صرف‌نظر کرد چراکه در غیر این‌صورت مجدداً سازه یک سازه ۶ مجهولی و نامعین است.)

چند نکته درباره اصول تعادل:

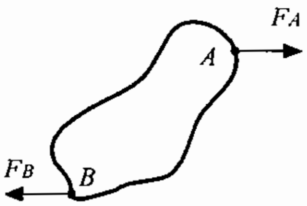
۱ـ عضو دو نیرویی:

جسمی را در نظر بگیرید که تحت دو نیروی خارجی در نقاط A و B قرار گرفته است. اگر این جسم متعادل باشد این دو نیرو حتماً باید در امتداد هم‌دیگر (امتداد AB) باشند چرا که در غیر این‌صورت معادلات تعادل ارضاء نمی‌شود.



برای درک این موضوع در شکل پایین می‌توان معادله گشتاور حول نقطه B را نوشت. با توجه به این‌که امتداد F_A از B نمی‌گذرد لذا گشتاور حول B صفر نبوده و جسم متعادل نیست پس شرط تعادل آن است که F_A و F_B هر دو در امتداد AB باشند. در شرایط تعادل اگر معادله تعادل نیرو در امتداد AB را نیز بنویسیم می‌توان نتیجه گرفت:

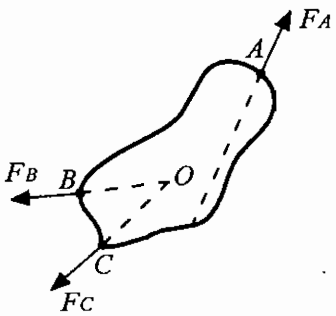
$$F_A = -F_B$$

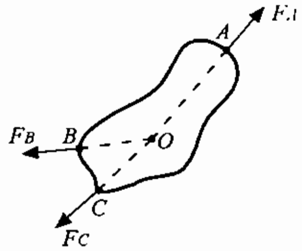


پس هم معادله تعادل نیرو و هم معادله تعادل گشتاور ارضاء شده است، پس اگر یک عضو دو نیرویی متعادل باشد امتداد دو نیرو در یک راستا هستند.

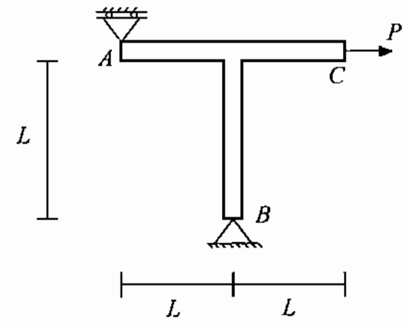
۲ـ عضو سه نیرویی:

جسمی را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر تحت اثر سه نیرو قرار گرفته‌اند. اگر محل تلاقی امتداد دو نیروی F_B و F_C را نقطه O بنامیم و حول نقطه O معادله گشتاور را بنویسیم چون امتداد F_A از O نمی‌گذرد لذا معادله تعادل لنگر ارضاء نمی‌شود. بدیهی است اگر معادله تعادل را در نقاطی که از تلاقی امتداد نیروهای F_A و F_B یا F_A و F_C به‌دست می‌آید بنویسیم باز هم معادله تعادل ارضاء نمی‌شود پس اگر یک جسم سه نیرویی متعادل باشد حتماً باید امتداد سه نیرو از یک نقطه عبور کنند.

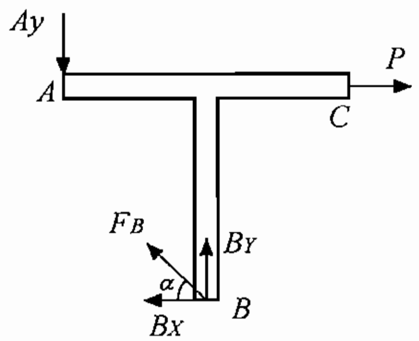




مثال : در سازه زیر مقدار و امتداد عکس‌العمل تکیه‌گاه B چگونه است؟



با رسم دیاگرام آزاد جسم می‌توان دید جسم صلب ABC یک جسم سه نیرویی است و با توجه به آن‌که در تعادل است لذا امتداد نیروهای وارد بر این جسم باید از یک نقطه بگذرند. چون امتداد P و A_y از نقطه A می‌گذرد لذا امتداد نیروی موجود در B نیز از نقطه A می‌گذرد (بنا به تعادل عضو) پس:



$$\tan\alpha = \frac{L}{L} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

پس:

$$B_x = B_y$$

حال با نوشتن معادله تعادل در امتداد محور xها به‌دست می‌آید:

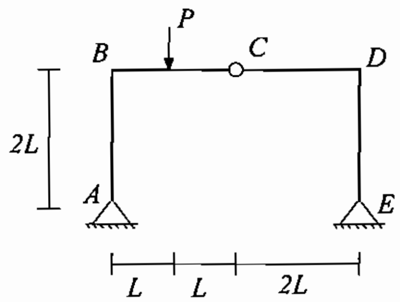
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P - B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = P \quad \Rightarrow \quad B_y = P$$

$$\Rightarrow \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}\,P$$

پس عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر $\sqrt{2}\,P$ و گذرنده ازنقطه A می‌باشد.

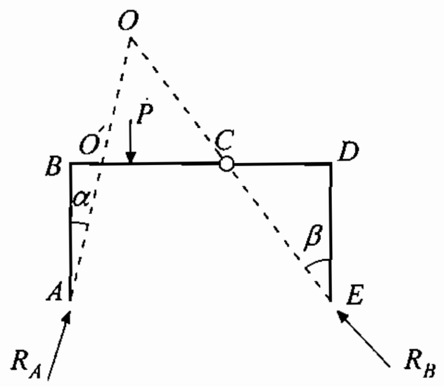
(البته با نوشتن معادلات تعادل می‌توانستیم مقدار B_y و B_x را به‌دست آورده و از روی آن امتداد نیروی تکیه‌گاه B را به‌دست آورد.)

مثال : **در سازه زیر امتداد عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و E را به‌دست آورید.**



روش اول: اگر عضو CDE را جدا کنیم، این عضو یک عضو دو نیرویی می‌باشد. و برای حفظ تعادل لازم است امتداد نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه E از نقطه C عبور کند. از طرفی با دقت درسازه ABCDE می‌توان دید که این سازه یک سازه سه نیرویی است و برای تعادل لازم است سه نیرو از یک نقطه بگذرند پس دیاگرام آزاد این سازه به‌صورت زیر می‌باشد.

پس:

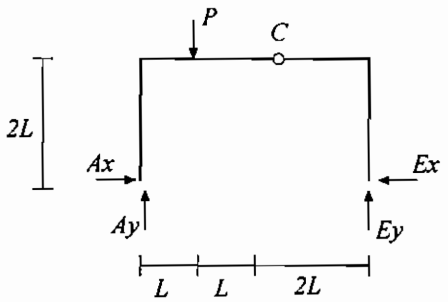


$$B = \frac{\pi}{4}$$

حال با توجه به روابط هندسی و تعداد زاویه B مکان نقطه B مشخص می‌شود که در این‌صورت مقدار α برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{L}{3L} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

روش دوم: با نوشتن معادله تعادل گشتاور در نقطه A خواهیم داشت:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow PL = E_y * 4L \Rightarrow E_y = \frac{P}{4}$$

با نوشتن معادله تعادل گشتاور در نقطه C برای قطعه CDE به‌دست می‌آید:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow E_x \times 2L = E_y \times 2L \Rightarrow E_x = E_y = \frac{P}{4}$$

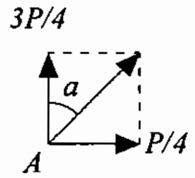
با نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای y داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = P - E_y \Rightarrow A_y = P - \frac{P}{4} \Rightarrow A_y = \frac{3P}{4}$$

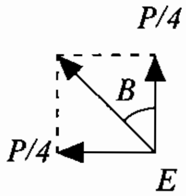
و با نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای x داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = E_x \Rightarrow A_x = \frac{P}{4}$$

پس:



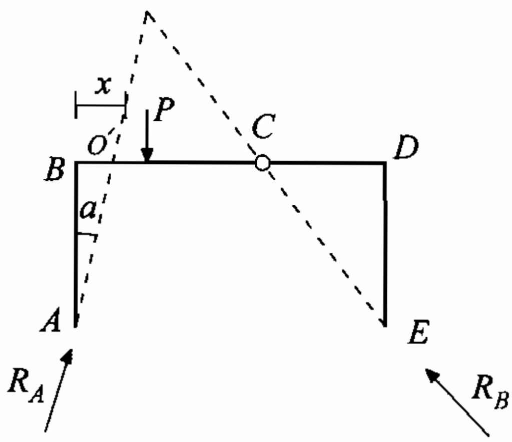
$$\tan\alpha = \frac{\frac{P}{4}}{\frac{3P}{4}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$



$$\tan B = \frac{\frac{P}{4}}{\frac{P}{4}} = 1 \Rightarrow B = \frac{\pi}{4}$$

مثال : در مسأله فوق به غیر از نقاط C ، A و E در چه نقطه دیگری لنگر صفر است؟

با توجه به شکلی که امتداد نیروهای عکس‌العمل در آن‌ها ترسیم شده است اگر مقطعی در نقطه O' بزنیم با بررسی تعادل قطعه سمت چپ یعنی قطعه $O'BA$ و نوشتن معادله تعادل لنگر در نقطه O'، می‌توان دید چون نیروی خارجی بر این قطعه اثر نکرده و امتداد R_A نیز از این نقطه می‌گذرد لذا:



$$\sum M_{O'} = 0$$

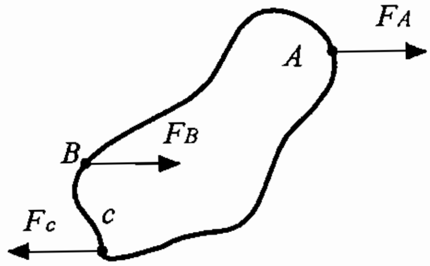
پس در نقطه O' نیز مقدار لنگر صفر است.

با توجه به زاویه α به‌دست آمده در مثال بالا می‌توان نوشت:

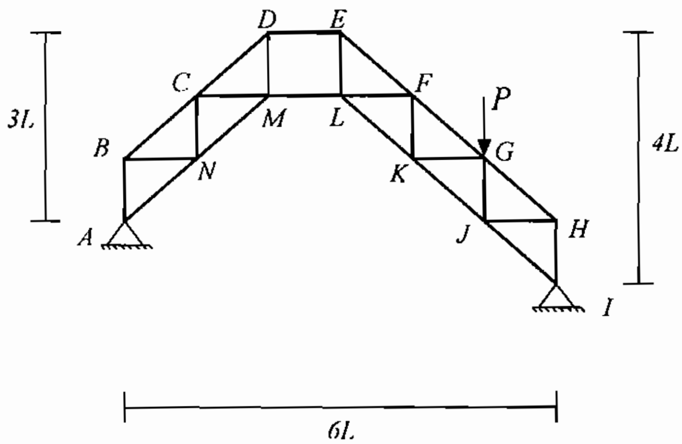
$$\tan\alpha = \frac{O'B}{AB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{2L} \Rightarrow x = \frac{2L}{3}$$

یعنی لنگر در نقطه‌ای به فاصله $\frac{2L}{3}$ سمت راست B صفر است.

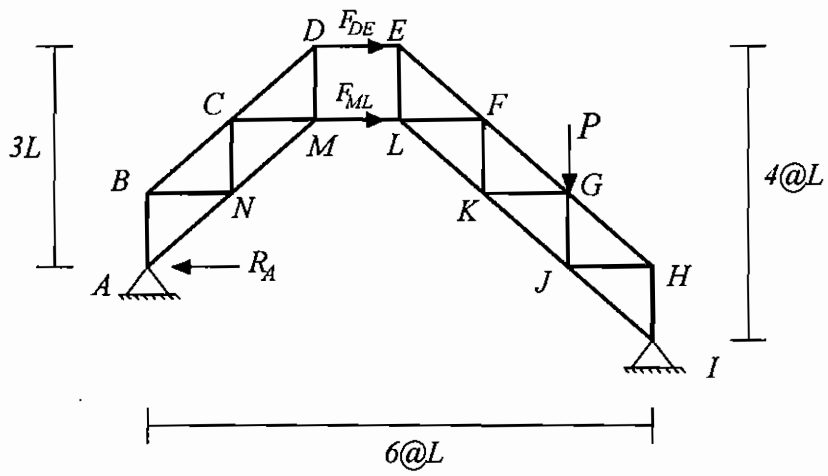
نکته : در عضو سه نیرویی اگر دو نیرو موازی هم باشند. نیروی سوم هم حتماً باید موازی دو نیروی قبل باشد. در واقع این حالت، حالتی است که امتداد سه نیرو در بی‌نهایت همدیگر را قطع می‌کنند. البته باید توجه داشت که این سه نیرو نباید در یک جهت باشند چراکه در این‌صورت سازه دچار جابه‌جایی خواهد شد.



مثال : در خرپای شکل زیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی A چقدر است؟



اگر از مقطعی استفاده کنیم که در عضو DE و ML را قطع می‌کند، با بررسی قطعه سمت چپ درمی‌یابیم که قسمت ABDM یک عضو سه نیرویی است و با توجه به موازی بودن نیروهای DE و ML، نیروی عکس‌العمل A نیز باید موازی آن‌ها و افقی باشد. حال با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه I در کل خرپا می‌توان نوشت:



$$\sum M_I = 0$$
$$\Rightarrow \ (R_A * L) + (P \times L) = 0$$
$$\Rightarrow \ R_A = -P$$

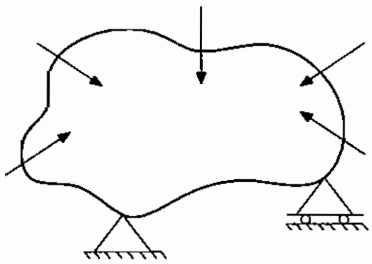
پس عکس‌العمل تکیه‌گاه A به اندازه P و به‌صورت افقی و به سمت راست است و دقت داریم که این تکیه‌گاه عکس‌العمل قائم ندارد.

تشخیص سازه‌ها:

اصول حاکم بر تشخیص سازه‌ها چیست؟

حداقل واکنشهای لازم برای پایداری یک جسم صلب در صفحه، وجود سه قید غیرموازی و غیر متقارب می باشد.

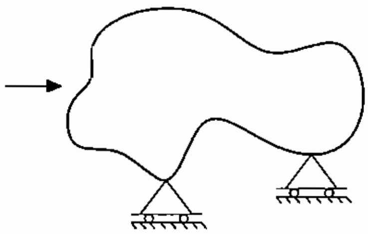
شرایط لازم برای پایداری جسم صلب
- شرط لازم: سه واکنش
- شرط کافی: غیرموازی، غیرمتقارب



در صورت نبودن هر یک از شرایط فوق، سازه ناپایدار خواهد بود.

انواع ناپایداری:

۱ـ ناپایداری قطعی: در این نوع ناپایداری تعدادمجهولات نیرویی از تعداد معادلات کمتر است. (شرط لازم وجود ندارد). این سازه می‌تواند با یک نیرو ناپایدار شود. به مثال زیر توجه کنید:



در این سازه با توجه به این که هیچ عکس‌العملی در مقابل حرکت سازه در راستای x وجود ندارد سازه در جهت x دارای جابجایی بوده و لذا ناپایدار است.

۲ـ ناپایداری هندسی: این ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که تعداد مجهولات، مساوی یا بیشتر از معادلات است، اما مجهولات آرایش هندسی مناسبی ندارند و نمی‌توانند پایداری سازه را تأمین کنند (در واقع نیروهای مجهول دارای وابستگی می‌باشند.)

بطور کلی دو نوع ناپایداری هندسی داریم:

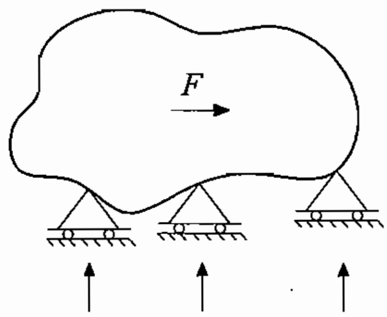
۱ـ دائمی ۲ـ آنی

و دو نوع آرایش هندسی نامناسب وجود دارد که عبارتند از:

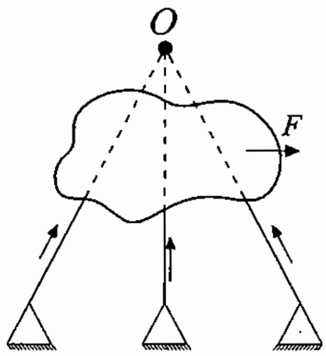
۱ـ مجهولات موازی ۲ـ مجهولات متقارب

به سازه‌های زیر توجه کنید:

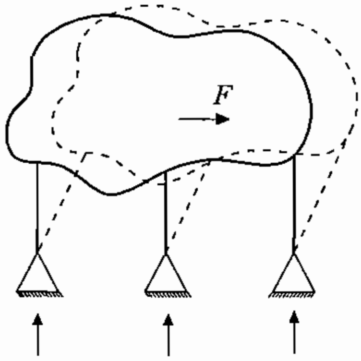
در این سازه ملاحظه‌می شود که هر سه عکس‌العمل موازی هم هستند و لذا هیچ عکس‌العملی برای جلوگیری از جابجایی جسم در اثر نیروی خارجی F وجود ندارد. در واقع در این سازه تعداد 3 عکس‌العمل وجود دارد ولی آرایش نامناسب این عکس‌العمل‌ها، سبب ناپایداری جسم در مقابل نیروی F شده است.



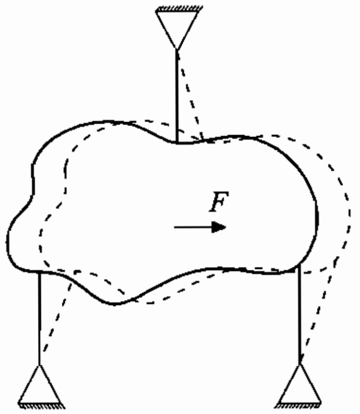
در این سازه با توجه به این که عکس‌العمل‌ها مقتاربند هیچگونه مقاومتی در مقابل گشتاوری که نیروی خارجی F ، حول نقطه O ایجاد می‌کند وجود ندارد و لذا سازه دوران می‌کند و ناپایدار است (با وجود 3 عکس‌العمل و به دلیل آرایش نامناسب عکس‌العمل‌ها).



این سازه به علت موازی بودن عکس‌العمل‌ها ناپایدار است. دقت کنید که این سازه ناپایداری دائمی دارد زیرا پس از وارد شدن نیرو و جابجایی سازه، مشکل موازی بودن نیروها حل نمی‌شود.

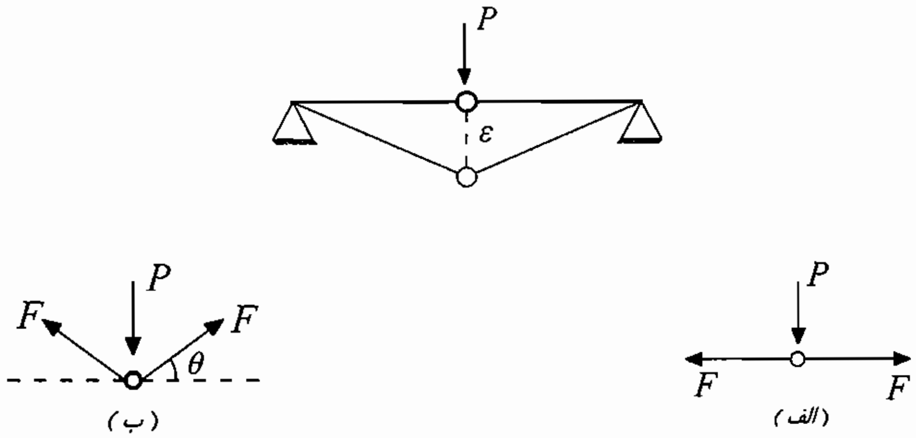


این سازه هم به علت موازی بودن عکس‌العمل‌ها، ناپایدار است ولی این سازه، برخلاف سازه قبل، ناپایدار آنی است، زیرا با ε جابجایی که در اثر نیروی $\vec{F}$ ایجاد می‌شود، سازه از ناپایداری هندسی خارج می‌شود. (به دلیل این موضوع توجه کنید)



ناپایدار آنی چرا ناپایدار است؟

در سازه مقابل ملاحظه می‌شود که در ابتدای بارگذاری هیچ عکس‌العملی در گره برای متعادل کردن نیروی p وجود ندارد (شکل الف) و لذا گره به سمت پایین حرکت می‌کند. ولی با اندکی حرکت گره رو به پایین، نیروی F در میله‌ها ایجاد می‌شود که مؤلفه‌های قائم این نیروها می‌تواند نیروی p را متعادل کند (شکل ب) به این دلیل این نوع ناپایداری را ناپایداری آنی می‌گویند.



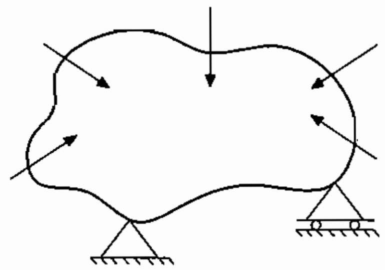
$$2F\sin\theta = p \quad \Rightarrow \quad F = \frac{p}{2\sin\theta}$$

البته باید توجه داشت که وقتی θ خیلی کوچک است نیروی F خیلی بزرگ می‌شود (∞) و ممکن است عضو نتواند این نیرو را تحمل کند.

$$F = \frac{p}{2\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\theta\to 0} F = \infty$$

روش‌های توسعهٔ اجسام صلب:

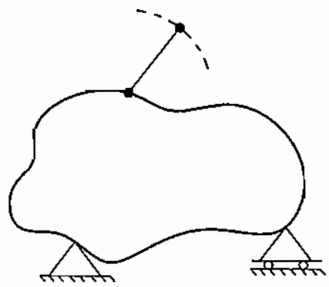
برای آن که جسم کلی‌ترین بارگذاری را تحمل کند نیاز به سه واکنش با آرایش مناسب دارد. در این صورت این جسم پایدار است. در واقع با این سه واکنش معادلات $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ ارضاء می‌شود و جسم دیگر جابجایی انتقالی و دورانی نخواهد داشت. با روش‌های زیر می‌توان از یک سازه صلب پایدار و کوچک، به سازه‌های صلب پایدار بزرگتر رسید.



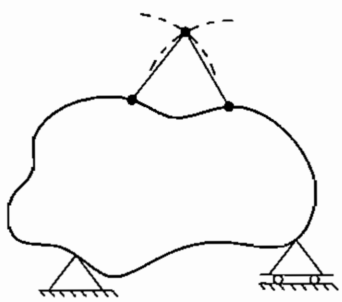
۱ـ ضمیمه کردن یک نقطه به جسم صلب:

اولین تکنیک برای توسعه جسم صلب، ضمیمه کردن یک نقطه به جسم صلب است.

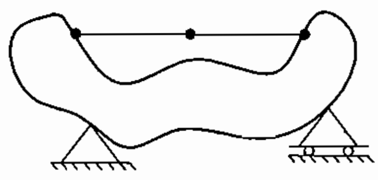
فرض کنید یک جسم صلب داریم که یک نقطه در نزدیکی آن قرار دارد. این نقطه می‌تواند هر گونه جابجایی نسبت به جسم صلب داشته باشد. حال با قرار دادن یک میله، بین نقطه و جسم صلب، جابجایی‌های این نقطه را مقید می‌کنیم. پس از اعمال این قیر نقطه فقط می‌تواند روی محیط دایره‌ای به شعاع میله جابجایی داشته باشد.



حال اگر یک میله دیگر بین نقطه مورد نظر و جسم صلب قرار دهیم نقطه محدودتر شده و فقط در یک نقطه می‌تواند قرار بگیرد (به دلیل این موضوع فکر کنید)



در روش ضمیمه کردن یک نقطه به جسم صلب یک شرط هندسی داریم و آن این که دو میله هم‌راستا نباشند، زیرا در این صورت جسم مورد نظر ناپایدار آنی خواهد بود.



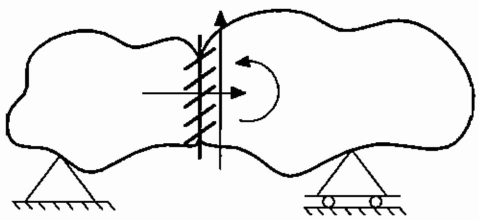
نتیجه: استفاده از دو میله غیرهم‌راستا می‌توان یک نقطه را به یک جسم صلب اضافه کرده و سازه‌ای پایدار به‌دست آورد.

۲ـ ترکیب دو جسم صلب:

ترکیب دو جسم صلب به سه روش انجام می‌پذیرد:

الف) توسط اتصال گیردار:

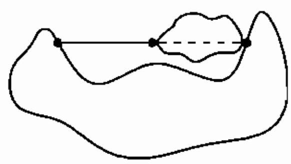
اتصال گیردار باعث می‌شود که دوجسم نسبت به هم حرکت انتقالی و دورانی نداشته باشند و پس از ترکیب نیز صلب باشند. (حال جسم صلب جدید، با 3 واکنش تکیه‌گاهی پایدار می‌شود.)



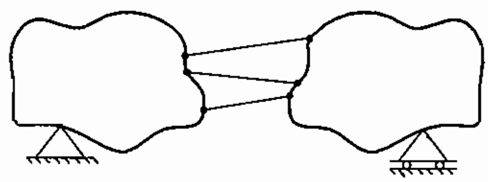
ب) توسط مفصل و یک میله:

اگر دو جسم صلب توسط مفصل به یکدیگر متصل شوند، جسم حاصل هنوز دارای یک درجه آزادی دورانی می‌باشد که این درجه آزادی نیز با قرار دادن یک میله بین دو جسم از بین می‌رود. حال جسم جدید، جسمی صلب بوده و با 3 واکنش تکیه‌گاهی پایدار می‌شود.

در این حالت هم شرط هندسی وجود دارد و آن این که راستای میله از مفصل عبور نکند چون در این صورت سازه ناپایدار آنی می‌شود.



ج) توسط سه میله:



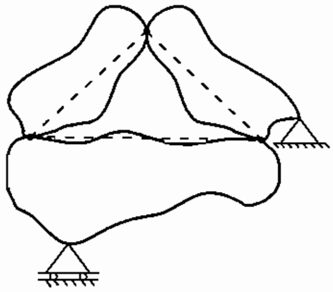
در این حالت هم شرط هندسی آن است که این سه میله موازی و متقارب نباشند.

۳ـ ترکیب سه جسم صلب:

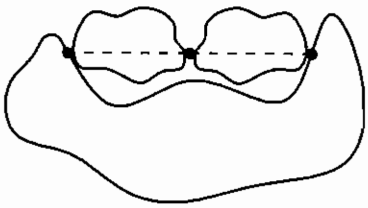
ترکیب سه جسم صلب به چهار روش انجام می‌شود.

الف) توسط سه مفصل:

جسم حاصل از این ترکیب فقط نیاز به ۳ واکنش تکیه‌گاهی برای پایداری دارد.

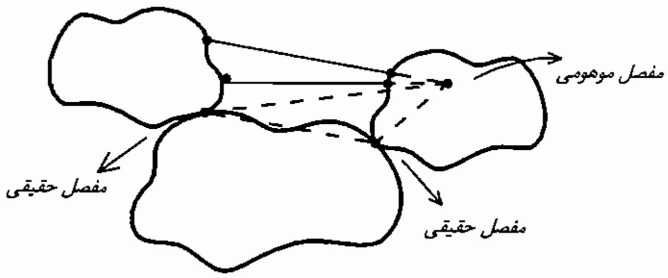


شرط هندسی این ترکیب هم آن است که سه مفصل در یک راستا نباشند. (ناپایداری آنی)



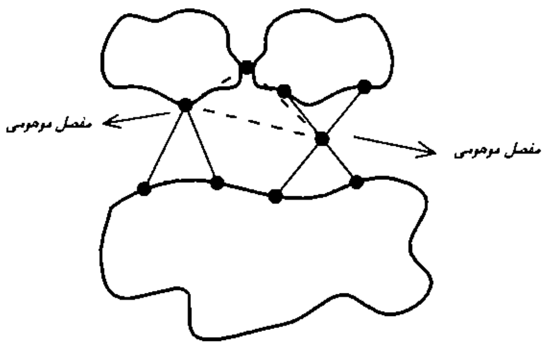
ب) توسط دو مفصل و دو میله:

شرط هندسی این حالت آن است که مفصل موهومی (محل تلاقی راستای دو میله) و مفاصل حقیقی در یک راستا نباشند (مثلث ایجاد کنند).



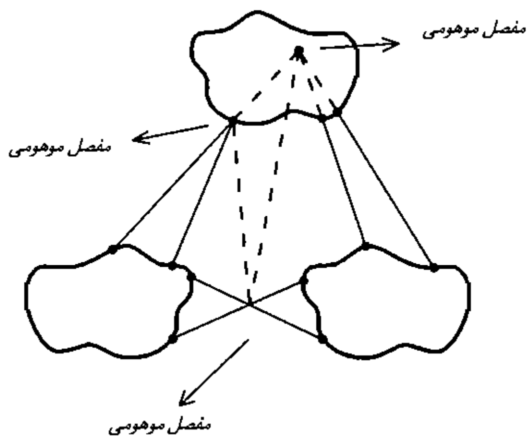
ج) توسط یک مفصل و ۴ میله:

شرط هندسی آن است که مفاصل موهومی و حقیقی در یک راستا نباشند. (مثلث ایجاد کنند)

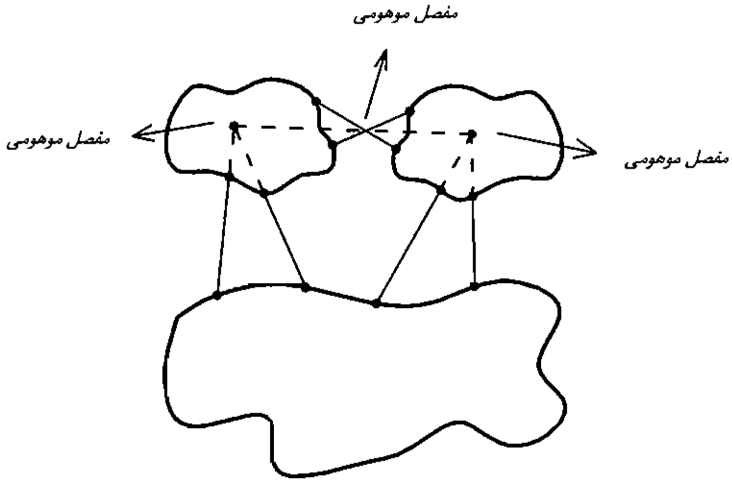


د) توسط ۶ میله:

شرط هندسی آن است که مفاصل موهومی و حقیقی در یک راستا نباشند (مثلث ایجاد کنند)



بطور مثال سازه زیر ناپایدار می‌باشد.



نکته مهم: توجه کنید که اگر بیش از اتصالات مورد نیاز (اتصالاتی که در بالا بررسی شد) در ترکیب اجسام صلب استفاده شود، به تعداد مؤلفه‌های اضافه، درجه نامعینی خواهیم داشت.

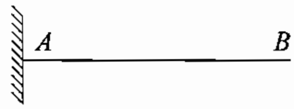
نکته مهم: اگر در ترکیب اجسام تعداد مؤلفه‌های اتصال کم باشد مجموعه حاصل صلب نبوده و دارای درجه آزادی داخلی خواهد بود. بدیهی است برای پایداری چنین اجسام غیرصلبی، 3 واکنش تکیه‌گاهی کفایت نخواهد کرد و تعدادمؤلفه‌های تکیه‌گاهی اضافی مورد نیاز برای پایدار کردن جسم، دقیقاً به تعداد مؤلفه‌هایی است که در ترکیب اجسام کم بود.

پس با عنایت به مطلب فوق، ملاحظه می‌شود که ممکن است سازه‌هایی به دست آید که علی‌رغم واکنش‌های تکیه‌گاهی بیش از 3 عدد همچنان معین استاتیکی هستند. دلیل این موضوع هم آن است که در این سازه‌ها، علاوه‌بر معادلات تعادل صفحه، معادلات شرطی نیز مؤثر می‌باشد. برای بررسی دقیق‌تر، کمی بحث را محدود کرده و در حالات زیر به بررسی پایداری و معینی سازه‌های مختلف می‌پردازیم.

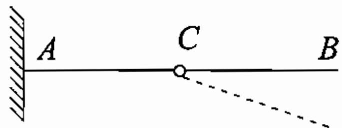
چند نکته در ارتباط با پایداری:

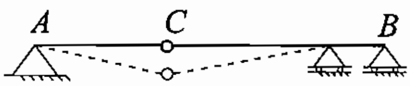
۱. پایداری و معینی تیرها

الف) پایداری تیرها: اگر یک تیر فاقد هرگونه اتصال داخلی خاص باشد (مثلاً اتصال مفصلی، غلتکی و ...) این تیر را می‌توان یک جسم صلب در نظر گرفت که با سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شود.

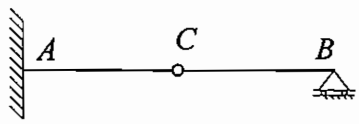


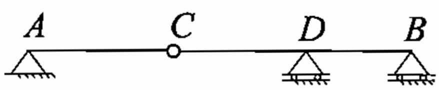
چنانچه مفصلی در تیر لحاظ شود در اثر بارگذاری، سازه دچار دوران صلب شده و ناپایدار خواهد شد.





دلیل این موضوع این است که در سازه‌های فوق سه واکنش تکیه‌گاهی مجهول وجود دارد ولی تعداد معادلات تعادل موجود چهار می‌باشد (در واقع یک معادله تعادل جدید یعنی $\sum M_C = 0$ به دلیل وجود مفصل در C اضافه شده است.) پس تعداد مجهولات برای ارضاء معادلات تعادل کافی نیست و سازه ناپایدار است. در این حالت، برای رفع ناپایداری، به یک مجهول اضافه (عکس‌العمل اضافه) نیاز است تا بتوان معادلات تعادل را ارضاء کرد. به‌طور مثال سازه‌های فوق را می‌توان بدین صورت پایدار کرد:





البته در اضافه کردن این واکنش اضافی باید توجه داشت که گاهی، مکانِ این واکنش اضافی می‌تواند در پایداری و ناپایداری سازه تأثیر داشته باشد مثلاً در سازه سمت چپ اگر تکیه‌گاه اضافی D سمت چپ C قرار گیرد نیز، همچنان سازه پایدار است ولی در سازه سمت راست اگر تکیه‌گاه اضافی D سمت چپ C قرار بگیرد تأثیری در پایداری سازه ندارد و سازه همچنان ناپایدار خواهد ماند.

حال فرض کنید در تیر صلب اولیه یک میله دو سر مفصل اضافه شود.

در این‌صورت تعداد معادلات تعادل 5 می‌شود چراکه یک معادله تعادل لنگر حول یکی از مفصل‌ها (مثلاً $\sum M_C = 0$) و همچنین یک معادله تعادل نیرو در جهت محور x ها $(\sum F_x = 0)$ سمت راست میله دوسر مفصل اضافه می‌شود. (قطعه CDB بر اثر یک نیرو افقی می‌تواند در راستای افق حرکت کند.) پس در این حالت برای ارضاء معادلات تعادل نیاز به دو عکس‌العمل اضافی هست پس این سازه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر پایدار کرد.

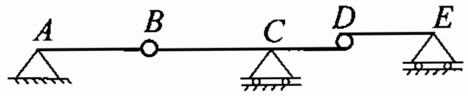
باز هم تأکید داریم که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باید آرایشی مناسب داشته باشند تا سازه پایدار گردد.

ب) معینی تیرها: به‌طور کلی اگر تعداد مجهولات موجود در سازه بیش از تعداد معادلات تعادل موجود باشد، معادلات تعادل برای به‌دست آوردن مجهولات کافی نبوده و در این‌صورت سازه را نامعین می‌نامند.

معادلات یا روابط شرطی:

همان‌طور که دیدیم، وقتی یک تیر صلب و پایدار با سه واکنش تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرمتقارب مفصل داخلی ایجاد کردیم، یک معادله به مسأله اضافه شد. به این معادله اضافی، معادله شرطی گفته می‌شود. شناخت این معادلات برای تعیین پایداری و معینی سازه‌ها لازم است پس در زیر انواع روابط شرطی بیان شده است.

۳ـ با دقت در قطعه DE، می‌توان به سادگی دریافت که در صورت وجود یک نیروی افقی خارجی، این قطعه دچار تغییر مکان افقی می‌شود لذا سازه ناپایدار است. البته اگر تکیه‌گاه E مفصلی شود هنوز سازه ناپایدار است چراکه قطعه BCD در اثر نیروی خارجی می‌توان به راحتی و بدون هیچ مانعی حول C دوران کند.

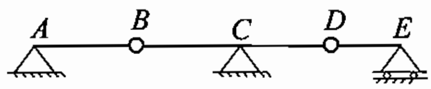


با دقت در این سازه می‌بینیم:

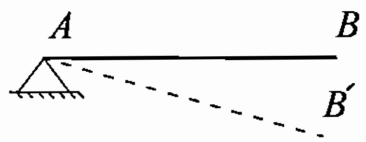
$$\begin{cases} R=4 \\ C=3 \end{cases} \Rightarrow \quad R<C+3$$

پس از همان ابتدا واضح بود که سازه قطعاً ناپایدار است. چون $R-(C+3)=-2$ می‌باشد لذا برای پایدار شدن این سازه دو واکنش اضافی لازم است. سعی کنید واکنش‌های مناسب را بیابید.

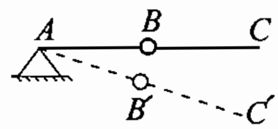
۴ـ



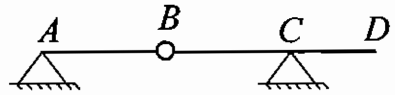
در این سازه هیچ‌کدام از قطعات پایدار نیست که بتوانیم بررسی را از آن‌جا شروع کنیم. با این حال بررسی از قطعه AB شروع می‌کنیم. این قطعه با تکیه‌گاه مفصلی در نقطه A پایدار نمی‌شود و در اثر بارگذاری دوران صلب دارد.



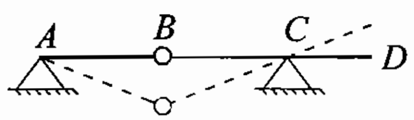
اگر به این قطعه، قطعه BD توسط یک مفصل نیز اضافه شود سازه مجدداً ناپایدار است.



حال تکیه‌گاه C را روی این قطعه در نظر می‌گیریم.

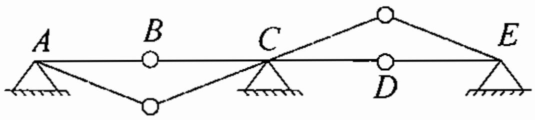


دقت کنید که در این سازه تعداد معادلات 4 تا (3 تا معادلات اصلی و یک معادله شرطی) و تعداد مجهولات نیز 4 تاست ولی این سازه همچنان ناپایدار است. در واقع هیچ مؤلفه‌ای برای جلوگیری از حرکت گره B به سمت پایین وجود ندارد.



حال قطعه DE را توسط یک گره به نقطه ناپایدار D متصل می‌کنیم.

واضح است که وجود تکیه‌گاه غلتکی در نقطه E نمی‌تواند ناپایداری نقطه D و قطعه DE و به‌طور کلی، ناپایداری کل سازه را از بین ببرد پس سازه ناپایدار است.



این سازه دارای پنج مجهول تکیه‌گاهی $(R = 5)$ و پنج معادله (3 تا معادله اصلی و 2 رابطه شرطی) است ولی آرایش هندسی نامناسب تکیه‌گاه‌ها پایداری سازه را تضمین نمی‌کند.

۲. پایداری و معینی خرپاها

هر خرپا از اتصال چندین میله که توسط چند گره به هم متصل شده‌اند تشکیل شده است. با توجه به این‌که هر میله در خرپا فقط تحمل کشش یا فشار را دارد لذا هر میله یک عضو دو نیرویی است؛ بنابراین، هر میله به عنوان یک مجهول در سازه در نظر گرفته می‌شود بنابراین، اگر خرپا b میله داشته باشد تعداد مجهولات خرپا $(b+r)$ می‌باشد که r نیز تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است. از طرفی چون در هر کدام از گره‌ها باید دو معادله تعادل $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ ارضاء شده باشد (دقت داریم در هر گره از خرپا معادله $\sum M = 0$ همواره ارضاء می‌شود.) لذا اگر تعداد گره‌های خرپا j باشد تعداد معادلات سازه $2j$ می‌باشد؛ پس، با توجه به بحث‌های ارائه شده در تیرها، می‌توان در خرپاها نوشت:

۱) اگر $b + r < 2j$ باشد (یعنی تعداد مجهولات از تعداد معادلات کمتر باشد) خرپا قطعاً ناپایدار است (چراکه مجهول کافی برای ارضاء معادلات وجود ندارد.)

۲) اگر $b + r = 2j$ باشد (تعداد معادلات = تعداد مجهولات) شرط لازم برای پایداری سازه وجود دارد ولی پایداری هندسی سازه باید بررسی شود.

۳) اگر $b + r > 2j$ باشد (یعنی تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر باشد) در این‌صورت خرپا نامعین است. در این‌صورت درجه نامعینی خرپا برابر با $(b + r) - 2j$ می‌باشد. البته باید دقت داشت در این‌صورت نیز برای بررسی پایداری، مجدداً پایداری هندسی بررسی شود.

در بررسی پایداری هندسی خرپاها می‌توان از ترکیب اجسام صلب استفاده کرد. به‌طور کلی خرپاهایی که برای تشکیل آن‌ها از روش توسعه مثلثی استفاده می‌شود خرپای ساده گوییم. برای این منظور یک مثلث را به عنوان جسم صلب در نظر گرفته و سپس با ضمیمه کردن یک گره به وسیله دو میله، مثلث صلب اولیه را بزرگ‌تر می‌کنیم. البته باید توجه داشت از هر میله نباید بیش از یکبار استفاده کرد. خرپاهای ساده اجسامی صلب هستند و با سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شوند. به‌طور مثال به تشکیل خرپای ساده زیر دقت کنید. این خرپا با واکنش‌های نشان داده شده پایدارند.

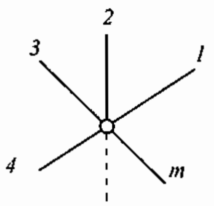
معادلات یا روابط شرطی:

انواع روابط شرطی:

هرگاه، حالت‌های زیر در سازه‌ای مشاهده شد، تعداد روابط شرطی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

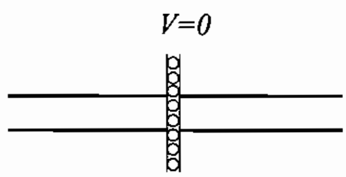
۱ـ مفصل داخلی:

هرگاه یک مفصل داخلی، m جسم صلب را به یکدیگر متصل سازد، این مفصل دارای $(m-1)$ رابطه شرطی مستقل است:

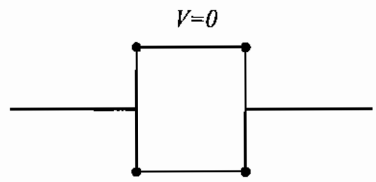


$\Rightarrow$ تعداد روابط شرطی $=(m-1)$

۲ـ انفصال برشی (مفصل برشی):

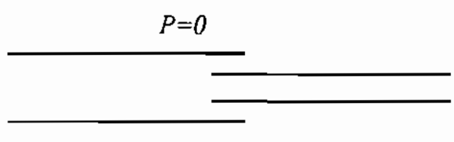


یا

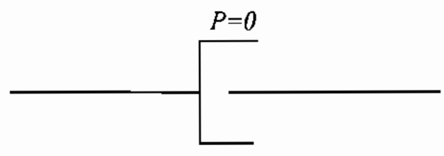


این مفصل، برش را منتقل نمی‌کند پس یک مؤلفه اتصال کم دارد پس تعداد روابط شرطی آن 1 می‌باشد.

۳ـ اتصال تلسکوپی:

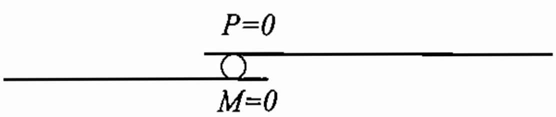


یا

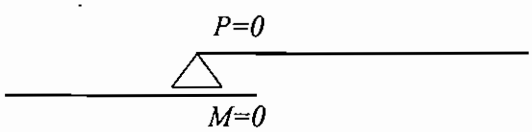


این اتصال نیروی محوری را منتقل نمی‌کند پس تعداد روابط شرطی آن 1 می‌باشد.

۴ـ غلتک داخلی:



یا



این اتصال نیروی محوری و لنگر را منتقل نمی‌کند پس تعداد روابط شرطی آن ۲ می‌باشد.

با توجه به بحث‌های مطرح شده در مورد پایداری معینی تیرها می‌توان به‌صورت زیر بحث کرد:

اگر در یک تیر R، تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی و C، تعداد معادلات شرطی باشد در این‌صورت می‌توان گفت:

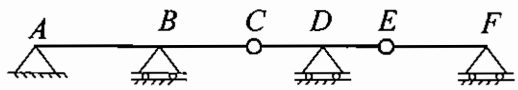
۱ـ اگر $R < C + 3$ باشد تیر قطعاً ناپایدار است چراکه تعداد مجهولات برای ارضای معادلات کافی نیستند.

۲ـ اگر $R = C + 3$ تیر معین است، در این حالت تعداد واکنش‌ها برای ارضای معادلات کافی است ولی باید ناپایداری هندسی سازه نیز بررسی شود. (مجهولات موازی و متقارب نباشند و در مکان مناسب قرار داشته باشند.)

۳ـ اگر $R > C + 3$ تیر نامعین است و درجه نامعینی سازه برابر $R - (C + 3)$ می‌باشد. در مورد پایداری نیز مانند مورد 2 باید ناپایداری هندسی بررسی شود.

در واقع روابط فوق فقط شرط لازم برای پایداری تیر را در نظر می‌گیرند ولی برای بررسی شرط کافی می‌توان با شروع از یک قسمت پایدار سازه وضعیت پایداری سازه را به‌صورت جزء به جزء بررسی کرد. در زیر به بررسی جزء به جزء پایداری چند تیر می‌پردازیم.

۱ـ

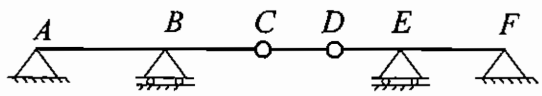


در این تیر، قسمت ABC یک تیر صلب است که با استفاده از سه واکنش غیرمتقارب و غیرموازی پایدار شده است. حال اگر قطعه CE را به کمک یک مفصل به قطعه قبلی اضافه کنیم سازه به‌دست آمده پایدار نخواهد بود. این به دلیل وجود یک شرط اضافی به دلیل مفصل داخلی در C می‌باشد پس برای پایدار شدن نیاز به یک واکنش اضافی دارد که تکیه‌گاه D این واکنش اضافی را تأمین می‌کند. مجدداً با اضافه شدن قطعه EF با کمک یک مفصل، نیاز به تکیه‌گاه غلتکی دیگری هست که در F قرار گرفته است پس این سازه یک سازه پایدار است. برای یافتن درجه معینی سازه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} R = 5 \\ C = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad R = C + 3$$

پس سازه مذکور علاوه بر پایداری، معین نیز هست.

۲ـ



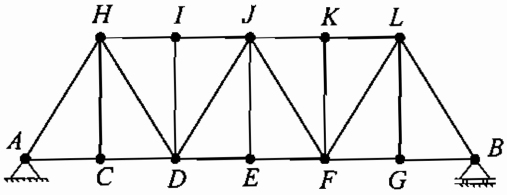
در این سازه دو تیر AC و DF به دلیل داشتن سه واکنش تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرمتناوب پایدارند پس انتهای C و D از این دو تیر نقاط پایداری هستند. حال قطعه CD به کمک دو مفصل به این دو نقطه پایدار اضافه می‌شود پس کل سازه پایدار است. حال معینی یا نامعینی سازه را بررسی می‌کنیم.

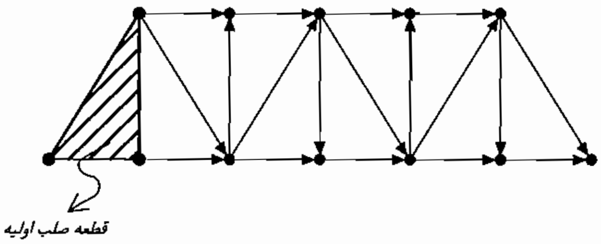
$$\begin{cases} R = 6 \\ C = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad R > C + 3 \quad \Rightarrow \quad \text{سازه نامعین}$$

$$\text{درجه نامعینی} = R - (C + 3) = 6 - (3 + 2) = 1$$

پس سازه پایدار و یک درجه نامعین است.

توجه داشته باشید که در سازه فوق اگر تکیه‌گاه مفصلی F به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌شود پایداری سازه به هم نمی‌خورد و سازه نیز معین می‌شد.





با دقت در این خرپا ملاحظه می‌شود تعداد معادلات و مجهولات با هم برابرند:

$$\begin{cases} b=21 \\ r=3 \\ j=12 \end{cases} \Rightarrow \ b+r=2j \ \Rightarrow \ 21+3=2\times 12$$

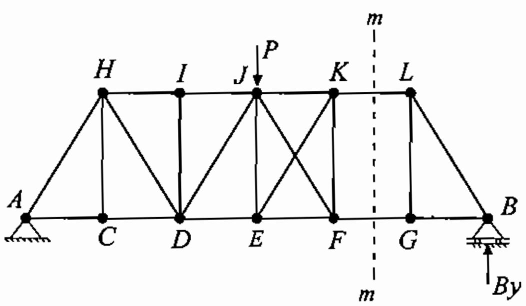
توجه : خرپاهای دیگری نیز وجود دارد که به‌صورت فوق ایجاد نمی‌شود. اگر خرپایی از ترکیب چند خرپای ساده به‌وسیله روش‌های مختلف اتصال قطعات صلب ایجاد شود به آن خرپای مرکب گویند. خرپایی که نه ساده است و نه مرکب نیز خرپای بغرنج نامیده می‌شود.

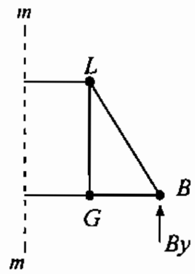
برای بررسی از وضعیت هندسی در پایداری خرپا

فرض کنید در خرپای مثال قبل قطعه LF را حذف کرده و بین گره‌های K و E قرار دهیم. با این کار تعداد میله‌ها و واکنش‌ها تغییری نمی‌کند (یعنی تعداد معادلات و مجهولات تغییری ندارند.) ولی در زیر می‌بینیم که این خرپا، سازه‌ای پایدار نیست.

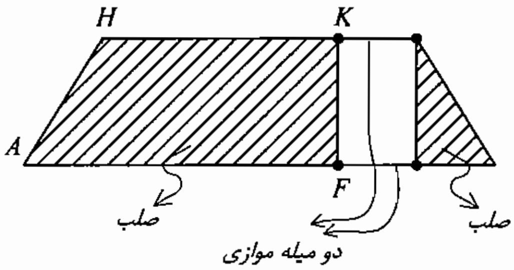
فرض کنید نیروی P به‌صورت قائم به گره j وارد شود. بدیهی با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه A، تکیه‌گاه B دارای یک واکنش قائم مانند B_y خواهد بود.

حال فرض کنید مقطعی در نظر بگیریم که دو میله KL و FG را قطع کند (مقطع mm). با نوشتن معادله تعادل در راستای قائم $\left(\sum F_y = 0\right)$ ملاحظه می‌شود در سازه جدا شده سمت راست هیچ مؤلفهٔ نیرویی برای خنثی کردن نیروی B_y نیست پس در این حالت، خرپای مورد نظر ناپایدار است. پس ملاحظه می‌شود با وجود برابری تعداد معادلات و مجهولات، یک خرپا می‌تواند ناپایدار باشد و این به دلیل آریش هندسی نامناسب اعضا است.

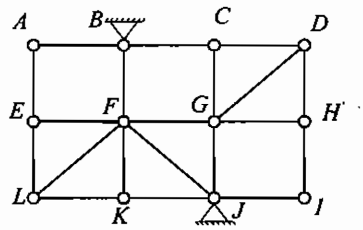




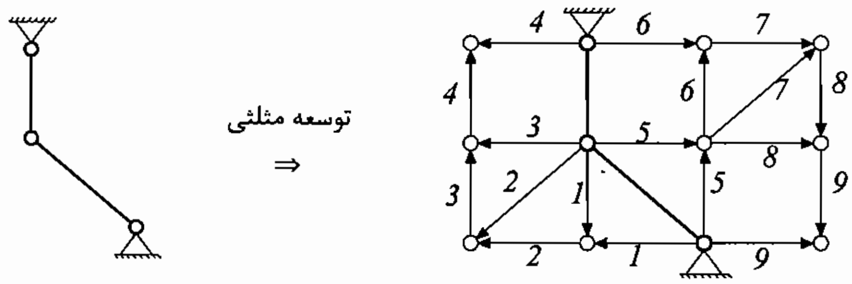
البته ناپایداری این سازه را می‌توانستیم از طریق ترکیب اجسام صلب نیز بررسی کنیم. بدیهی است قطعات AHKFA و LGBL قطعاتی صلب و پایدارند. حال در سازه فوق، دو قطعه صلب توسط دو میله موازی به هم وصل شده‌اند که طبق بحث انواع اتصالات، این دو میله قید لازم برای پایداری سازه کل نیستند. (به‌خاطر داریم یکی از روش‌های اتصال دوقطعه صلب، سه میله غیرمتقارب و غیرموازی بود.)



طبق این مثال می‌توان گفت عدم وجود عضو قطری در سازه، پایداری سازه را برهم زده است. در مورد خرپاها باید به این نکته توجه داشت که همیشه عدم وجود اعضای قطری سبب ناپایداری خرپا نمی‌شود چراکه پایداری یک خرپا می‌تواند به تکیه‌گاه‌های آن نیز بستگی داشته باشد. در این خصوص به خرپای زیر توجه کنید:



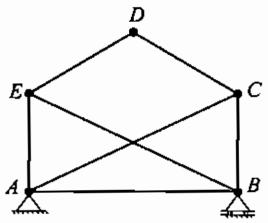
علی‌رغم شکل ظاهری، این خرپا، یک خرپای پایدار است. حال به بررسی این خرپا می‌پردازیم.
واضح است که با توجه به مفصلی بودن تکیه‌گاه‌های B و J، می‌توان توسط دو میله متصل به آن‌ها، گره F را مقید کرد. حال با توجه به روش توسعه مثلثی می‌توان با اضافه کردن دو میله و یک گره، یک خرپای پایدار تشکیل داد.



توسعه مثلثی در ۹ مرحله انجام شده است که روی شکل مشخص شده است. همان‌طور که دیدیم در این سازه پایداری خرپا، به آرایش تکیه‌گاه‌ها بستگی دارد.

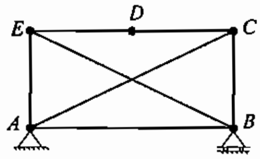
در زیر به پایداری و معینی چند خرپای ساده توجه کنید:

۱ـ این خرپا پایدار و معین است. هیچ آرایش نامناسبی در اعضا و تکیه‌گاه‌ها برای برهم خوردن پایداری وجود ندارد.



$$\begin{cases} b=7 \\ r=3 \\ j=5 \end{cases} \Rightarrow \quad b+r=2j$$

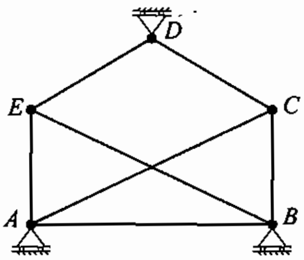
۲ـ این خرپا، همان خرپای بالاست با این تفاوت که اعضای ED و DC در یک راستا قرار دارند. علی‌رغم این‌که داریم:



$$\begin{cases} b=7 \\ r=3 \\ j=5 \end{cases} \Rightarrow \quad b+r=2j$$

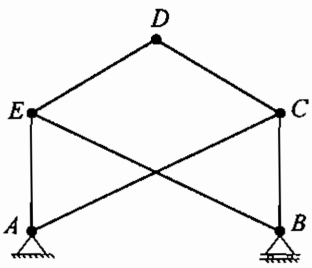
ولی وجود سه مفصل در یک راستا، سبب ناپایداری خرپا می‌شود پس خرپا ناپایدار است. (هیچ واکنشی برای پایدار کردن گره D در مقابل تغییر مکان قائم آن وجود ندارد.)

۳ـ این خرپا هم همان خرپای اول است با این تفاوت که واکنش افقی تکیه‌گاه A حذف شده و به جای آن یک تکیه‌گاه غلتکی در D قرار گرفته است. در این سازه نیز با وجود برقراری رابطه $b+r=2j$، با توجه به این‌که هیچ قیدی در مقابل حرکت افقی سازه وجود ندارد، سازه ناپایدار است. در این سازه آرایش نامناسب تکیه‌گاه‌ها سبب ناپایداری شد. (سه عکس‌العمل موازی.)



$$\begin{cases} b=7 \\ r=3 \\ j=5 \end{cases}$$

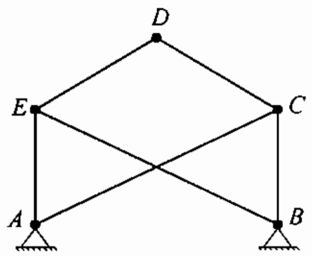
۴ـ این خرپا همان خرپای اول است که عضو AB از آن حذف شده است. با بررسی معادلات و مجهولات این سازه خواهیم داشت:



$$\begin{cases} b=6 \\ r=3 \\ j=5 \end{cases} \Rightarrow \quad b+r<2j$$

از این نامعادله می‌توان دریافت که در این خرپا، اعضای کافی به منظور حفظ پایداری وجود ندارد و سازه ناپایدار است.

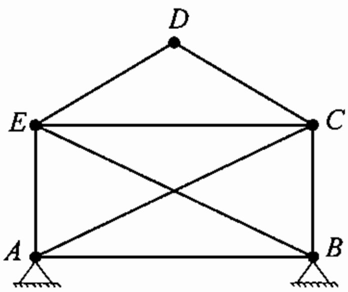
۵ ـ این خرپا همان خرپای بالایی است با این تفاوت که یک واکنش افقی در تکیه‌گاه B اضافه شده است.



$$\begin{cases} b=6 \\ r=4 \\ j=5 \end{cases} \Rightarrow \quad b+r=2j$$

ملاحظه می‌شود که این واکنش اضافی سبب ارضاء معادله $b + r = 2j$ شده و خرپا پایدار می‌شود؛ پس، این خرپا پایدار و معین است. دقت داریم وضعیت هندسی سازه نیز سبب ناپایداری نمی‌شود.

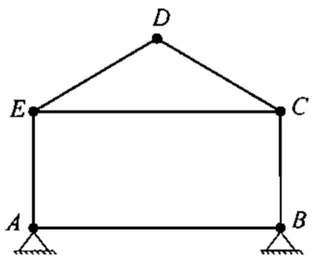
۶ـ در این خرپا داریم $b + r > 2j$ پس خرپا نامعین می‌باشد. در مورد پایداری هم هیچ ترکیب نامناسب اعضا یا تکیه‌گاه‌ها وجود ندارد لذا خرپا پایدار و نامعین است و درجه نامعینی آن برابر است با:



$$\begin{cases} b=8 \\ r=4 \\ j=5 \end{cases} \qquad \text{درجه نامعینی} = b+r-2j = 2$$

با توجه به مثال‌های مطرح شده می‌توان برای معین شدن سازه تغییرات مناسب را تعیین کرد.

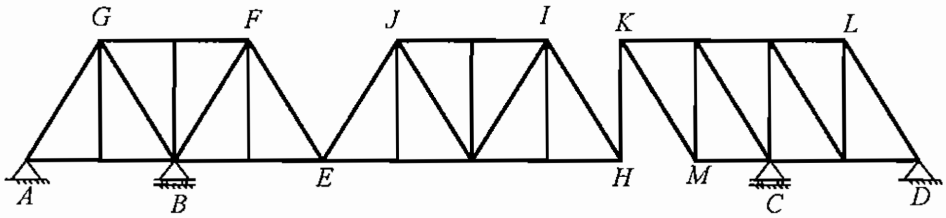
۷ـ در این خرپا نیز رابطه $b + r = 2j$ برقرار است ولی خرپا ناپایدار است.



$$\begin{cases} b=6 \\ r=4 \\ j=5 \end{cases}$$

دلیل این موضوع آن است که هیچ عضو قطری در قسمت ABCD وجود ندارد لذا در صورت اعمال یک نیروی افقی در قسمت EDC سازه ناپایدار خواهد شد. دقت داشته باشید که قطعه ECD یک قطعه پایدار است و با توجه به این‌که اعضای خرپا فقط اعضای دو نیرویی هستند لذا این قطعه توسط دو نیروی قائم ناشی از قطعات AE و BC نگه داشته شده است که این دو نیرو قید لازم برای پایداری قطعه ECD را تأمین نمی‌کند. در این خرپا، قطعه AB هیچ نقشی در تأمین پایداری ندارد یعنی با حذف این عضو، هیچ تغییری در وضعیت سازه ایجاد نمی‌شود. اگر این قطعه حذف و به جای آن قطه EB یا AC را قرار دهیم سازه پایدار خواهد شد. در واقع مکان نامناسب یک قطعه، سبب ناپایداری سازه شده است.

مثال : پایداری و معینی خرپای زیر را بررسی کنید.



این خرپا یک خرپای مرکب است چراکه از اتصال چند خرپای ساده تشکیل شده است. خرپاهای AGFE، EJIH و KMDL خرپاهای ساده هستند. ابتدا رابطه $b + r = 2j$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} b = 40 \\ r = 6 \quad \Rightarrow \quad b + r = 2j \\ j = 23 \end{cases}$$

پس شرط لازم برای پایداری و معینی سازه وجود دارد. حال پایداری سازه را بررسی می‌کنیم.
قطعه AGFE یک خرپای ساده است و با سه واکنش تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شود پس تکیه‌گاه‌های A و B پایداری AGFE را تأمین می‌کند. به همین ترتیب تکیه‌گاه‌های C و D پایداری قطعه KMDL را تأمین می‌کند. با توجه به پایداری این دو قطعه می‌توان گفت گره‌های E و K گره‌هایی ثابت هستند. حال قطعه EJIH را از طریق مفصل E به قطعه سمت چپ متصل می‌کنیم. در این‌صورت خرپای وسط دارای دوران خواهد بود. برای جلوگیری از دوران این قطعه یک نیروی عکس‌العمل که از مفصل E نمی‌گذرد کافی خواهد بود که این نیرو توسط قطعه KH که به مفصل ثابت K وصل است ایجاد می‌شود. پس این سازه معین و پایدار است.

۳. پایداری و معینی قاب‌ها

قاب‌ها از اتصال تیرها و ستون‌ها تشکیل می‌شوند. در اعضای قاب‌ها سه مجهول نیروی محوری نیروی برشی و نیروی خمشی وجود دارد پس هر عضو قاب دارای 3 مجهول است؛ لذا، در یک قاب تعداد مجهولات به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

تعداد مجهولات در قاب $= 3b + r$

که در آن b : تعداد اعضا و r : تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی می‌باشند.

از طرفی چون اتصالات صلب موجود در قاب‌ها، خمش نیز تحمل می‌کند لذا برای بررسی تعادل یک اتصال باید سه معادلهٔ تعادل در راستای محور x ها، تعادل در راستای محور y ها و تعادل خمشی را بررسی کنیم پس هر اتصال صلب دارای 3 معادله است یعنی تعداد معادلات برابر $3j$ است که j تعداد اتصالات صلب می‌باشد. البته در قاب‌ها نیز روابط شرطی وجود دارد لذا می‌توان گفت:

تعداد معادلات در قاب‌ها $= 3j + C$

که در آن j : تعداد اتصالات صلب و C : تعداد روابط شرطی می‌باشد؛ پس مانند دو نوع سازه قبل می‌توان گفت:

۱ـ اگر $3b + r < 3j + C$ باشد قاب قطعاً ناپایدار است. (تعداد مجهولات برای ارضای پایداری کافی نمی‌باشد.)

۲ـ اگر $3b + r = 3j + C$ باشد قاب معین است و شرط لازم برای پایداری وجود دارد؛ ولی، برای بررسی پایداری باید، ناپایداری هندسی نیز بررسی شود.

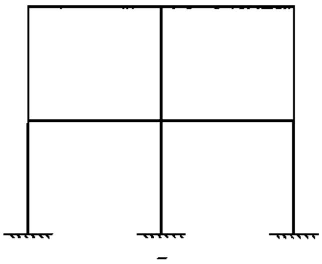
۳ـ اگر $3b + r > 3j + C$ باشد قاب نامعین است ولی پایداری سازه باید مجدداً بررسی شود چراکه ممکن است آرایش اعضاء و واکنش‌های تکیه‌گاهی مناسب نباشد. درجه نامعینی این قاب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

درجه نامعینی $= (3b + r) - (3j + C)$

برای یافتن روابط شرطی نیز مانند قبل عمل می‌کنیم.

در زیر پایداری و درجه معینی چند قاب را بررسی می‌کنیم:

۱ـ در این سازه داریم:

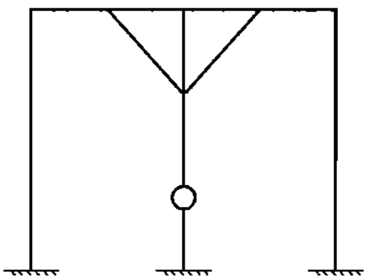


$$\begin{cases} b=10 \\ r=9 \\ j=9 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow (3b+r) > (3j+C)$$

بنابراین سازه شرط لازم برای پایداری را دارد. از نظر هندسی نیز، پایداری سازه تأمین است. پس درجه نامعینی سازه برابر است با:

$\text{درجه نامعینی سازه} = (3b+r)-(3j+C) = 39-27 = 12$

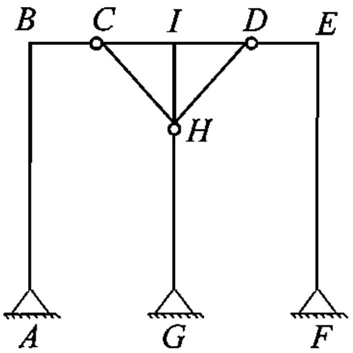
۲ـ در این سازه می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} b=10 \\ r=9 \\ j=9 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow (3b+r) > (3j+C)$$

بنابراین سازه شرط لازم برای پایداری را دارد. از نظر هندسی نیز، پایداری سازه تأمین است پس درجه نامعینی سازه برابر است با:

$\text{درجه نامعینی سازه} = (3b+r)-(3j+C) = 39-28 = 11$

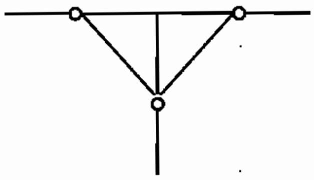


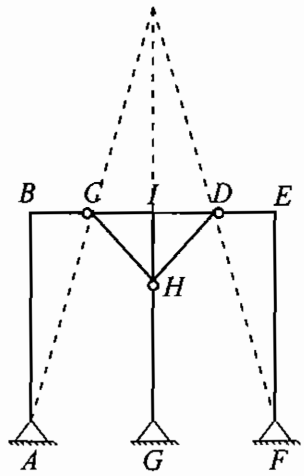
$$\begin{cases} b=10 \\ r=6 \\ j=9 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow (3b+r) > (3j+C)$$

برای یافتن تعداد روابط شرطی دقت داریم که به هر مفصل دو عضو متصل است (به نوع اتصال دقت کنید.) پس هر مفصل یک رابطه شرطی دارد.

سازه شرط لازم برای پایداری را دارد. حال پایداری هندسی سازه را بررسی می‌کنیم.

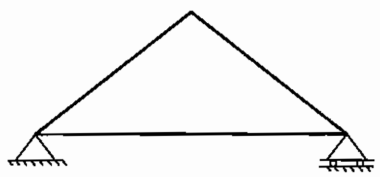
دقت کنید قطعات BAC، DEF و GH قطعاتی دو نیرویی هستند پس نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A، G و F به ترتیب در امتداد AC، GH و DF می‌باشند. لذا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متقارب‌اند پس سازه مورد نظر ناپایدار است. دقت داشته باشید که اگر نیرویی به قطعه CDH وارد شود که در امتداد AC، GH یا DF نباشد این قطعه دچار دوران صلب خواهد شد.





نکته : در تعیین درجه نامعینی قاب‌ها می‌توان از روش کادر بسته استفاده کرد، بدین صورت که در قاب‌های مسطح هر کادر بسته دارای 3 درجه نامعینی است.

به‌طور مثال سازه زیر که شامل یک کادر بسته است دارای سه درجه نامعینی است. البته این موضوع را با روش قبلی نیز می‌توان به‌دست آورد که در زیر آورده شده است:



$$\begin{cases} b=3 \\ r=3 \\ j=3 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \ (3b+r)-(3j+C)=12-9=3$$

در روش کادر بسته، اگر تعداد کادرهای بسته M و تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه r باشند تعداد مجهولات برابر است با:

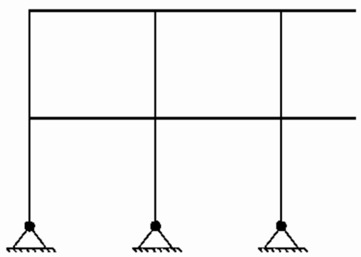
تعداد مجهولات $= 3M + r$

تعداد معادلات در این روش برابر است با:

تعداد معادلات $= C + 3$

C : تعداد روابط شرطی می‌باشد.

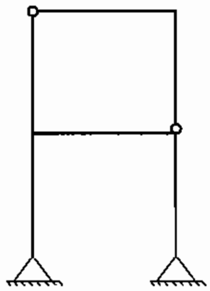
نکته : در تعیین درجه نامعینی یک قاب به روش شمارش، اعضاء طره را نباید در شمارش در نظر گرفت چراکه نیروهای داخلی این اعضا به‌طور مستقل قابل محاسبه‌اند. به‌طور مثال به سازه زیر دقت کنید:



$$\begin{cases} b=10 \\ r=6 \\ j=9 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = 36-27=9$$

مثال : درجه نامعینی سازه‌های زیر را بیابید.

روش اول:



$$\begin{cases} b=6 \\ r=4 \\ j=6 \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C)=22-20=2$$

روش دوم:

$$\begin{cases} M=1 & \text{تعداد کادر بسته} \\ r=4 \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3M+r)-(C+3)=7-5=2$$

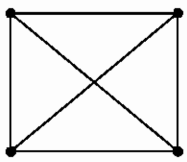
نکته : در تعیین درجه نامعینی سازه با روش کادر بسته اگر اعضاء از روی هم رد شوند یافتن تعداد کادرهای بسته به سختی معلوم می‌شود. برای این منظور از تئوری گراف‌ها به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{تعداد کادرهای بسته مستقل} = M-N+1$$

که در آن؛ M : تعداد اعضا و N : تعداد گره می‌باشد و یا به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{تعداد کادرهای بسته مستقل} = \text{تعداد نواحی محصور} - \text{عدد تلاقی}$$

به سازه زیر دقت کنید. در این سازه اعضای قطری از روی هم عبور می‌کنند و با هم اتصال ندارند. در این سازه تعداد گره‌ها چهار و تعداد اعضاء شش می‌باشد پس:



$$\text{تعداد کادرهای بسته مستقل} = 6-4+1=3$$

یا به عنوان روش دوم، تعداد نواحی محصور چهار و عدد تلاقی یک می‌باشد پس:

$$\text{تعداد کادرهای بسته مستقل} = 4-1=3$$

تعیین درجه نامعینی سازه‌های فضایی (سه‌بعدی)

۱ـ خرپای فضایی: می‌دانیم در خرپاها هر عضو یک مجهول ایجاد می‌کند (چون اعضای خرپاها، اعضای یک نیرویی هستند) پس تعداد مجهولات یک خرپای فضایی برابر است با:

تعداد مجهولات خرپای فضایی $= b + r$

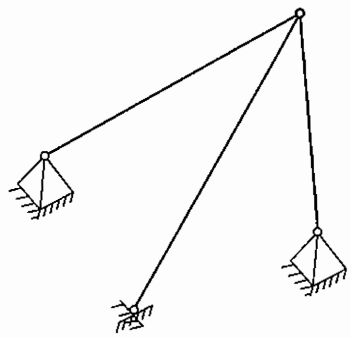
که در آن؛ b : تعداد اعضای خرپا و r : تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی می‌باشد. (در تعیین تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی از بخش انواع تکیه‌گاه‌های فضایی استفاده کنید.)

از طرفی چون گره‌ها توان تحمل گشتاور خمشی را ندارند پس معادله تعادل لنگر در همه گره‌ها برقرار است لذا در هر کدام از گره‌ها باید سه معادله تعادل $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ و $\sum F_z = 0$ برقرار باشد. پس تعداد معادلات در خرپای سه بعدی برابر است با:

تعداد معادلات خرپای فضایی $= 3j$

که در آن؛ j تعداد گره‌های خرپا می‌باشد. پس:

درجه نامعینی خرپای فضایی $= b + r - 3j$



$$\begin{cases} b = 3 \\ r = 3 + 3 + 6 = 12 \\ j = 4 \end{cases}$$

درجه نامعینی خرپای فضایی $= (3 + 12) - (3 \times 4) = 3$

۲ـ قاب‌های فضایی: در قاب‌های فضایی هر عضو دارای 6 مجهول است پس تعداد مجهولات قاب‌های فضایی برابر است با:

تعداد مجهولات قاب‌های فضایی $= 6b + r$

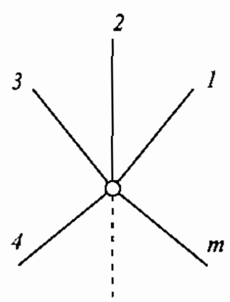
که در آن؛ b : تعداد اعضای قاب فضایی و r : تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی قاب فضایی می‌باشد.

از طرفی در هر گره از قاب فضایی، 6 معادله تعادل باید برقرار باشد؛ (سه معادله تعادل نیرو و سه معادله تعادل لنگر) پس:

تعداد معادلات قاب‌های فضایی $= 6j + C$

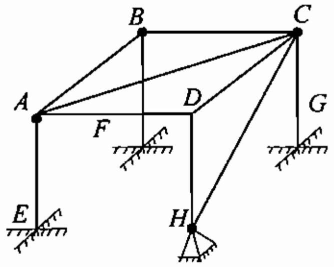
که در آن؛ j : تعداد گره‌های قاب فضایی و C : تعداد روابط شرطی قاب فضایی می‌باشد.

نکته : در تعیین روابط شرطی که اگر یک مفصل داخلی، m جسم صلب را به یکدیگر متصل کند (مثلاً m میله) در این‌صورت تعداد روابط شرطی برابر است با:



$\Rightarrow$ تعداد روابط شرطی $= 3(m-1)$

مثال : درجه نامعینی قاب فضایی زیر را به‌دست آورید:



$$\begin{cases} b=10 \\ r=6+6+6+3=21 \end{cases}$$

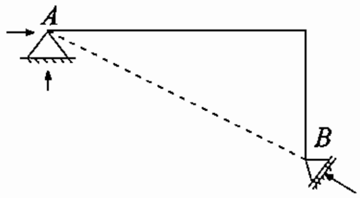
$$\begin{cases} j=8 \\ C=\underset{\substack{\downarrow \\ A}}{(1}+\underset{\substack{\downarrow \\ B}}{2}+\underset{\substack{\downarrow \\ C}}{4}+\underset{\substack{\downarrow \\ H}}{1)}\times 3=24 \end{cases}$$

درجه نامعینی قاب فضایی $=(6b+r)-(6j+C)=81-72=9$

مثال کلی از بخش پایداری و معینی سازه‌ها:

در سازه‌های زیر پایداری و معینی سازه را بررسی کنید:

۱)

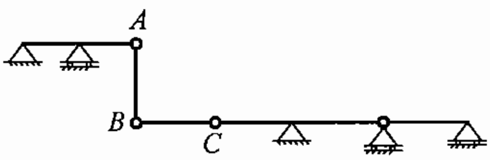


این سازه ناپایدار است چراکه عکس‌العمل‌های سازه از یک نقطه (نقطه A) می‌گذرند. در مورد سازه ناپایدار معمولاً معینی بررسی نمی‌شود ولی در صورت لزوم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} b=2 \\ r=3 \\ j=3 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C)=9-9=0$$

پس سازه معین است.

۲)

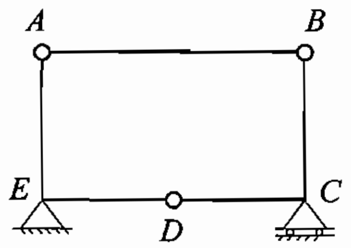


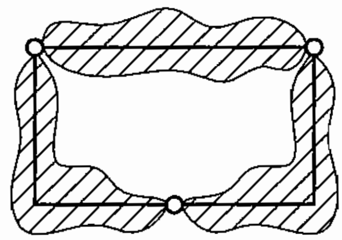
با توجه به نوع تکیه‌گاه‌های موجود در این سازه، نقاط A و C نقاط ساکنی هستند (جابه‌جایی ندارند) پس به این دو نقطه ساکن می‌توان گره‌ای توسط دو میله ضمیمه کرد که سازه جدید نیز سازه‌ای پایدار است. از طرفی در این سازه داریم:

$$\begin{cases} b=7 \\ r=7 \\ j=8 \\ C=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C)=28-28=0$$

پس در مجموع سازه پایدار و معین است.

۳) در این سازه قطعات AB، BCD و AED قطعات صلبی هستند که با سه مفصل به هم متصل شده‌اند، که با توجه به ترکیب اجسام صلب، سازه به‌دست آمده یک سازه صلب خواهد بود، (به ترکیب به جسم صلب توسط سه مفصل دقت کنید.) و با سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شود. از طرفی:

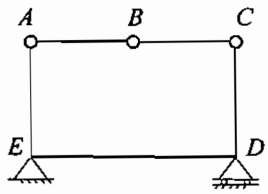


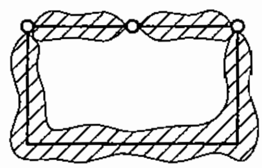


$$\begin{cases} b=5 \\ r=3 \\ j=5 \\ C=1+1+1=3 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C)=18-18=0$$

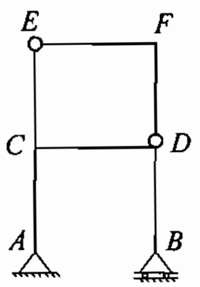
پس سازه پایدار و معینی است.

۴) در این سازه نیز قطعات AB، BC و AEDC قطعات صلبی هستند که توسط سه مفصل به هم متصل‌اند اما این اتصال شرط پایداری هندسی را ندارد چراکه سه مفصل در یک راستا هستند، لذا طبق بحث ترکیب اجسام صلب، این سازه ناپایدار آنی است. ملاحظه می‌شود که در این سازه هیچ قیدی برای جلوگیری از تغییر مکان قائم B وجود ندارد.





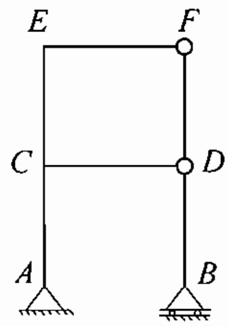
۵) در این سازه اگر قطعه EFD را حذف کنیم سازه باقی‌مانده پایدار است و با سه عکس‌العمل غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شود. حال قطعه EFD نیز توسط دو مفصل به قطعه صلب و پایدار قبلی متصل می‌شود که سازه حاصل نیز پایدار و صلب خواهد بود پس این سازه پایدار است. از طرفی:

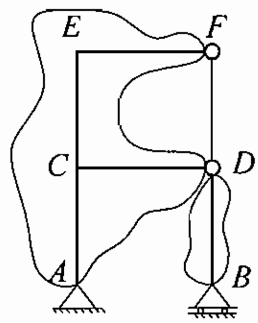


$$\begin{cases} b=6 \\ r=3 \\ j=6 \\ C=\underset{\substack{\downarrow\\ E}}{1}+\underset{\substack{\downarrow\\ D}}{1}=2 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C)=21-20=1$$

این سازه پایدار و یک درجه نامعین است. در مورد تعداد روابط شرطی در این سازه دقت داشته باشید که در گره D فقط دو قطعه صلب به گره متصل‌اند پس روابط شرطی در این مفصل فقط یکی است.

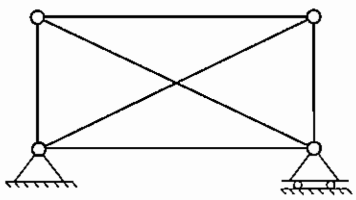
۶) در این سازه نیز قطعات DB و ACDEF قطعات صلبی هستند که توسط یک گره و یک میله به هم متصل شده‌اند ولی شرط هندسی لازم برای پایداری وجود ندارد چراکه مفصل مورد نظر در امتداد میله است پس سازه مورد نظر ناپایدار است.





دقت داشته باشید که گاهی اوقات برای تعیین ناپایداری سازه کافی است نیرویی بیابیم که در اثر اعمال آن سازه پایداری خود را از دست بدهد. در این سازه، به سادگی می‌توان دریافت که اگر نیرویی به‌طور افقی بر قطعه BD اعمال شود به دلیل غلتکی بودن تکیه‌گاه B، سازه ناپایدار می‌شود.

۷) سازه مورد نظر یک خرپاست که پایدار می‌باشد. در این سازه اعضای قطری از روی هم عبور می‌کنند و با هم اتصال ندارند. برای تعیین درجه نامعینی از چند روش استفاده می‌کنیم:



الف) روش شمارش خرپا:

$$\begin{cases} b=6 \\ r=3 \\ j=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j = 9-8 = 1$$

ب) روش شمارش قاب‌ها:

$$\begin{cases} b=6 \\ r=3 \\ j=4 \\ c=8 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+c) = 21-20 = 1$$

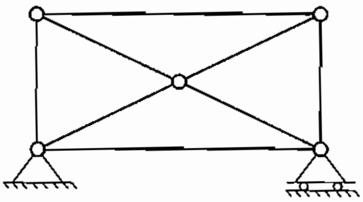
ج) روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m = 6-4+1 = 3 \\ r = 3 \\ c = 8 \end{cases} \quad \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 12-11 = 1$$

د) دقت کنید که در این خرپا، اگر قطعه AC حذف شود، خرپای مذکور یک خرپای ساده شده و با سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب پایدار و معین می‌شود. اضافه شدن یک قطعه به این خرپا باعث می‌شود که به تعداد مجهولات یک مرتبه اضافه شود پس سازه یک درجهٔ نامعین خواهد شد.

توجه: در مثال فوق داریم که یک خرپا را نیز می‌توان با روش قاب بررسی کرد.

۸) سازه شرایط یک خرپا را دارد. با چند روش درجه نامعینی خرپا را تعیین می‌کنیم:



الف) روش شمارش خرپا:

$$\begin{cases} b = 8 \\ r = 3 \\ j = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j = 11-10 = 1$$

ب) روش شمارش در قاب:

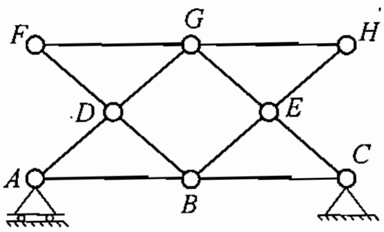
$$\begin{cases} b = 8 \\ r = 3 \\ j = 5 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+c) = 27-26 = 1$$

ج) روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m = 4 \ \text{تعداد کادرهای بسته} \\ r = 3 \\ c = 11 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 15-14 = 1$$

د) اگر میله AD را حذف کنیم، خرپای باقی‌مانده یک خرپای ساده است پس با سه عکس‌العمل غیرموازی و غیرمتقارب پایدار و معین می‌شود. حال با اضافه کردن قطعه AD به تعداد مجهولات یک مرتبه اضافه می‌شود پس خرپا یک درجه نامعین می‌گردد.

۹) در این خرپا داریم:



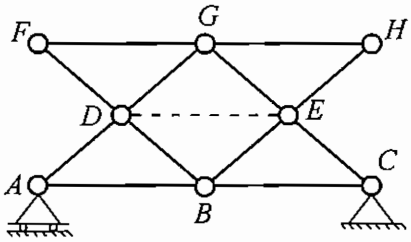
$$\begin{cases} b = 12 \\ r = 3 \\ j = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j = 15-16 = -1$$

پس سازه مذکور ناپایدار است. (اصطلاحاً گویند یک درجه ناپایدار است.)

برای پایدار کردن این سازه لازم است به تعداد مجهولات یک واحد اضافه شود. برای این‌کار می‌توان یک میله مناسب به خرپا اضافه کرد و یا یک واکنش تکیه‌گاهی به آن اضافه نمود. در زیر چند روش برای پایدار کردن خرپا را بررسی می‌کنیم:

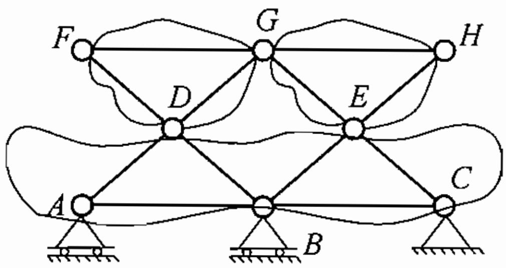
الف) اضافه کردن یک میله:

چنانچه به این خرپا هر کدام از میله‌های DE، HC یا AF را اضافه کنیم، خرپای مذکور یک خرپای ساده شده و با سه واکنش مذکور پایدار و معین می‌شود. در زیر یک حالت که اضافه شدن عضو DE است، ترسیم شده است. با استفاده از روش توسعه مثلثی، ساده بودن این خرپا را ثابت کنید.

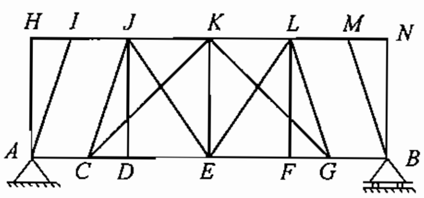


ب) اضافه کردن یک واکنش تکیه گاهی مناسب:

چنانچه تکیه‌گاه غلتکی B به این سازه اضافه شود در این‌صورت دو مثلث ADB و BEC به همراه واکنش‌های نشان داده شده جسمی پایدار خواهند بود. از طرفی مثلث‌های FGD و GEH به همراه واکنش‌های نشان داده شده جسمی پایدار خواهند بود. از طرفی مثلث‌های FGD و GEH نیز صلب هستند. این سه قطعه صلب توسط سه مفصل به هم متصل شده‌اند که در نهایت سازه‌ای پایدار ایجاد می‌کند.



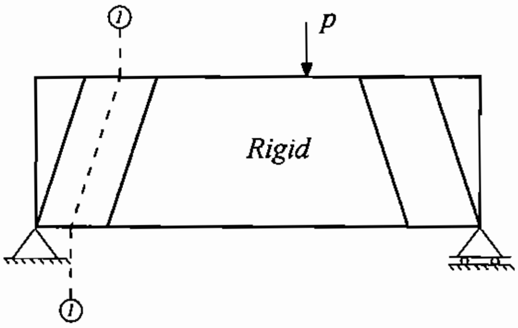
۱۰)



در این خرپا داریم:

$$\begin{cases} b=25 \\ r=3 \\ j=14 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j = 28-28=0$$

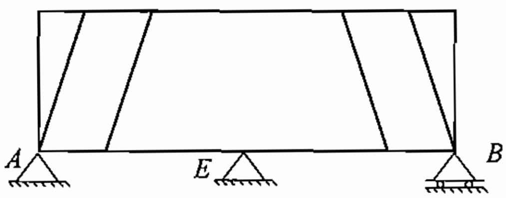
حال پایداری سازه را بررسی می‌کنیم. فرض کنید نیروی P به‌صورت زیر به سازه وارد شود. بدیهی است در صورت اعمال این بار، یک عکس‌العمل قائم در تکیه‌گاه A ایجاد می‌شود. در صورتی که مقطع ۱ـ۱ به‌صورت زیر ایجاد کنیم در قطعه سمت چپ هیچ عضوی وجود ندارد که این عکس‌العمل قائم را خنثی کند پس خرپای مذکور ناپایدار است.



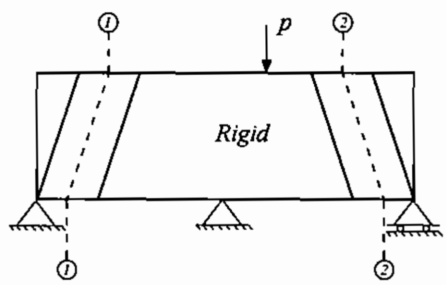
ملاحظه می‌شود که طبق روابط سازه شرط لازم را برای پایداری دارد ولی سازه ناپایدار می‌باشد. دلیل این ناپایداری آن است که قطعات خرپا که مجهولات مسأله را ایجاد می‌کنند آرایش هندسی مناسبی ندارند.

در سازه قبل (شماره ۹) دیدیم که با اضافه کردن واکنش تکیه‌گاهی مناسب و اعضای مناسب خرپا را پایدار کرد. در زیر به چند مورد از این حالات اشاره می‌کنیم:

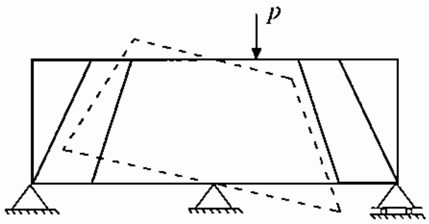
الف) فرض کنید یک تکیه‌گاه مفصلی در نقطه E اعمال شود. در این صورت چون به تعداد مجهولات مسأله دو مرتبه اضافه می‌شود لذا سازه از نظر معینی، دو درجه نامعین خواهد بود. دراین حالت می‌توان دید با وجود اضافه شدن دو مجهول هنوز سازه مذکور ناپایدار است. دلیل این امر آن است که واکنش‌های تکیه‌گاهی آرایش مناسبی ندارند.



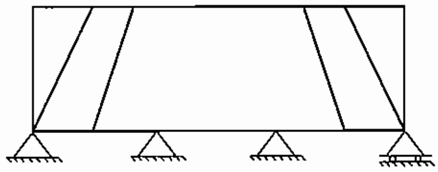
برای اثبات ناپایداری این سازه، فرض کنید مانند قبل یک نیروی P به سازه اعمال شود. حال دو مقطع ۱-۱ و ۲-۲ را در سازه ایجاد می‌کنیم. بدیهی که اگر در قطعه وسطی (بین دو مقطع) معادله تعادل لنگر حول نقطه E را بنویسیم، هیچ نیرویی برای خنثی کردن نیروی P وجود ندارد، لذا سازه همچنان ناپایدار است.



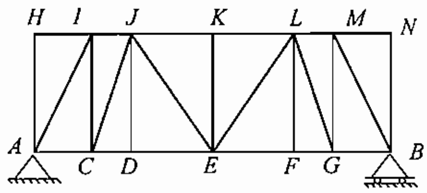
ملاحظه می‌شود که چون در دو برش هیچ‌گونه مؤلفه قائمی وجود ندارد لذا معادله تعادل لنگر یا $\sum \vec{M} = 0$ ارضا نمی‌شود و سازه دوران می‌کند:



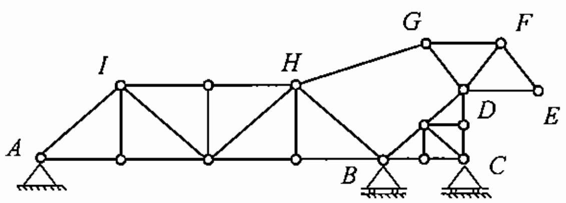
ب) فرض کنید دو واکنش به‌صورت زیر به سازه اضافه شود. در این‌صورت سازه مورد نظر پایدار خواهد شد (به دلیل آن توجه کنید) پس در این حالت سازه پایدار و دو درجه نامعین است.



ج) در حالت اولیه دیدیم که از نظر معادلات سازه معین است ولی سازه ناپایدار هندسی است. این بدان معنی است که در سازه تعداد مجهولات کافی (تعداد اعضای کافی) وجود دارد ولی آرایش هندسی سازه نامناسب است پس یک روش برای پایدار کردن این سازه آن است که این آرایش هندسی نامناسب را مناسب کنیم. برای این‌کار کافی است دو عضو KG و KC حذف شده و به جای آن اعضای MG و IC قرار داده شود. در این‌صورت خرپا ساده و با سه واکنش مذکور پایدار است.



(۱۱



در این سازه داریم:

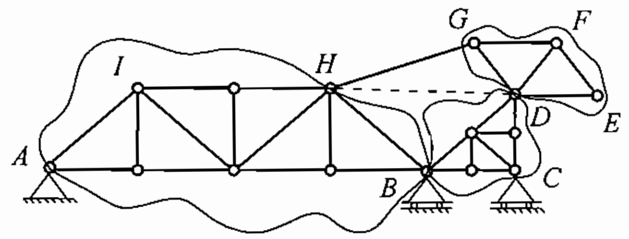
$$\begin{cases} b=28 \\ r=4 \\ j=16 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j=0$$

پس سازه طبق معادلات معین است. حال پایداری سازه را بررسی می‌کنیم.

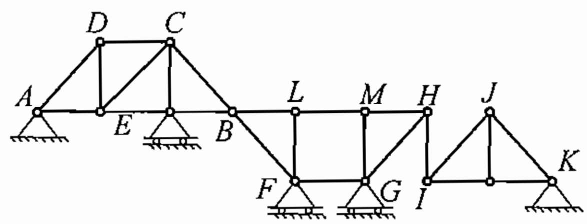
واضح است که خرپای AIHB یک خرپای ساده است که توسط سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب پایدار می‌شود پس فعلاً خرپای AIHB با تکیه‌گاه‌های A و B صلب و پایدارند. حال می‌خواهیم خرپای BCD را که خود قطعه‌ای صلب است را به قطعه قبلی اضافه کنیم. برای این‌کار خرپای BCD را توسط مفصل B به قطعه صلب قبلی وصل می‌کنیم. ولی خرپای BDC دارای آزادی دورانی است و

به سادگی حول مفصل B دوران می‌کند. برای جلوگیری از این دوران می‌توان تکیه‌گاه C را اضافه کرد و این ترکیب را پایدار کرد. حال قطعه GFDE را به قطعات صلب قبلی، توسط گره D متصل می‌کنیم. باز هم قطعه GFDE دارای آزادی دورانی بوده که برای حذف این آزادی از میله HG استفاده می‌کنیم که امتداد آن از نقطه D عبور نمی‌کند. پس این خرپا نیز پایدار است.

توجه داشته باشید که اگر به ترکیب این سه قطعه توجه کنیم، در واقع این سه قطعه توسط دو مفصل و یک میله به هم متصل شده‌اند لذا یک میله برای کامل بودن ترکیب کم دارد که کمبود این میله در سازه مذکور توسط یک واکنش تکیه‌گاهی اضافه جبران شده است.



۱۲)

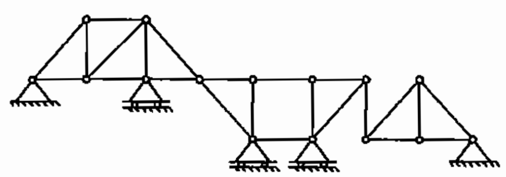


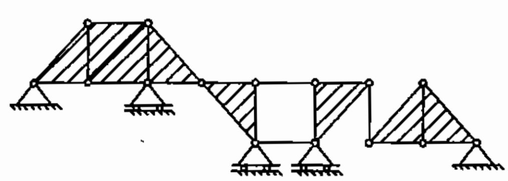
در این خرپا داریم:

$$\begin{cases} b=23 \\ r=7 \\ j=15 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j = 30-30=0$$

پس طبق روابط سازه معین است. حال پایداری سازه را بررسی می‌کنیم. (مانند مثال قبل مرحله به مرحله عمل می‌کنیم.)

خرپای ABCD یک خرپای ساده است که با سه واکنش حاصل از تکیه‌گاه‌های E و A صلب و پایدار می‌شود، پس نقطه B، نقطه مطمئنی است. حال قطعه BLF را توسط گره B به قطعه قبلی وصل می‌کنیم که دارای آزادی دورانی است و این آزادی توسط تکیه‌گاه F حذف می‌شود. حال اعضای MG ،LM و FG به سازه اضافه می‌شود که به دلیل عدم وجود عضو قطری ناپایدار است که این ناپایداری توسط تکیه‌گاه G از بین می‌رود. توسط دو میله MH و HG گره H را به سازه پایدار قبلی اضافه می‌کنیم که سازه حاصل همچنان پایدار است. پس نقطه H نقطه مطمئن و ثابتی است. از طرف راست هم، قطعه IJK یک خرپای ساده است که دو واکنش آن توسط تکیه‌گاه K ایجاد شده است ولی هنوز دارای آزادی دورانی است. برای حذف این آزادی، میله HI اضافه می‌شود تا خرپای مورد نظر پایدار شده و به قطعه صلب و پایدار قبلی نیز متصل شود. پایداری این سازه را با روش ساده‌تر اثبات کنید.



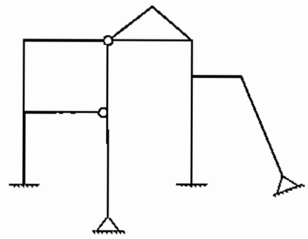


تست‌های بخش پایداری و معینی سازه‌ها

۱ ـ قاب نشان داده شده در شکل زیر چند درجه نامعین است؟ **(سراسری ۷۳)**

۱) 6 ۲) 8

۳) 9 ۴) 7



حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در سازه مورد نظر برای تعیین درجه نامعینی از روش شمارش در قاب‌ها استفاده می‌کنیم. در این سازه داریم:

$$\begin{cases} b=13 \\ r=10 \\ j=12 \\ C=4 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3b+r)-(3j+C) = 49-40 = 9$$

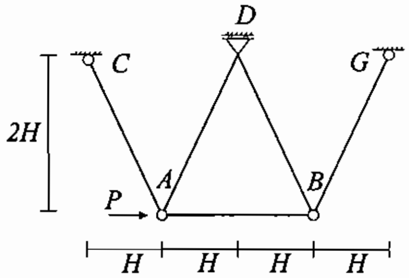
۲ ـ خرپای نشان داده شده دارای مقاطع همانند است. **(سراسری ۷۳)**

۱) واکنش D برابر P است.

۲) نیروی AB دو برابر نیروی BG است.

۳) در G واکنشی وجود ندارد.

۴) خرپا ناپایدار است.



حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

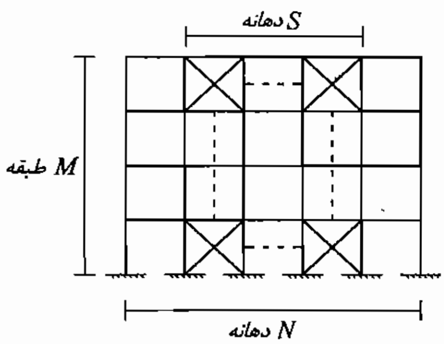
با دقت در شکل خرپا می‌توان دریافت که واکنش‌های تکیه‌گاهی خرپای مذکور در یک نقطه متقاربند لذا این خرپا ناپایدار است.

۳ ـ یک قاب دوبعدی مستطیلی با تکیه‌گاه‌های گیردار دارای N دهانه و M طبقه است. اگر S دهانه سازه تا بالا دارای بادبند ضربدری باشد، درجه نامعینی سازه چقدر است؟ **(سراسری ۷۴)**

۱) $3M(N+S)$ ۲) $M(3N+2S)$ ۳) $2M(N+S)$ ۴) $M(2N+3S)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم بادبندها وجود نداشته باشند. با استفاده از روش کادر بسته عمل می‌کنیم. در این‌صورت سازه دارای $N(M-1)$ کادر بسته خواهد بود. تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی نیز برابر است با: $r=3(N+1)$



پس می‌توان نوشت:

$$\text{درجه نامعینی سازه} = 3\big(N(M-1)\big) + 3(N+1) - (0+3) = 3NM - \cancel{3N} + \cancel{3N} + \cancel{3} - \cancel{3} = 3NM$$

حال چون S دهانه دارای بادبند ضربدری است لذا تعداد $2MS$ مرتبه به تعداد مجهولات یا همان درجه نامعینی اضافه می‌شود پس:

$$\text{درجه نامعینی سازه} = 3NM + 2NS = M(3N + 2S)$$

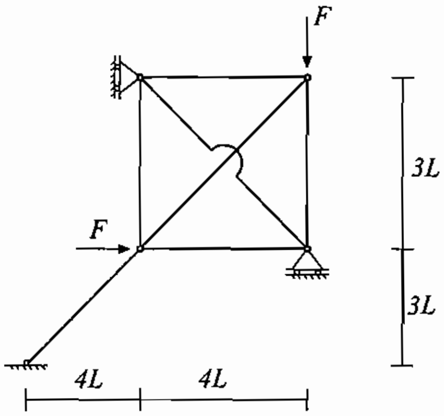
۱ـ برای یافتن نیروهای داخلی خرپای مستوی زیر کدام گزینه درست است؟ **(سراسری ۷۴)**

۱) با روش سازگاری تغییر شکل‌ها پاسخ یگانه پیدا می‌شود.

۲) نمی‌توان نیروهای منحصر به فرد داخلی خرپا را به‌دست آورد.

۳) با ترکیب روش نیروها و تغییر مکان‌ها می‌توان به پاسخ یگانه دست یافت.

۴) تحلیل با روش تغییر مکان‌ها ساده‌تر از روش نیروها انجام می‌شود.



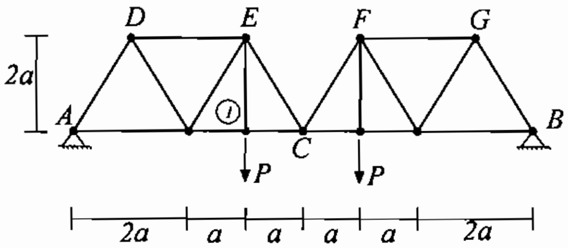
حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

همان‌طوری که در شکل دیده می‌شود، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سازه در یک نقطه متقاربند لذا این خرپا یک خرپای ناپایدار است و در این حالت نمی‌توان نیروهای منحصر به فرد داخلی برای خرپا به‌دست آورد.

۲ـ در خرپای زیر اگر هر دو تکیه‌گاه A و B مفصلی باشند، مقدار نیروی داخلی عضو 1 را تعیین کنید. **(سراسری ۷۵)**

۱) $S_1 = 0$ ۲) $S_1 = P$

۳) $S_1 = 2P$ ۴) خرپا ناپایدار است.



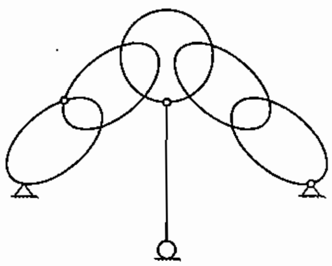
حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

خرپای فوق ترکیب دو جسم صلب توسط یک مفصل است پس سازه مذکور پایدار نیست. دقت کنید که در این سازه یک واکنش تکیه‌گاهی اضافه در نظر گرفته شده است که این واکنش اضافه نمی‌تواند پایداری سازه را تأمین کند. برای پایدار شدن این سازه می‌توان یک واکنش قائم تکیه‌گاهی در نقطه C قرار دارد (توسط یک تکیه‌گاه غلتکی) و یا میله EF را در سازه قرار دارد.

۳ـ درجه نامعینی سازه دوبعدی زیر کدام است؟ **(سراسری ۷۵)**

۱) 22 ۲) 24

۳) 26 ۴) 28



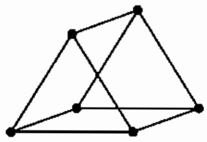
حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

از روش کادر بسته استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} M=9 & \text{تعداد کادر بسته} \\ r=6 \\ C=2 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3M+r)-(C+3)=33-9=24$$

دقت کنید که چون در تکیه‌گاه وسطی $\sum M = 0$ است لذا تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی در این تکیه‌گاه برابر دو می‌باشد.

۴ ـ خرپای مسطحه زیر .... است. **(سراسری ۷۶)**



۱) معین و پایدار ۲) معین و ناپایدار

۳) نامعین و پایدار ۴) نامعین و ناپایدار

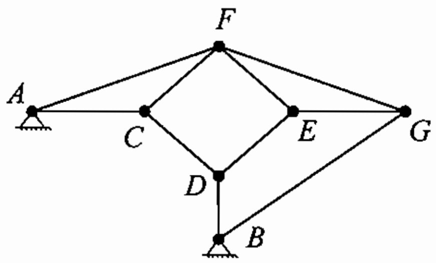
حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

این خرپای مسطحه، از ترکیب دو خرپای مثلثی توسط سه میله تشکیل شده است که با توجه به آن که میله‌های مذکور موازی هستند لذا خرپای مذکور ناپایدار است. چون بحث معینی و نامعینی سازه نیز مطرح شده است آن را بررسی می‌کنیم، اگرچه معمول نیست. چون تکیه‌گاه‌های خرپا مشخص نشده است، لذا هدف یافتن نامعینی داخلی خرپا است. در این خرپا داریم:

$$\begin{cases} b=9 \\ r=0 \\ j=6 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی داخلی} = (b+r)-2j+3=9-12+3=-3+3=0$$

پس خرپا معین داخلی است.

۵ ـ سازه مفصلی مطابق شکل زیر: **(سراسری ۷۷)**



۱) ایزواستاتیک و ناپایدار است.

۲) ایزواستاتیک و پایدار است.

۳) هیپراستاتیک و پایدار است.

۴) هیپراستاتیک و ناپایدار است.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این خرپا داریم:

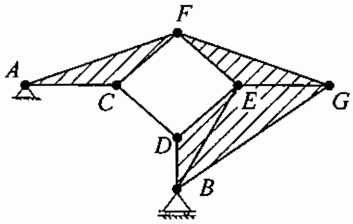
$$\begin{cases} b=10 \\ r=4 \\ j=7 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (b+r)-2j=14-4=0$$

پس سازه معین یا ایزواستاتیک است.

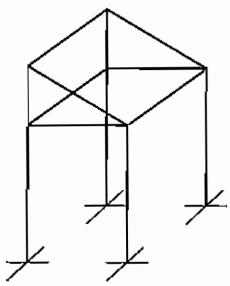
بررسی پایداری این سازه کمی پیچیده است که به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

فرض کنید در خرپای فوق میله EB قرار داده شود. در این‌صورت قطعه BDEFG یک خرپای ساده و پایدار است. از طرفی قطعه ACF نیز یک خرپای ساده و پایدار است؛ پس، این دو قطعه صلب توسط یک مفصل در F و یک میله CD دارای اتصال کامل و پایدار خواهد شد و توسط سه واکنش غیرموازی و غیرمتقارب مانند آنچه در شکل نشان داده شده است پایدار می‌شود. حال فرض کنید میله EB

حذف شود. در این‌صورت خرپا ناپایدار خواهد شد چراکه تعداد مجهولات از معادلات کمتر می‌شود. برای تأمین این مجهول می‌توان تکیه‌گاه B را مفصل در نظر گرفت که به ایجاد سازه‌ای پایدار منتهی می‌شود.



۶ـ درجه نامعینی استاتیکی قاب سه بعدی زیر برابر کدام است؟ **(سراسری ۷۸)**



۱) 24 ۲) 30

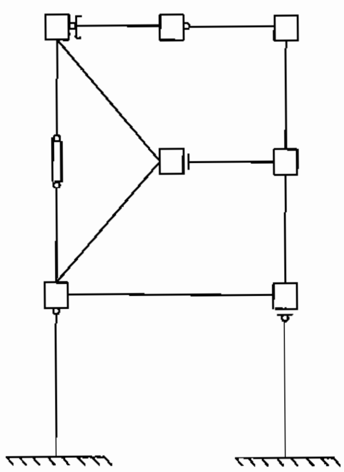
۳) 42 ۴) 48

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در این سازه فضایی داریم:

$$\begin{cases} b=13 \\ r=24 \\ j=10 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (6b+r)-(6j+C)=102-60=42$$

۴ـ درجه نامعینی سازه زیر برابر است با: **(سراسری ۷۸)**



۱) 2 درجه

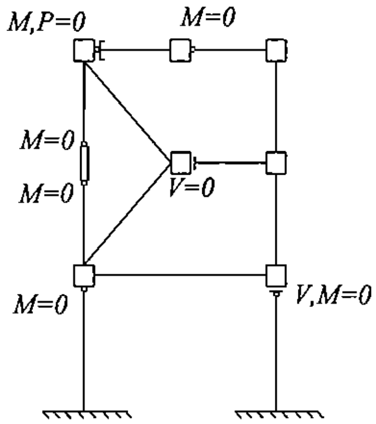
۲) 3 درجه

۳) 4 درجه

۴) 5 درجه

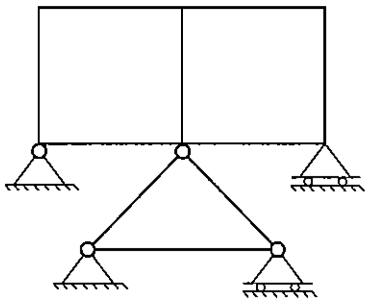
حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا روابط شرطی را به‌دست می‌آوریم. در شکل موجود شرط‌های هر اتصال در کنار آن نوشته شده است پس تعداد شرط‌ها برابر 9 می‌باشد. حال از روش کادر بسته استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases} m=3 \text{ تعداد کادر بسته} \\ r=6 \\ c=9 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 15-12 = 3$$

۵ـ درجه نامعینی سازه زیر را محاسبه کنید. **(سراسری ۷۹)**



۱) 7

۲) 8

۳) 9

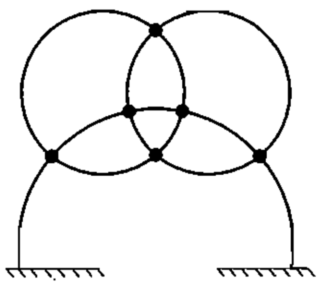
۴) 12

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m=3 \\ r=6 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 15-7 = 8$$

۶ـ درجه نامعینی سازه شکل زیر چند است؟ **(سراسری ۷۹)**



۱) 2

۲) 3

۳) 4

۴) 5

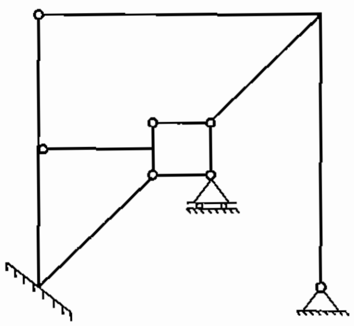
حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m=6 \\ r=6 \\ c=18 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 24-21 = 3$$

استدلال در مسأله قبل ناپایداری سازه‌های a و c را اثبات کنید.)

۹ ـ درجه نامعینی سازه شکل زیر کدام است؟



۱) 2

۲) 3

۳) 4

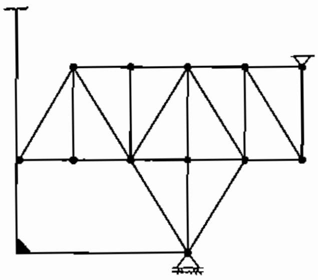
۴) 5

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m=3 \\ r=6 \\ c=8 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 15-11 = 4$$

۷ ـ درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟ **(سراسری ۸۱)**



۱) 3 ۲) 4

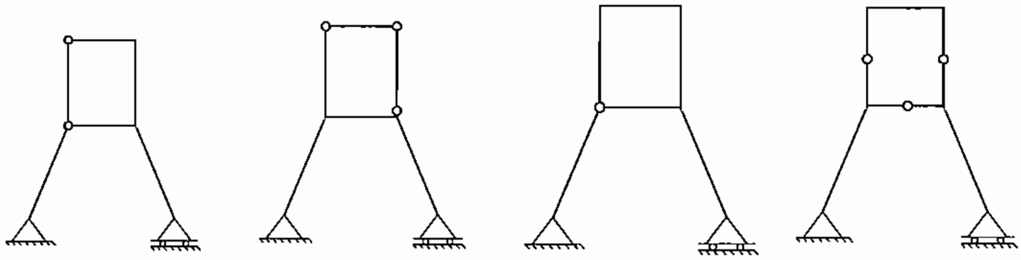
۳) 5 ۴) 6

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با استفاده از روش کادر بسته می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} M=12 \\ r=6 \\ C=34 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{درجه نامعینی} = (3M+r)-(C+3) = 42-37 = 5$$

۷ ـ کدام سازه‌ها معین و پایدار است: **(سراسری ۸۰)**



۱) c , d

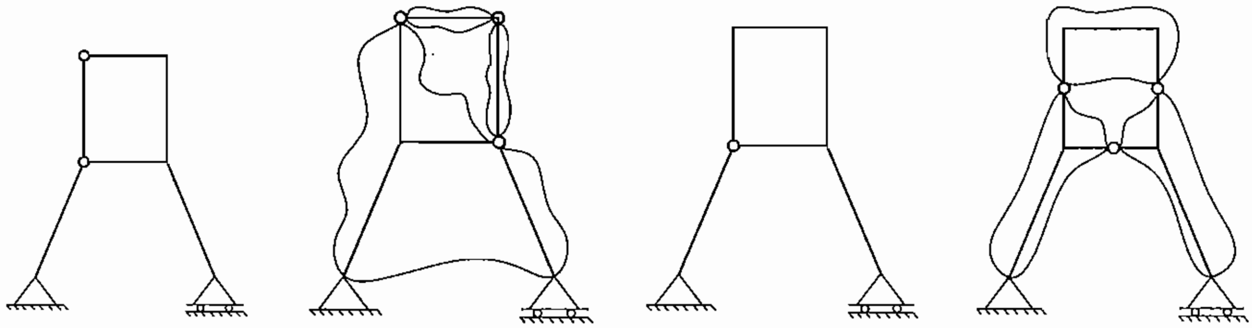
۲) b , a

۳) a , c

۴) d , b

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

توجه کنید که سازه (d) و (b) از ترکیب سه جسم صلب به وسیله 3 مفصل تشکیل یافته‌اند بنابراین پایدار هستند. (ناپایداری (a) و (c) را اثبات کنید.)

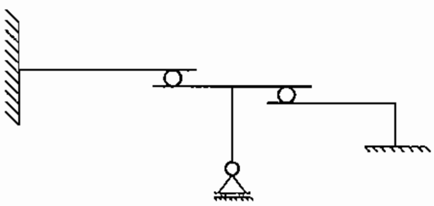


در سازه d و b داریم:

$$\begin{cases} m=1 & \text{کادر بسته} \\ r=3 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی سازه} = (3m+r)-(c+3) = 6-6 = 0$$

پس هر دو سازه معین و پایدارند.

۸ ـ چگونگی حالت معینی و پایداری سازه زیر به ترتیب کدام است؟



۱) معین و ناپاپایدار

۲) معین و پایدار

۳) نامعین و پایدار

۴) نامعین و ناپایدار

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

روش کادر بسته:

$$\begin{cases} m=0 \\ r=7 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \text{درجه نامعینی} = (3m+r)-(c+3) = 0$$

پس سازه معین است.

ولی اگر به سازه وسطی نیرویی در جهت محور x ها ($\rightarrow$) وارد شود، جسم هیچ مقاومتی در مقابل نیرو ندارد پس ناپایدار است. (با این

فصل دوم

خرپاها

فرضیات خرپای ایده‌آل

در این فصل فرضیات زیر لحاظ می‌شود:

۱- اعضا مستقیم هستند.

۲- کلیه اتصالات مفصلی است.

۳- همه بارها به گره های خرپا اثر می کنند.

۴- تغییر شکل خرپا در مقایسه با هندسه اولیه کوچک می‌باشد.

طبقه بندی خرپاها از نظر نحوه شکل گیری:

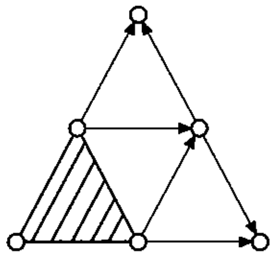
در فصل قبل در مورد انواع خرپاها بحث شد که این‌جا یک بار دیگر مرور می‌شود:

۱ـ خرپای ساده:

خرپاهایی که برای تشکیل آنها بتوان از روش توسعه مثلث استفاده کرد، خرپای ساده نامیده می‌شوند.

روش توسعه مثلثی: ابتدا یک مثلث را به عنوان جسم صلب در نظر می‌گیریم و سپس با روش ضمیمه نقطه به وسیله دو میله به یک جسم صلب، مثلث صلب اولیه را توسعه می‌دهیم.

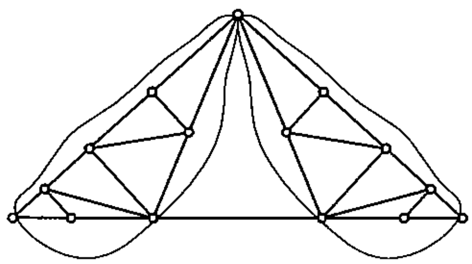
حال اگر بتوان کلیه گره های خرپا را با این روش تثبیت کرد، خرپا ساده نامیده می‌شود.(یعنی بتوان به طور کامل خرپایی با این روش ساخت بطوری که هیچ گره و یا میله‌ای کم یا زیاد نباشد) به‌طور مثال خرپای زیر یک خرپای ساده است.



۲ـ خرپای مرکب:

خرپاهایی هستند که با روش قبلی تشکیل نمی شوند و در حقیقت ترکیب درستی از چند خرپای ساده (مطابق اصول ترکیب اجسام صلب) هستند.

به طور مثال در خرپای مقابل، دو خرپای ساده (که صلب می‌باشند) با روش یک مفصل و یک میله به هم وصل شده‌اند.



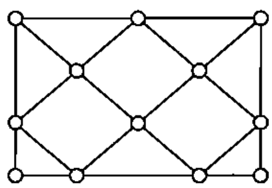
اگر برای ترکیب خرپاهای ساده (به منظور تشکیل خرپای مرکب) تعدادی میله یا مفصل کم بود، سازهٔ حاصله صلب نبوده و تعداد روابط شرطی آن برابر است با همان تعداد مؤلفه‌های نیرویی که نسبت به جسم صلب کم دارد.

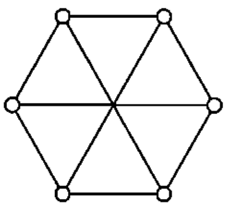
روابط شرطی خارجی خرپا + 3 = r

در واقع در این حالت برای جبران تعداد مؤلفه‌های کمبود؛ باید مؤلفه‌های تکیه‌گاهی را زیاد کرد.

۳ـ خرپاهای مبهم:

دسته سوم خرپاها، خرپاهایی هستند که دارای مشخصات خرپاهای ساده و مرکب نبوده و جزو هیچکدام از دو گروه فوق نمی‌باشند. این خرپاها، خرپاهای مبهم نامیده می‌شوند. به طور مثال در زیر دو نمونه خرپای مبهم نشان داده شده است:





روشهای تحلیل خرپاها:

۱- روش گره (مربوط به خرپاهای ساده)

۲- روش مقطع زدن (مربوط به خرپاهای مرکب)

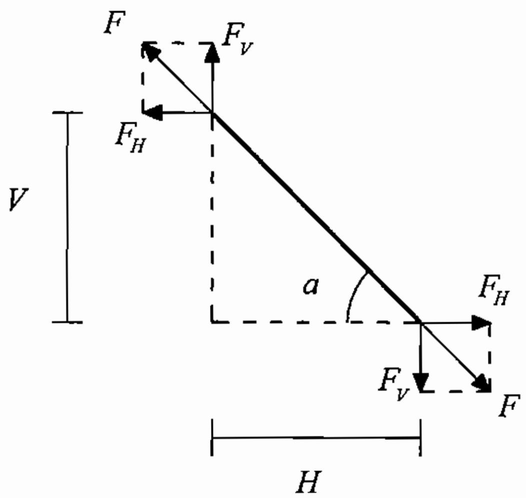
۳- روش هنبرگ (مربوط به خرپاهای مبهم)

۱- روش گره:

در این روش معمولاً از گره‌ای که دارای دو مجهول است شروع می‌کنیم و با نوشتن معادلات تعادل، مجهولات را بدست می‌آوریم. حال با معلوم شدن نیروی اعضاء می‌توان گره‌های بیشتری را بررسی کرده و نیروهای بیشتری را بیابیم.

در روش گره از نکات زیر استفاده می‌شود:

نکته ۱: در یک میله اگر مؤلفه‌های افقی و قائم مشخص باشد نیروی میله بصورت زیر محاسبه می‌شود:



$$F_H = F\cos\alpha = F\times\frac{H}{L} = \frac{F}{L}\times H$$
$$F_V = F\sin\alpha = F\times\frac{V}{L} = \frac{F}{L}\times V$$

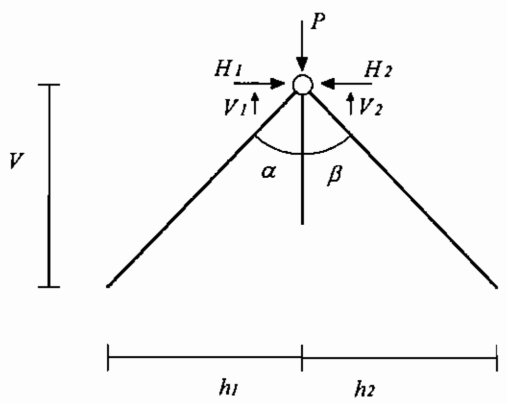
$\frac{F}{L}$: شدت نیرو در واحد طول میله

لذا خواهیم داشت:

$$F = \frac{F_H}{H}L = \frac{F_V}{V}L$$
$$F = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$$

پس ملاحظه می‌شود که اگر هر مؤلفه را (افقی یا قائم) تقسیم بر تصویر میله در راستای همان مؤلفه بکنیم، با ضرب مقدار به‌دست آمده در طول میله نیروی میله بدست می‌آید.

نکته ۲: اگر یک گره دومیله‌ای وجود داشت که یک نیروی متمرکز عمودی برروی آن اثر می‌کرد، با نوشتن مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروی میله‌ها به این نتیجه می‌رسیم که تصویر افقی نیروهای میله همدیگر را خنثی می‌کنند لذا خواهیم داشت:



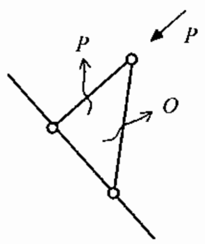
$$H_1 = H_2$$
$$V_1 = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.P$$
$$V_2 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}.P$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که نیروی قائم به نسبت عکس طول تصویرها تقسیم می‌شود.

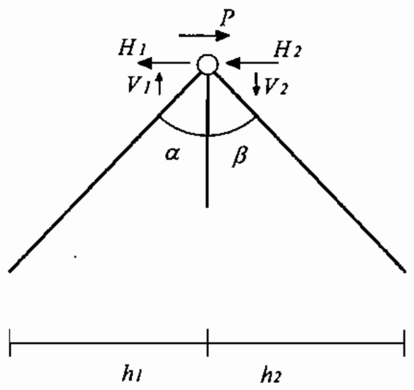
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

حالت خاص:

اگر نیرو درست در امتداد یکی از میله‌ها اثر کند، یکی از میله‌ها صفر نیرویی است و میله دیگر (میله هم راستا با نیرو) نیرویی برابر با نیروی وارد برگره دارد. در واقع در این حالت یکی از مقادیر h_1 یا h_2 صفر هستند لذا یکی از مقادیر برابر P و دیگری صفر است.



نکته ۳: اگر به یک گره دو میله‌ای یک نیروی افقی وارد شود، این بار با تجزیه نیروهای میله‌ها، مؤلفه‌های عمودی همدیگر را خنثی کرده و داریم:



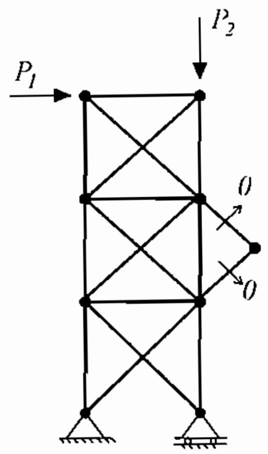
$$V_1 = V_2$$
$$H_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2}.P$$
$$H_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.P$$

در اینحالت ملاحظه می‌شود که نیروی افقی به نسبت طول تصویرها تقسیم می‌شوند یعنی:

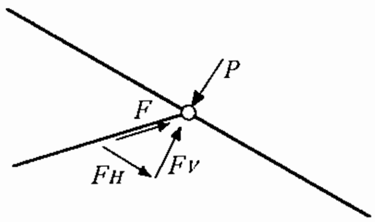
$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{h_1}{h_2}$$

توجه داریم که اگثر مثلاً $\beta=0$ باشد در این‌صورت $H_2=0$ بوده و $H_1=P$ می‌باشد.

نکته ۴: اگر بر گره دو میله‌ای هیچ نیرویی اثر نکند، هر دو میله صفر نیرویی هستند.



نکته ۵: اگر به یک گره سه میله‌ای، که دو میله آن در یک راستا هستند نیرویی عمود بر دو میله هم راستا اثر کند، این نیرو توسط مؤلفهٔ قائم میله سوم متعادل می‌شود و دو میله هم‌راستا هیچ نیرویی تحمل نمی‌کنند.

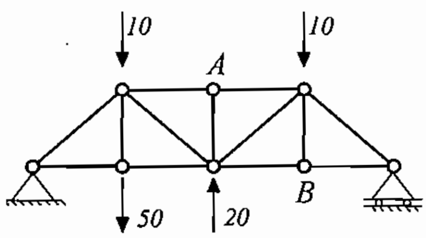


$$P=F_V$$

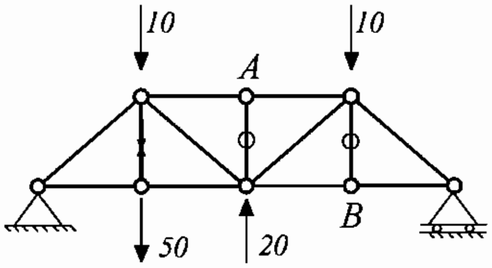
نکته ۶: اگر به یک گره سه میله‌ای که دو میله آن در یک راستا هستند، هیچ نیرویی اثر نکند، نیروی میله مورب حتماً صفر خواهد بود.

مثال : در خرپاهای زیر، میله‌های صفر نیرویی را مشخص کنید:

-۱

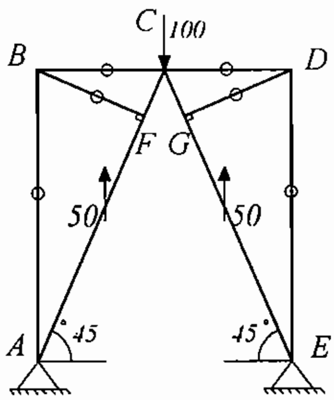


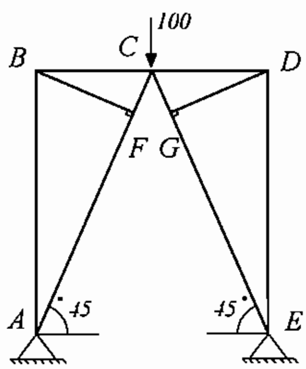
در خرپای فوق گره A و B گره سه میله‌ای هستند که دو میله آن هم راستا می‌باشند و نیز هیچ نیرویی به این گره‌ها وارد نمی‌شود، لذا دو میله نشان داده شده صفر نیرویی خواهند بود.



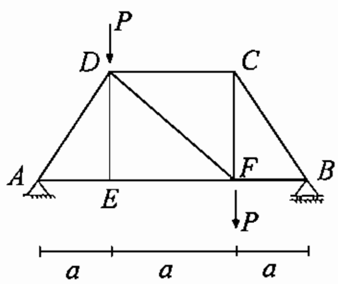
۲ـ

در خرپای زیر با توجه به نکته گره سه میله‌ای، دو میله BF و GD صفر نیرویی هستند. با صفر نیرویی شدن این دو میله گره‌های B و D گره‌های دو میله‌ای می‌شوند و با توجه به اینکه هیچ نیرویی به این گره‌ها اثر نمی‌کند لذا چهار عضو AB، BC، CD و DE نیز صفر نیرویی خواهند بود.





مثال : خرپای زیر را تحلیل کنید.

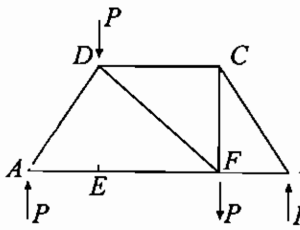


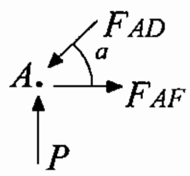
در گره E، سه عضو متقاطعند که دوتای آن‌ها در یک راستا هستند پس با توجه به این‌که هیچ نیرویی به این گره وارد نمی‌شود لذا عضو DE صفر نیرویی است. حال عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را می‌یابیم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_{B_y} = P\uparrow \quad , \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{A_y} = P\uparrow \quad , \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 0$$

پس ترسیم آزاد خرپا را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت. (عضو صفر نیرویی حذف شده است.)

با بررسی گره A، در جهت قائم، نیروی P فقط توسط میله AD تحمل می‌شود پس مؤلفه قائم نیروی میله AD همان P است.





حال طبق نکته ۱ خرپا می‌توان نوشت:

$$F_{AD}=\frac{F_{VAD}}{V}\times L=\frac{P}{a}\times\sqrt{2}\,a=\sqrt{2}\,P$$

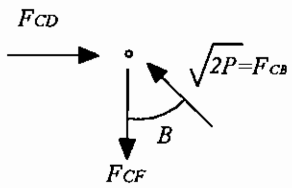
همچنین:

$$F_{AD}\times\cos\alpha=F_{AF}\quad\Rightarrow\quad F_{AF}=\sqrt{2}\,P\times\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=P$$

به همین ترتیب داریم:

$$F_{CB}=\sqrt{2}\,P\quad,\quad F_{BF}=P$$

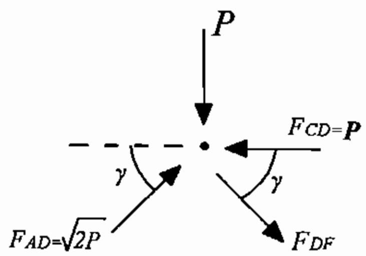
گره C را بررسی می‌کنیم. مطابق آنچه گفته شد می‌نویسیم:



$$F_{CD}=\sqrt{2}\,P\times\sin\beta=\sqrt{2}\,P\times\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=P$$

$$F_{CF}=\sqrt{2}\,P\times\cos\beta=\sqrt{2}\,P\times\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=P$$

گره D:

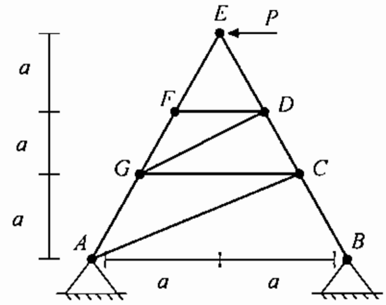


$$F_{DF}=\frac{\left(F_{AD}\times\cos\gamma-F_{CD}\right)}{\cos\gamma}=\frac{\left(\sqrt{2}\,P\times\frac{a}{\sqrt{2}\,a}-P\right)}{\frac{a}{\sqrt{2}\,a}}=0$$

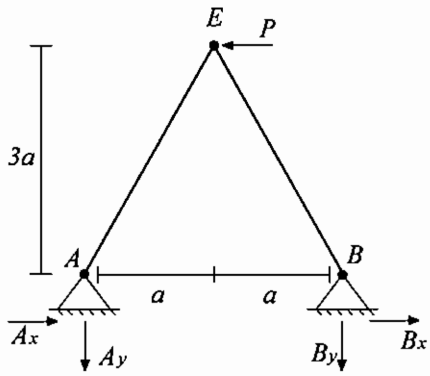
البته با دقت در گره F، ملاحظه می‌شود چون نیروی عضو CF برابر P است لذا بدان مفهوم است که کل نیروی P وارد بر گره توسط عضو CF تحمل شده است لذا DF دارای مؤلفه قائمی برابر صفر و در نتیجه صفر نیرویی است.

توجه: در ترسیم آزاد هر گره، نیروی وارد از طرف اعضاء بر گره نشان داده شده است.

مثال : خرپای زیر را تحلیل کنید.



با توجه به نکات ارائه شده و دقت در گره F درمی‌یابیم که نیروی FD صفر است. با صفر شدن FD گره D نیز سه عضوی شده و در نتیجه آن GD نیز صفر می‌گردد. به همین ترتیب اعضای GC و AC نیز صفر نیرویی خواهند بود پس با حذف اعضای صفر نیرویی خرپای ساده به‌صورت زیر است. حال عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را می‌یابیم.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3aP = 2aB_y \Rightarrow B_y = \frac{3}{2}P\downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{3}{2}P\uparrow$$

با یافتن مؤلفه‌های قائم تکیه‌گاه‌ها، مؤلفه‌های قائم نیروی اعضاء نیز به‌دست می‌آید که با توجه به نکته I، از روی آن می‌توان نیروی اعضاء را یافت:

$$F_{V_{EB}} = \frac{3}{2}P \Rightarrow F_{EB} = \frac{F_{VEB}}{V}\times L = \frac{3}{2}P\times\frac{\sqrt{10}\,a}{3a} = \frac{\sqrt{10}}{2}P$$

به همین ترتیب:

$$F_{AE} = \frac{\sqrt{10}}{2}P$$

توجه: در این مسأله اگر لازم بودن مؤلفه‌های افقی تکیه‌گاه‌ها را به‌دست آوریم، می‌توانستیم مؤلفه افقی اعضای EB و EA را یافته که با دقت در گره‌های A و B، این مؤلفه‌ها همان عکس‌العمل‌های افقی تکیه‌های A و B هستند. البته چون تصویرهای افقی هر دو میله و طول میله‌ها یکسان است لذا به هر کدام از دو میله $\frac{P}{2}$ از نیروی مورد نظر می‌رسد. از این طریق نیز می‌توانستیم نیروی اعضا را به‌دست آوریم چراکه:

$$F_{H_{EB}} = \frac{P}{2} \Rightarrow F_{EB} = \frac{F_{H_{EB}}}{H}\times L = \frac{P}{2}\times\frac{\sqrt{10}\,a}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}P$$

و به همین صورت:

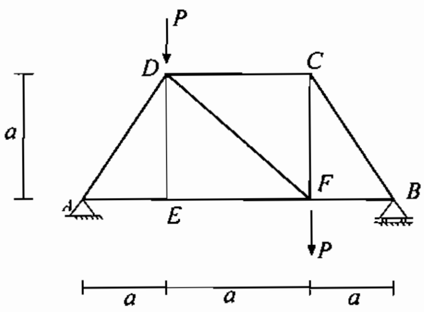
$$F_{AE} = \frac{\sqrt{10}}{2}P$$

۲- روش مقطع زدن:

این روش بیشتر برای تحلیل خرپاهای مرکب مورد استفاده واقع می‌شود ولی گاهی در خرپاهای ساده هم کاربرد دارد و آن هنگامی است که کل خرپا مورد تحلیل واقع نشود و فقط تعیین نیروی اعضایی خاص در خرپا مدنظر باشد. در روش مقطع‌زدن، با انتخاب مقطعی مناسب، سازه جدا می‌شود و سپس با بررسی معادلات تعادل، می‌توان نیروی اعضای برش خورده توسط مقطع را بدست آورد.

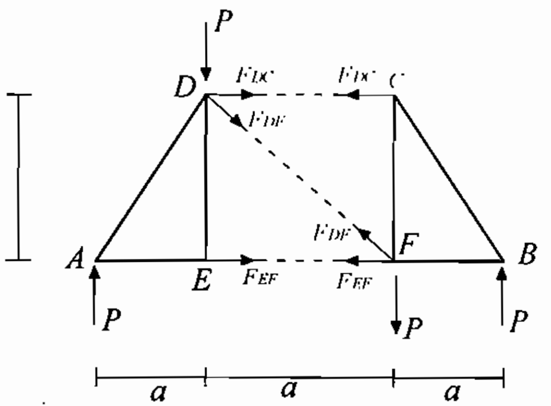
نکته : اگر در خرپا مقطعی بزنیم که n میله را قطع کند بطوریکه $(n-1)$ میله متقارب باشند (امتدادشان از یک نقطه بگذرد) با نوشتن معادله تعادل گشتاور حول نقطه تقارب $(n-1)$ میله، می‌توان نیروی میله nام را بدست آورد.

نکته : در خرپای زیر نیروی اعضای DC، DF و EF را بیابید.



نیروی داخلی تمامی اعضای این خرپا قبلاً با روش گره بررسی شده بود ولی این‌جا با روش مقطع نیروی اعضای مذکور را می‌یابیم. برای این منظور مقطعی را در نظر می‌گیریم که از سه عضو مورد نظر می‌گذرد. (واکنش‌های تکیه‌گاهی باید محاسبه شوند که در حل قبل مقادیر موجود است.)

در قطعه سمت راست ملاحظه می‌شود که دو عضو DF و EF در نقطه F متقاربند پس با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه F نیروی عضو DC به‌دست می‌آید:



$$\sum M_F = 0 \;\Rightarrow\; F_{DC} \times a + Pa = 0 \;\Rightarrow\; F_{DC} = -P$$

علامت منفی بدین معنی است که جهت در نظر گرفته شده اشتباه می‌باشد و نیروی عضو DC فشاری است. برای یافتن نیروی عضو EF نیز معادله تعادل لنگر را حول نقطه D (محل تقارب اعضای DC و DF) می‌نویسیم:

$$\sum M_D = 0 \;\Rightarrow\; F_{EF} \times a + P \times a - P \times 2a = 0 \;\Rightarrow\; F_{EF} = P$$

برای یافتن نیروی عضو DF در قطعه سمت راست معادله تعادل نیرو در راستای y را می‌نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; P - P + F_{VEF} = 0 \;\Rightarrow\; F_{VEF} = 0$$

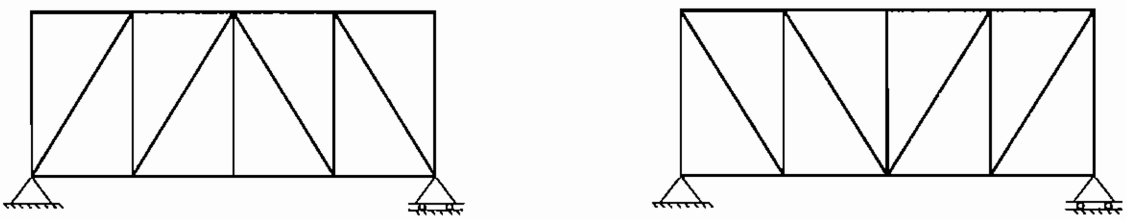
ملاحظه می‌شود که مؤلفه قائم نیروی عضو DF صفر است، لذا نیروی عضو DF صفر خواهد بود.

خرپاهای معروف و مقاطع خاص:

در زیر خرپاهای خاص و مقاطع ویژه تحلیل آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

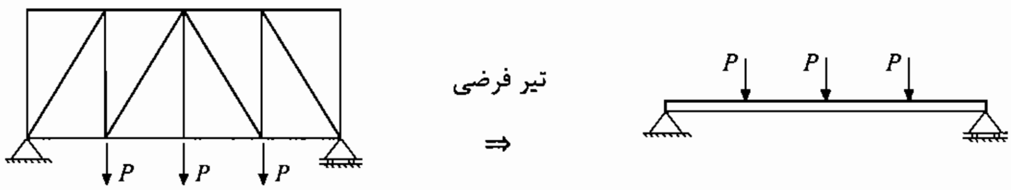
مقاطع ویژه خرپای هاو و خرپای پرات:

شکل این دو خرپا بصورت زیر است:

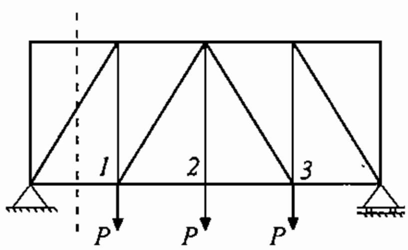


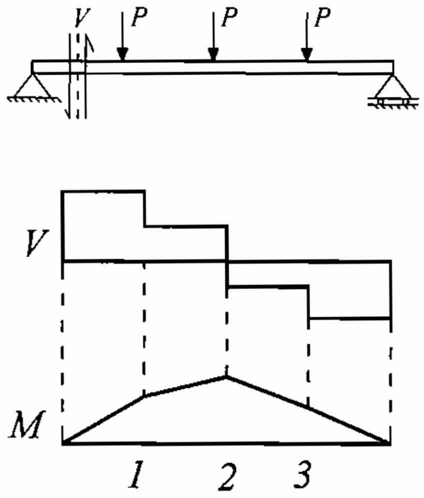
در اثر اعمال بار قائم روی گره‌های این دوخرپا، در خرپای هاو اعضای قطری در فشار هستند و در خرپای پرات در کشش هستند. پس در خرپاهایی که از مصالحی مانند چوب استفاده می‌شود چون برای تحمل نیروی اعضاء معمولاً مقطع اعضا بزرگ می‌شود لذا کمانش رخ نمی‌دهد و بهتر است که اعضا در فشار باشند پس بهتر است از خرپای هاو استفاده شود ولی اگر از مصالحی مانند فولاد استفاده کنیم که مقطع اعضا لاغر خواهد شد، به علت پرهیز از کمانش اعضاء مایلیم که اعضای قطری به کشش بیفتند و از خرپای پرات استفاده می‌کنیم.

برای خرپای هاو و پرات یک تیر نظیر بصورت زیر معرفی می‌کنیم که این تیر فرضی مزایایی دارد که آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

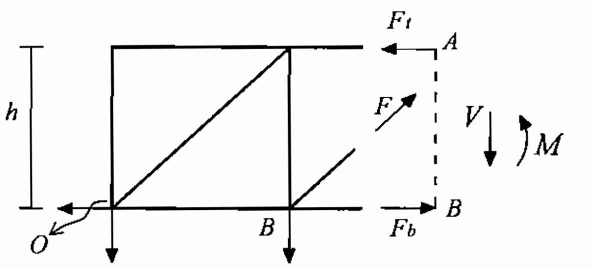


در این خرپاها، اگر مقاطعی بزنیم که سه عضو موجود در یک دهانه را قطع کند با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت محور yها، مؤلفه قائم نیروی میله مورب دهانه به‌دست می‌آید. به سادگی می‌توان دید که این مقدار همان برش تیر فرضی در ناحیه مذکور است پس برای یافتن مؤلفه قائم نیروی عضو مورب کافی است برش را در تیر فرضی در همان دهانه به‌دست آوریم.





با توجه به موضوع فوق، با رسم دیاگرام برش تیر فرضی می‌توان نیروی اعضای مورب را یافت. پس از رسم دیاگرام برش، دیاگرام خمشی تیر فرضی را هم رسم می‌کنیم. این دیاگرام نیز می‌تواند قابل استفاده باشد. برای این منظور یک مقطع زده و این مقطع را بررسی می‌کنیم:



در این مقطع دیدیم که برای به‌دست آوردن نیروی F از دیاگرام برش استفاده می‌کنیم. حال فرض کنید بخواهیم F_b را بیابیم. برای این‌کار لازم است حول نقطه A معادله گشتاور را بنویسیم. پس خواهیم داشت:

$$F_b.h=\sum M_A \quad \Rightarrow \quad F_b=\frac{+\sum M_A}{h}$$

$\sum M_A$ منظور گشتاوری است که نیروهای موجود (تا نقطه A) ایجاد می‌کنند که از روی نمودار گشتاور این مقدار به سادگی به‌دست می‌آید که در این مثال مقدار آن برابر M_2 می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$F_b=+\frac{\sum M_A}{h}=\frac{M_2}{h}$$

برای بدست آوردن F_t حول B گشتاور می‌گیریم:

$$F_t.h=-\sum M_B \quad \Rightarrow \quad F_t=\frac{-\sum M_B}{h}=\frac{-M_1}{h}$$

که M_1 همان گشتاور ناشی از نیروهای موجود تا نقطه B می‌باشد.

در بررسی خرپای پرات، نتایج کمی متفاوت است و داریم:

$$\begin{cases} F_b = \dfrac{+M_1}{h} \\ F_t = \dfrac{-M_2}{h} \end{cases}$$

(به عنوان تمرین روابط فوق را بدست آورید).

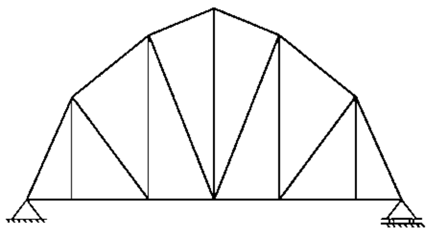
با بررسی روابط بدست آمده مشاهده می‌شود که اگر همه نیروهایی وارد به خرپا به سمت پایین باشند، در خرپای هاو نیروی میله تحتانی بیشتر از نیروی میله فوقانی است، چراکه،

$$M_2 > M_1 \;\Rightarrow\; F_b > F_t$$

و در خرپای پرات نیروی میله فوقانی بیشتر از نیروی میله تحتانی است؛ چراکه،

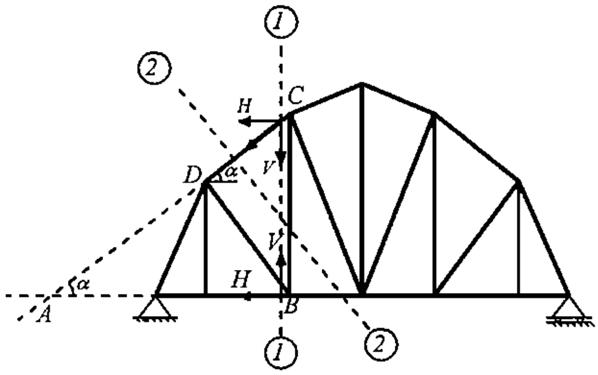
$$M_2 > M_1 \;\Rightarrow\; F_t > F_b$$

- مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن به وسط خرپا، مقدار گشتاور زیاد شده و لذا نیروی اعضای فوقانی و تحتانی هر چه به سمت مرکز خرپا متمایل می‌شویم بیشتر می‌شود لذا برای جبران این موضوع بهتر است ارتفاع خرپا (h) در وسط بیشتر شود، تا در نوشتن معادله تعادل لنگر حول یکی از نقاط، به دلیل فاصله زیر میله‌های تحتانی یا فوقانی از این نقطه، مقدار این نیروها کم شود لذا از خرپایی با ارتفاع متغیر استفاده می‌شود که به آن خرپای شیبدار گویند.



مقاطع ویژه خرپای شیب‌دار:

برای تحلیل خرپای شیبدار مقاطع خاصی وجود دارد که در زیر آن‌ها را بررسی می‌کنیم.



در این خرپاها برای یافتن نیروی عضو قطری هر دهانه از مقطعی استفاده می‌کنیم هر سه عضو دهانه را قطع می‌کند. این مقطع باید دورترین فاصله را از نزدیک‌ترین تکیه‌گاه داشته باشد. مثلاً برای یافتن نیروی عضو BD از مقطع ۱ـ۱ استفاده می‌کنیم در انتهای راست دهانه مذکور زده می‌شود. حال کافی است معادله تعادل لنگر حول نقطه تقارب دو عضو فوقانی و تحتانی دهانه (در این مثال نقطه A) نوشته شود پس خواهیم داشت:

$$AB = \frac{BC}{\tan \alpha}$$

$$\sum M_A = V_{BD}.AB$$

توجه داشته باشید که امتداد نیروی F_{DC} از A گذشته و هیچ گشتاوری حول A ندارد. برای یافتن نیروی عضو فوقانی دهانه هم از همین مقطع استفاده می‌شود و این‌بار معادله تعادل لنگر حول نقطه تقارب عضو قطری و تحتانی نوشته می‌شود؛ یعنی:

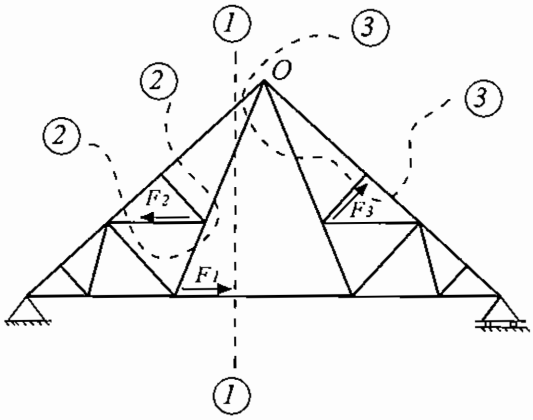
$$\sum M_B = H_{DC}.BC$$

حال با داشتن H_{DC} و V_{BD} می‌توان طبق نکات قبلی مقدار F_{DC} و F_{BD} را نیز بدست آورد. برای محاسبه نیروی عضو BC از مقطع 2−2 استفاده می‌کنیم که باز هم باید معادله تعادل لنگر حول نقطه A نوشته شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum M_A = F_{BC}.AB$$

مقاطع ویژه خرپای فینک: (Fink)

خرپای فینک یک خرپای مرکب است بنابراین با روش گره نمی‌توان خرپا را کامل تحلیل کرد. (روش گره برای خرپای ساده منجر به تحلیل کامل خرپا می‌شود ولی برای خرپای مرکب این طور نیست). در زیر مقاطع ویژه مربوط به تحلیل خرپای فینک بررسی می‌شود.



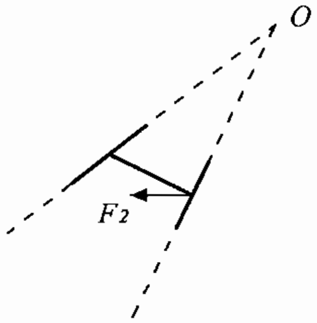
مقطع 1−1 از قطع 3 میله بدست می‌آید که دو میله از رأس می‌گذرند و یکی دیگر از رأس نمی‌گذرد پس نیروی F_1 را می‌توان به راحتی بدست آورد. (راجع به چگونگی بدست آوردن این نیرو بحث کنید)

مقطع 2−2 از قطع 5 میله بدست می‌آید. آیا می‌توان با وجود این 5 میله، نیرویی را یافت؟

مجدداً نکته روش مقطع زدن را تکرار می‌کنیم:

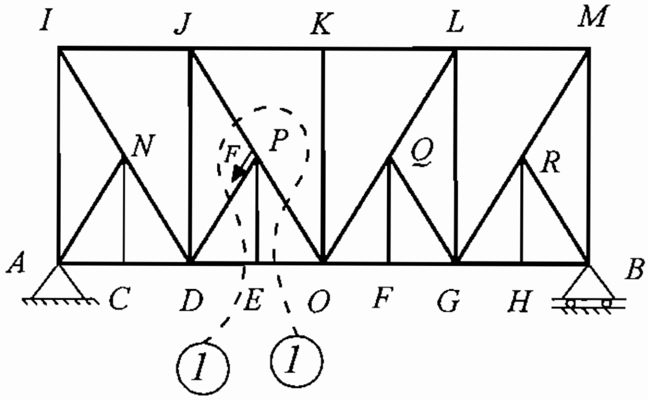
نکته : اگر در یک خرپا بتوان مقطعی یافت که با بریدن n میله بدست آید بطوریکه n−1 عدد از آنها متقارب باشند این مقطع خاص برای یافتن نیروی میله nام مفید خواهد بود.

پس از مقطع 2−2 طبق نکته فوق می‌توان نیروی F_2 را یافت. برای این منظور کافی است حول o لنگر بگیریم.



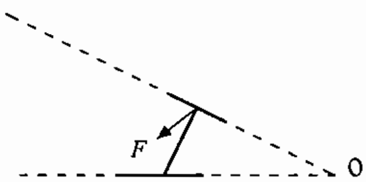
طبق نکته فوق برای یافتن نیروی F_3 نیز می‌توان از مقطع 3-3 استفاده کرد و مجدداً حول o لنگر گرفت.

مقاطع ویژه خرپای بالتیمور:

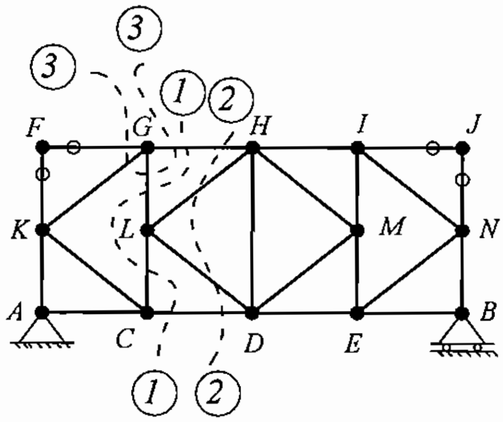


برای بررسی تحلیل این خرپا یکی از دهانه‌ها را بررسی می‌کنیم. دهانه DO را در نظر بگیرید. برای یافتن نیروی عضو PE از نکات ارائه شده در ابتدا فصل استفاده می‌کنیم بدین صورت که اگر نیرویی به گره E وارد شود، این نیرو تماماً توسط عضو PE تحمل می‌شود و در غیر این‌صورت نیروی این عضو صفر خواهد بود. برای یافتن نیروی عضو PD که با F نشان داده شده از مقطعی خاص که روی شکل به‌صورت مقطع ۱ـ۱ نشان داده شده است استفاده می‌کنیم.

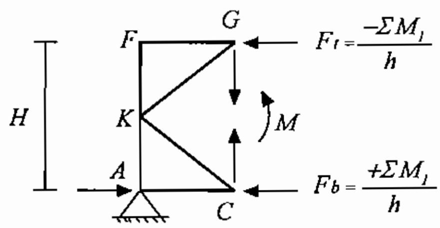
در این‌حالت با نوشتن معادله لنگر حول نقطه o، مقدار نیروی F بدست می‌آید. در این حالت نیز ملاحظه می‌شود که مقطع 1-1 از قطع 5 میله بدست آمد که 4 میله آن در نقطه o متقارب بودند. با به‌دست آوردن نیروی این اعضا، نیروی بقیه اعضاء را می‌توان با روش گره به‌دست آورد.



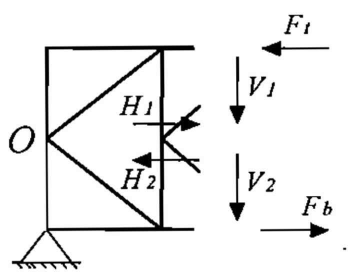
مقاطع ویژه خرپای K:



خرپای K نیز یک خرپای ساده است که نیروی تک‌تک اعضای آن با روش گره قابل محاسبه است؛ ولی برای این خرپا نیز مقاطعی ویژه جهت تحلیل ساده‌تر وجود دارد. یک دهانه از خرپا را در نظر می‌گیریم. در دهانه CD برای یافتن نیروی اعضای فوقانی وتحتانی از مقطع ۱ـ۱ استفاده می‌کنیم. بدیهی است با نوشتن معادله لنگر حول نقطه G نیروی عضو تحتانی یعنی F_b و با نوشتن معادله لنگر حول نقطه C نیز نیروی عضو فوقانی یعنی F_t به‌دست می‌آید. با توجه به برابری لنگر حول نقاط C و G (در صورتی که نیروها قائم باشند) مقادیر F_t و F_b با هم برابرند. تنها تفاوتی که بین این دو نیرو وجود دارد علامت آن‌هاست یعنی یکی در کشش (زیر) و یکی در فشار (بالا) می‌باشد.



برای بدست آوردن نیروی میله‌های مورب از مقطع 2−2 استفاده می‌شود. در این مقطع با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت محور y ها، مقدار نیروی V به‌دست می‌آید. برای یافتن مقدار مؤلفه قائم اعضای مورب خواهیم داشت:

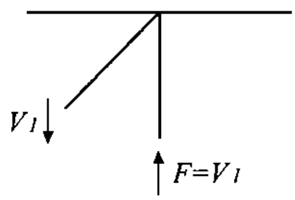


الف) اگر o وسط دهانه باشد آنگاه $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$

ب) اگر o وسط دهانه نباشد نیروی V به نسبت طول تصویر میله‌های مورب تقسیم می‌شود (طبق نکات تحلیل خرپا)

برای بدست آوردن نیروی اعضای قائم نیز از مقطع 3−3 استفاده می‌کنیم:

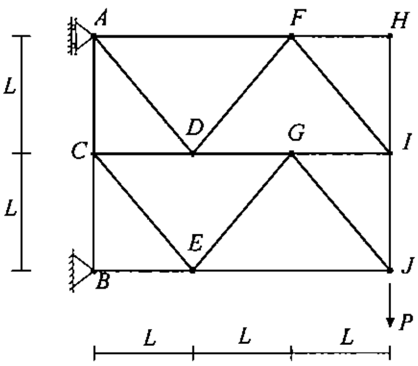
در این مقطع با داشتن نیروی V_1 و نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای قائم مقدار نیروی عضو قائم به‌دست می‌آید.



توجه: در خرپای مورد بحث اگر به گره‌های F و J نیرویی وارد نشود اعضای KF، FG، IJ و JN اعضای صفر نیرویی‌اند. (طبق نکات خرپاها)

توجه: در خرپاهای مرکب دیگر (غیر از خرپاهای مورد بحث) برای تحلیل خرپا باید به طور ابتکاری از مقطعی مناسب استفاده کرد.

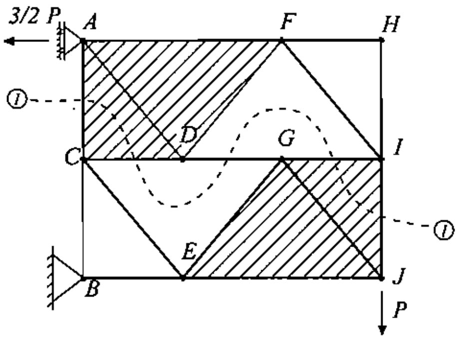
مثال : در خرپای مقابل نیروی عضو AC را بیابید.



این خرپا یک خرپای مرکب است. در واقع دو خرپای ساده هاشورزده در شکل زیر توسط سه جسم صلب به هم متصل‌اند. (این سه جسم صلب میله DG و خرپاهای FHI و CBE هستند.) با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 3PL = A_x \times 2L \Rightarrow A_x = \frac{3P}{2}$$

حال با در نظر گرفتن مقطع 1 − 1 و نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه I برای قطعه بالایی خواهیم داشت:

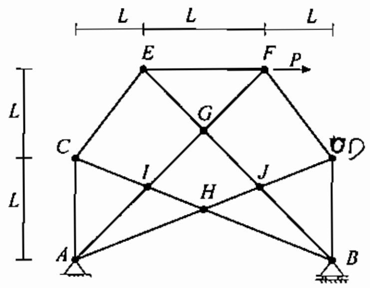


$$\sum M_I = 0 \Rightarrow F_{AC} \times 3L = \frac{3P}{2} \times L \Rightarrow F_{AC} = \frac{P}{2}$$

که این نیرو فشاری است. (به دلیل آن توجه کنید.)

در مقطعی که در نظر گرفته شد، 5 عضو قطع شد ولی امتداد 4 تا از آن‌ها از نقطه I می‌گذشت پس با گشتاورگیری حول همین نقطه نیروی عضو پنجم به‌دست آمد.

مثال : در خرپای زیر نیروی اعضای EF و BD را بیابید.



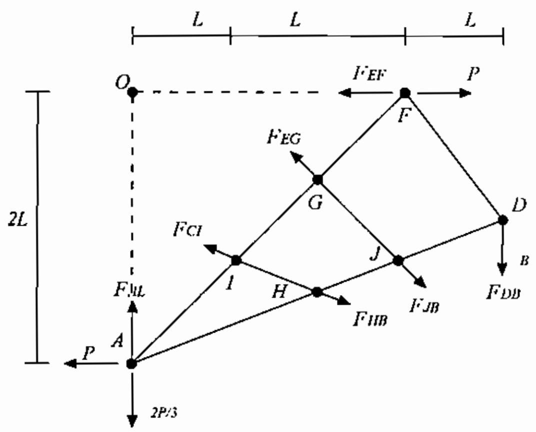
ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را می‌یابیم:

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; P \times 2L = B_y \times 3L \;\Rightarrow\; B_y = \frac{2P}{3}\uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y = \frac{2P}{3}\downarrow$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x = P\leftarrow$$

حال قسمت AFD از خرپای مذکور را توسط مقطعی جدا کرده و بیرون می‌آوریم.



با نوشتن معادله تعادل گره G و J در راستای میله GJ نتیجه می‌گیریم:

$$F_{EG} + F_{JB} = 0$$

یعنی دو نیروی F_{EG} و F_{JB} با هم برابر و خلاف جهت همدیگرند. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت:

$$F_{CI} + F_{HB} = 0$$

حال با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه فرضی O که محل برخورد امتداد اعضای EF و AC می‌باشد به‌دست می‌آید:

$$\sum M_o = 0 \;\Rightarrow\; P \times 2L + F_{DB} \times 3L = 0 \;\Rightarrow\; F_{DB} = \frac{-2P}{3}$$

علامت منفی بدان معنی است که جهت انتخاب شده صحیح نمی‌باشد پس نیروی عضو DB برابر $\frac{2P}{3}$ و فشاری می‌باشد. دقت داریم چون نیروی F_{EG} و F_{JB} و همین‌طور F_{CI} و F_{HB} با هم برابرند و در یک امتدادند، ولی خلاف جهت هم، لذا گشتاور آن‌ها حول هر

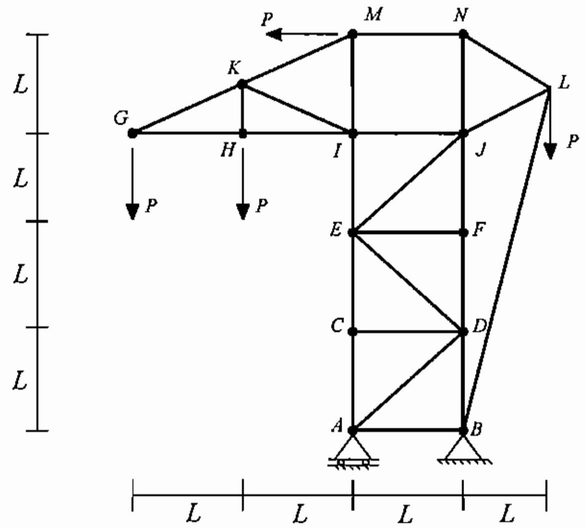
نقطه دلخواه، هم‌دیگر را خنثی می‌کند. در ضمن معادله تعادل نیرو نیز در هر راستایی که نوشته شود، باز هم اثر این نیروها در هر امتداد دلخواه همدیگر را خنثی می‌کنند.

برای یافتن نیروی عضو EF معادله تعادل نیرو در جهت افق را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - P + F_{EF} = 0 \Rightarrow F_{EF} = 0$$

مثال : نیروی عضو EJ در خرپای مقابل را بیابید.

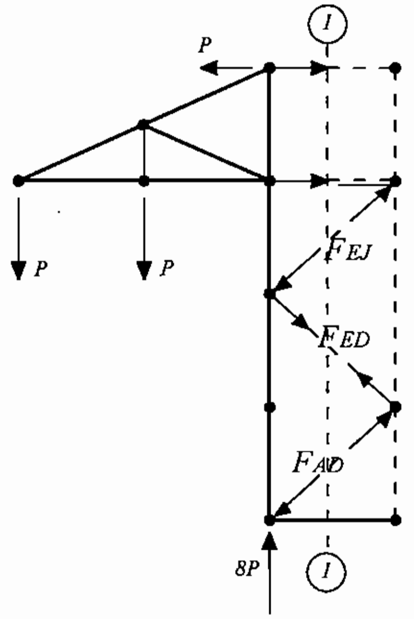
ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به‌دست می‌آوریم.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y = 8P \uparrow$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 5P \uparrow$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = P \rightarrow$$

از طرفی طبق نکات خرپا، اعضای EF و CD اعضای صفر نیرویی هستند.

حال گره‌های E و D را بررسی می‌کنیم. با نوشتن معادله تعادل نیرو در امتداد افق می‌توان نتیجه گرفت نیروی اعضای JE با ED و نیروهای اعضای ED با DA با هم برابرند. حال از مقطع 1 − 1 به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم: (در شکل زیر اعضای EF و CD که صفر نیرویی هستند ترسیم نشده است.)



$$F_{EJ} = F_{ED} = F_{AD}$$

حال با نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای قائم داریم:

$$8P-2P=3F_{V_{EJ}} \Rightarrow F_{V_{EJ}}=2P$$

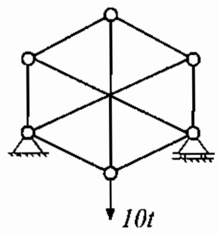
برای یافتن نیروی عضو EJ طبق نکات خرپا به‌دست می‌آید:

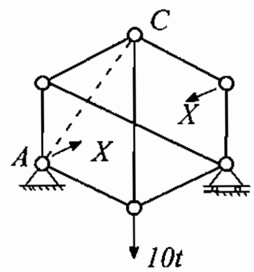
$$F_{EJ}=F_{V_{EJ}}\times\frac{L}{V}=2P\times\frac{\sqrt{2}\,L}{L}=2\sqrt{2}\,P$$

۳- روش هنبرگ:

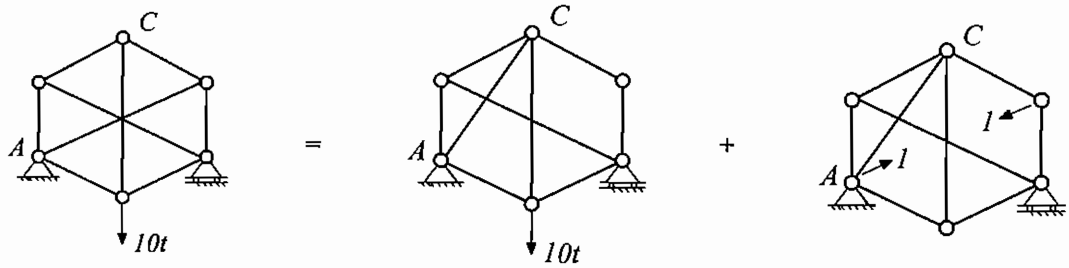
این روش برای تحلیل خرپاهای مبهم بکار می‌رود. بطور مثال برای تحلیل خرپای زیر از این روش استفاده می‌شود.
در این خرپا $b=9$ و $j=6$ و $r=3$ بوده پس خرپا معین می‌باشد. در روش هنبرگ، ابتدا یک میله را از خرپا حذف کرده و به جای آن نیرویی مجهول مانند x در امتداد میله حذف شده قرار می‌دهیم و سپس به جای میله حذف شده میله دیگری (مثلاً در این مسأله AC) در خرپا قرار می‌دهیم بطوریکه خرپای جدید، شرایط زیر را داشته باشد.

۱- پایدار باشد.
۲- به سادگی قابل تحلیل باشد.





حال از جمع آثار قوا استفاده کرده و این خرپا را بصورت دو خرپا در می‌آوریم.



خرپای جایگزین تحت اثر فقط بارگذاری خرپای اصلی

خرپای جایگزین تحت اثر بار واحد در امتداد میله حذف شده

توجه کنید که با توجه به اصل جمع آثار قوا به جای نیروی مجهول x، نیروی واحد قرار داده و اثرات آنرا x برابر می‌کنیم.

نکته : باید توجه داشت میله AC باید یک میله صفر نیرویی باشد تا دو خرپا هم ارز باشند.(به این علت که چنین عضوی در خرپای اصلی وجود نداشته است) پس در ادامه حل داریم:

$$F_{AC} = F'_{AC} + x\ f'_{AC} = 0 \Rightarrow x = \frac{-F'_{AC}}{f'_{AC}} = F_{AD}$$

که در آن F'_{AC} نیروی عضو AC در خرپای جایگزین تحت اثر فقط بارگذاری خرپای اصلی و f'_{AC} نیروی عضو AC در خرپای جایگزین تحت اثر بار واحد در امتداد میله حذف شده می‌باشد.

حال برای هر عضوی می‌توانیم بنویسیم:

$$F_i = F'_i + x.f'_i$$

که در این رابطه x برای ما معلوم می‌باشد.

حالات خاص:

۱- اگر $F'_{AC} = 0$ شود پس $x = 0$ بوده و برای بدست آوردن نیروی هر عضو خواهیم داشت:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_i = F'_i$$

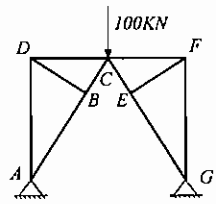
یعنی فقط خرپای جایگزین تحت اثر بارگذاری خرپای اصلی را تحلیل می‌کنیم.

۲- اگر $f'_{AC} = 0$

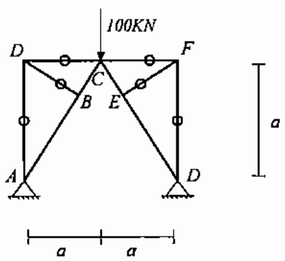
$$f'_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = F_{Ad} = \infty$$

و هرگاه یک عضو نیروی ∞ داشته باشد عضوی ناپایدار است.

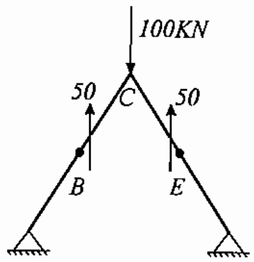
مثال : مقادیر نیروی اعضای BC و CF چقدر است:



با توجه به نکات گفته شده در مبحث خرپا فقط اعضای BC، AB، EG و CE دارای نیروی غیر صفر می‌باشند.



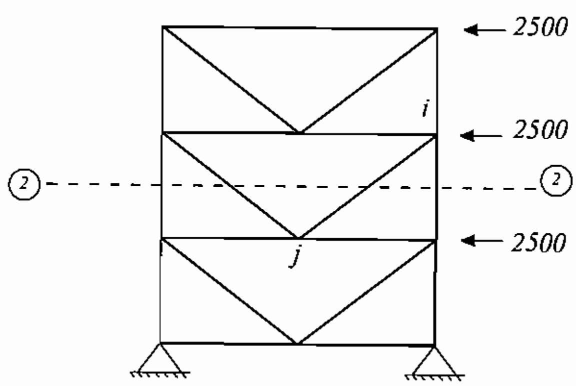
سهم قائم هر کدام از میله‌های BC و CF برابر 50 KN می‌باشد.



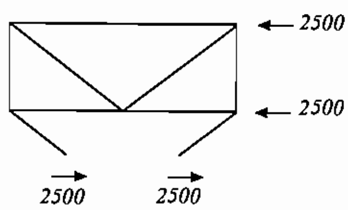
$V_{BC} = 50 \quad \Rightarrow \quad BC = 50\sqrt{2}$ فشاری

$BC = CF = 50\sqrt{2}$ فشاری

مثال : مقدار نیروی عضو ij در خرپای زیر چقدر است:



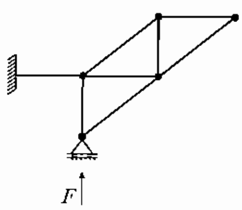
با استفاده از مقطع 2-2 ملاحظه می‌شود که سهم افقی میله ij برابر 2500 می‌باشد.



بنابراین داریم:

$H_{ij} = 2500 \qquad \Rightarrow \qquad ij = 2500\sqrt{2}$ فشاری

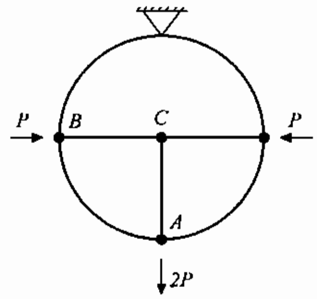
مثال : در خرپای زیر وزن هر کدام از میله‌ها N 200 می‌باشد. عکس‌العمل F چقدر است.



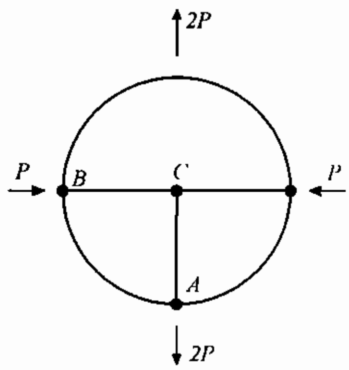
درکابل متصل به تکیه‌گاه گیردار فقط یک نیرو افقی ایجاد می‌شود بنابراین این کابل هیچ نقشی در تحمل نیروهای قائم ندارد بنـابراین تمام وزن میله‌ها روی تکیه‌گاه مفصلی می‌باشد پس عکس‌العمل F برابر وزن کلیه میله‌هاست.

$F = w = (6\times200) = 1200$

مثال : در خرپای زیر نیروی اعضای BCو CA چقدر است:



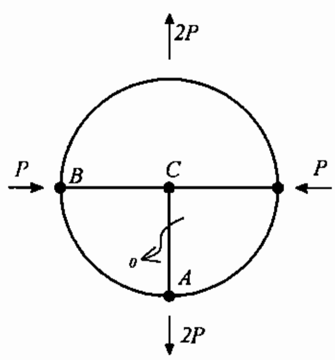
برای یافتن نیروی BC ابتدا عکس العمل تکیه‌گاه را بدست می‌آوریم:



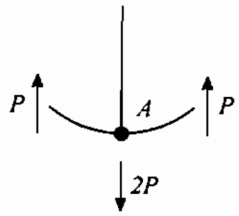
$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = 2P \uparrow$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = 0$

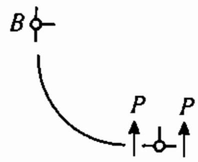
لذا شکل سازه به صورت زیر در می‌آید:



اگر گره A را به صورت زیر بیرون ب کشیم با توجه به تقارن، دو نیرو برابر P در دو طرف گره به اعضا وارد می‌شود.

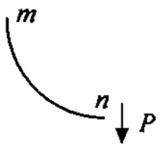


حال قطعه زیر را بیرون می‌کشیم.(مقطع مورد استفاده در مجاورت مفاصل A و B).



این قطع را mn می‌نامیم و آن‌را تحلیل می‌کنیم.

اگر معادله تعادل در راستای y این قطعه را بنویسیم خواهیم داشت:



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad M_y = P \uparrow$$

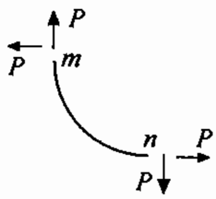
اگر معادله تعادل لنگر حول m را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\Sigma M_m = 0 \;\Rightarrow\; P.R = n_x.R \;\Rightarrow\; n_x = P \rightarrow$$

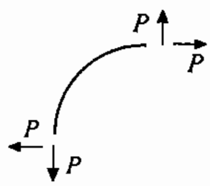
حال اگر معادله تعادل در راستای x را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; m_x = P \leftarrow$$

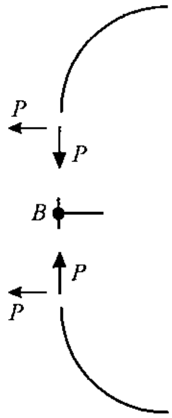
پس قطعه به صورت زیر خواهد بود:



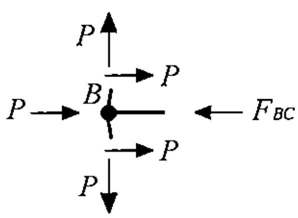
و به همین صورت برای قطعه بالایی B خواهیم داشت:



برای تحلیل بهتر نقطه B به شکل زیر توجه کنید:



پس اگر نقطه B را مقطع بزنیم خواهیم داشت:



و با نوشتن معادله تعادل در راستای x خواهیم داشت:

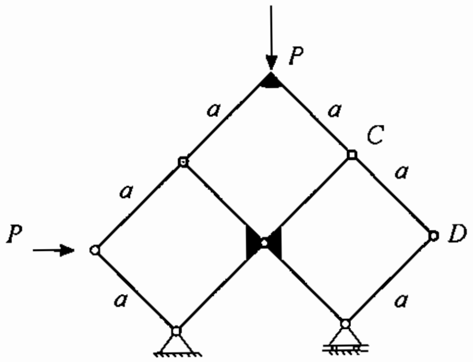
$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_{BC} = 3P$$

(توجه داشته باشد که بسیاری از مراحل فوق باید به صورت ذهنی انجام شود و مطالب فوق به دلیل تفهیم موضوع، بسط داده شد.)

تست‌های بخش خرپاها

۱ ـ نیروی میلهٔ CD در شکل زیر کدام است؟ **(سراسری ۷۵)**

۱) صفر
۲) $\frac{P}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}P$
۴) P

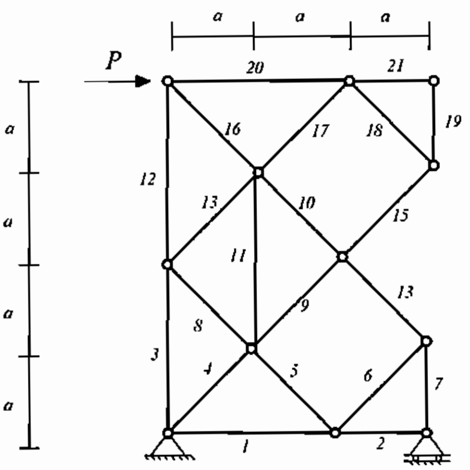


حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

گره D یک گره دو مفصلی است که هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود؛ پس، طبق نکات خرپاها، هر دو عضو آن صفر نیرویی است یعنی نیروی عضو CD نیز صفر می‌باشد.

۲ ـ نیروی میله 11 را حساب کنید. **(سراسری ۷۶)**

۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}P$
۲) $\frac{4}{3}P$
۳) $\sqrt{2}\,P$
۴) $\frac{-2}{3}P$



حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

ابتدا اعضای صفر نیرویی را به‌دست می‌آوریم. واضح است که اعضای 19 و 21 صفر نیرویی هستند. با صفر شدن این اعضاء اعضای 18 و 15 و سپس اعضای 17 و 20 نیز صفر نیرویی می‌شوند. در ضمن چون تکیه‌گاه سمت راست غلتکی است لذا فقط یک عکس‌العمل قائم دارد و با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت محور x ها در گره متصل به این تکیه‌گاه، عضو شماره 2 نیز صفر نیرویی می‌شود. گره‌ای که محل تلاقی عضوهای 9، 10، 14 و 15 نیز یک گره 3 عضوی شده (پس از صفر شدن نیروی عضو 15) که دو میله در امتداد هم دارد پس عضو شماره 9 نیز صفر نیرویی است.

یافتن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی:

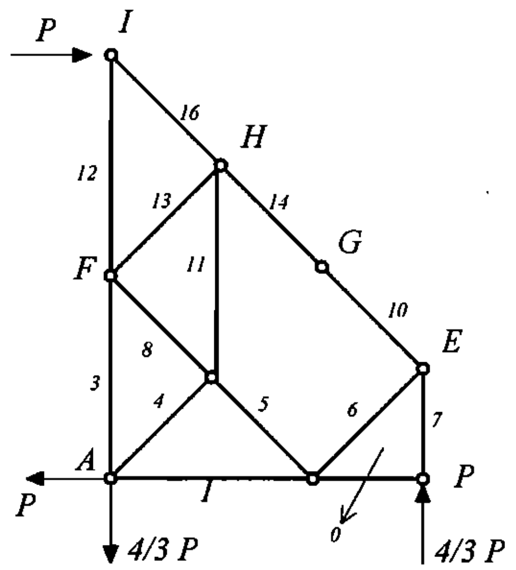
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow G_x = P \leftarrow$$

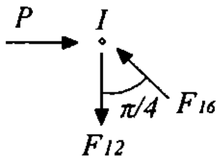
$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 4Pa = Ey \times 3a \Rightarrow E_y = \frac{4}{3}P \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow G_y = \frac{4}{3}P\downarrow$$

حال به سراغ گره‌های دو عضوی می‌رویم.

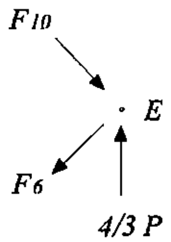
ابتدا گره I :





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{16}\sin\frac{\pi}{4} = P$$
$$\Rightarrow F_{16} = \sqrt{2}\,P$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{12} = F_{16}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow F_{12} = P$$

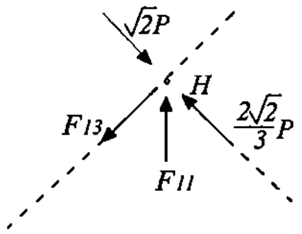
گره B یک گره یک عضوی است (عضو شماره 2 صفر است) پس عضو شماره 7 نیرویی برابر $\frac{4}{3}P$ دارد. حال گره E را بررسی می‌کنیم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{10}\cos\frac{\pi}{4} = F_6\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow F_{10} = F_6$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \left(F_{10} + F_6\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}P$$
$$\Rightarrow 2F_6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3}P \Rightarrow F_6 = \frac{2\sqrt{2}}{3}P = F_{10}$$

در گره G، با نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای HE، عضو شماره 14 نیز نیرویی برابر $\frac{2\sqrt{2}}{3}P$ دارد. حال در گره H معادلات تعادل را بررسی می‌کنیم.

یک بار تعادل را در راستای S می‌نویسیم:

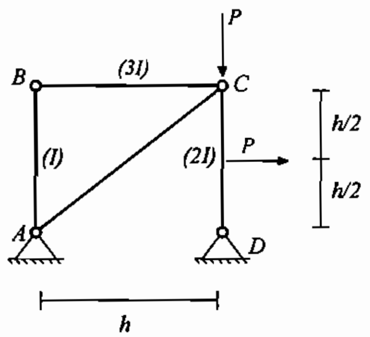


$$F_{11}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3}P = \sqrt{2}\,P$$
$$\Rightarrow F_{11}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3}P \Rightarrow F_{11} = \frac{2}{3}P$$

چون عضو فشاری است علامت منفی می‌باشد.

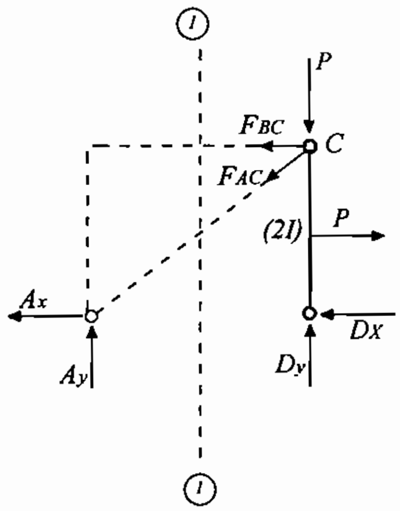
۳ـ در قاب زیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه D برابر است با: **(سراسری ۷۷)**

۱) P
۲) صفر
۳) بیشتر از P
۴) $\frac{P}{2}$



حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

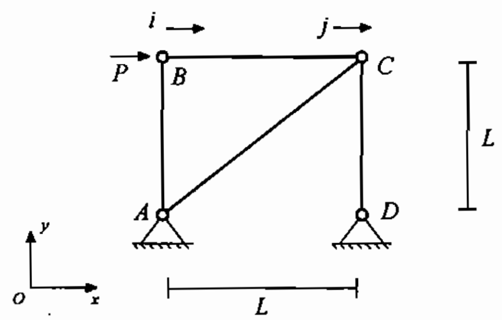
با زدن مقطعی به‌صورت زیر می‌توان عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه D را با نوشتن معادله تعادل گشتاور حول نقطه C به‌دست آورد:



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow P\left(\frac{h}{2}\right) = D_x h \Rightarrow D_x = \frac{P}{2}$$

۴ـ سازه زیر در دستگاه oxy مطابق شکل زیر بارگذاری شده است. اگر سختی محوری مقاطع عمودی اعضاء سازه برابر EA باشند، آنگاه تغییر مکان گره i در امتداد ox .... تغییر مکان گره j در امتداد محور ox است. **(سراسری ۷۷)**

۱) برابر
۲) بزرگتر از
۳) کوچکتر از
۴) قرینه



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

اگر عضو BC صلب بود تغییر مکان گره B و C با هم برابر می‌بودند ولی چون سختی عضو EA است لذا با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت محور x ها درمی‌یابیم که نیروی عضو BC برابر P است پس این عضو به اندازه $\frac{PL}{EA}$ کوتاه می‌شود و بدین ترتیب تغییر مکان نقطه B (i) بیشتر از تغیر مکان نقطه C (j) می‌باشد.

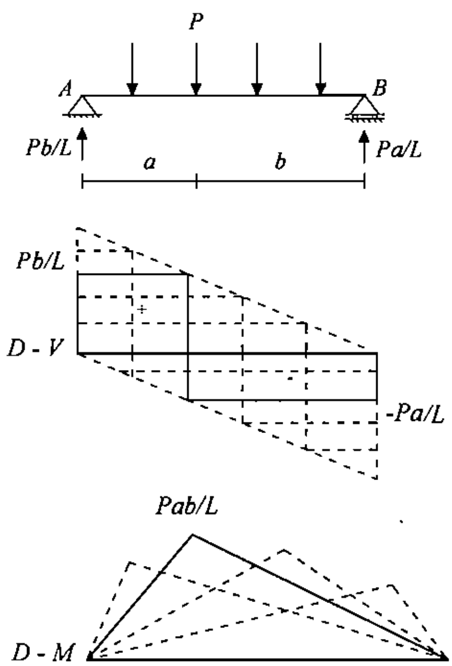
فصل سوم

خطوط تأثیر

خط تاثیر:

اگر در یک سازه بارگذاری ثابت باشد، به منظور طراحی اعضای سازه ، به آسانی می‌توان سازه را تحلیل کرده و اعضای مناسب برای سازه را انتخاب کنیم ولی در بارهای متحرک (مثل بار یک خودروی متحرک روی پل)، برای طراحی اعضا، نیاز به بحرانی‌ترین مقدار نیرو در اثر عبور بار متحرک داریم. برای این منظور لازم است که مقدار نیروی عضو را به ازاء مکانهای مختلف بار بدست آوریم و بحرانی‌ترین حالت را پیدا کنیم.

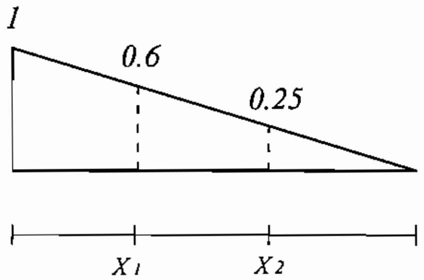
در مثال زیر مکان بار P را تغییر داده‌ایم و ملاحظه می‌شود که مقادیر برش در تکیه‌گاهها و لنگر حداکثر به ازاء مکانهای مختلف بار تغییر می‌کند.



تعریف خط تأثیر: نموداریست که تغییرات یک تابع سازه‌ای را در محلی مشخص و ثابت از سازه به ازاء تغییرات موقعیت نیرو نمایش می‌دهد. برای راحتی محاسبات، نیروی متغیر را بار واحد در نظر می‌گیرند. (تابع سازه‌ای منظور عکس‌العمل تکیه‌گاهی، نیروهای برشی، لنگرهای خمشی و نیروهای محوری است)

خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی تیر ساده:

برای بدست آوردن مقادیر مختلف نیروی تکیه‌گاه A در سازه فوق لازم است که جای بار واحد را روی سازه جابجا کنیم و مقادیر R_A را در حالات مختلف بدست آوریم که خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A بصورت زیر خواهد بود.



منظور از این دیاگرام آن است که اگر بار واحد در نقطه A باشد عکس‌العمل تکیه‌گاه A برابر ۱ خواهد بود $(R_A = 1)$ و اگر در فاصله x_1 از ابتدای تیر باشد $R_A = 0.6$ و اگر در فاصله x_2 از ابتدای تیر باشد $R_A = 0.25$ می‌باشد.

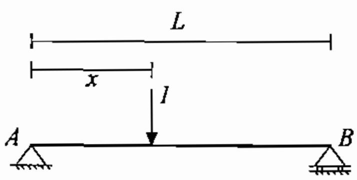
برای بدست آوردن ضابطه این خط تأثیر می‌توان بار واحد را در فاصله x (متغیر) در نظر گرفت و سپس مقدار R_A را بصورت تابعی از x بیان کرد:

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A \times L = 1(L-x) \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{L-x}{L} = 1 - \frac{x}{L}$$

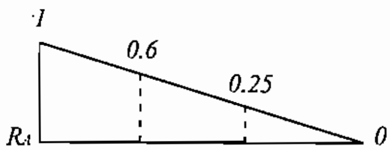
و چون در هر حالت بار با توجه به معادله تعادل در راستای y همواره $R_A + R_B = 1$ می‌باشد لذا:

$$R_B = \frac{x}{L}$$

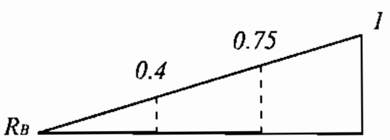
این دو نمودار خط تأثیر به‌صورت زیر رسم می‌شوند.



خط تأثیر

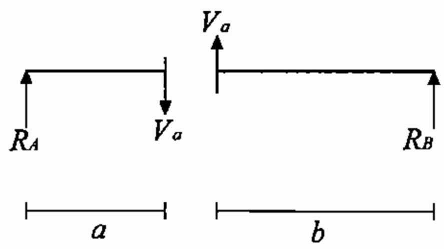


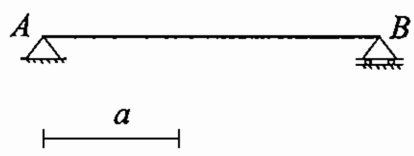
خط تأثیر



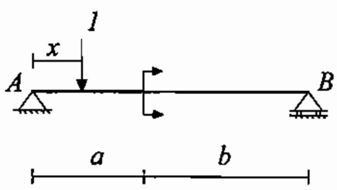
خط تأثیر برش تیر ساده:

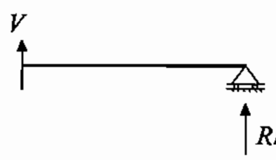
برای بدست آوردن خط تاثیر برش در نقطه‌ای به فاصله a از ابتدای تیر باید بار را در نقاط مختلف تیر قرار داده و مقدار برش در نقطه مذکور را بدست آوریم. در این‌صورت می‌توان حالات زیر را در نظر گرفت:





الف- اگر بار واحد در فاصله $x < a$ باشد (قطعه سمت چپ) برای بدست آوردن برش مقطع از تعادل قطعه سمت راست استفاده می‌کنیم و لذا خواهیم داشت:

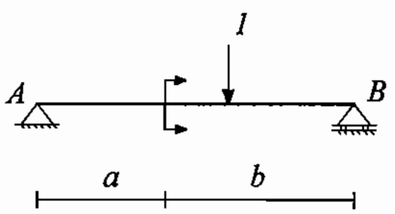


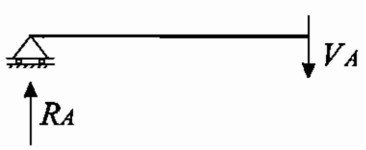


$$R_B \times L = 1 \times x \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{x}{L} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_a = -R_B = \frac{-x}{L} \quad , \quad x < 0$$

ب- اگر بار واحد در محدودهٔ $a < x < L$ قرار گیرد (قطعه سمت راست) از تعادل قطعه سمت چپ برای بدست آوردن برش در نقطه x استفاده می‌شود، لذا خواهیم داشت:

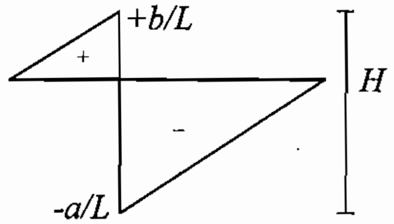




$$R_A \times L = 1(L - x) \quad \Rightarrow \quad R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

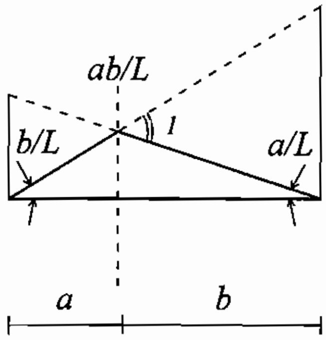
$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_a = R_A = 1 - \frac{x}{L} \quad , \quad a < x < L$$

با رسم این دو معادله در نواحی تعریف شده، خط تاثیر برش تیر داده شده در نقطه‌ای به فاصله a از ابتدای تیر بصورت مقابل است:



$$H=\frac{b}{L}+\frac{a}{L}=\frac{a+b}{L}=1$$

خط تأثیر لنگر خمشی تیر ساده: (در نقطه a)



الف) تعادل قطعه سمت راست

$$x<a \quad \Rightarrow \quad M=b.R_B=\frac{bx}{L}$$

ب) تعادل قطعه سمت چپ

$$a<x<b \quad \Rightarrow \quad M=aR_A=a\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

(به دلیل مطلب فوق فکر کنید)

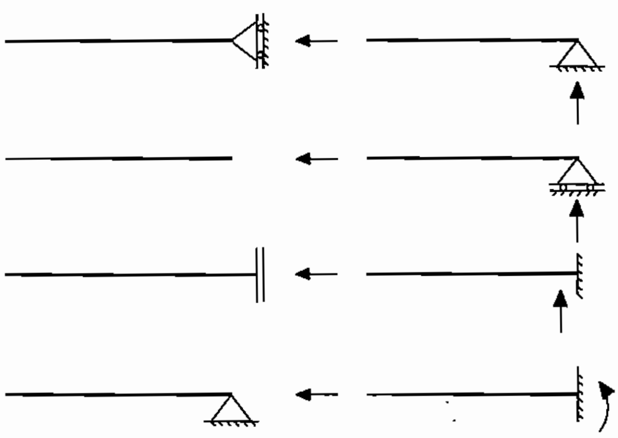
روش مولر ـ برسلاو برای رسم خط تأثیر سازه‌ها:

برای رسم خطوط تاثیر یکی از بهترین روشها، روش مولر- برسلاو است که دارای مراحل زیر است:

مرحله ۱- حذف عامل مقاومت تابع مورد نظر از سازه:

در این مرحله عاملی را که سبب ایجاد مقاومت در سازه جهت ایجاد آن تابع می‌شود را حذف می‌کنیم. این کار به‌صورت زیر صورت می‌گیرد:

الف) برای عکس‌العملهای تکیه‌گاهی



در حالت اول چون هدف یافتن خط تأثیر عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه می‌باشد، تکیه‌گاه را به حالتی درمی‌آوریم که در راستای قائم مقاومتی نداشته باشد. پس تکیه‌گاه مفصلی به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌شود.

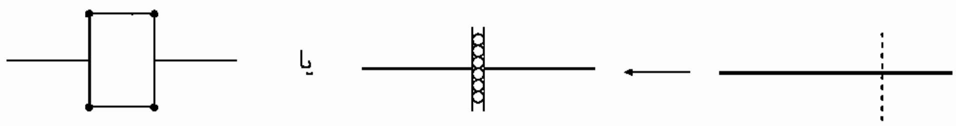
در حالت دوم چون خط تأثیر عکس‌العمل قائم را می‌خواهیم، عامل مقاومت در راستای قائم را حذف می‌کنیم پس تکیه‌گاه غلتکی به سر آزاد تبدیل می‌شود.

در حالت سوم چون خط تأثیر عکس‌العمل قائم را خواهیم، عامل مقاومت در راستای قائم را حذف می‌کنیم پس تکیه‌گاه گیردار به تکیه‌گاه گیردار غلتکی تبدیل می‌شود.

و در حالت آخر چون خط تأثیر ممان تکیه‌گاهی را می‌خواهیم عامل مقاومت در مقابل خمش را حذف می‌کنیم پس تکیه‌گاه گیردار به تکیه‌گاه مفصلی تبدیل می‌شود.

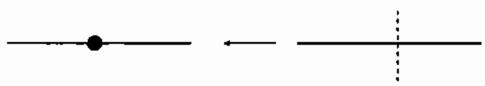
ب) برای نیروی برشی

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی در یک نقطه ازتیر، در آن نقطه انفصال برشی ایجاد می‌کنیم. (حذف عامل مقاوم در برابر برش مقطع)



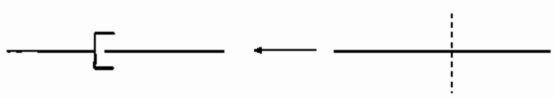
ج) برای لنگر خمشی:

برای رسم خط تاثیر لنگر خمشی در یک نقطه از تیر، در آن نقطه مفصل داخلی ایجاد می‌کنیم. (حذف عامل مقاومت در برابر خمش مقطع)



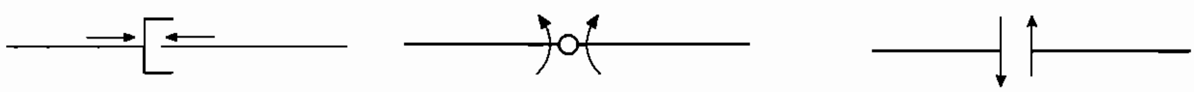
د) برای نیروی محوری:

برای رسم خط تاثیر نیروی محوری در یک نقطه از سازه، در آن نقطه اتصال تلسکوپی ایجاد می‌کنیم (حذف عامل مقاوم در برابر کشش یا فشار). این خط تاثیر معمولاً در خرپاها کاربرد دارد که در آن اعضاء دارای نیروی محوری هستند.



مرحله۲ـ تعیین جهت قراردادی برای نیروی حذف شده

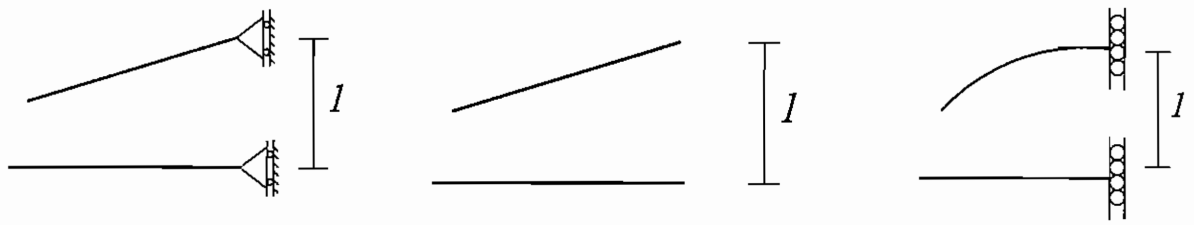
جهت قراردادی برای تکیه‌گاهها، رو به بالا مثبت است و برای بقیه حالتها امتداد مثبت بصورت زیر تعریف می‌شود.



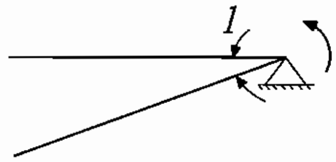
برای برش (قطعات راست و چپ ساعتگرد بچرخند)   **برای خمش (زیر به کشش بیفتد)**   **برای نیروی محوری (قطعات راست و چپ به کشش بیفتند)**

مرحله۳- اعمال جابجایی واحد در امتداد مثبت نشان داده شده:

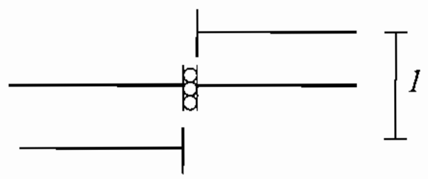
الف) در مورد تکیه‌گاهها، جابجایی واحد برابر حرکت واحد است. (یعنی تکیه‌گاه به اندازه یک واحد در جهت مثبت حرکت کند.)



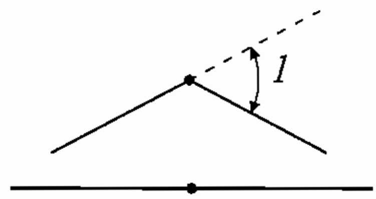
ب) در مورد ممان، جابجایی واحد برابر دوران واحد است. (در تکیه‌گاه) (یعنی عضو به اندازه ۱ واحد بچرخد.)



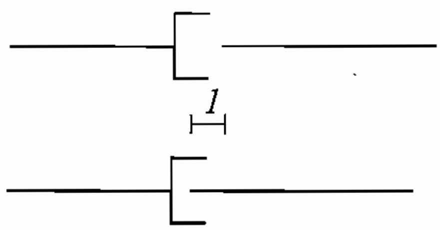
ج) در مورد نیروی برشی، جابجایی واحد برابر حرکت نسبی واحد است. (یعنی قطعات راست و چپ به اندازه ۱ واحد نسبت بهم جابه‌جا شوند.)



د) در مورد لنگر خمشی، جابجایی واحد برابر دوران نسبی واحد است. (یعنی امتداد قطعات راست و چپ به اندازه ۱ واحد نسبت به هم دوران کنند.)



هـ) در مورد نیروی محوری جابجایی واحد برابر حرکت نسبی واحد است. (یعنی قطعات راست و چپ به اندازه ۱ واحد به هم نزدیک شوند.)



مرحله۴-مطابق اصل مولر- برسلاو: پس از اعمال جابه‌جایی‌های واحد و رسم شکل جدید سازه، عرض خط تاثیر در هر نقطه برابر است با مقدار جابجایی قائم نقطه اثر مکانهایی که بار واحد می‌تواند برآن اثر کند پس در تیرهایی که افقی هستند و تحت تاثیر بار قائم واحد قرار می‌گیرند، وضعیت تغییر شکل یافتهٔ سازه تحت جابه‌جایی‌های واحد ایجاد شده خط تاثیر تابع مورد نظر را نشان می‌دهد.

نکته۱- در مورد خط تاثیر سازه‌های معین استاتیکی:

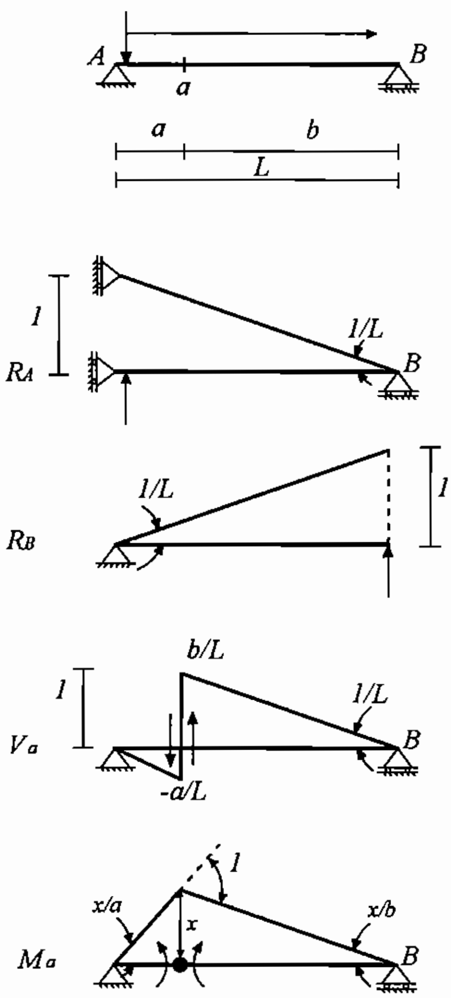
در سازه‌های معین استاتیکی، اعمال گام۱ روش مولر- برسلاو (حذف یک مؤلفه نیرو از سازه) موجب تشکیل سازه ای ناپایدار می‌شود که اعمال جابجایی واحد بر این سازه ناپایدار، بدون هیچگونه مقاومتی از طرف سازه امکان‌پذیر است.

نکته۲- در مورد خط تاثیر سازه‌های نا معین استاتیکی:

در یک سازه نامعین استاتیکی حذف یک مولفه نیرو ممکن است منجر به ایجاد یک سازه ناپایدار نگردد در نتیجه اعمال جابجایی واحد به یک سازهٔ پایدار، با مقاومت سازه مواجه می‌شود. (در سازه نیروی برشی و لنگر خمشی ایجاد می‌شود). بدین‌ترتیب هنگام اعمال جابجایی واحد در این سازه، بخشهای منحنی شکل بوجود می‌آید بنابراین:

- در خط تاثیر سازه‌های نامعین استاتیکی، بخشهای منحنی شکل می‌تواند وجود داشته باشد.

مثال : خط تاثیرهای R_A, R_B, V_a, M_a. را برای تیر ساده رسم کنید:



در بحث خط تأثیر، خطوط تأثیر بیان شده مورد بررسی قرار گرفته و به روش تحلیلی رسم شده‌اند، در این قسمت با استفاده از روش مولر ـ برسلاو خطوط تأثیر را رسم می‌کنیم.

خط تأثیر R_A: عامل مقاوم ایجادکننده R_A را حذف کرده پس تکیه‌گاه مفصلی به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌شود. سپس نقطه A را به اندازه 1 واحد به سمت بالا حرکت می‌دهیم. سازه تغییر شکل یافته همان خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_A می‌باشد. چون انتها به اندازه 1 واحد بالا رفته و طول تیر L می‌باشد لذا شیب خط تأثیر برابر $\tan\alpha = \frac{1}{L}$ می‌باشد.

خط تأثیر R_B: مانند خط تأثیر R_A رسم می‌شود.

خط تأثیر V_a: ابتدا در نقطه a انفصال برشی ایجاد می‌کنیم و سپس جابه‌جایی واحد را اعمال می‌کنیم. حال اگر سمت راست نقطه a به اندازه H_1 بالا رود و سمت چپ نقطه a به اندازه H_2 پایین بیاید، برای یافتن اندازه H_1 و H_2 از دو نکته استفاده می‌کنیم:

الف) شیب خطوط سمت چپ و راست با هم برابر است:

$$\frac{H_1}{b}=\frac{H_2}{a}$$

ب) حاصل‌جمع H_1 و H_2 برابر 1 واحد است: (به دلیل اعمال جابه‌جایی واحد)

$$H_1+H_2=1$$

از دو معادله داریم:

$$H_1=\frac{b}{a}H_2 \Rightarrow \frac{b}{a}H_2+H_2=1 \Rightarrow H_2=\frac{1}{\frac{b}{a}+1}=\frac{1}{\frac{b+a}{a}}=\frac{a}{b+a}=\frac{a}{L} \Rightarrow H_1=\frac{b}{L}$$

پس سمت راست a به اندازه $H_1=\frac{b}{L}$ بالا رفته و قسمت چپ a به اندازه $H_2=\frac{a}{L}$ پایین می‌آید.

خط تأثیر M_a: برای خط تأثیر خمش در نقطه a ابتدا یک مفصل داخلی ایجاد کرده و دوران واحد اعمال می‌کنیم.

برای یافتن جزئیات خط تأثیر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

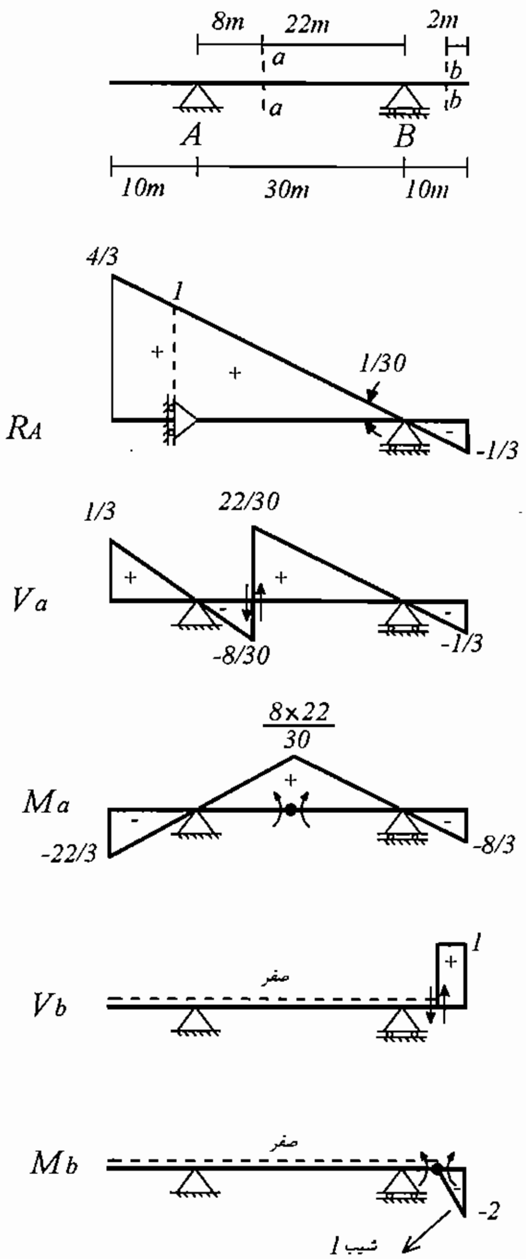
اگر در اثر اعمال دوران واحد نقطه مذکور به اندازه x به سمت بالا حرکت کند شیب قطعه سمت راست $\frac{x}{b}$ و شیب سمت چپ $\frac{x}{a}$ است که چون دوران واحد است لذا باید:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1 \Rightarrow x\left(\frac{a+b}{ab}\right)=1 \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b} \Rightarrow x=\frac{ab}{L}$$

پس در اثر اعمال دوران واحد نقطه a به اندازه $\frac{ab}{L}$ بالا می‌رود.

توجه: در رسم خط تأثیر تیرها، روش مولر ـ برسلاو مناسب‌ترین روش است ولی در قاب‌ها و خرپاها این روش فقط نقش کنترلی دارد و به‌طور کمی نمی‌تواند خط تأثیر را نتیجه دهد.

مثال: در تیر مقابل تأثیر M_b , V_b , M_a , V_a , R_a را رسم کنید.



خط تأثیر این تیر نیز مانند مسأله قبل رسم شد. حال کمی راجع به کاربرد خطوط تأثیر بحث می‌کنیم. فرض کنید از روی این تیر یک بار متحرک 30 تنی عبور می‌کند. در طراحی لازم است بدانیم ماکزیمم مقدار توابع سازه‌ای تحت اثر این بار متحرک چقدر است. فرض کنید می‌خواهیم ماکزیمم مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه A را در اثر این بار متحرک بیابیم. خط تأثیر اول، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A است. مفهوم این نمودار آن است که اگر بار واحد در ابتدای تیر باشد، عکس‌العمل تکیه‌گاه A برابر $\frac{4}{3}$ واحد است (ارتفاع خط تأثیر). با دقت در این خط تأثیر می‌توان دریافت که ماکزیمم مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه تحت اثر بار واحد همان $\frac{4}{3}$ است که در حالتی اتفاق می‌افتد که بار در ابتدای تیر باشد. حال اگر بار 30 تنی روی تیر حرکت کند باز هم ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاهی زمانی رخ می‌دهد که بار در ابتدای تیر باشد که مقدار این عکس‌العمل برابر $\frac{4}{3}\times30=40\ \text{ton}$ می‌باشد. دقت داریم که این عکس‌العمل 40 تنی به سمت بالاست.

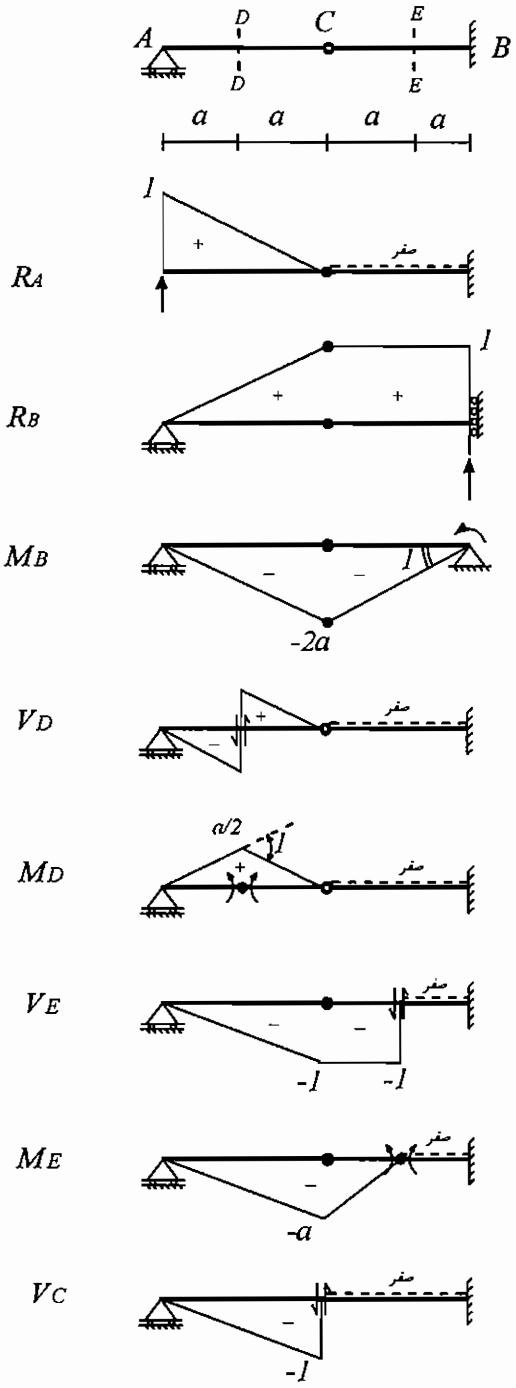
- با توجه به شکل خط تاثیر V_a، به این نتیجه می‌رسیم که اگر بار 30 تنی روی تیر حرکت کند، حداکثر میزان برش 22 تن خواهد بود و تیر باید برای $V=22\ \text{Ton}$ طراحی شود.

$$\left(\frac{22}{30}\times30=22\ \text{ton}\right)$$

- (به عنوان تمرین خمش بحرانی تیر فوق را بدست آورید)

- در رسم خط تأثیر V_b باید توجه داشته باشید که وقتی در مقطع b−b انفصال برشی ایجاد می‌کنیم، قسمت سمت چپی پایدار و قسمت سمت راستی ناپایدار است پس، در اثر اعمال جابه‌جایی واحد فقط قطعه سمت راستی جابه‌جایی داشته پس در قطعه سمت چپ ارتفاع خط تاثیر صفر و در قطعه سمت راست ارتفاع 1 می‌باشد. (با همین استدلال به خط تأثیر خمش توجه کنید.)

مثال : در تیر زیر خطوط تأثیر R_A , R_B , M_B , V_D , M_D , V_E , M_E , V_C را رسم کنید:



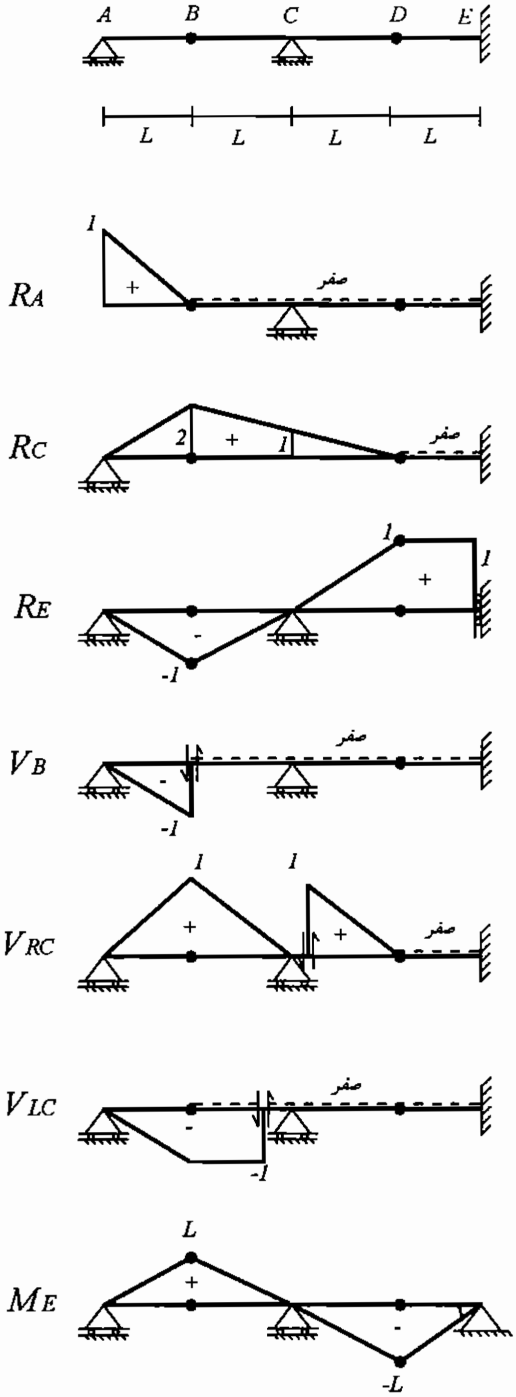
با دیدن خط تأثیر R_A می‌توان به این نتیجه رسید که بیشترین عکس‌العمل R_A هنگامی اتفاق می‌افتد که بار در نقطه A است و همچنین وقتی بار در فاصله CB است، $R_A = 0$ می‌باشد.(به علت آن توجه کنید).

با دیدن خط تأثیر M_B می‌توان به این نتیجه رسید که تحت بارهای قائم، B همواره دارای ممان منفی است و بیشترین مقدار این ممان زمانی اتفاق می‌افتد که بار روی نقطه C قرار دارد.

(برای بقیه حالات خط تأثیر را بررسی کنید.)

توجه: با توجه به اینکه در نقطه C یک مفصل داریم، لذا خط تاثیر لنگر این نقطه (M_C) همواره صفر است، چرا که بار در هر نقطه‌ای از تیر که قرار گیرد، مقدار لنگر در نقطه C همواره صفر است.

مثال : در سازه زیر خطوط تأثیر R_A ،R_C ،R_E ،V_B ،V_{RC} ،V_{LC} و M_E **را رسم کنید:**



R_A : مقاومت تکیه‌گاه A را حذف کرده و جابه‌جایی واحد به سمت بالا اعمال می‌کنیم، چون پس از حذف عامل مقاوم قطعه سمت راست (BCDE) پایدار مانده است؛ لذا ارتفاع خط تأثیر در طول این قطعه صفر است.

R_C : مقاومت تکیه‌گاه C را حذف می‌کنیم. با این‌کار قطعه AB و BCD ناپایدار شده و در اثر اعمال جابه‌جایی واحد در C، تغییر موقعیت می‌دهند ولی قطعه DE همچنان پایدار مانده و تغییر موقعیت نمی‌دهد پس ارتفاع خط تأثیر در DE صفر است.

R_E : با حذف عامل مقاوم در تکیه‌گاه E، تکیه‌گاه گیردار E به گیردار غلتکی تبدیل می‌شود. با این‌کار کل سازه ناپایدار می‌شود پس در اثر اعمال جابه‌جایی واحد در E، کل سازه تغییر موقعیت می‌دهد که این تغییر موقعیت در شکل مشخص است.

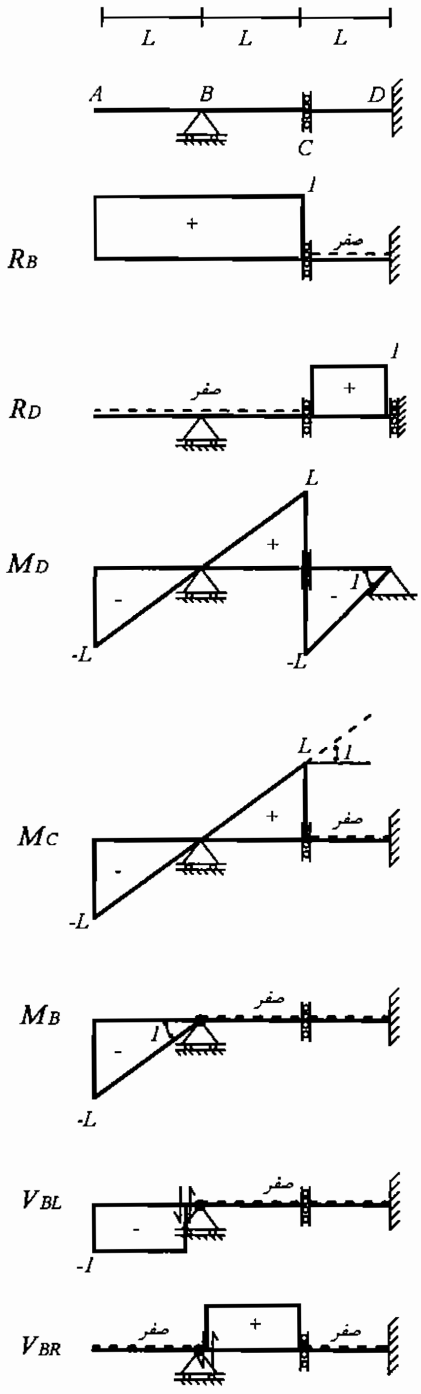
V_B : اگر در نقطه B برشی ایجاد کنیم قطعه سمت چپ ناپایدار می‌شود ولی مقطع سمت راست پایدار است پس با اعمال جابه‌جایی واحد، قطعه BCDE هیچ تغییر موقعیتی نمی‌دهد. این بدان مفهوم است که ارتفاع خط تأثیر در قطعه BCDE صفر است و نیز کل جابه‌جایی واحد به قطعه AB منتقل می‌شود.

V_{RC} : اگر در سمت راست C یک انفصای برشی ایجاد کنیم قطعه CD ناپایدار و قطعه ABC نیز ناپایدار می‌شود ولی قطعه DE پایدار است. حال اگر جابه‌جایی واحد را اعمال کنیم چون قطعه چپ روی تکیه‌گاه C قرار گرفته است لذا میزان برش در آن نقطه صفر است پس در انفصال برشی کل جابه‌جایی واحد به قطعه راست می‌دهد. از طرفی چون باید شیب خط تأثیر در قطعه چپ و راست با هم برابر باشد لذا خط تأثیر به‌صورت شکل خواهد بود.

V_{LC} : اگر در سمت چپ C یک انفصال برشی ایجاد کنیم قطعه سمت راست یعنی قطعه CDE پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در این قطعه صفر است بنابراین در انفصال ایجاد شده کل جابه‌جایی ایجاد شده به قطعه سمت چپ اعمال می‌شود.

M_E : عامل مقاوم را حذف می‌کنیم که تکیه‌گاه گیردار E به تکیه‌گاه مفصل تبدیل می‌شود. با اعمال دوران واحد، کل سازه تغییر موقعیت می‌دهد (چون کل سازه ناپایدار شده است.) دقت کنید چون دوران ایجاد شده 1 واحد است لذا نقطه D به اندازه L واحدبه سمت پایین حرکت می‌کند.

مثال : در سازه زیر خطوط تأثیر R_B، R_D، M_D، M_C، M_B، V_{BL} و V_{BR} را رسم کنید.



R_B: ابتدا مقاومت تکیه‌گاه B را حذف کرده و جابه‌جایی واحد به سمت بالا اعمال می‌کنیم. دقت داریم که پس از حذف مقاومت تکیه‌گاه، قطعه CD پایدار است لذا ارتفاع خط تأثیر در این فاصله صفر است، لذا فقط قطعه ABC تغییر موقعیت می‌دهد.

R_D: ابتدا مقاومت قائم تکیه‌گاه D را حذف می‌کنیم که تکیه‌گاه، گیردار غلتکی خواهد شد. سپس جابه‌جایی واحد اعمال می‌کنیم. قطعه سمت چپ یعنی قطعه ABC پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در آن صفر است، لذا فقط قطعه CD تغییر موقعیت می‌دهد.

از دو خط تأثیر فوق نتیجه می‌گیریم که اگر بار در قطعه ABC باشد کل بار قائم توسط تکیه‌گاه B و اگر در قطعه CD باشد کل بار توسط تکیه‌گاه D تحمل می‌شود.

توجه، در سازه‌هایی که دارای انفصال برشی هستند باید دقت کرد که پس از اعمال یک جابه‌جایی همواره شیب خط تأثیر در چپ و راست انفصال برشی با هم برابر است مگر در خط تأثیر لنگر خمشی در خود انفصال برشی. به این موضوع در خطوط تأثیر رسم شده دقت کنید.

M_D: با حذف عامل مقاوم در برابر خمش، تکیه‌گاه گیردار D به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌شود. حال دوران واحد را اعمال می‌کنیم. در رسم این خط تأثیر به توجه بیان شده دقت کنید.

M_C: اگر عامل مقاوم در برابر خمش را در نقطه C حذف کنیم، هنوز قطعه CD پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در فاصله CD صفر است.

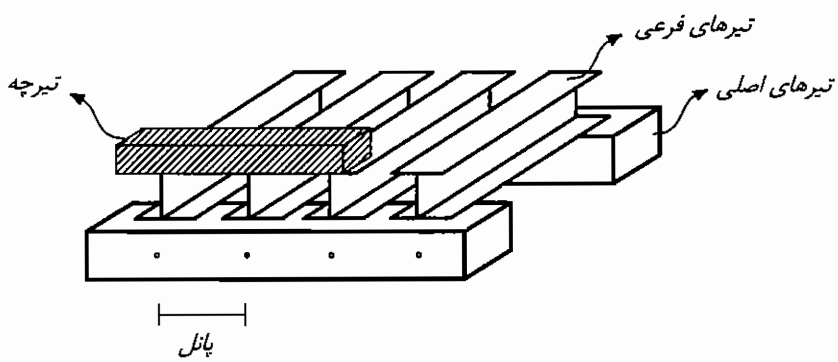
M_B: با ایجاد مفصل داخلی در نقطه B، قطعه BCD پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در این بازه صفر است و دوران واحد فقط روی قطعه AB اثر دارد. مفهوم این خط تأثیر آن است که اگر بار از نقطه B بگذرد و وارد قطعه BCD شود، لنگر B صفر است.

V_{BL} : با ایجاد برش در سمت چپ نقطه B، قطعه سمت راست یعنی BCD پایدار بوده و جابه‌جایی فقط به قطعه AB اعمال می‌شود.

V_{BR}: با ایجاد برش سمت راست نقطه B، قطعه CD همچنان پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در این سازه صفر است. از طرفی چون B مفصل نیست لذا شیب خط تأثیر برش سمت چپ و راست آن باید با هم برابر باشد. (به V_{BL} دقت کنید.)

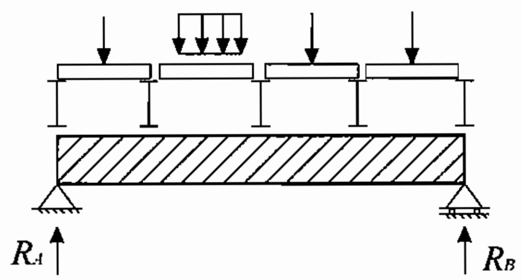
خطوط تاثیر خرپا:

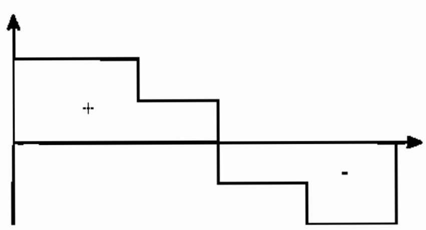
همانطور که در فصل خرپاها گفتیم یکی از فرضیات و شرایط خرپا این بود که بار باید به مفاصل اثر کند. حال سؤال این است که حرکت بار واحد روی یال‌های خرپا را چگونه می‌توان در نظر گرفت بطوری که تحت این حرکت بار هنوز هم بر مفاصل اثر کند؟ بدین منظور تیر اصلی پل را بررسی می‌کنیم:

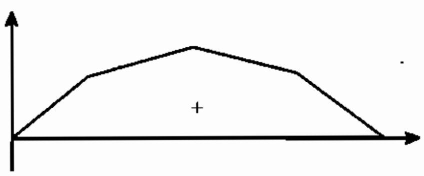


بطوری که ملاحظه می‌شود، با حرکت بار روی سیستم پل، بار بوسیله تیرچه‌ها به تیرهای فرعی منتقل شده و از آنجا به تیر اصلی و بصورت تقریباً متمرکز وارد می‌شود.

در این سیستم برای بدست آوردن عکس‌العملهای تکیه‌گاهی نیازی به انتقال بار روی تیر اصلی نیست چرا که بارهای موجود روی تیرچه‌ها، همان گشتاور را حول تکیه‌گاهها ایجاد می‌کنند. اما برای رسم دیاگرام برش و لنگر تیر اصلی با توجه به اینکه در حد فاصل دو تیر فرعی، هیچ باری روی تیر اصلی وجود ندارد لذا باید بار را روی تیر اصلی منتقل کنیم.



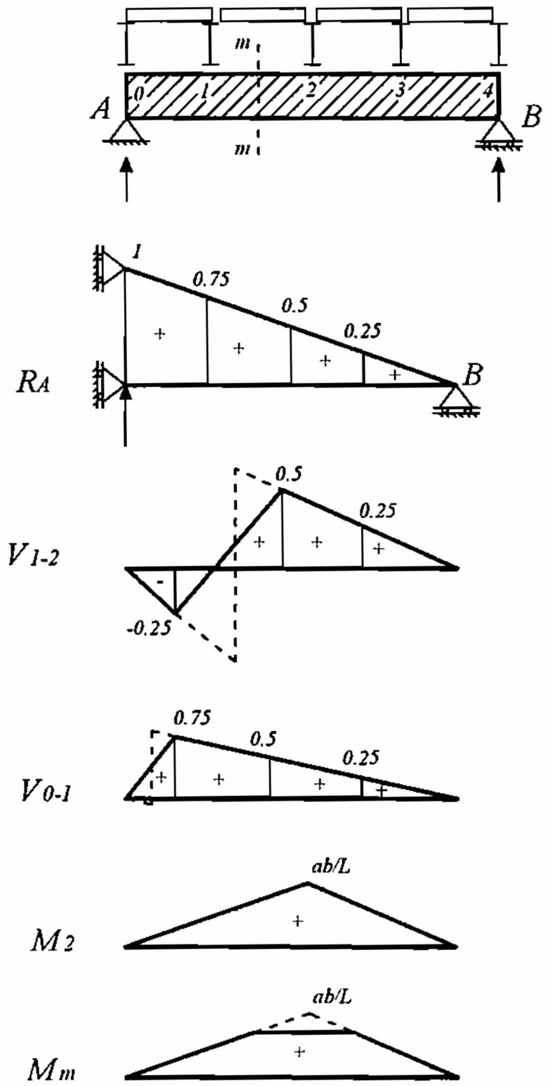




خطوط تاثیر تیر اصلی:

همانطور که دیدیم در محاسبه عکس‌العملهای تکیه‌گاهی هیچ نیازی به انتقال بارها به روی تیر اصلی وجود نداشت پس برای ترسیم خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی کافی است بار واحد را روی تیرچه حرکت دهیم و مانند قبل خط تأثیر را رسم کنیم.

برای رسم خط تاثیر برش و گشتاور، مانند سابق خط تاثیر را بصورت تیر ساده در نظر می‌گیریم اما این خط تاثیر را بصورت وضعیت تیرچه‌ها فرض می‌کنیم، پس هر تیرچه‌ای که دچار شکست شده بود را حذف و دو تیرچه اطراف آنرا به هم وصل می‌کنیم:



طریقه رسم خط تأثیر خرپا:

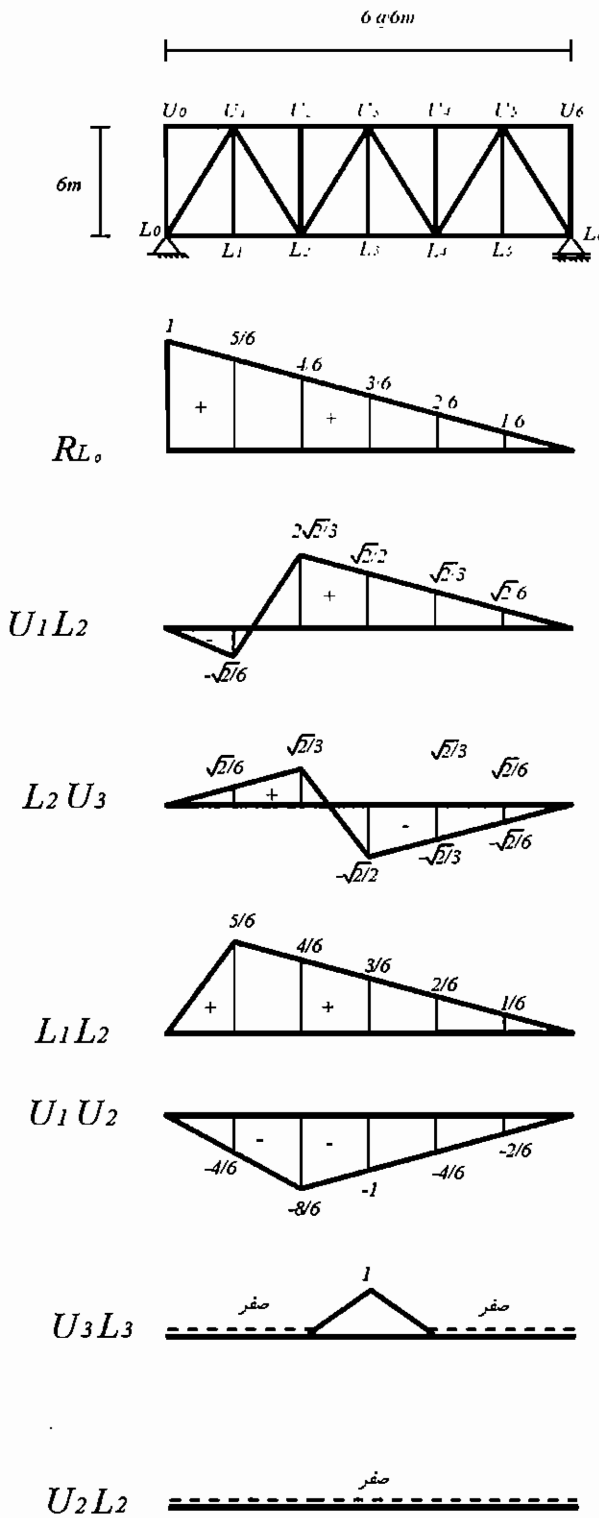
۱- برای رسم خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی، درست به مانند تیر ساده عمل می‌کنیم. (به علت آن فکر کنید) .

۲- برای رسم توابع دیگر خرپا، باید بار واحد را در گره‌های مختلف قرار داده و نیروها را در عضو مورد مطالعه برای موقعیتهای مختلف بار واحد محاسبه کنیم، توجه داشته باشید در بسیاری موراد لزومی ندارد که بار واحد را به تمام گره‌های خرپا وارد کنیم بلکه برای این منظور با توجه به این مطلب که خطوط تاثیر خرپا از قسمت‌های خطی تشکیل شده‌اند، مقدار تابع را در نقاط شکست بدست آورده و بقیه را با قسمتهای خطی رسم می‌کنیم. برای کنترل کردن این موضوع می‌توان خطوط تاثیر خرپا را بطور کمی با روش مولر- برسلاو رسم کرد.

اصل مولر- برسلاو برای خرپا:

با توجه به اینکه تنها نیروی اعضای خرپا، نیروی محوری می‌باشد لذا برای رسم خط تاثیر خرپاها، در عضو مورد نظر اتصال تلسکوپی ایجاد کرده و یک جفت نیروی کششی به اتصال تلسکوپی موجود وارد می‌کنیم به نحوی که دو انتها به اندازه واحد به هم نزدیک شوند. شکل تغییر مکان خرپا در این حالت (تغییر مکان یال تحتانی یا یال اصلی خرپا) همان خط تاثیر خرپا می‌باشد.

مثال : در خرپای مقابل خطوط تاثیر R_{L_0} , u_1L_2 , L_2u_3 , L_1L_2 , u_1u_2 , u_3L_3 , u_2L_2 **رسم کنید:**

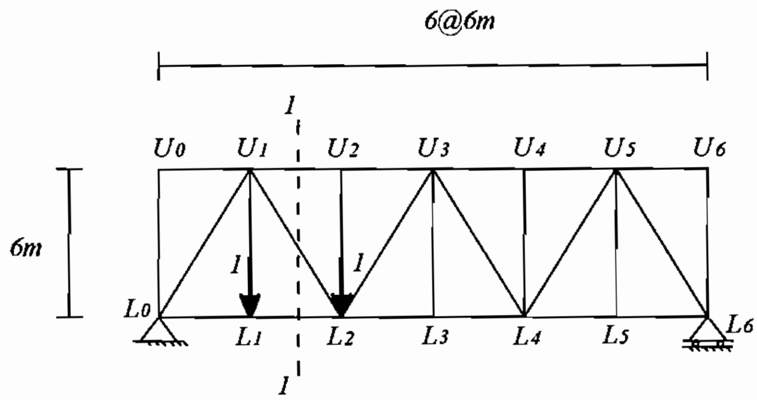


همانطور که گفته شد برای رسم خطوط تاثیر فوق، با روش مولر- برسلاو شکل کیفی خطوط تاثیر به صورت مقابل است.حال چند مورد را برای آشنایی با چگونگی محاسبه مقادیر خطوط تاثیر بدست می‌آوریم. (برای دانشجویان ضروری است که برای تفهیم مطالب فوق مقادیر خط تاثیر را در نقاط شکست یافته و سپس با خطوط مستقیم، قسمتهای دیگر را کامل کنند.)

به عنوان تمرین، خط تأثیر نیروی عضو u_1L_2 را به‌طور کامل و دقیق به‌دست می‌آوریم که برای اعضای دیگر هم به همین صورت قابل بیان است. برای رسم این خط تأثیر، ابتدا شکل کیفی این خط تأثیر را رسم می‌کنیم. برای این‌کار عضو u_1L_2 را قطع کرده و یک اتصال تلسکوپی ایجاد می‌کنیم و سپس دو سر قطع شده عضو را به هم نزدیک می‌کنیم (به اندازه واحد). در اثر این جابه‌جایی نقطه L_2 بالا آمده و نقطه u_1 پایین می‌آید که به تبع آن نقطه L_1 نیز پایین می‌رود. ناحیه بین L_1 و L_2 را هم به‌صورت یک خط که دو نقطه به‌دست آمده را به‌هم وصل می‌کند در نظر می‌گیریم.

حال که شکل کیفی خط تأثیر به‌دست آمده است لازم است ارتفاع خط تأثیر را نیز به‌دست آوریم.

واضح است برای ترسیم دقیق، به‌دست آوردن ارتفاع خط تأثیر در دونقطه L_1 و L_2 کافی است پس در مرحله بعد ارتفاع خط تأثیر را در این دونقطه به‌دست می‌آوریم. برای این‌کار یک مرتبه بار واحد را در نقطه L_1 اعمال کرده و نیروی عضو u_1L_2 را به‌دست می‌آوریم که نیروی به‌دست آمده ارتفاع خط تأثیر u_1L_2 در نقطه L_1 است و به همین ترتیب یک مرتبه بار واحد را در نقطه L_2 اعمال کرده و باز نیروی عضو u_1L_2 را می‌یابیم که این نیرو نیز ارتفاع خط تأثیر u_1L_2 در نقطه L_2 است.



ابتدا بار واحد را در نقطه L_2 اعمال می‌کنیم، عکس‌العمل A را می‌یابیم:

لنگر حول B $\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \times 36 = 1 \times 24 \Rightarrow R_A = \frac{2}{3}$

حال بازدن مقطع $I-1$ داریم:

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_{u_1L_2} = \frac{2}{3}$$

حال طبق نکات تحلیل خرپا برای یافتن u_1L_2 داریم:

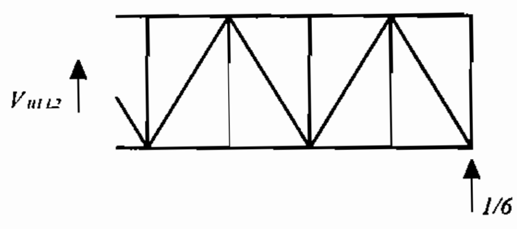
$$u_1L_2 = \frac{V_{u_1L_2}}{h} . L_{u_1L_2} = \frac{\frac{2}{3}}{6} \times 6\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

پس ارتفاع خط تأثیر u_1L_2 در نقطه L_2 برابر $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ است.

برای یافتن ارتفاع خط تاثیر u_1L_2 روی نقطه L_1، بار واحد را روی نقطه L_1 قرار می‌دهیم لذا داریم:

لنگر حول A $\sum M_A = 0 \Rightarrow 1 \times 6 = R_B \times 36 \Rightarrow R_B = \frac{1}{6} \uparrow$

با استفاده از مقطع $1-1$ و نوشتن معادلات تعادل برای قطعه سمت راست داریم:

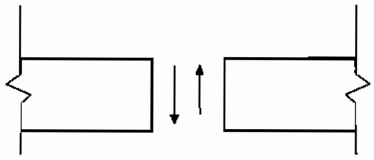


$$V_{u_1L_2} = \frac{-1}{6}$$

طبق نکات تحلیل خرپا داریم:

$$u_1L_2 = \frac{-\frac{1}{6}}{6} \times 6\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

- توجه داشته باشید که در ایجاد برش در مقطع، برش در قطعه سمت راست به سمت بالا مثبت بود و در قطعه سمت چپ به سمت پائین (طبق قرارداد)

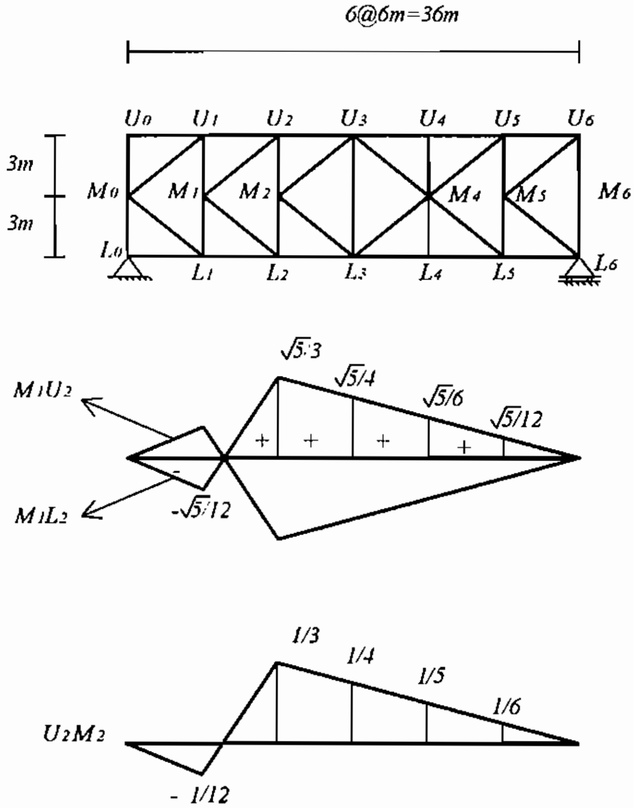


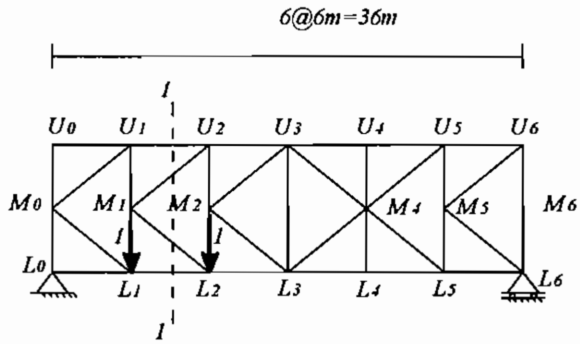
جهت مثبت برش

باز هم تاکید می‌شود که برای یادگیری مطالب گفته شده، مقادیر خطوط تاثیر در بقیه نقاط را بدست آورید.

مثال : در خرپای مقابل خطوط تاثیر u_2M_2 , M_1L_2 , M_1u_2 را رسم کنید.

مانند مثال قبل بطور کیفی با استفاده از روش مولر-برسلاو، خط تاثیر را رسم می‌کنیم و ارتفاع یکی از خطوط تاثیر را تعیین می‌کنیم و بقیه به عهده دانشجویان گذاشته می‌شود.همانطورکه در شکل دیده می‌شود در خط تاثیر M_1L_2 دو جا شکست داریم (در L_1 و L_2) بنابراین با گذاشتن بار واحد در L_1 و L_2 مقدار نیرو در M_1L_2 را می‌یابیم.





- ابتدا بار واحد را در L_1 گذاشته و خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow 1\times6 = R_B \times 36 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{1}{6}$$

حال با استفاده از مقطع $1-1$ و نکات تحلیل خرپا داریم:

$$V_{M_1L_2}=\frac{\frac{1}{6}}{2}=\frac{1}{12}$$

و برای بدست آوردن نیروی M_1L_2 طبق نکات تحلیل خرپا داریم:

$$M_1L_2=\frac{V_{M_1L_2}}{h}\cdot L_{M_1L_2}=\frac{\frac{1}{12}}{3}\cdot\sqrt{3^2+6^2}=\frac{1}{36}\sqrt{45}=\frac{\sqrt{5}}{12}$$

باز هم مانند مثال قبل توجه کنید که ارتفاع خط تاثیر منفی مقدار فوق است.

حال بار واحد را در L_2 گذاشته و خواهیم داشت:

$$\sum M_B=0 \;\Rightarrow\; R_A\times 36=1\times 24 \;\Rightarrow\; R_A=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\; V_{M_1L_2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\; M_1L_2=\frac{\frac{1}{3}}{3}\sqrt{45}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$ با علامت مثبت

رسم خط تاثیر تیرهای نامعین:

اصل مولر ـ برسلاو برای ترسیم طرح ظاهری خطوط تاثیر برای توابع سازه‌ای مختلف در تیرهای نامعین نیز بسیار مفید است بدین منظور مراحل زیر انجام می‌شود:

گام ۱

مقاومت مربوط به تابع مورد نظر حذف می‌شود.

الف-در ترسیم خط تاثیر واکنش تکیه‌گاهی، مقاومت مربوط به واکنش مورد نظر را حذف می‌کنیم.

ب- در ترسیم خط تاثیر لنگر خمشی، در مقطع مورد نظر یک مفصل داخلی ایجاد می‌کنیم.

ج- در ترسیم خط تاثیر نیروی برشی، در مقطع انفصال برشی ایجاد می‌کنیم.

گام ۲

الف) در ترسیم خط تاثیر واکنش تکیه‌گاهی، یک تغییر مکان واحد در امتداد و در محل واکنش مورد نظر به سازه اعمال می‌کنیم.

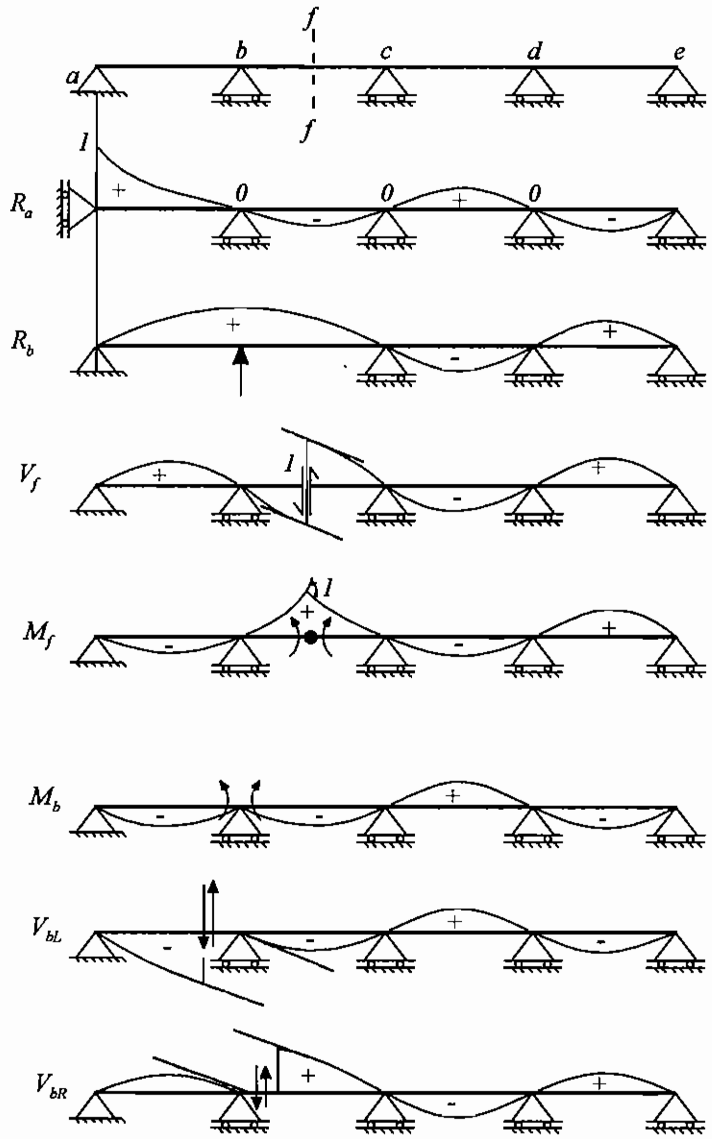
ب) در ترسیم خط تاثیر لنگر خمشی، یک جفت لنگر طوری به مقطع اعمال می‌کنیم که دو قسمت تیر در دو طرف مفصل ایجاد شده نسبت به هم چرخش واحد پیدا کنند.

ج) در ترسیم خط تاثیر نیروی برشی، در محل مقطع یک جفت نیروی برشی برابر و مختلف الجهت طوری وارد می‌کنیم که تغییر مکان نسبی واحد بین دو قسمت تیر وارد شود. توجه شود این دو قسمت موازی یکدیگر باقی می‌مانند.

توجه: در ترسیم خط تأثیر تیرهای نامعین خطوط منحنی ایجاد می‌شود.

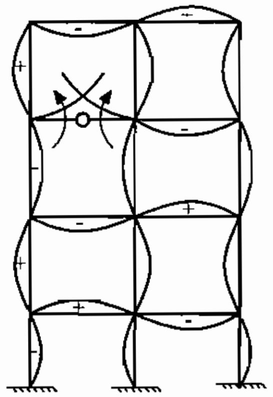
مثال : در تیر زیر خطوط تاثیر R_a , R_b , V_f , M_f , M_C , V_{Lb} , V_{Rb} را رسم کنید.

منظور از V_{Lb} خط تأثیر برش سمت چپ نقطه b و منظور از V_{bR} خط تأثیر برش سمت راست نقطه b هستند.

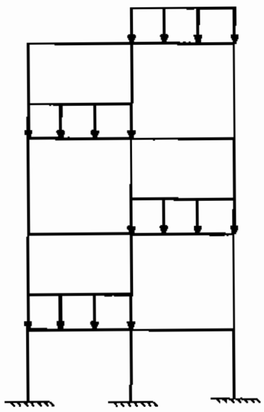


رسم خط تاثیر قابهای معین:

در رسم خط تاثیر قابهای معین مانند قبل از روش مولر-برسلاو استفاده می‌کنیم و باید توجه داشته باشیم که در قاب گیردار پس از تغییر مکان، دو عضو کماکان عمود برهم باقی می‌مانند. در قاب مقابل خط تأثیر لنگر در وسط یکی از دهانه رسم شده است.



در قاب فوق ملاحظه می‌شود که اگر بارگذاری در قابهایی که ارتفاع خط تاثیر در آنها مثبت است انجام شود بارگذاری بحرانی را حاصل می‌دهد (بارگذاری شطرنجی). البته باید توجه داشت، علت اینکه بار روی ستونها در بارگذاری بحرانی ما تاثیر ندارد آن است که بطور کلی روی ستونها بارگذاری افقی نداریم. بارگذاری بحرانی در این قاب در زیر رسم شده است:



کاربردهای خطوط تاثیر:

۱- تحلیل سازه برای تابعی خاص تحت بارگذاری باموقعیت ثابت

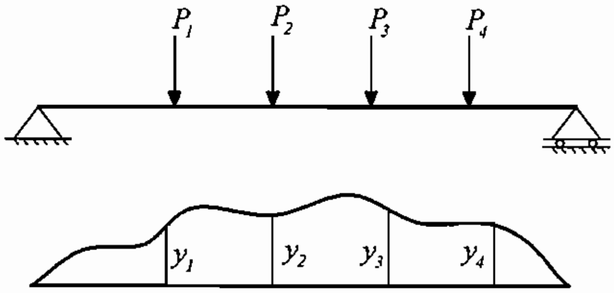
۲- تعیین موقعیت بارگذاری بحرانی

در زیر به بررسی این موضوع می‌پردازیم:

۱- تحلیل سازه برای تابعی خاص تحت بارگذاری با موقعیت ثابت:

الف) تحت بار متمرکز:

فرض کنید تیری تحت بارگذاری P_1, P_2, P_3, P_4 قرار گرفته باشد. برای بدست آوردن مقدار تابعی خاص مانند f در حالتیکه این بارگذاریها ثابت باشد. ابتدا خط تاثیر تابع f رارسم می‌کنیم. حال برای بدست آوردن مقدار تابع f کافی است حاصل جمع مقادیر بدست آمده از (ارتفاع خط تاثیر در نقطه متناظر $\times P_n$) را بدست آوریم.



خط تاثیر تابع f

پس در این مثال، مقدار تابع f تحت بارگذاری فوق برابر خواهد بود:

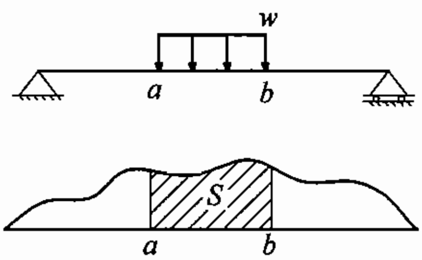
$$f = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4$$

و بطورکلی برای n بار ثابت خواهیم داشت:

$$f = \sum_{i=1}^{n} P_i y_i$$

ب) تحت بار گسترده:

فرض کنید تیر تحت بارگذاری گسترده ثابتی بطول x (از نقطه a تا نقطه b) قرار گرفته باشد. برای بدست آوردن مقدار تابع f تحت این بارگذاری ابتدا خط تاثیر تابع f را رسم می‌کنیم. سپس کافی است حاصلضرب مقدار بار گسترده (در واحد طول) را در مساحت زیر خط تاثیر ضرب کرده و به عنوان مقدارتابع f گزارش کنیم.



خط تاثیر تابع f

در مثال فوق مقدار تابع f تحت بار گسترده W برابر خواهد بود با:

$$f = SW$$

- دقت داشته باشید که مطلب فوق دقیقاً با بحثی که در مورد بارهای متمرکز بیان شد سازگار است بطوریکه یک بار گسترده را می‌توان بصورت بینهایت بار متمرکز کنار هم در نظر گرفت که در اینصورت برای یافتن مقدار تابع باید از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$f = \sum_{i=1}^{n} P_i y_i$$

که دقیقاً برابر مقداری است که در حالت ب بیان کردیم.

$$f = S.W$$

ممکن است در یک سازه هر دو بارگذاری فوق با هم انجام گیرد که با روش‌های فوق مقدار تابع را برای هر بارگذاری بدست آورده و با هم جمع می‌کنیم.

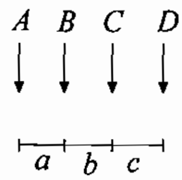
نکته مهم: اگر مقدار ماکزیمم تابعی را در یک نقطه خاص بخواهیم کافی است خط تاثیر آن تابع را در نقطه مورد نظر رسم کرده و بررسی کنیم که طبق حالات فوق، بارگذاری در چه ناحیه‌ای قرار گیرد تا حداکثر مقدار تابع بدست آید که معمولاً به راحتی می‌توان این موقعیت را تشخیص داد.

۲- موقعیت بارگذاری بحرانی:

توجه داشته باشید که گاهی مقدار ماکزیمم یک تابع را در یک نقطه می‌خواهیم که از نکته فوق استفاده می‌کنیم ولی گاهی بزرگترین مقدار یک تابع که ممکن است در طول تیر اتفاق بیفتد مورد نظر ماست که در اینصورت دو حالت زیر قابل بیان است.

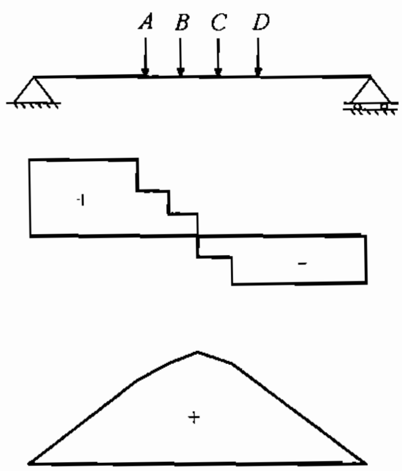
الف) لنگر خمشی حداکثر مطلق تیر ساده تحت اثر سری بارهای متمرکز متحرک با فواصل ثابت:

می‌دانیم دیاگرام برش این حالت بارگذاری، پله‌ای و دیاگرام خمش آن نموداری شکسته است و بدیهی است که ماکزیمم لنگر خمشی در یکی از این نقاط شکستگی اتفاق می‌افتد. (یعنی درست زیر یکی از بارهای متمرکز)



حال می‌خواهیم بدانیم این سری بارها در چه موقعیتی قرار گیرند تا بیشترین لنگر خمشی ممکن در تیر اتفاق بیفتد. بدین منظور یک نیروی برآیند در نظر می‌گیریم که مقدار آن برابر است با مجموع بارهای متمرکز.

$$R = A + B + C + D = \sum_{i=1}^{\infty} P_i$$



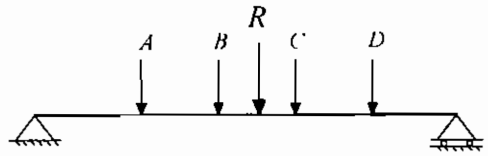
و مکان آن جایی است که گشتاوری برابر گشتاور ایجاد شده توسط نیروها دارد.برای بدست آوردن این فاصله می‌توان نسبت به یک نقطه مثلاً نقطه اثر بار A گشتاور گرفت. در این صورت داریم:

$$\left(B \times d_{BA}\right) + \left(C \times d_{CA}\right) + \left(D \times d_{DA}\right) = Rd \quad \Rightarrow d = \frac{\left(B \times d_{BA}\right) + \left(C \times d_{CA}\right) + \left(D \times d_{DA}\right)}{d}$$

پس به طور کلی داریم:

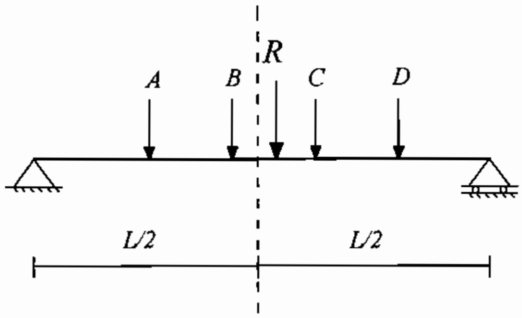
$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i d_i}{R}$$

حال یک قضیه بیان می‌کنیم.



قضیه: در زیر هر نیروی متمرکز از سری بارهای متمرکز، زمانی لنگر خمشی حداکثر خواهد بود که محور میانی تیر فاصله بین نیروی مورد نظر و نیروی برآیند را نصف کند. (محور میانی محوری به فاصله $\frac{L}{2}$ از سر تیر)

بطور مثال زمانی لنگر زیر B ماکزیمم است که محور میانی فاصله بین B و R را نصف کند.



پس با قضیه فوق بینهایت موقعیت به چند موقعیت خاص محدود می‌شود که از بین آنها می‌توان موقعیت بحرانی را یافت.

حالت خاص

هرگاه سری بار متمرکز ما، شامل دو نیرو باشد لنگر خمشی قطعاً زیر بار متمرکز بزرگتر اتفاق می‌افتد و آن هم زمانی است که محور میانی فاصله بین نیروی برآیند و نیروی بزرگتر را نصف کند.

نکته : برای سه نیروی متمرکز، هرگاه نیرویی میانی از دو نیروی دیگر کوچکتر نباشد، لنگر خمشی حداکثر مطلق قطعاً زیر نیروی میانی اتفاق خواهد افتاد و بطور کلی:

هرگاه در سری بارهای متمرکز متحرک، نیروی برآیند به یکی از نیروها از همه نزدیک‌تر باشد و آن نیرو نسبت به بقیه نیروها کوچکتر نباشد، لنگر خمشی حداکثر مطلق زیر همان نیروی نزدیکتر به نیروی برآیند اتفاق می‌افتد.

ب) نیروی برشی حداکثر مطلق تیر ساده تحت اثر سری بارهای متمرکز متحرک با فواصل ثابت:

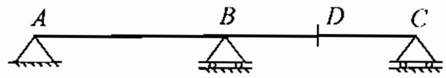
با دقت در نمودار پله‌ای دیاگرام برش این حالت بارگذاری می‌توان به راحتی دریافت که برش ماکزیمم همواره روی تکیه‌گاهها اتفاق می‌افتد پس:

نیروی برشی حداکثر همواره در تکیه‌گاه اتفاق افتاده و مقدار آن برابر است با عکس‌العمل تکیه‌گاهی. پس برای داشتن عکس‌العمل تکیه‌گاهی حداکثر باید دو حالت بارگذری کنترل شود. یکی وقتی که سری بارهای متمرکز منتهی‌الیه سمت چپ باشند و دیگری وقتی سری بارهای متمرکز منتهی‌الیه سمت راست باشند.

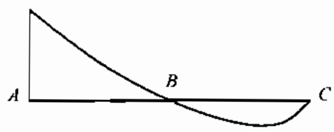
نکته : هرگاه نیروهای واقع در طرفین سری بارهای متمرکز، نسبت به بقیهٔ نیروها خیلی کوچکتر باشند باید حالتی را که این نیروهای کوچک از تیر کاملاً خارج شوند را نیز بررسی نمود.

تست‌های بخش خطوط تأثیر

۱ ـ در مورد تیر نامعین زیر کدام‌یک از خطوط تأثیرها غلط می‌باشد؟ **(سراسری ۱۳۷۳)**

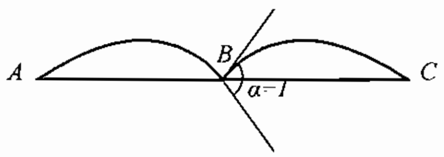


۱)



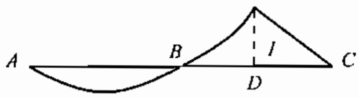
عکس‌العمل تکیه‌گاه A

۲)



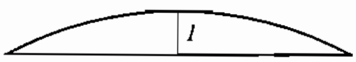
ممان منفی روی تکیه‌گاه B

۳)



برش در D

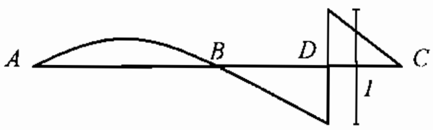
۴)



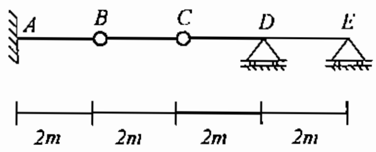
عکس‌العمل تکیه‌گاه B

حل :

برای رسم خط تأثیر برش در نقطه D باید در این نقطه انفصال برشی ایجاد کرده و سپس جابه‌جایی نسبی برابر 1 واحد ایجاد کنیم، پس خط تأثیر برش در D به‌صورت زیر می‌باشد:



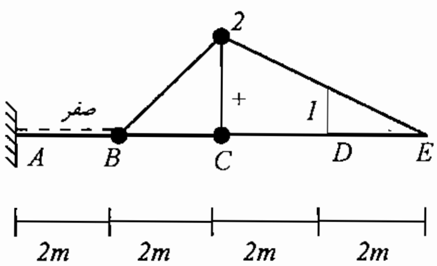
۲ ـ بار گسترده یکنواخت به شدت $10\ \frac{KN}{m}$ بر روی تیر حرکت می‌کند. اگر طول بار گسترده نامحدود باشد، حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه D چقدر خواهد بود؟ **(سراسری ۱۳۷۴)**



۱) 80 KN　　۲) 60 KN　　۳) 40 KN　　۴) 20 KN

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

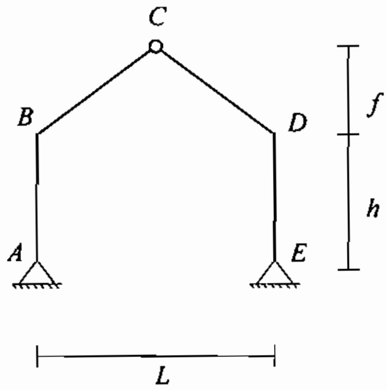
ابتدا خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه D را رسم می‌کنیم که به صورت زیر خواهد بود:

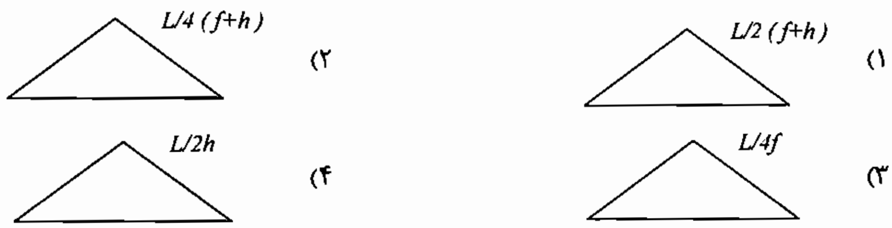


چون تمام خط تأثیر ارتفاعی مثبت دارد لذا عکس‌العمل تکیه‌گاه D زمانی ماکزیمم است که بار گسترده کل این ناحیه (ناحیه BCDE) را دربر بگیرد. طبق نکات مقدار تابع سازه‌ای در این حالت برابر $f = SW$ است که S سطح زیر خط تأثیر و ω شدت بار است پس:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(6\times 2) = 6 \\ W = 10\frac{KN}{m} \end{cases} \Rightarrow \quad R_{D_{max}} = f_{max} = 6\times 10 = 60 \text{ KN}$$

۳ـ در قاب شکل زیر، چنانچه بار واحد به صورت عمود بر سطح افق روی سقف BCD حرکت کند، خط تأثیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A کدام است؟ (سراسری ۱۳۷۵)

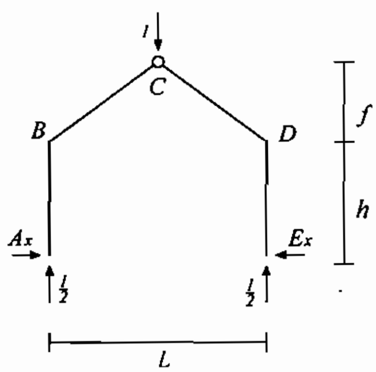




حل :

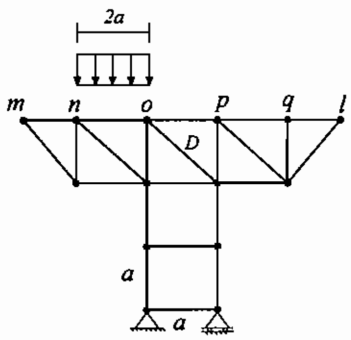
همان‌طور که در گزینه‌ها دیده می‌شود، شکل خطوط تأثیر یکسان است و فقط لازم است ارتفاع خط تأثیر در نقطه C به‌دست آید. لذا یک بار واحد در نقطه C قرار داده و میزان عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A را در اثر اعمال این بار به‌دست می‌آوریم.

اگر بار واحد به نقطه C اعمال شود بنا به تقارن هر دو تکیه‌گاه A و E دارای عکس‌العمل‌های قائمی برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود. حال با نوشتن معادله تعادل لنگر در گره C برای قطعه سمت چپ (قطعه ABC) عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A به‌دست می‌آید.



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_x(f+h) = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow A_x = \frac{L}{4(f+h)}$$

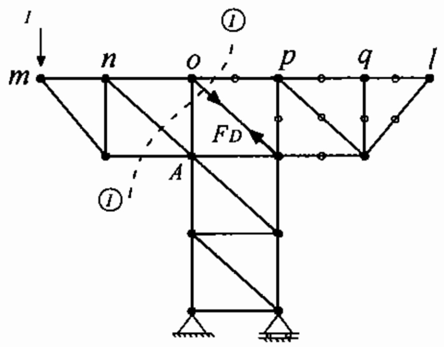
۴ـ در شکل زیر قطعه بار گسترده یکنواخت و به طول 2a و به شدت P در چه ناحیه‌ای از بال فوقانی جرثقیل قرار گیرد تـا نیـروی کششی میله D به ماکزیمم مقدار خود برسد؟ (سراسری ۱۳۷۶)



۱) از m تا o
۲) از n تا p
۳) از o تا q
۴) از p تا l

حل :
ابتدا خط تأثیر نیروی میله D را می‌یابیم. بدین منظور بار واحد را در نقاط مختلف یال فوقانی خرپا اعمال کرده و نیروی عضو مذکور را می‌یابیم، ابتدا نیرو را روی گره m قرار می‌دهیم. اعضای صفر نیرویی در شکل نشان داده شده است. حال مقطعی مانند ۱ـ۱ در نظر می‌گیریم. با نوشتن معادله لنگر حول نقطه A خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1\times 2a = F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow F_D = 2\sqrt{2}$$



اگر بار در n و o باشد نیز نیرو با همان مقاطع فوق به‌دست می‌آید:

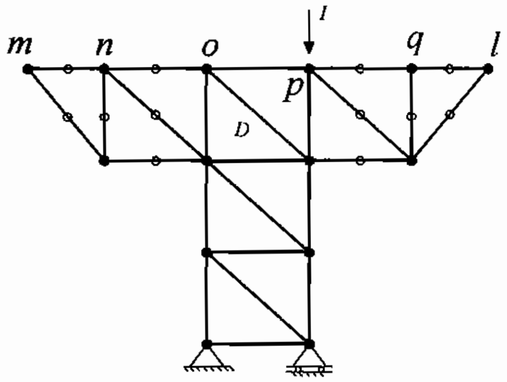
$$\text{بار واحد در n} \Rightarrow 1\times a = F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow F_D = \sqrt{2}$$

$$\text{بار واحد در o} \Rightarrow 1\times 0 = F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow F_D = 0$$

به‌طور کلی می‌توانستیم بگوییم اگر بار در قسمت mo باشد که فاصله‌اش از o برابر x است در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1\times x = F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow F_D = \frac{x}{a}\times\sqrt{2}$$

اگر نیرو در نقطه p باشد در این صورت اعضای صفر نیرویی به صورت زیر می‌باشد. در این حالت بارگذاری نیروی عضو D صفر خواهد بود. از نیروی واحد در فاصله op باشد نیز نیروی عضو D صفر خواهد بود. (با تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی و بررسی به روش گره می‌توان به این نتیجه رسید.)

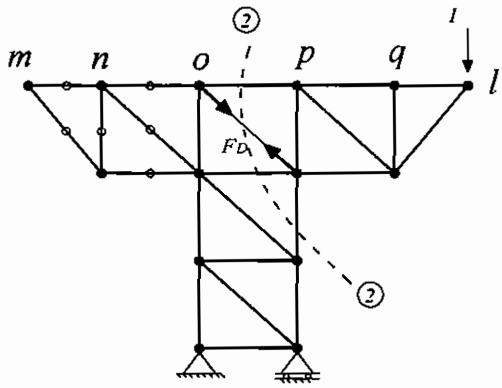


حال فرض کنید نیرو روی گره I اعمال شود. در این صورت اعضای صفر نیرویی به صورت زیر می‌باشد. حال با زدن مقطع مانند ۲ـ۲ و نوشتن معادله لنگر حول نقطه B داریم:

$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; F_{op} \times a = 1 \times 2a \;\Rightarrow\; F_{op} = 2$$

با نوشتن معادله تعادل در راستای محور x ها برای نقطه o داریم:

$$F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -F_{op} \;\Rightarrow\; F_D = -2\sqrt{2}$$



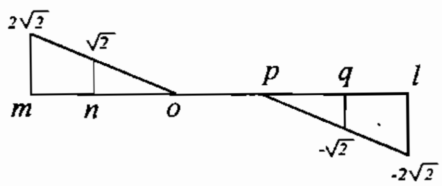
پس مانند قبل اگر بار واحد در نقطه‌ای به فاصله x از نقطه p باشد در این صورت با نوشتن معادله لنگر نقطه B به‌دست می‌آید:

$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; F_{op} \times a = 1 \times x \;\Rightarrow\; F_{op} = \frac{x}{a}$$

و با نوشتن معادله تعادل در راستای محور x ها برای نقطه o داریم:

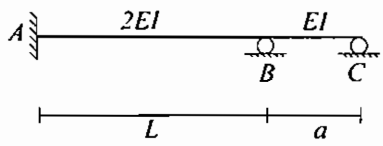
$$F_D \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -F_{op} \;\Rightarrow\; F_D = -\sqrt{2}\,\frac{x}{a}$$

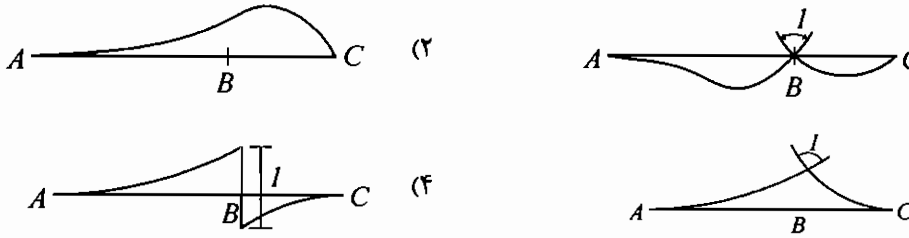
پس خط تأثیر عضو D در فاصله ml به‌صورت زیر می‌باشد:



با رسم این خط تأثیر واضح است که اگر بار گسترده در فاصله mo واقع شود نیروی کششی در D ماکزیمم مقدار خود را خواهد داشت.

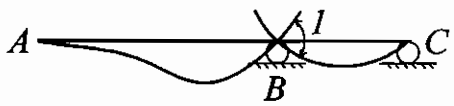
۵ـ خط تأثیر M_B در تیر زیر به صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ **(سراسری ۱۳۷۶)**





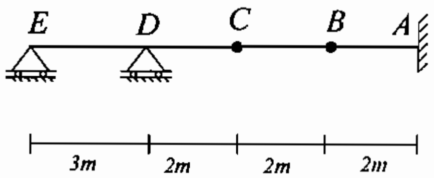
حل:

چون سازه نامعین است خطوط تأثیر از نواحی منحنی تشکیل شده است. ابتدا در نقطه B مفصل داخلی ایجاد کرده و اختلاف شیب واحد در دو طرف مفصل اعمال می‌کنیم. باید دقت داشت چون در B تکیه‌گاه وجود دارد نمی‌توان خط تأثیر را بالا برد و فقط می‌توان اختلاف شیب چپ و راست را ایجاد کرد. (به مثال حل شده داخل مفصل رجوع کنید.) پس خط تأثیر خمش B به‌صورت زیر است:



البته دقت داریم که اختلاف شیب چپ و راست به اندازه واحد اختلاف دارند که در گزینه‌ها اشتباه در نظر گرفته شده است.

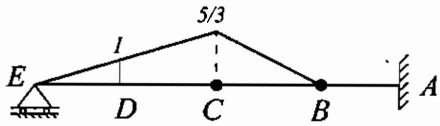
۶ـ اگر یک بار منفرد 3 تن روی تیر شکل زیر حرکت کند، اندازه ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه D چند تن است؟ **(سراسری ۱۳۷۷)**



۱) 3 ۲) 5 ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

حل:

ابتدا خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه D را رسم می‌کنیم. برای این منظور عامل مقاوم تکیه‌گاه D را حذف می‌کنیم. دقت داریم که با این‌کار قطعه AB پایدار است پس ارتفاع خط تأثیر در این ناحیه صفر است. حال جابه‌جایی واحد در نقطه D اعمال می‌کنیم پس خط تأثیر واکنش تکیه‌گاه D به‌صورت زیر است:

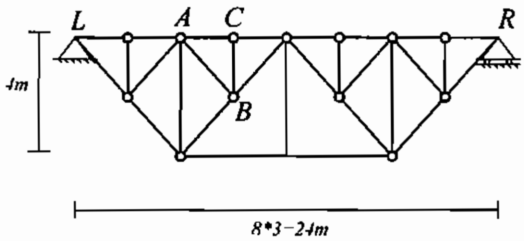


ارتفاع خط تأثیر در C را به سادگی با رابطه تالس به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{h_D}{3}=\frac{h_C}{5} \Rightarrow h_C=\frac{5\times1}{3}=\frac{5}{3}$$

با رسم خط تأثیر درمی‌یابیم که میزان عکس‌العمل تکیه‌گاه D زمانی ماکزیمم است که بار در نقطه C قرار گیرد. اگر بار واحد در این نقطه قرار گیرد میزان عکس‌العمل $\frac{5}{3}$ است پس اگر بار 3 تنی در نقطه C قرار گیرد مقدار عکس‌العمل D برابر $\frac{5}{3}\times3=5$ ton می‌باشد.

۷ـ ارتفاع خط تأثیر F_{AB} در نقطه C (وقتی بار واحد در قسمت فوقانی خرپا حرکت کند) برابر است با: **(سراسری ۱۳۷۷)**



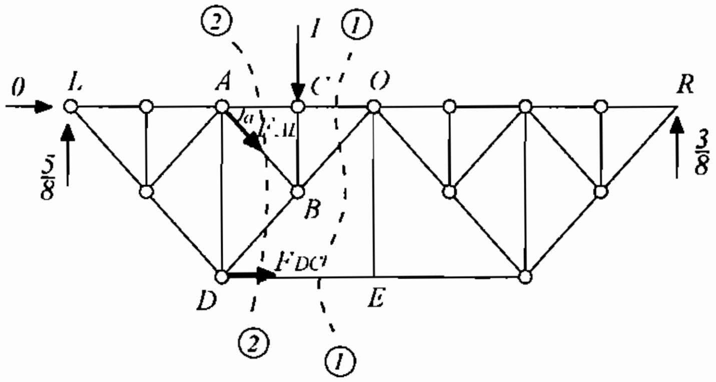
۱) صفر ۲) 0.9 ۳) 1 ۴) $\frac{4}{3}$

حل :

برای یافتن ارتفاع خط تأثیر F_{AB} در نقطه C کافی است بار واحد را در نقطه C اعمال کرده و میزان نیروی عضو AB را بیابیم.

$$\sum M_R=0 \Rightarrow L_y\times24=1\times15 \Rightarrow L_y=\frac{5}{8}$$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow R_y=\frac{3}{8}$$



حال مقطع ۱ـ۱ را در نظر می‌گیریم. در قطعه سمت چپ با بررسی گشتاور حول نقطه O به‌دست می‌آید:

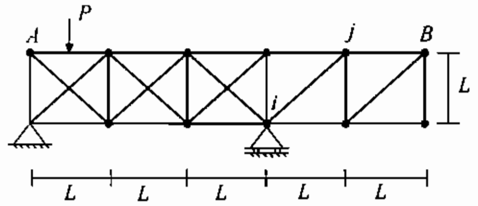
$$\sum M_O=0 \Rightarrow 1\times3-\frac{5}{8}\times12+F_{DE}\times4=0 \Rightarrow F_{DE}=\frac{9}{8}$$

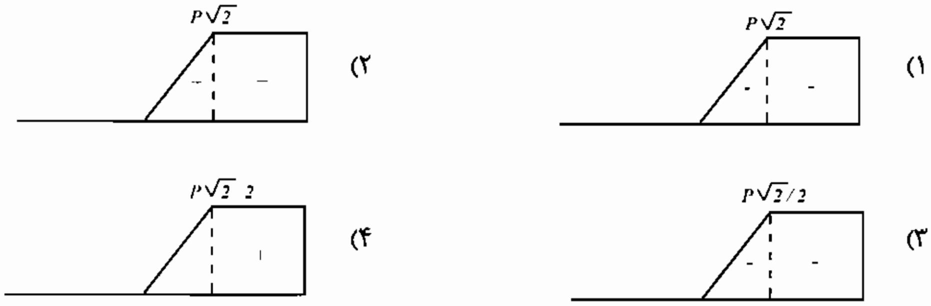
حال مقطع ۲ـ۲ را در نظر می‌گیریم. باز هم با گشتاورگیری حول نقطه O برای قطعه سمت چپ داریم:

$$\frac{5}{8}\times12-F_{AB}\times\sin\alpha-F_{DE}\times4=0 \Rightarrow F_{AB}\sin\alpha=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=3 \Rightarrow F_{AB}=\frac{3}{\sin\alpha} \xrightarrow{\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}} F_{AB}=\frac{3\sqrt{13}}{\sin\alpha}$$

پس هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۸ـ اگر نیروی P قائم بر AB و روی خط AB از A تا B حرکت کند، آنگاه خط تأثیر نیروی محوری ij به صورت کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (کشش مثبت و فشار منفی) (سراسری ۱۳۷۸)



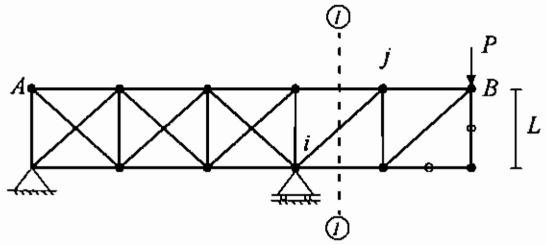


حل :

اگر در قطعه ij اتصال تلسکوپی ایجاد کنیم و دو قطعه برش خورده را به اندازه واحد به سمت هم نزدیک کنیم، چون گره i به تکیه‌گاه متصل است حرکت نمی‌کند پس گره j به سمت پایین حرکت می‌کند. این بدان معنی است که ارتفاع خط تأثیر در فاصله سمت راست تکیه‌گاه i منفی است. دقت داریم چون خرپای بین دو تکیه‌گاه پایدار است لذا ارتفاع خط تأثیر در این سازه صفر است. حال می‌خواهیم بدانیم کدام‌یک از گزینه‌های ۱ یا ۳ صحیح می‌باشد. برای این منظور یک بار P در نقطه B اعمال می‌کنیم و میزان نیروی عضو ij را می‌یابیم.

با در نظر گرفتن مقطع ۱ـ۱ و نوشتن معادله تعادل نیرو در راستای قائم برای قطعه سمت راست مقطع، مؤلفه قائم نیروی عضو ij به‌دست می‌آید:

برای قطعه راست $\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_{V_{ij}} + p = 0 \;\Rightarrow\; F_{V_{ij}} = -p$

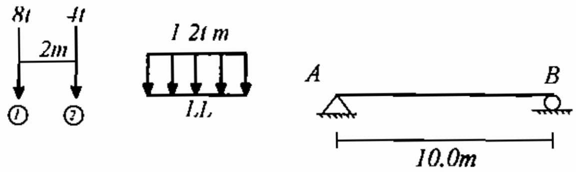


حال طبق نکات خرپا داریم:

$$F_{ij} = F_{V_{ij}} \times \frac{L}{V} = -P \times \frac{\sqrt{2}\,L}{L} = -\sqrt{2}\,P$$

یعنی گزینه اول صحیح است.

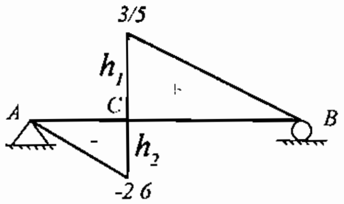
۹ـ تیری به طول 10 متر تحت اثر یک جفت بار متمرکز متحرک به طور سری و یک بار زنده گسترده متحرک با طـول متغیـر قـرار می‌گیرد. مطلوبست محاسبه برش ماکزیمم مثبت در فاصله 4 متری تکیه‌گاه A. (سراسری ۱۳۷۹)



۱) 5 t　　۲) 8.56 t　　۳) 12 t　　۴) 16.21 t

حل :

خط تأثیر برش را در فاصله 4 متری از تکیه‌گاه A می‌یابیم که به صورت زیر است. چون شیب خطوط تأثیر چپ و راست با هم برابرند و از طرفی میزان جابه‌جایی نسبی واحد است لذا داریم:

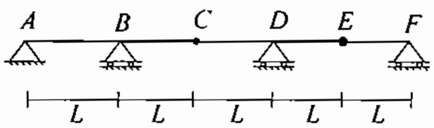


$$\begin{cases} \dfrac{h_1}{6}=\dfrac{h_2}{4} \Rightarrow h_1=\dfrac{3}{2}h_2 \\ h_1+h_2=1 \Rightarrow \dfrac{5}{2}h_2=1 \Rightarrow h_2=\dfrac{2}{5} \ , \ h_1=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

حال باید بررسی کنیم که بار گسترده و جفت نیرو در چه موقعیت قرار گیرند تا برش مثبت ماکزیمم شود. برای این منظور کافی است بار گسترده، کل فاصله C تا B را بپوشاند و نیز بار 8 تنی روی نقطه C قرار گیرد. در این صورت برش متناظر برابر است با:

$$V_{max}=\left(\frac{3}{5}\times6\times\frac{1}{2}\right)\times1.2+8\times\frac{3}{5}+4\times\frac{2}{5}=\frac{10.8+24+8}{5}=8.56\text{ ton}$$

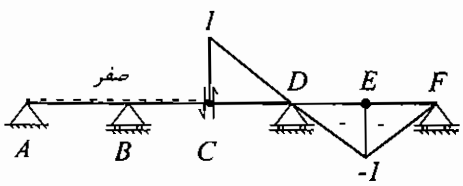
۱۰ ـ تیر شکل زیر مفروض است. خط تأثیر نیروی برشی در مفصل C را مد نظر قرار می‌دهیم. ارتفاع آن در نقطه E چقدر است؟ (سراسری ۱۳۸۰)



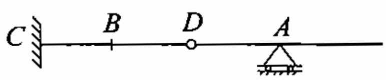
۱) صفر　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) 1　　۴) 2

حل :

خط تأثیر نیروی برشی در مفصل C را طبق اصل مولر ـ برسلاو رسم می‌کنیم که به‌صورت زیر است که ملاحظه می‌شود ارتفاع خط تأثیر در نقطه E برابر 1 است.



۱۱ ـ خط تأثیر نیروی برشی در نقطه B از .... تشکیل شده است. (سراسری ۱۳۸۰)

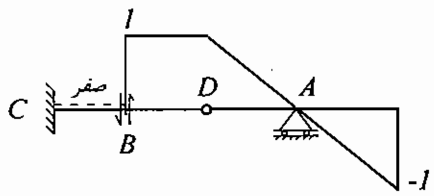


۱) یک مثلث
۲) دو مثلث
۳) یک مثلث و یک مستطیل

۴) دو مثلث و یک مستطیل

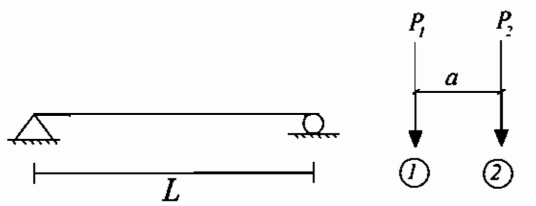
حل :

خط تأثیر نیروی برشی در نقطه B را رسم می‌کنیم. در نقطه B انفصال برشی ایجاد کرده و جابه‌جایی واحد اعمال می‌کنیم، چون قطعه CD پایدار است ارتفاع خط تأثیر در این بازه صفر است و کل جابه‌جایی واحد به قطعه سمت راست اعمال می‌شود پس خط تأثیر به‌صورت زیر است:



پس خط تأثیر برش از دو مثلث و یک مستطیل تشکیل شده است.

۱۲ ـ دو نیروی متمرکز با فاصله ثابت از روی تیری به طول L می‌گذرند. برش ماکزیمم کدام است؟ $(P_1 > P_2)$ **(سراسری ۱۳۸۰)**



۱) $P_1 + P_2$

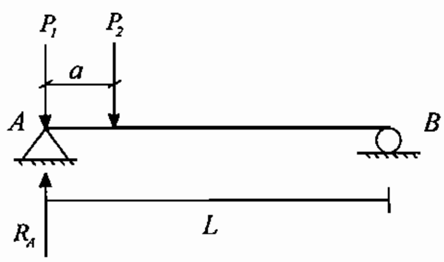
۲) $P_1 + \frac{a}{L} P_2$

۳) $P_2 + \frac{a}{L} P_1$

۴) $P_1 + \frac{L-a}{L} P_2$

حل :

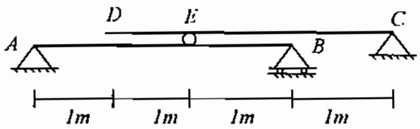
طبق نکات گفتیم برش ماکزیمم روی یکی از تکیه‌گاه‌ها اتفاق می‌افتد و البته با توجه به این‌که فقط 2 بار متمرکز داریم زمانی که بار بزرگ‌تر یعنی P_1 روی تکیه‌گاه سمت چپ بیفتد برش ماکزیمم خواهد شد، پس برای یافتن برش ماکزیمم عکس‌العمل تکیه‌گاه سمت چپ را در این حالت بارگذاری به‌دست می‌آوریم:



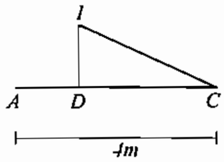
$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; P_1 \times L + P_2 (L-a) = R_A \times L$$

$$\Rightarrow\; R_A = P_1 + P_2 \left(\frac{L-a}{L}\right)$$

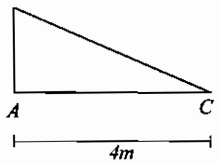
۱۳ ـ خط تأثیر R_B کدام است؟ بار روی DC جابه‌جا می‌شود؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**



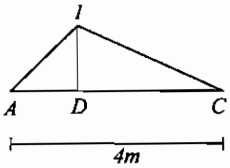
۱)



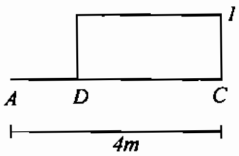
۲)



۳)



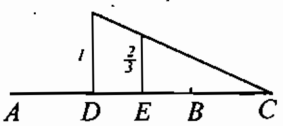
۴)



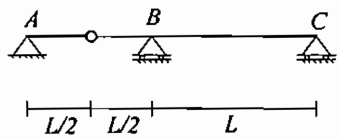
حل :

چون بار روی ناحیه DC حرکت می‌کند لذا خط تأثیر فقط در این ناحیه رسم می‌شود پس فقط گزینه ۱ یا ۴ صحیح است.

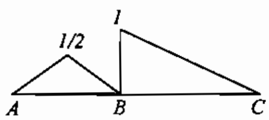
حال خط تأثیر R_B را رسم می‌کنیم. برای این منظور عامل مقاومت تکیه‌گاه B را حذف کرده و این نقطه را به اندازه واحد بالا می‌بریم. طبق قضیه تالس، با این کار نقطه E به اندازه $\frac{2}{3}$ بالا می‌رود. حال روی تیر بالایی فرض کنید نقطه E به اندازه $\frac{2}{3}$ بالا رفته باشد. در این صورت خط تأثیر به‌صورت مقابل خواهد بود:



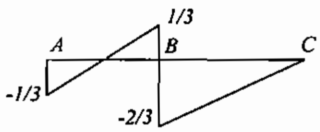
۱۴ ـ خط تأثیر نیروی برشی طرف چپ تکیه‌گاه B (V_L) کدام است؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**



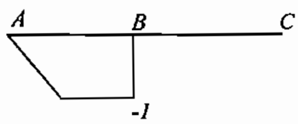
۱)



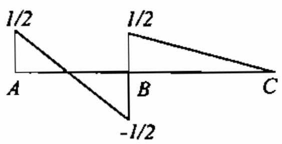
۲)



۳)

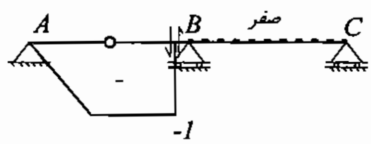


۴)



حل :

اگر سمت چپ نقطه B انفصال برشی ایجاد کنیم چون قطعه سمت راست در برابر حرکت قائم پایدار است لذا ارتفاع خط تأثیر در این قطعه صفر است بنابراین کل جابه‌جایی واحد به قطعه سمت چپ وارد می‌شود و خط تأثیر به‌صورت زیر خواهد بود:



فصل چهارم

تغییر شکل سازه‌ها

محاسبه تغییر شکل سازه‌ها:

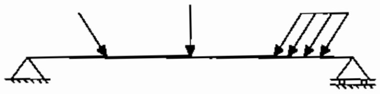
۱- محاسبه تغییر شکل‌های خمشی در تیرها
- ۱ـ روش تیر مزدوج
- ۲ـ روش لنگر سطح
- ۳ـ استفاده از روابط تیرهای مهم

۲- محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش‌های انرژی (قاب، خرپا و ...)
- ۱- روش کار حقیقی
- ۲- روش کاستیگلیانو
- ۳- روش کار مجازی

۱ـ محاسبه تغییر شکل‌های خمشی در تیرها

تئوری تغییر شکل تیرها:

تیری را در نظر بگیرید که تحت بار گذاری‌های مختلف قرار گرفته است.



در این تیر، خمش فقط در اثر بارهای قائم ایجاد می‌شود پس تیر فوق را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

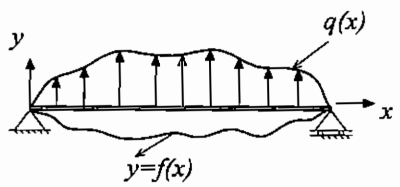
به طور کلی اگر تابع شدت بار قائم برتیر $q(x)$ نامیده شود با انتگرال‌گیری‌های متوالی از این تابع می‌توان توابع برش (V)، خمش (M)، شیب (θ) و خیز تیر (y) را بدست آورد. بنابراین خواهیم داشت:

$$V(x)=\int q(x)dx+V_0$$

$$M(x)=\int V(x)dx+M_0$$

$$\theta(x)=\int \frac{M(x)}{EI}dx+\theta_0$$

$$y(x)=\int \theta(x)dx+y_0$$



در شکل فوق $y=f(x)$ معادله منحنی الاستیک تیر می‌باشد.

پس بدیهی است درجه تابع تغییر شکل 4 مرتبه بالاتر از تابع بارگذاری می‌باشد. همینطور می‌توان دریافت درجه تابع شیب 3 مرتبه، تابع لنگر 2 مرتبه و تابع برش 1 مرتبه از تابع بارگذاری بالاتر است.

از تعاریف فوق می‌توان روش تیر فرضی را برای تعیین تغییر شکل تیرها بیان کرد.

محاسبه تغییر شکل‌های خمشی در تیرها با استفاده از روش تیر مزدوج:

به طور کلی انحنای هر نقطه از تابعی مانند y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{\left[1+y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

حال اگر y تابع تغییر شکل تیر باشد، y' تابع شیب و y'' تابع لنگر می‌باشد. از طرفی چون شیب تیر مقداری بسیار کوچک دارد پس می‌توان از y'^2 صرفنظر نموده و رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{R}=y''=\frac{M(x)}{EI}$$

اساس روش تیر مزدوج آن است که به جای بارگذاری موجود روی تیر، باری معادل $\frac{M(x)}{EI}$ را روی تیر اعمال می‌کنند. (دقت داریم که درجه تابع $\frac{M(x)}{EI}$ دو مرتبه از تابع بارگذاری بیشتر است.) حال می‌توان گفت: برش در تیر با بارگذاری $\frac{M(x)}{EI}$ همان شیب در تیر اصلی و خمش در تیر با بارگذاری $\frac{M(x)}{EI}$ همان تغییر مکان در تیر اصلی می‌باشد.

تیر فرضی یک تیر با طولی برابر با طول تیر حقیقی است که به جای بارگذاری برروی آن $q_1(x)=\frac{M(x)}{EI}$ اثر می‌کند که به آن بار فرضی یا بار الاستیک گوییم. از تحلیل این تیر به کمک معادلات تعادل ایستایی $V_1(x)$ یا برش فرضی بدست می‌آید که همان شیب‌های تیر حقیقی است و لنگر فرضی $M_1(x)$ بدست می‌آید که همان خیز در تیر حقیقی را نشان خواهد داد.

$q_1(x)=\frac{M(x)}{EI}$ بار فرضی (بار الاستیک)

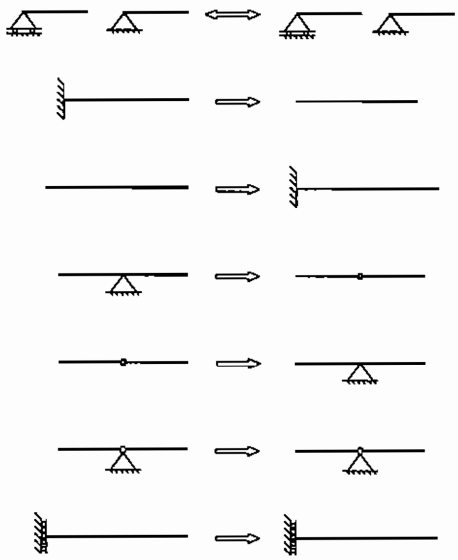
$$V_1(x)=\int q_1(x)dx=\int \frac{M(x)}{EI}dx=\theta(x)$$

$$M_1(x)=\int V_1(x)dx=\int \theta(x)dx=y(x)$$

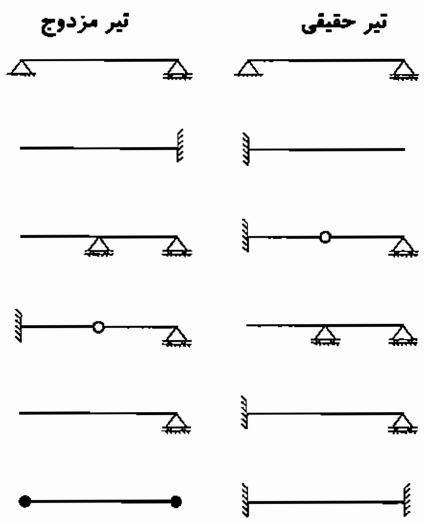
در محاسبه انتگرال‌های فوق و تعیین ثابت‌های انتگرال باید توجه داشت که شرایط مرزی ایستایی باید به گونه‌ای باشد که بتواند دقیقاً شرایط مرزی منحنی الاستیک تیر را نشان دهد. بدین منظور برای رسم تیر جدید با بارگذاری $\frac{M(x)}{EI}$ لازم است تغییرات ریز اعمال شود.

شرط درتیر حقیقی	شکل در تیر حقیقی	شرط مرزی ایستایی تیر حقیقی	شرط مرزی منحنی الاستیک تیر حقیقی	شرایط مرزی ایستایی تیر فرضی	شکل در تیر فرضی	شرح تغییرات
تکیه گاه ساده انتهایی	یا	M=0	Y=0 θ مقدار دارد	$M_1=0$ V_1 مقدار داشته باشد.	یا	تغییر نمی کند.
تکیه گاه گیردار		V و M مقدار دارند	$Y=0$ $\theta=0$	$M_1=0$ $V_1=0$		انتهای آزاد
انتهای آزاد		$M=0$ $V=0$	Y مقدار دارد θ مقدار دارد	M_1 مقدار دارد V_1 مقدار دارد		تکیه گاه‌گیردار
تکیه گاه ساده میانی		M مقدار دارد $V_L \neq V_R$	$Y=0$ $\theta_L=\theta_R$	$M_1=0$ $V_{1L}=V_{1R}$		مفصل داخلی
مفصل داخلی حقیقی	θL θR	$M=0$ $V_L=V_R$	Y مقدار دارد $\theta_L \neq \theta_R$	M_1 مقدار دارد $V_{1L} \neq V_{1R}$		تکیه‌گاه ساده میانی
مفصل داخلی و تکیه گاه		$M=0$ $V_L \neq V_R$	$Y=0$ $\theta_L \neq \theta_R$	$M_1=0$ $V_{1L} \neq V_{1R}$		تغییر نمی‌کند
تکیه گاه لغزنده گیردار		M مقدار دارد $V=0$	Y مقدار دارد $\theta=0$	M_1 مقدار دارد $V'=0$		تغییر نمی‌کند

پس در رسم تیر مزدوج تبدیلات زیر لازم است:



به چند مثال در مورد رسم مزدوج تیرها توجه کنید:



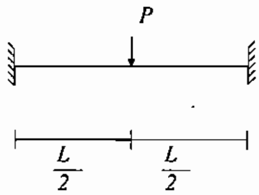
نکات مربوط به روش تیر مزدوج:

۱- مزدوج مزدوج یک تیر، خود آن تیر خواهد بود.

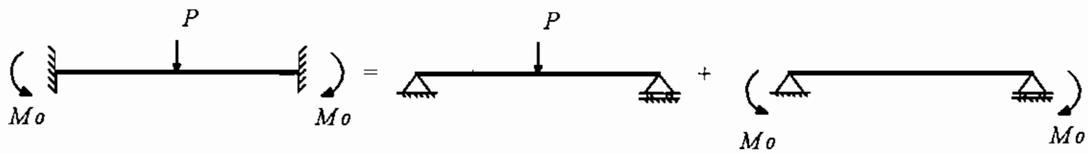
۲- مزدوج یک تیر معین استاتیکی یک تیر معین استاتیکی خواهد بود.

۳- مزدوج یک تیر نامعین استاتیکی یک تیر در ظاهر ناپایدار است ولی طبق این روش این تیر ناپایدار باید دارای برش و ممان باشد بنابراین باید متعادل باشد. شرط تعادل ایستایی برای این تیر در ظاهر ناپایدار که تحت تأثیر بارگذاری خاص $\frac{M}{EI}$ قرار دارد درحقیقت همان شرط سازگاری تغییر شکل‌های تیر حقیقی است.

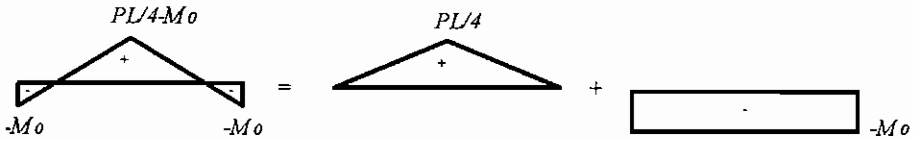
مثال : مطلوبست محاسبه حداکثر تغییر شکل ایجاد شده در تیر مقابل:



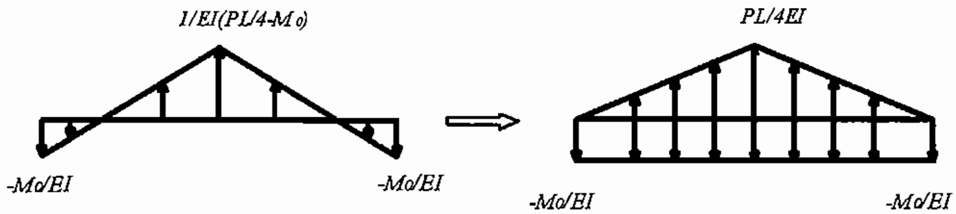
با توجه به اصل سوپر پوزیشن می‌توان تیر فوق را به صورت زیر در نظر گرفت:



پس دیاگرام لنگر این تیر به صورت زیر می‌باشد.



بنابراین می‌توان تیر فرضی تیر فوق را به صورت زیر در نظر گرفت:



ملاحظه می‌شود که طبق روابط سازگاری تغییر شکل‌ها میزان شیب در تکیه‌گاه‌های تیر حقیقی صفر است لذا برش در دو انتهـای تیـر فرضی باید صفر باشد بنابراین، با لنگر گیری حول یک انتها خواهیم داشت.

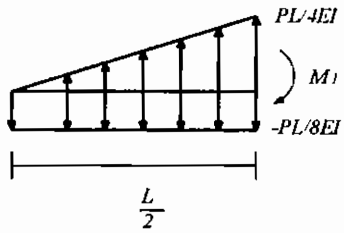
$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow \left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{M_0}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{PL}{8}$$

با یافتن مقدار M_0 می‌توان شیب و خیز هر نقطه از تیر مورد نظر را بدست آورد. در این مسأله مقدار ماکزیمم تغییر شکل را می‌خواهیم بنابراین در تیر مزدوج هرجا ممان حداکثر رخ دهد همان‌جا ماکزیمم تغییر شکل تیر حقیقی اتفاق می‌افتد. می‌دانیم ممان جایی حداکثر است که برش صفر می‌باشد. البته از روی فیزیک مسأله نیز می‌توان فهمید که حداکثر تغییر شکل زیر نقطه اثر بار یعنی

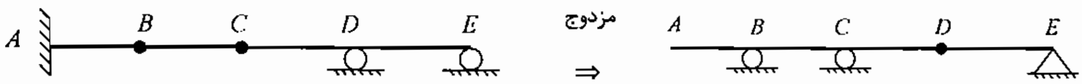
در فاصله $\frac{L}{2}$ اتفاق می‌افتد پس برای محاسبه تغییر شکل باید ممان تیر فرضی را در نقطه $\frac{L}{2}$ بدست آورد. برای این منظور در فاصله $\frac{L}{2}$ از انتها برش زده و مقدار لنگر خمشی را می‌یابیم.

$$M_1 = \frac{1}{2}\frac{PL}{4EI}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{6}\right) - \frac{PL}{8EI}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow M_1 = -\frac{1}{192}\frac{PL^3}{EI}$$

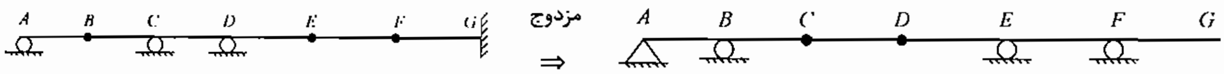


مثال : مزدوج هر کدام از تیرهای زیر را بیابید.

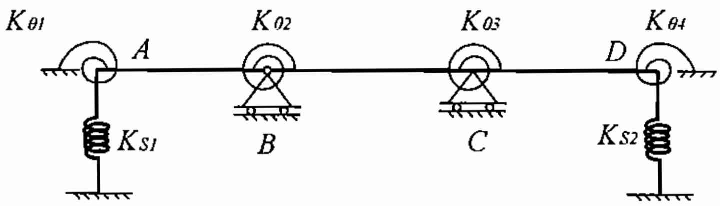
۱)



۲)



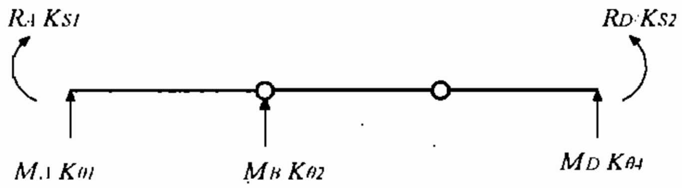
۳)



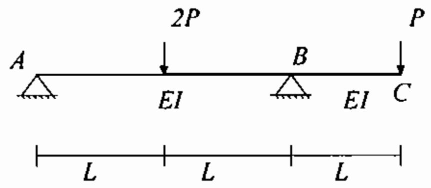
در رسم مزدوج این تیر به چند نکته دقت کنید.

به سادگی می‌توان دریافت که در نقطه A، در صورت وجود لنگر تغییر شیبی وجود دارد که برابر است با: $\theta = \frac{M_A}{K_{\theta_1}}$ پس در تیر مزدوج برش باید برابر $\frac{M_A}{K_{\theta_1}}$ باشد، به همین صورت در D نیز برشی معادل $\frac{M_D}{K_{\theta_4}}$ در تیر مزدوج اثر می‌دهیم. از طرفی در صورت وجود نیرویی در A مانند R_A، نقطه A تغییر مکانی برابر $\frac{R_A}{K_{S_1}}$ دارد پس در تیر مزدوج در نقطه A خمشی برابر $\frac{R_A}{K_{S_1}}$ و به همین ترتیب در D باید خمشی برابر $\frac{R_D}{K_{S_2}}$ وجود داشته باشد. در نقطه B اولاً تغییر مکان صفر است پس در تیر مزدوج در این نقطه لنگر صفر است یعنی در این نقطه مفصل خمشی داریم. از طرفی یک تغییر شیب در نقطه B وجود دارد که برابر $\frac{M_B}{K_{\theta_2}}$ است پس یک نیروی در این نقطه برابر

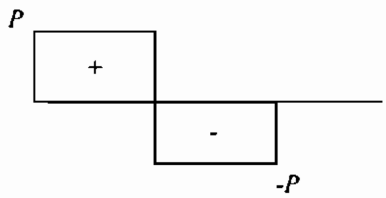
$\frac{M_B}{K_{\theta_2}}$ وارد می‌شود. به همین ترتیب چون در نقطه C تغییر مکان صفر است مفصل خمشی داریم ولی چون در C تیر پیوسته است لذا چپ و راست نقطه C تغییر شیبی ایجاد نمی‌شود و فنر بی‌تأثیر است لذا در این نقطه برشی وجود ندارد پس تیر مزدوج به‌صورت:



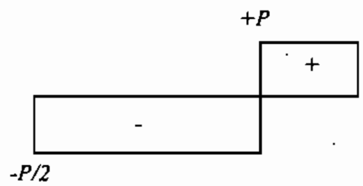
مثال : شیب و خیز C در تیر زیر را بیابید.



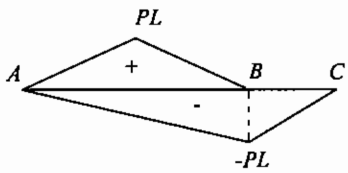
برش مربوط به بار 2P



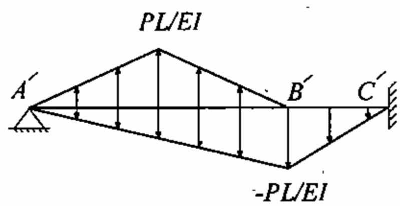
برش مربوط به بار P



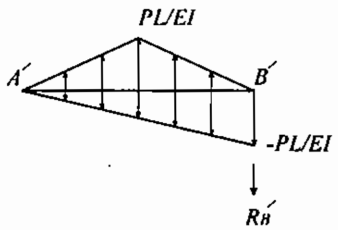
دیاگرام خمش



تیر مزدوج



با رسم تیر مزدوج و رسم نمودار جسم آزاد تیر $A'B'$ خواهیم داشت:

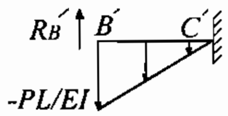


با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه A'، واکنش نقطه B' به‌دست می‌آید:

$$\sum M_{A'}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right)(2L)(L)-\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right)(2L)\left(\frac{2L}{3}\right)-2LR_{B'}=0$$

$$\Rightarrow\; R_{B'}=\frac{PL^2}{2EI}-\frac{PL^2}{3EI}=\frac{PL^2}{6EI}$$

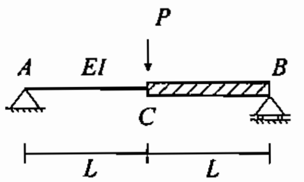
حال با بررسی قطعه $B'C'$ داریم:

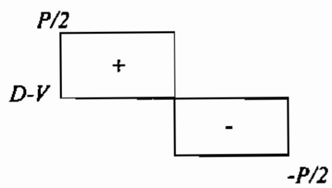


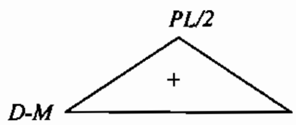
$$\theta_C=V_{C'}=R_{B'}-\frac{PL}{EI}(L)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{PL^2}{6EI}-\frac{PL^2}{2EI}=\frac{-PL^2}{3EI}\curvearrowright$$

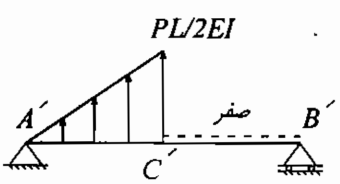
$$\Delta_C=M_{C'}=(R_{B'}\times L)-\left(\frac{PL}{EI}\right)(L)\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{2L}{3}=\frac{PL^3}{6EI}-\frac{PL^3}{3EI}=\frac{-PL^3}{6EI}\downarrow$$

مثال : در تیر زیر قطعه BC صلب است. تغییر مکان نقطه C و شیب تیر در نقطه A را تحت بارگذاری نشان داده شده به‌دست آورید.









در رسم تیر مزدوج این تیر، چون در فاصله BC تیر صلب است لذا مقدار $\frac{M}{EI}=\frac{M}{\infty}$ به صفر میل می‌کند.

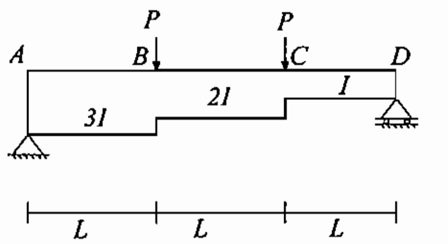
حال می‌توان گفت برش در تیر مزدوج در نقطه A' همان شیب تیر اصلی در A می‌باشد پس عکس‌العمل تیر مزدوج در A' را می‌یابیم.

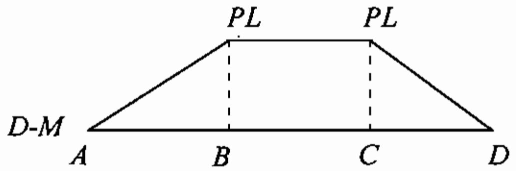
$$\sum M_{B'}=0 \;\Rightarrow\; R_{A'}\times 2L=\left(\frac{PL}{2EI}\right)(L)\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(L+\frac{L}{3}\right) \;\Rightarrow\; \theta_A=R_{A'}=\frac{PL^2}{3EI}$$

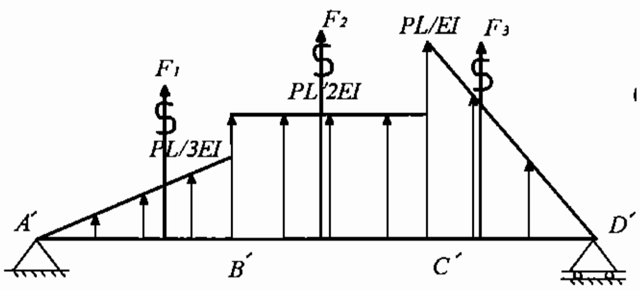
خمش در C' نیز همان تغییر مکان C است؛ پس، با زدن مقطع در C' میزان خمش در C' را می‌یابیم:

$$M_{C'}=\frac{PL^2}{3EI}\times L-\frac{2P}{2EI}(L)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right)=\frac{PL^3}{3EI}-\frac{PL^3}{12EI}=\frac{PL^3}{4EI}$$

مثال : در تیر زیر تغییر مکان نقطه B را بیابید و مشخص کنید که تغییر مکان ماکزیمم تیر در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد و مقدار آن چقدر است؟







با رسم تیر مزدوج کافی است میزان خمش در نقطه B' را بیابیم تا تغییر مکان نقطه B به‌دست آید. (برای این کار لازم است عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیر مزدوج به‌دست آید.) از طرفی تغییر مکان تیر اصلی زمانی ماکزیمم است که خمش در تیر مزدوج ماکزیمم شود یعنی برش در تیر مزدوج صفر شود لذا باید بررسی کنیم در چه نقطه‌ای از تیر مزدوج برش صفر است. برای این منظور میزان برش در نقاط B' و C' را یافته و با استفاده از هندسه، جایی را که برش صفر است می‌یابیم. بدیهی است با دانستن موقعیت این نقطه، می‌توان خمش در تیر مزدوج و به عبارتی ماکزیمم تغییر مکان تیر را یافت.

به عنوان تمرین می‌توان تغییر شکل ماکزیمم تیرهای مهم را به روش تیر مزدوج به‌دست آورد.

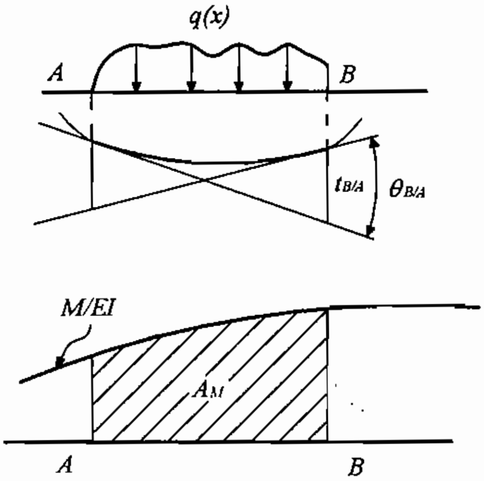
محاسبه تغییر شکل‌های خمشی در تیرها با استفاده از روش لنگر سطح:

قضایای لنگر سطح:

قضیه اول: میزان تغییر شیب مماس بر منحنی الاستیک تیر در نقطه B نسبت به خط مماس مرسوم از نقطه A برابر است با مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ حد فاصل A تا B:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = A_M$$

این بدان مفهوم است که برای یافتن تفاوت شیب تیر در دو نقطه B و A تحت یک بارگذاری خاص کافی است سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ را در فاصله A تا B به‌دست آوریم.



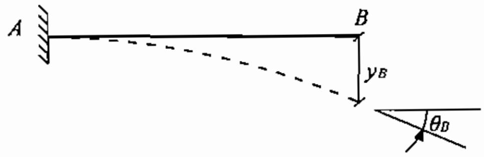
قضیه دوم: فاصله یک نقطه مانند B روی منحنی الاستیک تیر نسبت به خط مماس مرسوم از نقطه A برابر است با گشتاور اول سطح $\frac{M}{EI}$ در ناحیه AB نسبت به نقطه B. (اندازه مساحت سطح زیر منحنی ضربدر فاصله مرکز سطح تا نقطه B.)

$$t_{B/A} = \int_A^B x \, \frac{M(x)}{EI} dx = A_M . \bar{x}_B$$

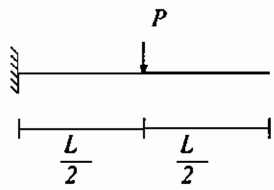
$\bar{x}_B$ فاصله مرکز سطح A_M تا نقطه B

نکته : در تیر طره داریم:

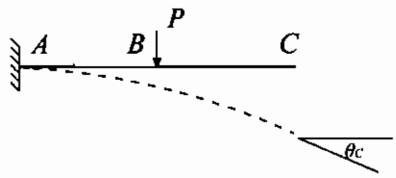
$$t_{B/A} = y_B$$
$$\theta_{B/A} = \theta_B$$



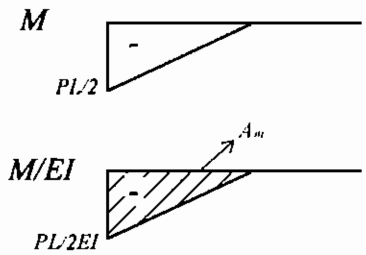
مثال ، در تیر مقابل مطلوبست محاسبه $\theta_B, \theta_C, \Delta_B, \Delta_C$.



منحنی الاستیک این تیر به صورت زیر خواهد بود:



دیاگرام $M, \frac{M}{EI}$ را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.



ملاحظه می‌شود که سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در فاصله A تا B و A تا C با هم برابر است بنابراین شیب دو نقطه B و C با هم برابر است و این بدان معنی است که تیر در فاصله B تا C مستقیم است. با توجه به اینکه شیب نقطه A صفر است خواهیم داشت:

$$\theta_{B/A} = \theta_{C/A} = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{PL}{2EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{PL^2}{8EI} = A_M$$ (سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ در فاصله از A تا B)

برای محاسبه Δ_B داریم:

$$t_{B/A} = A_M . \bar{x}_B = \frac{-PL^2}{8EI}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{PL^3}{24EI}$$ (گشتاور اول سطح منحنی $\frac{M}{EI}$ در فاصله از A تا B نسبت به نقطه B)

و برای Δ_C داریم:

$$t_{C/A} = A_M . \bar{x}_C = \frac{-PL^2}{8EI}\left(\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{-5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$ (گشتاور اول سطح منحنی $\frac{M}{EI}$ در فاصله از A تا C نسبت به نقطه C)

مثال ، در تیر با بارگذاری نشان داده شده مطلوبست یافتن:

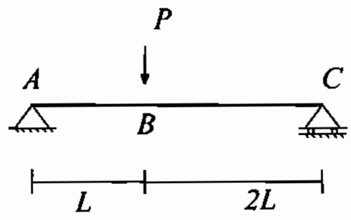
۱ـ اختلاف شیب دو نقطه A و B.

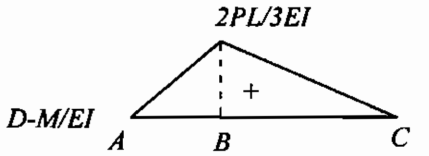
۲ـ فاصله نقطه B روی منحنی الاستیک از خط مماس رسم شده از نقطه A.

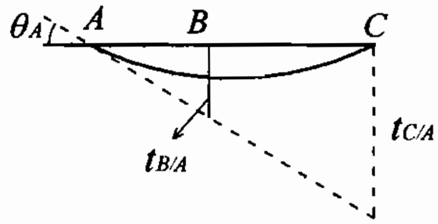
۳ـ زاویه دوران در نقطه A (θ_A)

۴ـ تغییر مکان نقطه B (Δ_B)

۵ ـ محل و مقدار تغییر مکان ماکزیمم تیر.







۱ـ طبق قضیه اول لنگر سطح داریم:

$$\theta_{B/A}=\theta_B-\theta_A=\int_A^B \frac{M}{EI}dx=A_m \quad\Rightarrow\quad \theta_{B/A}=\frac{2PL}{3EI}\times L\times\frac{1}{2}=\frac{PL^2}{3EI}$$

۲ـ طبق قضیه دوم لنگر سطح داریم:

$$t_{B/A}=\int_A^B x\frac{M(x)}{EI}dx=A_m\times\bar{x}_B \quad\Rightarrow\quad t_{B/A}=\frac{PL^2}{3EI}\times\frac{L}{3}=\frac{PL^3}{9EI}$$

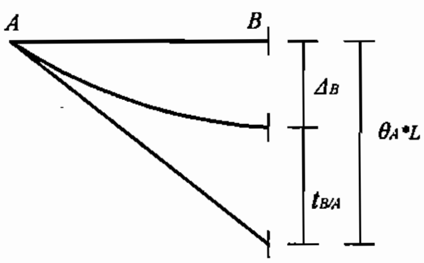
می‌خواهیم شیب تیر در نقطه A را بیابیم. بدین منظور با استفاده از قضیه دوم لنگر سطح $t_{C/A}$ را می‌یابیم پس داریم:

$$t_{C/A}=\frac{PL^2}{3EI}\times\frac{7L}{3}+\left(\frac{2PL}{3EI}\times 2L\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{4L}{3}=\frac{5}{3}\frac{PL^3}{EI}$$

حال با داشتن $t_{C/A}$ و تقسیم این مقدار بر کل طول تیر یعنی 3L مقدار شیب در A را می‌یابیم:

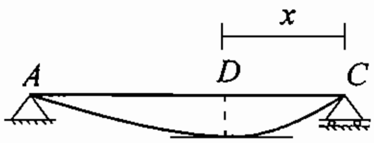
$$\theta_A=\frac{t_{C/A}}{3L}=\frac{5PL^2}{9EI}$$

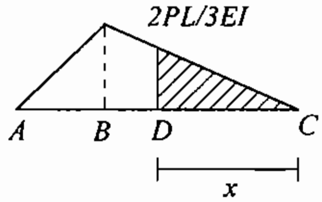
۴ـ برای محاسبه تغییر مکان نقطه B به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\Delta_B=\theta_A\times L-t_{B/A}=\frac{5PL^3}{9EI}-\frac{PL^3}{9EI}=\frac{4PL^3}{9EI}$$

۵ـ می‌دانیم ماکزیمم تغییر مکان در جایی از تیر اتفاق می‌افتد که شیب خط مماس بر تابع صفر باشد. فرض کنید در نقطه‌ای مانند D این اتفاق بیفتد. این نقطه را در فاصله x از تکیه‌گاه C در نظر می‌گیریم.





واضح است که چون شیب در نقطه D صفر است لذا اختلاف شیب تیر در دو نقطه C و D همان شیب C خواهد بود یعنی:

$$\theta_{C/D} = \theta_C - \underset{0}{\cancel{\theta_D}} = \theta_C$$

از طرفی طبق قضیه اول لنگر سطح می‌دانیم که $\theta_{C/D}$ برابر سطح زیر منحنی نمودار $\frac{M}{EI}$ در فاصله DC است لذا کافی است این دو مقدار را مساوی هم قرار دهیم تا مجهول x به‌دست آید. (دقت داریم با توجه به شکل سازه، ماکزیمم تغییر شکل در فاصله B تا C اتفاق می‌افتد.) ابتدا شیب در نقطه C را می‌یابیم. طبق قضیه اول لنگر سطح می‌نویسیم:

$\theta_{A/C} = \theta_A - \theta_C =$ سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از A تا C

$$\Rightarrow \quad \theta_A - \theta_C = \frac{2PL}{3EI}(3L)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{PL^2}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_C = \frac{5PL^2}{9EI} - \frac{PL^2}{EI} = -\frac{4PL^2}{9EI}$$

سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ از D تا C نیز برابر است با:

$$A_m = \frac{Px}{3EI} \times \frac{x}{2} = \frac{Px^2}{6EI}$$

پس طبق بحث‌های مطرح شده از حل معادله زیر فاصله نقطه ماکزیمم تغییر مکان را از C به‌دست می‌آوریم:

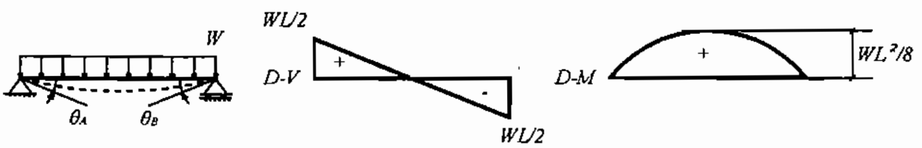
$$\frac{4PL^2}{9EI} = \frac{Px^2}{6EI} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{8}{3}L^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{8}{3}}\,L$$

مقدار تغییر مکان ماکزیمم را به عنوان تمرین به‌دست آورید.

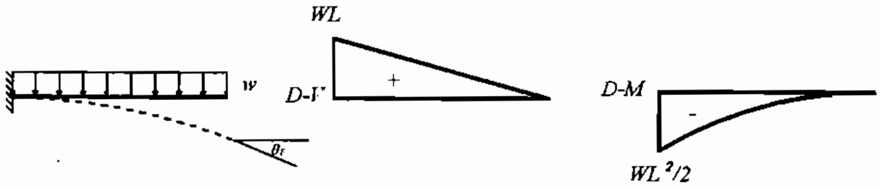
محاسبه تغییر شکل‌های خمشی در تیرها با استفاده از روابط تیرهای مهم:

مشخصات تیرهای مهم در زیر بیان شده است.حفظ این مشخصات در حل مسائل کمک بسیار زیادی می‌کنـد. بایـد توجـه داشـت کـه اغلب مسائل تغییر شکل‌ها را می‌توان به کمک این خصوصیات حل کرد. روابط زیادی برای تیرهای دیگر نیز بیـان شـده اسـت کـه در صورت لزوم برای یافتن آن‌ها می‌توانید به کتاب‌های مرجع مراجعه کنید ولی ازبر بودن این روابط در کنکور الزامی است.

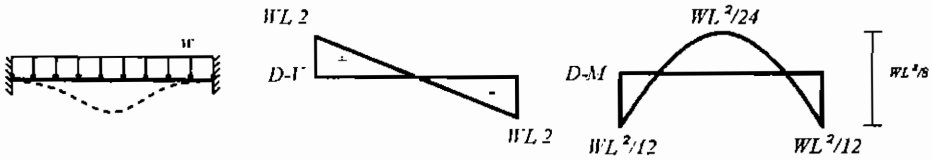
$$\begin{cases} \theta_A = \theta_B = -\dfrac{\omega L^3}{24EI} \\ y_{max} = \dfrac{-5}{384}\dfrac{\omega L^4}{EI} \end{cases}$$



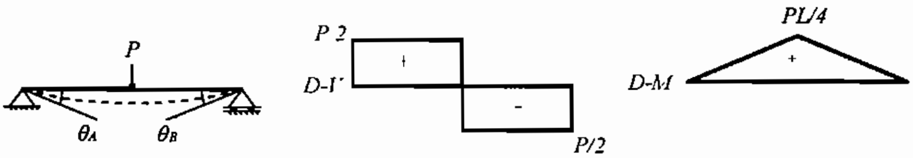
$$\begin{cases} \theta_B = -\dfrac{\omega L^3}{6EI} \\ y_{max} = \dfrac{-\omega L^4}{8EI} \end{cases}$$



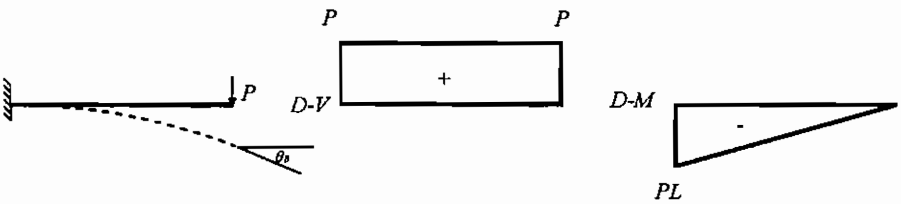
$$\begin{cases} y_{max} = \dfrac{1}{384}\dfrac{\omega L^4}{EI} \end{cases}$$



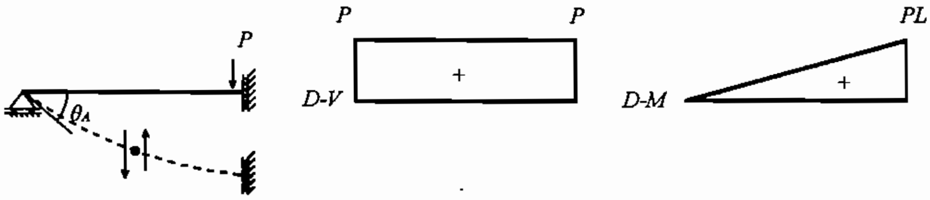
$$\begin{cases} \theta_A = -\theta_B = -\dfrac{1}{16}\dfrac{PL^2}{EI} \\ y_{max} = \dfrac{-1}{48}\dfrac{PL^3}{EI} \end{cases}$$



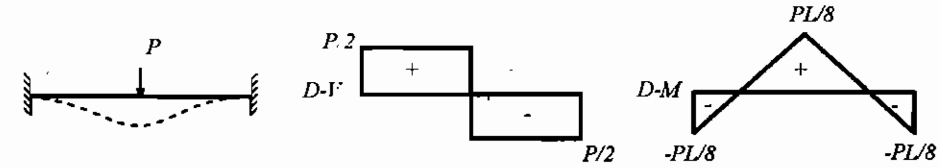
$$\begin{cases} \theta_B = -\dfrac{PL^2}{2EI} \\ y_B = y_{max} = -\dfrac{PL^3}{3EI} \end{cases}$$



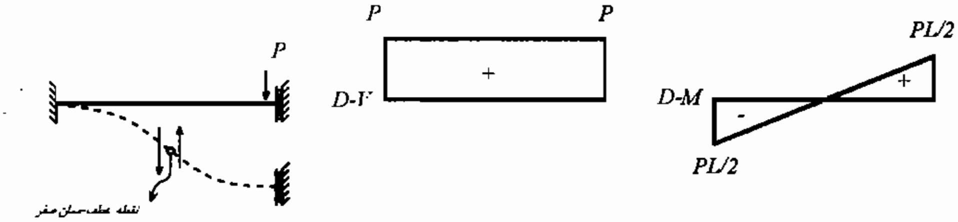
$$\begin{cases} \theta_A = -\dfrac{PL^2}{2EI} \\ y_{max} = \dfrac{-PL^3}{3EI} \end{cases}$$



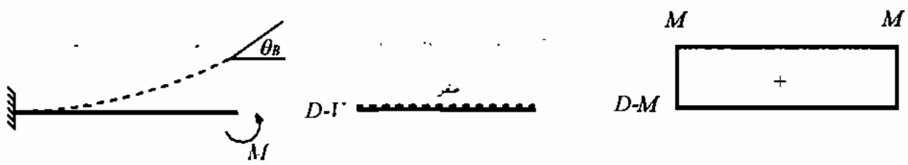
$$\left\{ y_{max} = \frac{-1}{192}\frac{PL^3}{EI} \right.$$



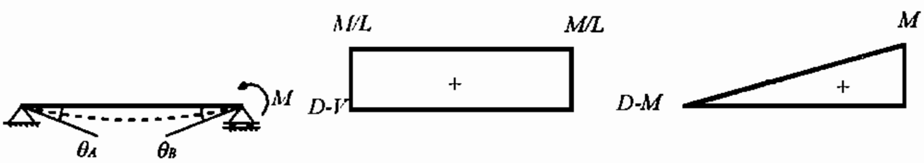
$$\left\{ y_{max} = -\frac{PL^3}{12EI} \right.$$



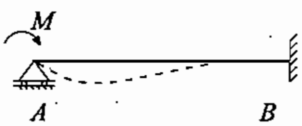
$$\begin{cases} \theta_B = \dfrac{ML}{EI} \\ y_B = \dfrac{ML^2}{2EI} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_{max} = \dfrac{\sqrt{3}}{27}\dfrac{ML^2}{EI} \\ \begin{cases} \theta_A = -\dfrac{ML}{6EI} \\ \theta_B = +\dfrac{ML}{3EI} \end{cases} \end{cases}$$



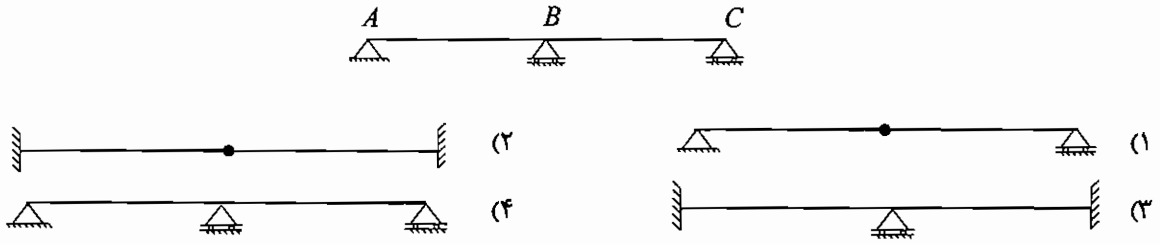
$$\begin{cases} \theta_A = -\dfrac{ML}{4EI} \\ M_B = \dfrac{M}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \theta_A = -\dfrac{ML}{8I} \\ \Delta_B = -\dfrac{ML^2}{2EI} \end{cases}$$

تست‌های بخش تغییر شکل‌های خمشی در تیرها

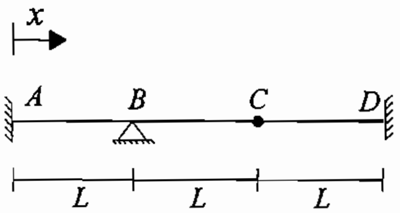
۱ ـ کدام‌یک از چهار حالت زیر تیر مزدوج تیر ABC می‌باشد؟ (سراسری ۷۲)



حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

طبق نکات تیر مزدوج، گزینه اول صحیح می‌باشد.

۲ ـ در تیر ABCD شکل زیر، چنان‌چه بر اثر نوعی بارگذاری، لنگر خمشی در دهانه‌های مختلف برابر $M_{AB} = 2L - 6x$ و $M_{BC} = 4x - 8L$ و $M_{CD} = -7x + 14L$ باشد، تغییر مکان قائم مفصل C برابر است با: (صلبیت خمشی ثابت و برابر $EI = 3000\,t.m^2$ و $L = 3m$ می‌باشد. تغییر مکان به سمت بالا مثبت در نظر گرفته می‌شود.) (سراسری ۷۲)



۱) $\delta_C = 1.4\ cm$

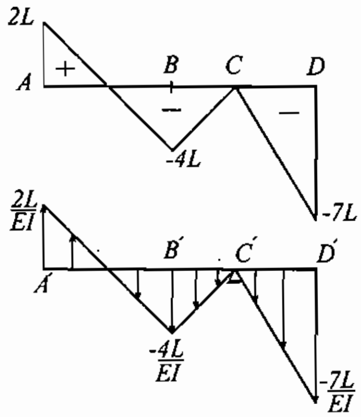
۲) $\delta_C = -2.1\ cm$

۳) $\delta_C = -1.4\ cm$

۴) $\delta_C = 2.8\ cm$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا دیاگرام خمش تیر را رسم می‌کنیم و تیر مزدوج با بارگذاری $\frac{M}{EI}$ را رسم می‌کنیم.



طبق روش تیر مزدوج، تغییر مکان تیر اصلی در نقطه C برابر است با خمش در این نقطه در تیر مزدوج، پس داریم:

$$M_{C'} = \left(\frac{-7L}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \times \frac{2L}{3} = \frac{-7L^3}{3EI}$$

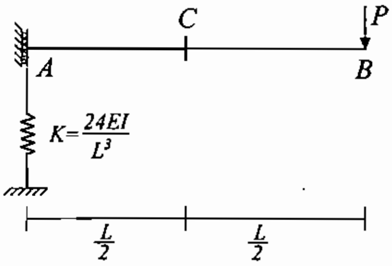
طبق فرض $L = 3$ و $EI = 3000\ t.m^2$ می‌باشد لذا:

$$\Delta_C = M_{C'} = \frac{-7(3)^3}{3 \times 3000} = -0.021\ M = -2.1\ cm$$

۳ـ در صورتی که تکیه‌گاه قائم A الاستیک باشد، مطلوب است تعیین تغییر مکان قائم نقطه C در اثر نیروی P. (EI در طول تیر ثابت است.) (سراسری ۷۳)

۱) $\frac{PL^3}{12EI}$ ۲) $\frac{5PL^3}{48EI}$

۳) $\frac{PL^3}{8EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{6EI}$

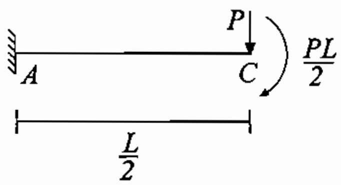


حل :

با توجه به این‌که نیروی ایجاد شده در فنر برابر P می‌باشد لذا نقطه A به اندازه $\frac{P}{K}$ به سمت پائین حرکت می‌کند که در اثر این حرکت نقطه C هم به همین اندازه پائین می‌آید. پس:

$$\Delta_{C_1} = \frac{P}{k} = \frac{P}{\frac{24EI}{L^3}} = \frac{PL^3}{24EI}$$

دقت داریم که پس از آن که فنر تغییر مکان خود را کرد، نقطه A ثابت شده و تکیه‌گاه به تکیه‌گاه گیردار تبدیل می‌شود. حال نیروی P را به نقطه C منتقل می‌کنیم که در نتیجه آن لنگری به اندازه $\frac{PL}{2}$ نیز منتقل می‌شود پس می‌توان تیر را به صورت زیر در نظر گرفت که تغییر مکان C تحت این بارگذاری برابر است با:



$$\Delta_{C_2} = \frac{P(L_{AC})^3}{3EI} + \frac{M(L_{AC})^2}{2EI} = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{\frac{PL}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI}$$

$$= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right)\frac{PL^3}{EI} \rightarrow \Delta_{C_2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

پس در مجموع تغییر مکان نقطه C برابر است با:

$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \Delta_{C_2} = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI} = \frac{7}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

که هیچ‌کدام از گزینه صحیح نمی‌باشد.

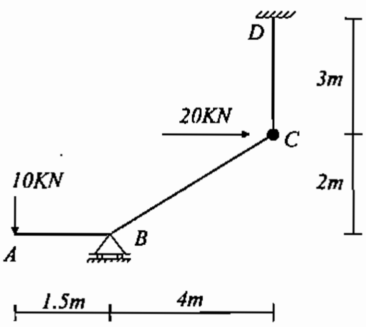
۴ـ تغییر مکان افقی نقطه C را حساب کنید. تنها اثر خمشی در نظر بوده و صلبیت خمشی مقطع EI است. **(سراسری ۷۴)**

۱) صفر

۲) $\frac{180}{EI}$

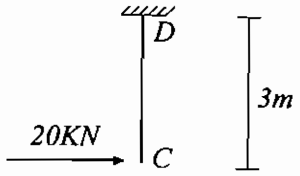
۳) $\frac{120}{EI}$

۴) $\frac{720}{EI}$



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

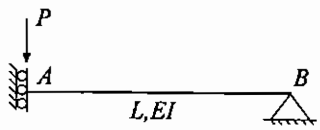
همان‌طور که از شرایط سازه می‌توان دید، بار 10kN هیچ تغییر شکل خمشی در نقطه C ایجاد نمی‌کند چراکه با نوشتن معادله لنگر در نقطه B فقط یک نیروی محوری در میله DC ایجاد می‌شود که تغییر مکان ناشی از نیروی محوری مدنظر نیست. از طرفی با توجه به غلتکی بودن تکیه‌گاه B، کل بار 20kN توسط تیر DC تحمل نمی‌شود پس برای یافتن تغییر مکان نکته C کافی است حالت سازه‌ای زیر را در نظر بگیریم:



تغییر مکان نقطه C در این تیر یک سر گیردار برابر است با:

$$\Delta_C = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{20\times(3)^3}{3EI} = \frac{180}{EI}$$

۵ ـ خیز قائم تکیه‌گاه A را حساب کنید. تنها اثر خمش موردنظر است؟ **(سراسری ۱۳۷۴)**

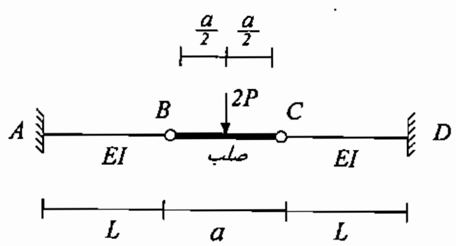


۱) $\frac{PL^3}{3EI}$
۲) $\frac{PL^3}{6EI}$
۳) $\frac{PL^3}{12EI}$
۴) $\frac{PL^3}{EI}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به روابط تیرهای مهم می‌دانیم که گزینه اول صحیح است. دقت کنید در این سازه می‌توان به جای این‌که نقطه B را ثابت در نظر گرفته و نقطه A را تحت بار P تغییر دهیم، می‌توان نقطه A را ثابت در نظر گرفته و بار P که همان عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B است را در انتهای B اعمال کنیم که تغییر مکان همان $\frac{PL^3}{3EI}$ است.

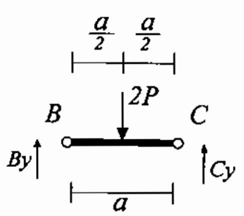
۶ ـ در تیر زیر نقاط B و C مفصل و قطعه BC دارای صلبیت بی‌نهایت می‌باشد. خیز نقطه B برابر است با: **(سراسری ۱۳۷۵)**



۱) صفر
۲) $\frac{PL^3}{3EI}$
۳) $\frac{2PL^3}{3EI}$
۴) $\frac{2PL^3}{5EI}$

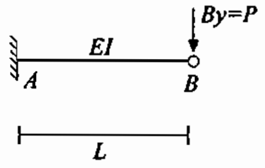
حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

قطعه BC را از سازه جدا می‌کنیم، با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه C داریم:



$$\sum M_C = 0 \ \rightarrow\ 2P\times\frac{a}{2} = B_y\times a \ \rightarrow B_y = p$$

که البته این نتیجه با توجه به تقارن، قابل استنتاج بود. حال این نیروی B_y را روی نقطه B از تیر AB اعمال می‌کنیم:

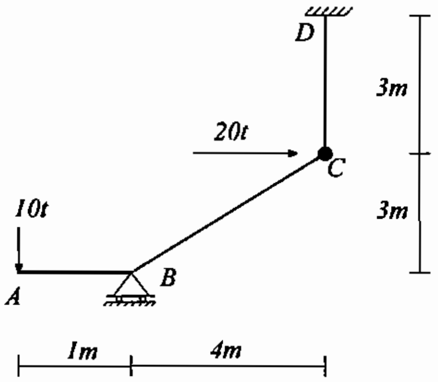


$$\Rightarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$$

۷ـ تغییر مکان افقی نقطه C را تعیین کنید؟ **(سراسری ۷۷)**

۱) $\frac{64}{EI}$ ۲) $\frac{360}{EI}$

۳) $\frac{90}{EI}$ ۴) $\frac{180}{EI}$



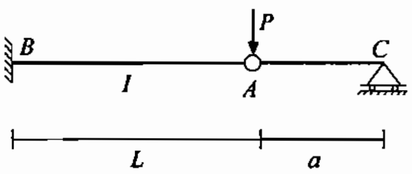
حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

حل دقیقاً مانند مسأله سراسری ۷۴ می‌باشد.

۸ـ تغییر مکان قائم نقطه A برابر است با: **(سراسری ۷۸)**

۱) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^3}{6EI}$

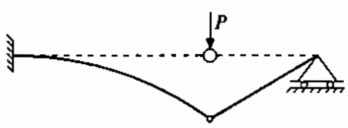
۳) $\frac{PaL^3}{3EI}$ ۴) $\frac{PaL^3}{6EI}$



حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

قطعه AC چون تیری دو سر مفصل است لذا در تحمل بار P هیچ نقشی ندارد و به صورت صلب دوران می‌کند لذا کل بار P توسط تیر BA تحمل می‌شود، یعنی مانند این است که بار P به یک تیر یک سر گیردار با طول L وارد می‌شود پس، منحنی تغییر شکل این سازه به صورت زیر است:

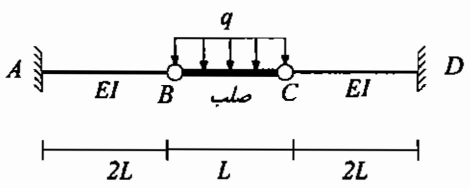
$$\Delta_A = \frac{PL^3}{3EI}$$



۹ـ در سازه متقارن شکل زیر، تغییر مکان قائم نقطه B چقدر است؟ **(سراسری ۷۸)**

۱) $\frac{qL^4}{6EI}$ ۲) $\frac{8qL^4}{3EI}$

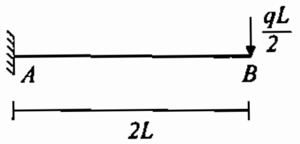
۳) $\frac{4qL^4}{EI}$ ۴) $\frac{4qL^4}{3EI}$



حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

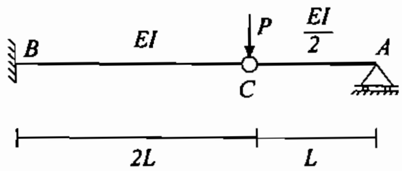
کل بار واحد قائم وارد بر قطعه BC برابر qL است که بنابر تقارن نصف آن توسط تیر AB و نصف آن توسط تیر CD تحمل می‌شود.

پس برای تعیین تغییر مکان نقطه B کافی است تغییر مکان نقطه B را در تیر زیر بیابیم:



$$\Delta_B = \frac{P\left(L_{AB}\right)^3}{3EI} = \frac{\frac{qL}{2}(2L)^3}{3EI} = \frac{4qL^4}{3EI}$$

۱۰ ـ در سازه شکل زیر، چرخش A چقدر است؟ **(سراسری ۷۹)**

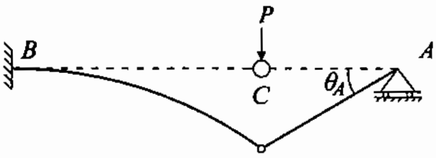


۱) $\frac{8PL^2}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^2}{EI}$

۳) $\frac{8PL^2}{1.5EI}$ ۴) $\frac{8PL^2}{EI}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مانند مسأله سال ۷۸، کل بار P توسط قطعه BC تحمل می‌شود پس تغییر مکان نقطه C برابر است با:

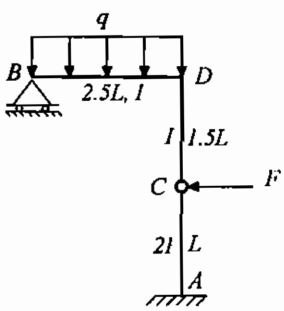


$$\Delta_C = \frac{P\left(L_{BC}\right)^3}{3EI} = \frac{P(2L)^3}{3EI} = \frac{8PL^3}{3EI}$$

حال چون دوران قطعه AC صلب است لذ چرخش A برابر است با:

$$\theta_A = \frac{\Delta_C}{L} = \frac{8PL^2}{3EI}$$

۱۱ ـ در سازه شکل زیر تغییر مکان افقی نقطه C چقدر است؟ **(سراسری ۷۹)**

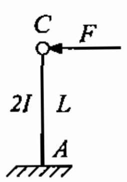


۱) $\frac{F(2.5L)^3}{6EI}$ ۲) $\frac{FL^3}{3EI}$

۳) $\frac{\left(FL^3 + qL^4\right)}{EI}$ ۴) $\frac{FL^3}{6EI}$

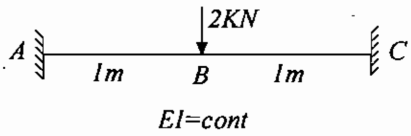
حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

اولاً بار گسترده به شدت q تأثیری در تغییر مکان افقی c ندارد. (فقط باعث ایجاد نیروی محوری در عضو AC می‌شود.) از طرفی چون تکیه‌گاه B غلتکی است لذا فقط قطعه AC در مقابل بار افقی F تحمل می‌کند لذا تغییر مکان افقی C برابر تغییر مکان یک تیر یک سرگیردار با سختی 2EI و طول L می‌باشد که تحت بار F در انتها قرار گرفته است:



$$\Delta_{CH} = \frac{FL^3}{3(2EI)} = \frac{FL^3}{6EI}$$

۱۲ ـ در شکل زیر مقدار δ_B کدام است؟ **(سراسری ۷۹)**



۱) $\frac{1}{12EI}$ ۲) $\frac{1}{6EI}$

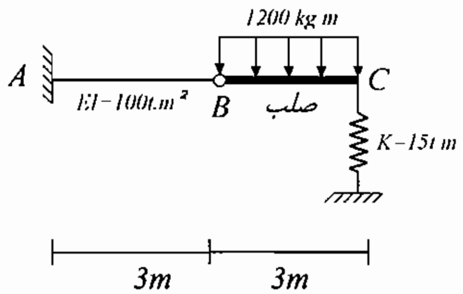
۳) $\frac{1}{4EI}$ ۴) $\frac{1}{2EI}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

طبق روابط تیرهای مهم داریم:

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{192EI} = \frac{2\times(2)^3}{192EI} \Rightarrow \Delta_B = \frac{1}{12EI}$$

۱۳ ـ در تیر شکل مقابل، تغییر مکان وسط قطعه صلب (برحسب mm) کدام است؟ (B مفصل خمشی می‌باشد.) **(سراسری ۸۰)**



۱) صفر

۲) 81

۳) 113

۴) 141

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

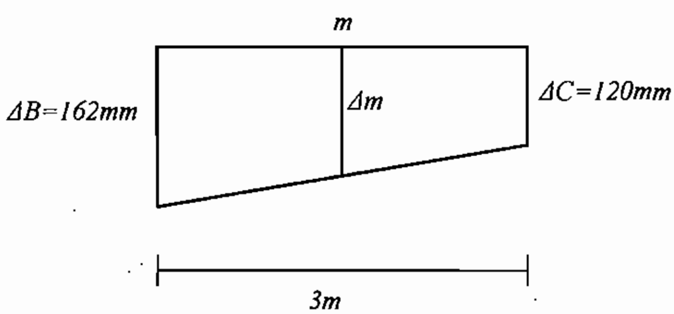
با توجه به وضعیت سازه، نیرویی معادل $1200\times 3 = 3600$ kg به قطعه BC وارد می‌شود که با نوشتن معادلات تعادل لنگر در نقطه B و C برای قطعه BC، نصف آن یعنی 1800 kg به نقطه C وارد می‌شود که فنر آن را تحمل می‌کند و نصف دیگر آن به نقطه B وارد می‌شود که توسط تیر AB تحمل می‌شود. در اثر وجود بار 1800 kg در فنر C تغییر مکانی در انتهای C ایجاد می‌شود که برابر است با:

$$\Delta_C = \frac{F_c}{k} = \frac{1.8(t)}{15} = 0.12 \text{ m} = 12\text{cm} = 120 \text{ mm}$$

از طرفی بار 1.8t را به انتهای B تیر AB وارد می‌شود که تغییر مکانی Δ_B را ایجاد می‌کند که برابر است با:

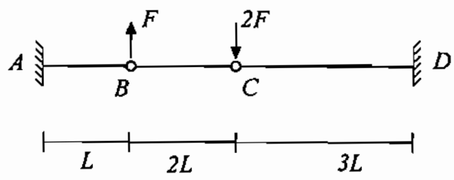
$$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{1.8\times 3^3}{3\times 100} = 0.162 \text{ m} = 162 \text{ mm}$$

پس تغییر مکان وسط تیر BC برابر است با:



$$\Delta_m = \frac{\Delta_B + \Delta_C}{2} = 141 \text{ mm}$$

۱۴ ـ مقدار چرخش BC چقدر است؟ (EI ثابت) **(سراسری ۸۰)**



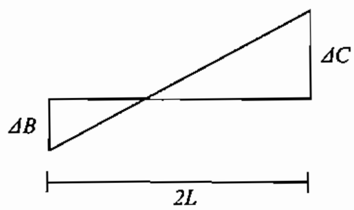
۱) $\frac{55FL^2}{6EI}$ ۲) $\frac{28FL^2}{3EI}$

۳) $\frac{55FL^2}{3EI}$ ۴) $\frac{56FL^2}{3EI}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

قطعه BC یک قطعه دو سر مفصل است پس هیچ تحملی در برابر خمش ندارد لذا تمام نیرویی که به مفصل B وارد می‌شود توسط قطعه AB و تمام نیرویی که به مفصل C وارد می‌شود توسط قطعه CD تحمل می‌شود. لذا می‌توانیم بنویسیم:

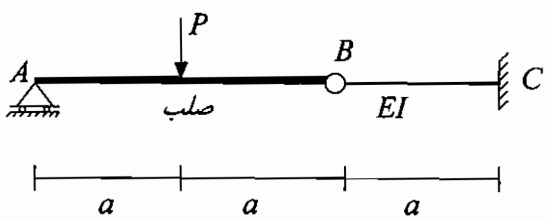
$$\Delta_B = \frac{FL^3}{3EI} \qquad \Delta_C = \frac{(2F)(3L)^3}{3EI} = \frac{18FL^3}{EI}$$



حال با یافتن Δ_B و Δ_C می‌توان چرخش BC را یافت:

$$\theta_B = \frac{\Delta_B + \Delta_C}{2L} = \frac{\frac{55FL^3}{3EI}}{2L} = \frac{55FL^2}{6EI}$$

۱۵ ـ در تیر زیر، اختلاف شیب دو طرف مفصل داخلی B $\left(\Delta\theta_B\right)$ کدام است؟ **(سراسری ۸۰)**



۱) $\frac{Pa^2}{4EI}$ ۲) $\frac{Pa^2}{2EI}$

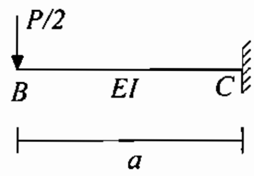
۳) $\frac{3Pa^2}{4EI}$ ۴) $\frac{Pa^2}{3EI}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

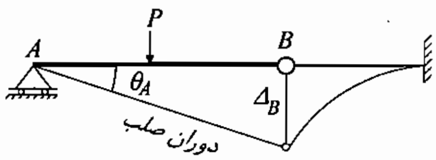
مطابق مسائل قبل،از بار P، مقدار $\frac{P}{2}$ به مفصل B می‌رسد که توسط تیر BC تحمل می‌شود و مقدار $\frac{P}{2}$ به انتهای A وارد می‌شود که توسط تکیه‌گاه تحمل می‌گردد. حال قطعه BC را در نظر می‌گیریم این قطعه یک تیر یک سرگیردار است که در انتهای آن یک بار متمرکز وارد شده است. طبق روابط تیرهای مهم می‌توانیم بنویسیم:

$$\theta_{BR}=\frac{P_{AB}\left(L_{AB}\right)^2}{2EI}=\frac{\frac{P}{2}a^2}{2EI}=\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$\Delta_B=\frac{P_{AB}\left(L_{AB}\right)^3}{3EI}=\frac{\frac{P}{2}a^3}{3EI}=\frac{Pa^3}{6EI}$$



حال به کل سازه دقت کنید، قسمت راست گره B دورانی برابر $\frac{Pa^2}{4EI}$ دارد. (مطابق محاسبات بالا).



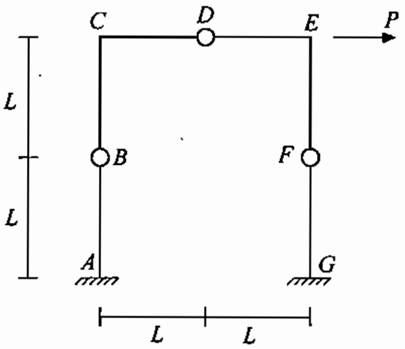
قسمت چپ گره B دورانی برابر دوران قطعه صلب AB دارد پس:

$$\theta_{BL}=\frac{\Delta_B}{L_{AB}}=\frac{\frac{Pa^3}{6EI}}{2a}=\frac{Pa^2}{12EI}$$

چون قسمت چپ B دورانی ساعتگرد دارد θ_{BL} را مثبت و چون قسمت راست B دورانی پادساعتگرد دارد. θ_{BR} را منفی در نظر می‌گیریم پس اختلاف شیب دو طرف مفصل داخلی B برابر است با:

$$\Delta\theta_B=\theta_{BL}-\theta_{BR}=\frac{Pa^2}{12EI}-\left(\frac{-Pa^2}{4EI}\right)=\frac{Pa^2}{3EI}$$

۱۶ ـ سازه‌ای متقارن و معین مطابق شکل زیر مفروض است. اگر از تغییر طول اعضاء صرفنظر کنیم، تغییر مکان افقی نقطه B چقدر است؟ (صلبیت خمشی هم اعضاء را EI فرض نمایید.) (سراسری ۸۰)

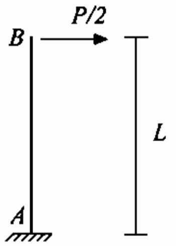


۱) $\frac{2PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^3}{6EI}$

۳) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{EI}$

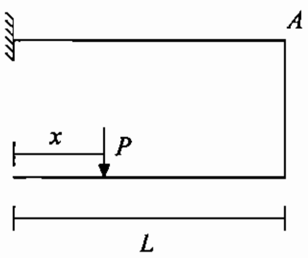
حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در مقابل نیروی افقی P، سازه متقارن است یعنی نصف نیرو توسط قطعه DEF به نقطه F و نصف دیگر آن توسط قطعه BCD به نقطه B وارد می‌شود. (دقت داریم که اعضای DEF و BCD اعضایی دو سر مفصل هستند پس در برابر نیرو مقاومتی ندارند.) پس برای محاسبه تغییر مکان افقی نقطه B کافی است بار $\frac{P}{2}$ را به انتهای تیر یک سر گیردار AB وارد کرده و تغییر مکان B را بیابیم.



$$\Delta_B = \frac{\frac{P}{2}(L)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{6EI}$$

۱۷ ـ با توجه به شکل روبرو، در چه فاصله‌ای از انتهای میله بایستی نیروی P اعمال گردد تا تغییر مکان قائم نقطه A صفر شود؟ $(x = ?)$ (سراسری ۸۱)

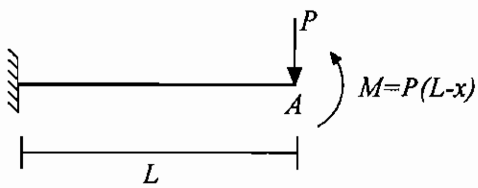


۱) $x = L$
۲) $x = \frac{L}{3}$
۳) $x = \frac{L}{2}$
۴) $x = \frac{2L}{3}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بار P را به نقطه A منتقل می‌کنیم که علاوه بر نیرو، لنگری برابر $P(L-x)$ نیز به نقطه A منتقل می‌شود.

نیروی p تغییر مکانی به سمت پائین و لنگر $P(L-x)$ تغییر مکانی رو به بالایی ایجاد می‌کند که طبق فرض مسأله این دو تغییر مکان باید با هم برابر باشند.

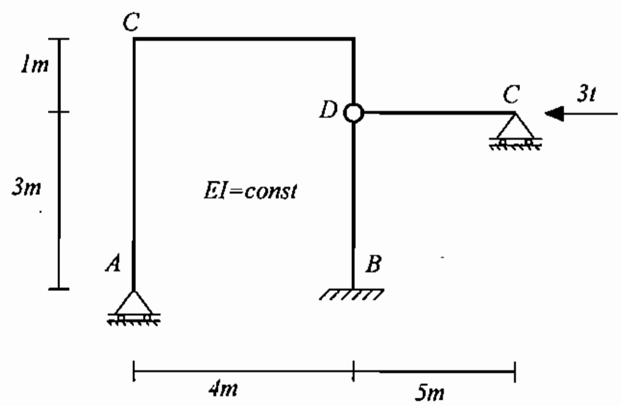


$$\Delta_{A1} = \frac{PL^3}{3EI}\downarrow , \Delta_{A2} = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{P(L-x)L^2}{2EI}$$

$$\Delta_{A1} = \Delta_{A2} \Rightarrow \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P(L-x)L^2}{2EI}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{3} = \frac{L-x}{2} \Rightarrow 2L = 3L - 3x \Rightarrow 3x = L \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

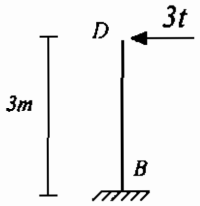
۱۸ ـ در سازهٔ شکل مقابل جابجایی افقی نقطه D در اثر اعمال بار و نشست تکیه‌گاه A در جهت قائم به اندازه 3 cm چقدر است؟ (فقط اثر خمش در نظر گرفته شود.) (سراسری ۸۱)



۱) $\frac{27}{EI}$
۲) $\frac{3}{EI}$
۳) $\frac{81}{EI} + \frac{9}{4}$
۴) $\frac{27}{EI} + 3.100$

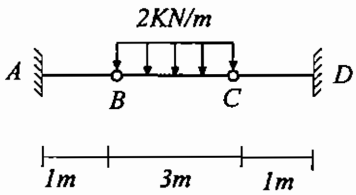
حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در این سازه با نشست تکیه‌گاه A در جهت قائم، به قطعه AB هیچ نیرویی وارد نمی‌شود و فقط قطعه AD حول گره D دوران می‌کند؛ بنابراین، جابجایی افقی نقطه D فقط تحت تأثیر نیروی افقی 3t وارد شده به تکیه‌گاه C است. از طرفی چون تکیه‌گاه A و C غلتکی هستند لذا این تکیه‌گاه‌ها نیز مقاومتی در برابر این نیرویی افقی ندارند و کل بار افقی توسط قطعه BC تحمل می‌شود. پس:



$$\Delta_D = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{3\times3^3}{3EI} = \frac{27}{EI}$$

۱۹ ـ Δ_C را حساب کنید؟ (ثابت = EI) **(سراسری ۸۱)**



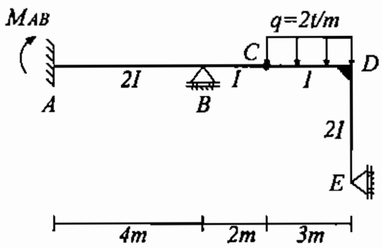
۱) $\frac{1}{EI}$ ۲) $\frac{2}{EI}$

۳) $\frac{3}{EI}$ ۴) $\frac{6}{EI}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

روش حل در مسائل قبلی آمده است. توجه داشته باشید که در این مسأله اگر تغییر مکان وسط BC را می‌خواستند ابتدا تغییر مکان نقاط B و C را به دست می‌آوردیم. در اثر این تغییر مکان‌ها، نقطه وسط BC نیز به همان اندازه تغییر مکان می‌دهد. (در صورت برابری تغییر مکان نقاط B و C. اگر دو تغییر مکان با هم برابر نبود با میانگین‌گیری تغییر مکان وسط BC را می‌یافتیم). پس انجام این تغییر مکان، نقاط B و C ثابت شده و حال قطعه BC که قطعه‌ای انعطاف‌پذیر تحت بار گسترده است خود تغییر مکان ثانویه‌ای انجام می‌داد. با جمع این دو تغییر مکان، تغییر مکان کلی این نقطه به دست می‌آمد.

۲۰ ـ میزان M_{AB} برحسب $t\cdot m$ چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**



۱) 12 ۲) 6

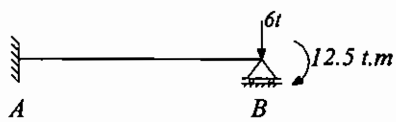
۳) 4.5 ۴) -3

حل :

چون تکیه E غلتکی است لذا کل بار گسترده به نقطه C وارد می‌شود که بار وارد شده به C برابر است با:

$$F_C = qL = 2\times3 = 6\,t$$

با انتقال این بار به نقطه B، لنگری به اندازه $F_C L_{BC}$ نیز به این نقطه منتقل می‌شود:



طبق ضریب انتقال لنگر اعضای یک سر گیردار و یک سر مفصل، نصف لنگر موجود در B به A می‌رسد، لذا:

$$M_{AB} = \frac{M_{BA}}{2} = 6\,t\cdot m$$

۲ـ محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش‌های انرژی

سه روش برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش‌های انرژی وجود دارد که عبارتند از:

الف ـ روش کار حقیقی

ب ـ روش کاستیگلیانو

ج ـ روش کارمجازی

الف) روش کار حقیقی

مبنای این روش بر این اصل استوار است که کار خارجی انجام شده با انرژی داخلی ذخیره شده برابر است: $W_e = U$

در این روش فقط تغییر شکل ارتجاعی سازه تحت تأثیر تنها یک نیروی متمرکز یا یک گشتاور متمرکز خارجی در امتداد همان نیروی اعمال شده را می‌توان محاسبه نمود لذا این روش محدودیت‌هایی دارد که برخی از آن‌ها عبارتند از:

۱ـ در این روش، تغییر مکان سازه در اثر بارگذاری‌های گوناگون، حرارت و نشست تکیه‌گاهی قابل محاسبه نیست.

۲ـ تنها تغییر مکان سازه در امتداد همان نیروی متمرکز اعمال شده یا دوران در امتداد همان گشتاور متمرکز قابل محاسبه است و تغییر مکان نقاط دیگر سازه مجهول می‌ماند.

توجه :

گر بار خارجی نیروی متمرکز باشد، کار خارجی برابر است با:

$W_e = \frac{1}{2}\, P.\Delta \quad \rightarrow$ تغییر مکان ناشی از بار در امتداد آن

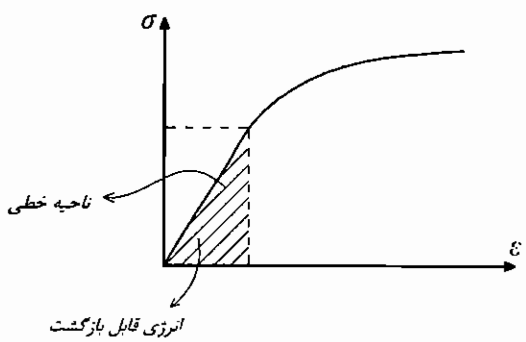
و اگر بار خارجی لنگر خمشی متمرکز باشد، کار خارجی برابر است با:

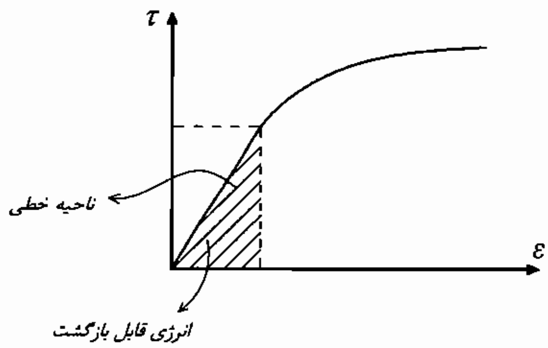
$W_e = \frac{1}{2}\, M.\theta \quad \rightarrow$ دوران ناشی از لنگر در امتداد آن

انرژی کرنشی الاستیک:

می‌دانیم که کار حاصلضرب نیرو در جابجایی در امتداد نیرو می‌باشد و همچنین انرژی توانایی انجام کار می‌باشد. هرگاه سازه‌ای تحت تأثیر تنش خاص قرار گیرد، از حاصلضرب تنش در سطح مقطعی که تنش روی آن اثر می‌کند، نیرو به دست می‌آید. پس یکی از مؤلفه‌های محاسبه کار به دست آمده است. از طرفی تغییر شکل‌های ناشی از این نیرو نیز جابجایی مورد نیاز را ایجاد می‌کند پس از حاصل‌ضرب نیروی مذکور متناظر با آن کار به دست می‌آید که به آن کار داخلی انجام شده به وسیله نیروهای خارجی وارد شده بر سازه گفته می‌شود. واضح است که برای انجام این کار انرژی لازم است که انرژی ایجاد شده در جسم ذخیره می‌شود و به آن انرژی کرنشی الاستیک یا انرژی کرنشی داخلی گفته می‌شود. در حالاتی که فقط یک نیرو به عضو وارد می‌شود با مساوی قرار دادن کارهای داخلی و کارهای خارجی تغییرشکل‌ها را می‌توان یافت. در ترکیب نیروها و حالات عمومی سازه نیز تغییر شکل سازه‌ها را می‌توان با روش کاستیگلیانو و روش کار مجازی به دست آورد.

می‌دانیم سطح زیر نمودار تنش و کرنش میزان انرژی ذخیره شده در جسم تحت بارگذاری موردنظر است. حال اگر در محدود خطی این نمودار باشیم با توجه به این‌که پس از باربرداری جسم به شرایط اولیه برمی‌گردد و تغییر مکان‌ها صفر می‌شود لذا در این ناحیه کل انرژی جذب شده با باربرداری صفر می‌شود.

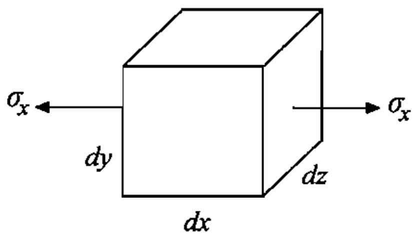




حال با این مقدمه حالات مختلف انرژی‌های کرنشی داخلی را بررسی می‌کنیم.

انرژی کرنشی داخلی برای تنش تک محوره و محاسبه تغییر شکل با استفاده از روش‌های انرژی (روش کار حقیقی)

المان کوچکی با ابعاد dz, dy, dx را در نظر بگیرید. فرض کنید این المان در راستای x تحت تنش نرمالی برابر σ_x قرار گرفته باشد. مساحت مقطعی که این تنش روی آن اعمال می‌شود برابر $dy.dz$ می‌باشد. پس نیروی وارد بر مقطع برابر است با:



نیرو $\leftarrow F = \overset{\text{تنش}\uparrow}{\sigma_x} \, . \underbrace{dy.dz}_{\text{مساحت مقطع}}$

حال فرض کنید در اثر اعمال این تنش، المان موردنظر در جهت x دچار کرنشی برابر ε_x شود. پس المان دارای تغییر مکانی در جهت xها خواهد بود که مقدار آن برابر است با:

$\Delta = \varepsilon_x . dx =$ (کرنش) (طول المان)

اگر مصالح این المان در ناحیه خطی باشند در این صورت تنش به صورت خطی متناسب با کرنش است پس می‌توان گفت در ابتدای بارگذاری تنش صفر بوده و در انتهای تنش اعمال شده σ_x می‌باشد پس مقدار متوسط تنش را می‌توان به صورت $\frac{1}{2}\sigma_x$ در نظر گرفت بنابراین نیروی متوسط وارد شده بر المان در طی زمانی که المان تغییر شکل می‌دهد برابر است با:

$$\overline{F} = \frac{1}{2}\sigma_x \, dy\, dz$$

با ضرب این نیروی متوسط در جابجایی انجام شده، کار انجام شده روی المان به دست می‌آید که این کار به صورت انرژی کرنشی داخلی قابل بازگشت (به دلیل الاستیک بودن مصالح) در المان ذخیره می‌شود. پس در این حالت بارگذاری، انرژی کرنشی داخلی برابر است با:

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_x\, dy\, dz}_{\text{نیروی متوسط}} \cdot \underbrace{\varepsilon_x\, dx}_{\text{تغییر مکان}} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dx\, dy\, dz$$ ← کار یا انرژی کرنشی داخلی

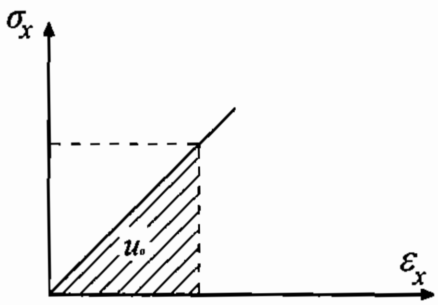
از طرفی dxdydz حجم المان است پس:

$$du = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dv$$

اگر بخواهیم انرژی کرنشی ذخیره شده در واحد حجم یا همان چگالی انرژی کرنشی را بیابیم باید انرژی داخلی را بر حجم (dv) تقسیم کنیم پس:

$$U_0 = \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$$

اگر یک بار دیگر به نمودار تنش ـ کرنش در ناحیه خطی دقت کنیم می‌توان دریافت که U_0 همان سطح زیرمنحنی تنش ـ کرنش در ناحیه خطی یا همان انرژی جذب شده می‌باشد. به سطح محصور بین منحنی تنش ـ کرنش و محور σ_x نیز انرژی مکمل گویند.



توجه : در ناحیه خطی قانون هوک $(\sigma_x = E\varepsilon_x)$ برقرار است لذا رابطه چگالی انرژی را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز بیان کرد.

$$U_0 = \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

توجه : برای یافتن انرژی داخلی کل جذب شده باید حاصل جمع انرژی‌های جذب شده در المان‌ها را در واحد حجم به دست آوریم پس:

$$U = \int_{vol} U_0\, dv = \int_{vol} \frac{\sigma_x^2}{2E} dv$$

ملاحظه می‌شود در رابطه فوق انرژی داخلی فقط به تنش اعمال شده وابسته است و می‌تواند کاربردهای مناسبی داشته باشد.
برای محاسبه تغییر مکان یک عضو تحت بارگذاری‌های متفاوت، ابتدا با استفاده از روش‌های مشابه به روش فوق انرژی داخلی عضو را می‌یابیم. سپس این انرژی را با کار خارجی انجام شده توسط بار وارده مساوی قرار می‌دهیم. مطابق آن‌چه در بالا گفته شد اگر بار محوری P به سازه اعمال شده و تغییر مکان Δ در سازه ایجاد شده باشد، چون بارگذاری به طور تدریجی انجام شده است لذا کار خارجی متوسط هم برابر خواهد بود با:

$$W_e = \frac{1}{2}P \times \Delta$$

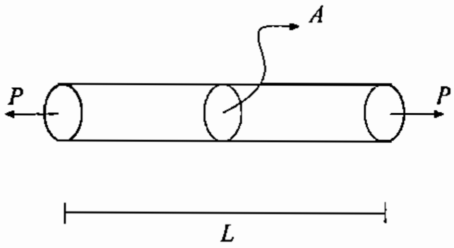
حال با مساوی قرار دادن انرژی کرنشی داخلی و کار خارجی میزان تغییر مکان عضو در امتداد بار وارده به دست می‌آید:

$$W_e = U \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}P\Delta = U \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{2U}{P}$$

مثال : میله‌ای با سطح مقطع A و طول L مفروض است. اگر این میله تحت تأثیر بار محور P قرار بگیرد:

اولاً: انرژی کرنشی الاستیک میله را بیابید.

ثانیاً: تغییر مکان انتهای عضو تحت بار موردنظر چقدر است.



داریم:

$$U = \int_v \frac{\sigma^2}{2E} dv$$

در این حالت بارگذاری $\sigma = \frac{P}{A}$ می‌باشد پس، (دقت داریم در تمام طول میله P، E و A ثابتند)

$$U = \int_v \frac{P^2}{2EA^2} dv = \frac{P^2}{2EA^2} \int_v dv$$

از طرفی $\int_v dv$ همان حجم میله است که برابر AL می‌باشد پس میزان انرژی جذب شده توسط میله یا همان انرژی کرنشی الاستیک برابر است با:

$$U = \frac{P^2}{2EA^2} \times AL \Rightarrow U = \frac{P^2 L}{2EA}$$

فرض کنید انتهای میله تحت اثر بار P تغییر مکانی برابر Δ داشته باشد پس کار خارجی انجام شده توسط P برابر است با:

$$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$$

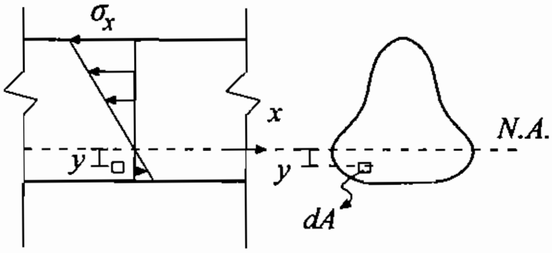
با مساوی قرار دادن کار خارجی و انرژی کرنشی داخلی به دست می‌آید:

$$W_e = u \Rightarrow \frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 L}{2EA} \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$

انرژی کرنشی داخلی برای خمش خالص و محاسبه تغییر شکل با استفاده از روش‌های انرژی (روش کار حقیقی)

دیدیم که اگر جسمی تحت تنش σ_x قرار گیرد میزان انرژی داخلی از رابطه $U = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} dv$ به دست می‌آید. برای تیرهای تحت خمش خالص نیز می‌توان از این رابطه برای محاسبه انرژی کرنشی داخلی استفاده کرد. حال یک تیر تحت خمش خالص را در نظر بگیرید.

المانی به طول dx و مساحت مقطع dA که به فاصله y از سطح خنثی قرار دارد را در نظر بگیرید. می‌دانیم که در این حالت بارگذاری، تنش در ارتفاع تیر به طور خطی تغییر می‌کند یعنی $\sigma_x = \frac{-My}{I}$ است. حجم این المان نیز برابر dAdx می‌باشد پس می‌توان نوشت:



$$U=\int_v \frac{\sigma_x^2}{2E}dv=\int_v \frac{1}{2E}\left(\frac{-My}{I}\right)^2 dx\,dA=\int_v \frac{M^2y^2}{2EI^2}dx\,dA$$

می‌دانیم در طول جسم مذکور M می‌توان با x تغییر کند پس M وابسته به x است لذا می‌توان انتگرال را به صورت زیر خلاصه کرد:

$$U=\underbrace{\int_L \frac{M^2(x)}{2EI^2}dx}_{\text{طول جسم}}\cdot\underbrace{\int_A y^2dA}_{\text{سطح جسم}}$$

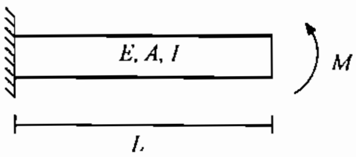
چون $\int_A y^2dA$ ممان اینرسی مقطع است لذا:

$$U=\int_L \frac{M^2(x)}{2EI}dx$$

مثال ، تیر طره‌ای تحت خمش خالص برابر M به صورت زیر قرار گرفته است.

اولاً: انرژی داخلی ذخیره شده را برای این تیر بیابید.

ثانیاً: θ ایجاد شده توسط این بارگذاری چقدر است.



اولاً: طبق رابطه به دست آمده برای اعضای تحت خمش خالص می‌نویسیم:

$$U=\int_L \frac{M^2(x)}{2EI}dx$$

ولی مقدار M، E و I در طول تیر ثابتند. پس:

$$U=\frac{M^2}{2EI}\int_0^L dx=\frac{M^2L}{2EI}$$

ثانیاً: کار خارجی ناشی از لنگر خمشی M به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W_e=\frac{1}{2}M\theta$$

با مساوی قرار دادن کار خارجی تحت بار موردنظر و انرژی کرنشی داخلی θ به دست می‌آید:

$$W_e=U\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}M\theta=\frac{M^2L}{2EI}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{ML}{EI}$$

انرژی کرنشی داخلی برای تنش‌های برشی و محاسبه تغییر شکل با روش‌های انرژی (کار حقیقی)

المانی را که تحت تنش برشی خالص قرار گرفته است در نظر بگیرید:

نیروی وارد بر سطح فوقانی المان برابر است با:

$$F = \tau\, dx\, dz$$

که با توجه به ارتجاعی فرض کردن مصالح مقدار متوسط این نیرو برابر است با:

$$\bar{F} = \frac{1}{2}\tau\, dx\, dz$$

با توجه به کرنش برشی γ ایجاد شده تغییر مکان در جهت این نیرو برابر با $\Delta = \gamma dy$ است پس:

$$du = \frac{1}{2}\tau\, dx\, dz \times \gamma dy = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz$$

که $dx\,dy\,dz$ حجم المان است پس:

$$du = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dv$$ انرژی کرنشی ناشی از برش

با تقسیم طرفین بر dv چگالی انرژی کرنشی برای برش به دست می‌آید پس:

$$u_0 = \frac{du}{dv} = \frac{\tau\gamma}{2}$$ برش

و طبق قانون هوک برای تنش‌های برشی $(\tau = G\gamma)$ می‌توان نوشت:

$$u_0 = \frac{\tau^2}{2G} \quad \Rightarrow \quad U = \int_{vol} \frac{\tau^2}{2G} dv$$ برش

A) انرژی کرنشی داخلی برای نیروی برشی:

در تیر ساده‌ای که تحت برش $v(x)$ قرار گرفته است. با محاسبه انتگرال فوق رابطه زیر برای انرژی داخلی به دست می‌آید:

$$U = \int_0^L \frac{v^2(x)}{2GA_s} dx$$

که در آن:

$v(x)$: نیروی برشی مقطع

G: مدول الاستیسیته برشی

A_s: سطح مقطع برش می‌باشد.

نکته : برای یافتن سطح مقطع برش از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$A_s = \frac{A}{k}$$

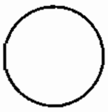
که در آن:

A: مساحت خالص مقطع

k: ضریب شکل است که برای مستطیل $k = \frac{6}{5}$ و برای دایره $k = \frac{10}{9}$ می‌باشد.

مستطیل 

$$k = \frac{6}{5} \Rightarrow A_s = \frac{A}{\frac{6}{5}} \Rightarrow A_s = \frac{5}{6}A \quad \text{مستطیل}$$

دایره 

$$k = \frac{10}{9} \Rightarrow A_s = \frac{A}{\frac{10}{9}} \Rightarrow A_s = \frac{9}{10}A \quad \text{دایره}$$

در مقاطع I شکل، ضریب شکل (k) برابر 1 است.

B) انرژی کرنشی برای لنگر پیچشی:

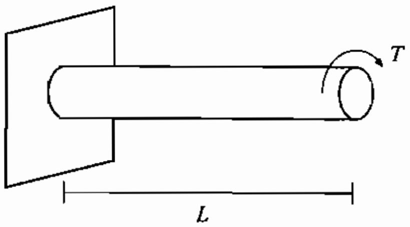
در میله‌ای به مقطع دایره که تحت لنگر پیچشی $T(x)$ قرار گرفته است انرژی داخلی برابر است با:

$$U = \int_0^L \frac{T^2(x)dx}{2GJ}$$

مثال : میله استوانه‌ای یک سرگیردار به طول L و شعاع C تحت لنگر پیچشی برابر در T در انتها قرار گرفته است.

اولاً: انرژی کرنشی داخلی میله چقدر است؟

ثانیاً: زاویه پیچش انتهای آزاد میله چقدر است؟



اولاً:

$$U = \int_0^L \frac{T^2(x)dx}{2GJ}$$

چون مقدار T، G و y در طول میله یکسان است لذا:

$$U = \frac{T^2}{2GJ} \times L \Rightarrow U = \frac{T^2L}{2GJ}$$

ثانیاً کار خارجی این میله برابر است با:

$$W_e = \frac{1}{2}T\phi$$

با برابر قرار دادن انرژی داخلی و کار خارجی داریم:

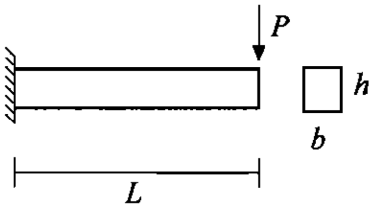
$$W_e = U \Rightarrow \frac{1}{2}T\phi = \frac{T^2L}{2GJ} \Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ}$$

ـ انرژی کمیتی همواره مثبت است.

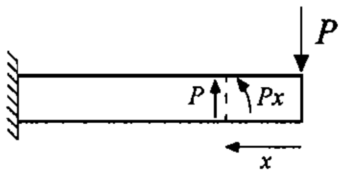
توجه: انرژی کمیتی اسکالر است پس می‌توان هم انرژی‌ها را با هم جمع کرده و انرژی کل را به دست آورد یعنی:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

مثال : تیر یک سرگیرداری در انتها تحت بار قائمی برابر P قرار گرفته است. (مطابق شکل) تغییر مکان قائم انتهای آزاد تیر را به دست آورید.



تغییر مکان انتهای این تیر ناشی از دو عامل برش و خمش است پس در محاسبه انرژی داخلی تیر، هر دو عامل را در نظر می‌گیریم.
اگر x فاصله مقطع دلخواه از انتهای آزاد تیر باشد در این‌صورت نیروی برشی و لنگر خمشی در این مقطع برابر است با:



$$\begin{cases} v(x) = p = cte \\ M(x) = px \end{cases}$$

حال انتگرال‌های مربوط به محاسبه انرژی داخلی را می‌نویسیم:

انرژی ذخیره شده ناشی از خمش $U_1 = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}dx = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI} = \frac{P^2}{2EI} \times \frac{L^3}{3} = \frac{P^2L^3}{6EI}$

انرژی ذخیره شده ناشی از برش $U_2 = \int_0^L \frac{v^2(x)}{2GA_s}dx = \int_0^L \frac{P^2}{2G \times \frac{5}{6}A}dx = \frac{6P^2L}{10GA}$

پس:

انرژی کل $U = U_1 + U_2 = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{6P^2L}{10GA}$

چون کار خارجی برابر $\frac{1}{2}P\Delta$ می‌باشد لذا:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{6P^2L}{10GA} \Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA}$$

در این رابطه $\frac{PL^3}{3EI}$ تغییر شکل ناشی از خمش و $\frac{6PL}{5GA}$ تغییر شکل ناشی از برش، در انتهای آزاد تیر است.

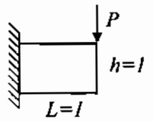
بحث اضافی: اگر مقطع این تیر مستطیل با ابعاد h و b باشد (مطابق شکل) در این‌صورت $I = \frac{bh^3}{12}$ و $A = bh$ است که با جایگذاری این مقادیر در رابطه به دست آمده برای Δ خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)$$

در تیرهای معمولی معمولاً نسبت $\frac{h}{L}$ بین $\frac{1}{10}$ تا $\frac{1}{25}$ است لذا در این تیرها برای حالت $\frac{h}{L}=10$ به دست می‌آید:

$$\frac{h}{L}=10 \;\Rightarrow\; \Delta=\frac{PL^3}{3EI}(1+0.0075)=1.0075\,\frac{PL^3}{3EI}$$

و این بدان مفهوم است که در چنین تیرهایی، اثر برش در تغییر شکل قائم انتهای تیر بسیار ناچیز و قابل صرفنظر کردن است. (در واقع می‌توان از 0.0075 (اثربرش) در مقابل 1 (اثر خمش) صرفنظر کرد.) ولی در تیرهای کوتاه، (مثلا $\frac{h}{L}=1.0$) از اثر نمی‌توان صرفنظر کرد چرا که:

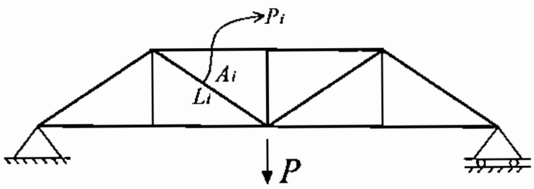


$$\frac{h}{L}=1.0 \;\Rightarrow\; \Delta=\frac{PL^3}{3EI}(1+0.75) \;\Rightarrow\; \Delta=1.75\,\frac{PL^3}{3EI}$$

انرژی ذخیره شده و محاسبه تغییر شکل یک خرپا تحت اثر نیروی P در امتداد نیروی مورد نظر با استفاده از روش کار حقیقی:

در بخش انرژی کرنشی الاستیک برای تنش تک محوره دیدیم که انرژی کرنشی داخلی میله‌ای به طول L و سطح مقطع A که تحت بار محوری P قرار گرفته است برابر $U=\frac{P^2L}{2EA}$ می‌باشد پس اگر بخواهیم انرژی داخلی (ذخیره شده) در یک خرپا را بیابیم (که تمام اعضای آن تحت نیروی محوری هستند) کافی است انرژی داخلی را برای تک اعضا به‌دست آورده و آن‌ها را با هم جمع کنیم.

به‌طور مثال در خرپای نشان داده شده در شکل که تحت بار P قرار گرفته است ابتدا نیروی تمامی اعضا را تحت اثر این بار (P_i) را به‌دست آورده و سپس با استفاده از رابطه زیر انرژی ذخیره کل خرپا را می‌یابیم:



$$U_{\text{کل خرپا}}=\sum_{i=1}^{M}\frac{P_i^2L_i}{2EA_i}$$

حال برای یافتن تغییر مکان نقطه اثر بار P در امتداد آن، کار خارجی را می‌یابیم:

$$w_e=\frac{1}{2}P.\Delta$$

در نهایت با مساوی قرار دادن U و W_e مقدار تغییر مکان خرپا در امتداد بار به‌دست می‌آید:

$$w_e=u \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}P\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{P_i^2L_i}{2EA_i} \;\Rightarrow\; \Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{P_i}{P}\cdot\frac{P_iL_i}{EA_i}$$

می‌دانیم که $\frac{P_iL_i}{EA_i}$ تغییر طول میله iام خرپا (δ_i) می‌باشد لذا داریم:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{P_i}{P}\delta_i$$

ب) روش کاستیگلیانو:

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، چون تنش‌ها به نیروهای مؤثر بر سازه وابسته‌اند لذا انرژی کرنش داخلی را می‌توان تابعی از نیروهای خارجی در نظر گرفت یعنی اگر نیروهای $P_1, P_2, ..., P_n$ و گشتاورهای $M_1, M_2, ..., M_n$ بر سازه وارد شوند تابع انرژی داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = f\left(P_1, P_2, ..., P_n, M_1, M_2, ..., M_n\right)$$

اگر بخواهیم مقدار افزایش جزئی انرژی داخلی را در اثر افزایش جزئی نیروهای موجود (P ها و Mها) به دست آوریم با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P_1}\delta P_1 + \frac{\partial U}{\partial P_2}\delta P_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial P_n}\delta P_n + \frac{\partial U}{\partial M_1}\delta M_1 + \frac{\partial U}{\partial M_2}\delta M_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial M_n}\delta M_n$$

حال اگر به طور مثال فقط نیروی P_i تغییر کند چون بقیه تغییرات صفر است در این صورت خواهیم داشت:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P_i} \cdot \delta P_i$$

پس انرژی کرنشی داخلی کل (پس از افزایش جزئی انرژی) به صورت زیر خواهد بود:

$$U' = U + \delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_i}\delta P_i$$

حال همان جسم را در نظر بگیرید که هیچ نیرویی بر آن وارد نشود. اگر نیروی δP_i را به آن تأثیر دهیم نقطه اعمال بار به اندازه $\delta\Delta_i$ تغییر مکان می‌دهد که کار انجام شده برابر است با:

$$w_1 = \frac{1}{2}\left(\delta P_i\right)\left(\delta\Delta_i\right)$$

این کار بسیار ناچیز است چرا که از حاصلضرب دو جزء بسیار کوچک تشکیل شده است پس قابل صرفنظر کردن است.

حال فرض کنید در حالی که نیروی δP_i بر جسم اثر می‌کند، نیروهای $P_1, P_2, ..., P_n$, $M_1, M_2, ..., M_n$ بر سازه اعمال شوند. در این صورت اگر نقطه اثر مکانی که بار δP_i بر آن وارد شده به اندازه Δ_i در امتداد نیرو تغییر مکان می‌دهد پس در این صورت کار انجام شده برابر است با:

$$w_2 = \left(\delta P_i\right)\Delta_i$$

دلیل آن که ضریب $\frac{1}{2}$ اعمال نشده است آن است که در حضور بار δP_i نقطه اثر تغییر مکان داده است. (در حالات دیگر در اثر اعمال بار δP_i تغییر مکان داشتیم.) یعنی ابتدا بار δP_i سبب تغییر مکان در نقطه‌ای شده و سپس در اثر اعمال نیروهای دیگر این نقطه باز هم دچار تغییر مکان شده است.

اگر کار خارجی نیروهای دیگر برابر w_e فرض شود کل کار خارجی انجام شده روی سازه برابر است با:

$$w'_e = w_e + \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{\left(\delta P_i\right)}\left(\delta\Delta_i\right)}_{0} + \left(\delta P_i\right)\Delta_i = w_e + \left(\delta P_i\right)\Delta_i$$

با برابر قرار دادن کار خارجی و انرژی کرنشی داخلی داریم:

$$w'_e = U' \;\Rightarrow\; w_e + \left(\delta P_i\right)\Delta_i = U + \frac{\partial U}{\partial P_i}\delta P_i$$

که نتیجه به دست آمده از رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

حال اگر نیرو δM_i بر سازه اعمال می‌شد نتیجه فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

پس نتیجه مهم زیر حاصل می‌شود.

قضیه: در هر جسم الاستیک خطی که بدون نشست تکیه‌گاهی بوده و در درجه حرارت ثابت قرار دارد، مشتق نسبی انرژی کرنشی داخلی نسبت به نیروی دلخواه P_i برابر است با تغییر مکان سازه در نقطه اعمال نیروی P_i در امتداد نیرو.

در هر جسم الاستیک خطی که بدون نشست تکیه‌گاهی بوده و در درجه حرارت ثابت قرار دارد. مشتق نسبی انرژی کرنشی داخلی نیست به گشتاور دلخواه M_i برابر است با دوران سازه در نقطه اعمال گشتاور M_i و در امتداد گشتاور.

به طور مثال در بخش روش کار حقیقی دیدیم انرژی کرنشی داخلی یک میله با سطح مقطع A و طول L، تحت اثر نیروی محوری P برابر $U = \frac{P^2L}{2EA}$ می‌باشد. با مشتق‌گیری از U نسبت به بار P، میزان تغییر مکان نقطه اعمال بار در امتداد نیرو به دست می‌آید یعنی:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2PL}{2EA} \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$

برای حالات دیگر، درستی قضیه فوق را بررسی کنید.

نکته : دیدیم در خرپایی که از n میله تشکیل شده است میزان کل انرژی کرنشی داخلی خرپا برابر است با مجموع انرژی کرنشی داخلی تک تک میله‌ها پس می‌توان نوشت:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2 L}{2E_i A_i}$$

در این‌صورت طبق قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان نقطهٔ اعمال بار P_k برابر است با:

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L}{E_i A_i} . \frac{\partial P_i}{\partial P_k}$$

محاسبه تغییر شکل تیرها با استفاده از روش کاستیگلیانو:

در سازه تحت خمش داریم:

$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_i} dx$ تغییر مکان نقطه i در اثر اعمال نیروی P_i

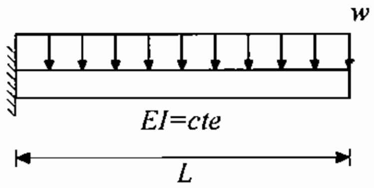
$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_i} .dx$ دوران نقطه i در اثر اعمال گشتاور M_i

در سازه تحت پیچش داریم:

$\phi_i = \frac{\partial U}{\partial T_i} = \int_0^L \frac{T}{GJ} \frac{\partial T}{\partial T_i} dx$ زاویه دوران نقطه i در اثر اعمال گشتاور پیچشی T_i

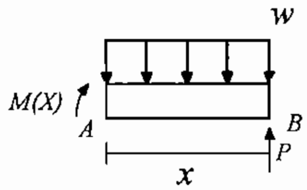
توجه داریم که اگر در سازه‌ای تغییر مکان نقطه‌ای مانند i را بخواهند که هیچ نیرویی به آن اعمال نمی‌شود ابتدا یک نیرو مانند P_i به طور مجازی به آن نقطه اعمال کرده و پس از مشتق‌گیری در محاسبه انتگرال‌های فوق مقدار نیروی مجازی مذکور را صفر قرار می‌دهیم.

مثال : در تیر مقابل مکان انتهای تیر طره تحت بار گسترده یکنواخت ω را بیابید.



قسمتی از تیر مانند قطعه AB به طول x را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم با استفاده از قضیه کاستیگلیانو تغییر مکان نقطه B در اثر بارگذاری نشان داده شده را بیابیم باید یک بار P به صورت مجازی به نقطه B اعمال کنیم. در این‌صورت گشتاور در نقطه A به فاصله x از انتهای تیر برابر است با:

$$M(x)=\frac{-wx^2}{2}+Px$$



حال انتگرال‌های کاستیگلیانو را برای طول L از تیر در نظر می‌گیریم یعنی:

$$\Delta=\int_0^L\frac{M(x)}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial P}dx=\int_0^L\frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^2}{2}+Px\right).(x)dx$$

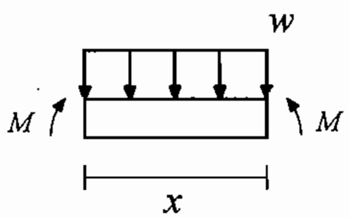
با توجه به مجازی بودن P، در رابطه فوق آن را صفر در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$\Delta=\int_0^L\frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^3}{2}\right)dx=\frac{-w}{2EI}\int_0^L x^3\,dx\quad\Rightarrow\quad\Delta=\frac{-wL^4}{8EI}$$

علامت منفی بدین معنی است که جهت تغییر مکان انتهای تیر، خلاف جهت نیروی P مجازی نشان داده شده است. (به سمت پایین است.)

مثال : در تیر مسأله قبل دوران انتهای تیر را به دست آورید.

باز هم قطعه‌ای به طول x در نظر گرفته و در انتهای آن گشتاور مجازی M اعمال می‌کنیم. در این صورت:



$$M(x)=\frac{-wx^2}{2}+M$$

پس:

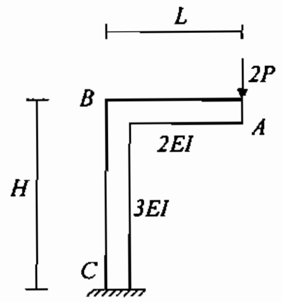
$$\theta = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx = \int_0^L \frac{1}{EI}\left(\frac{-wx^2}{2} + M\right) \cdot (1) dx$$

چون M مجازی است پس صفر در نظر می‌گیریم. لذا:

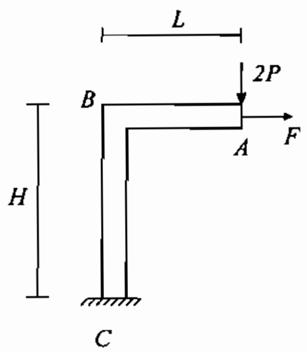
$$\theta = \int_0^L \frac{-wx^2}{2EI} dx = \frac{-w}{2EI}\int_0^L x^2 dx \Rightarrow \theta = \frac{-wL^3}{6EI}$$

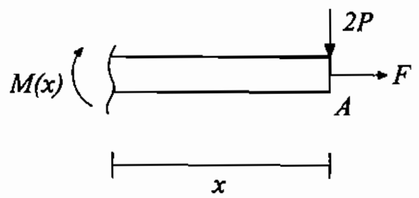
به علامت منفی به دست آمده توجه کنید.

مثال : در سازه مقابل تغییر مکان افقی نقطه A را بیابید.

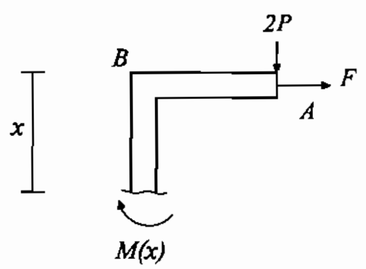


چون به نقطه A در جهت افقی نیرویی وارد نمی‌شود لذا یک نیروی مجازی افقی مانند F به آن اعمال می‌کنیم. حال در هر کدام از قطعات AB و BC میزان گشتاور را برحسب x می‌نویسیم:





$$\Rightarrow M(x)_{AB} = -2Px$$



$$\Rightarrow M(x)_{BC} = -2PL - Fx$$

حال می‌توان نوشت:

$$\Delta_{HA} = \int_0^L \frac{M(x)_{AB}}{(EI)_{AB}} \cdot \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx + \int_0^H \frac{M(x)_{BC}}{(EI)_{BC}} \cdot \frac{\partial M_{BC}}{\partial F} dx$$

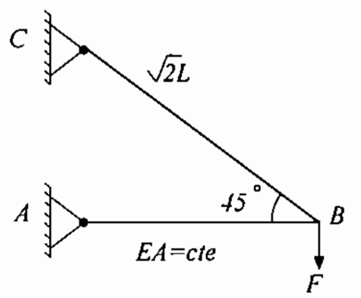
$$= \int_0^L \cancel{\frac{M(x)_{AB}}{(EI)_{AB}}} \times 0 \, dx + \int_0^H \left(\frac{-2PL - Fx}{(EI)_{BC}}\right)(-x) dx$$

که با توجه به مجازی بودن F خواهیم داشت:

$$\Delta_{HA} = \frac{2PL}{3EI}\int_0^H x\,dx = \frac{PLH^2}{3EI}$$

مثال : در خرپای مقابل مقدار حرکت قائم نقطه B چقدر است؟

با استفاده از روش گره خرپای مقابل را تحلیل می‌کنیم. با توجه به نکات خرپا خواهیم داشت:



$$P_{AB} = -F \;,\; P_{BC} = F\sqrt{2}$$

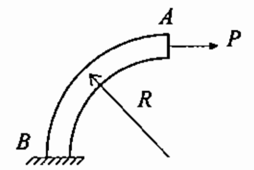
حال طبق روش کاستیگلیانو خواهیم داشت:

$$\Delta_B = \sum \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial F} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{EA} \cdot \frac{\partial P_{AB}}{\partial F} + \frac{P_{BC} L_{BC}}{EA} \cdot \frac{\partial P_{BC}}{\partial F}$$

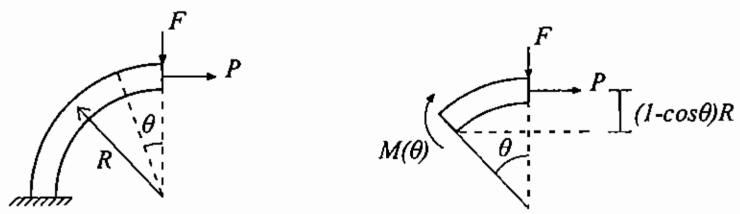
$$= \frac{-F(L)}{EA} \times (-1) + \frac{F\sqrt{2} \times \sqrt{2}L}{EA} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{FL}{EA} + 2\sqrt{2}\frac{FL}{EA} = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)\frac{FL}{EA}$$

مثال : اگر سختی خمشی تیر مقابل ثابت و برابر EI باشد تغییر مکان قائم انتهای آزاد تیر چقدر است؟



چون تغییر مکان قائم تیر مدنظر است یک بار مجازی مانند F در انتهای آزاد آن در نظر می‌گیریم. حال در زاویه θ با جدا کردن قطعه میزان گشتاور داخلی به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$M(\theta) = -FR\sin\theta - PR(1 - \cos\theta)$$

حال می‌توان نوشت:

$$\Delta_{VA}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M(\theta)}{EI}.\frac{\partial M(\theta)}{\partial F}.\,dx$$

چون dx المان طول است لذا می‌توان آن را به صورت $dx=Rd\theta$ در نظر گرفت. پس:

$$\Delta_{VA}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{EI}\big(-FR\sin\theta-PR(1-\cos\theta)\big)(-R\sin\theta)(R\,d\theta)$$

با توجه به مجازی بودن F، آن را صفر در نظر می‌گیریم پس:

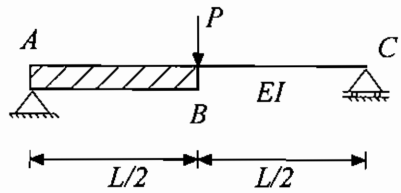
$$\Delta_{VA}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{EI}\Big(PR^3\sin\theta(1-\cos\theta)\Big)d\theta$$

$$=\frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(I-\cos\theta)\,d\theta$$

با تغییر متغیر $\cos\theta=t$ خواهیم داشت:

$$\Delta_{VA}=\frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{+PR^3}{2EI}$$

مثال : در تیر مقابل تغییر مکان نقطه B چقدر است؟



$$\sum M_A=0\;\Rightarrow\;P\frac{L}{2}=R_c\times L\;\Rightarrow R_c=\frac{P}{2}$$

$$\sum F_y=0\;\Rightarrow\;R_A=\frac{P}{2}$$

در قطعه BC میزان گشتاور داخلی برابر است با:

$$M(x)=\frac{P}{2}x\;\Rightarrow\;\frac{\partial M}{\partial P}=\frac{x}{2}$$

دقت داریم چون قطعه AB صلب است لذا سختی خمشی آن به بی‌نهایت می‌گراید $(EI\to\infty)$ پس در نوشتن انتگرال کاستیگلیانو، تابع تحت انتگرال صفر شده و در تغییر شکل تأثیری ندارد پس:

$$\Delta_c=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{M_{BC}}{(EI)_{BC}}.\frac{\partial M_{BC}}{\partial P}dx+\cancel{\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{M_{AB}}{(EI)_{AB}}.\frac{\partial M_{AB}}{\partial P}dx}^{\,0}$$

$$=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{Px}{2EI}.\frac{x}{2}\,dx=\frac{P}{4EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}}=\frac{PL^3}{96EI}$$

ج) روش کار مجازی:

در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش‌های کار حقیقی و کاستیگلیانو محدودیت‌هایی وجود داشت بدین صورت که در روش کار حقیقی، فقط تغییر شکل ناشی از یک نیرو مورد بحث بود و در روش کاستیگلیانو (که محدودیت روش کار حقیقی در آن رفع شده است) شرط ثابت بودن درجه حرارت و عدم نشست تکیه‌گاه‌ها وجود داشت. در روش کار مجازی تمام محدودیت‌های فوق از بین رفته است، لذا این روش، کامل‌ترین روش انرژی در محاسبه تغییر شکل سازه‌ها می‌باشد.

سازه‌ای را در نظر بگیرید که هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نشده است. در اثر اعمال یک نیروی مجازی مانند $\overline{F}$ در یک امتداد مشخص، واکنش‌های تکیه‌گاهی مجازی و نیروهای مجازی داخلی در جسم ایجاد می‌شود که معمولاً عکس‌العمل‌های مجازی با $\overline{R}$ و نیروهای داخلی با $\overline{f}$ نمایش داده می‌شود.

حال اگر به این جسم نیروهای واقعی یا تغییر شکل معینی را اعمال کنیم در سازه تغییرشکل‌های واقعی به وجود می‌آید که معمولاً با δ نمایش داده می‌شوند. این تغییر شکل واقعی به علت وجود نیروهای مجازی کار انجام می‌دهد. همواره کار خارجی انجام شده در اثر یک نیروی مجازی خارجی مانند $\overline{F}$ در اثر تغییر مکان حقیقی مانند Δ برابر است با کار داخلی انجام شده توسط نیروهای مجازی داخلی مانند $\overline{f}$ در اثر تغییر مکان حقیقی مانند δ. اگر واکنش‌های تکیه‌گاهی نیز $\overline{R}_a$ و $\overline{R}_b$ باشد در اثر این واکنش‌های مجازی نیز کاری خارجی انجام می‌شود که W_R نامیده می‌شود پس می‌توان گفت:

$$W_R + \overline{F}.\Delta = \sum \overline{f}_0.\delta$$

که در رابطه فوق:

$\overline{F}$: نیروی خارجی مجازی

$\overline{f}$: نیروی داخلی مجازی

Δ: تغییر شکل خارجی حقیقی

δ: تغییر شکل داخلی حقیقی و W_R کار واکنش‌های تکیه‌گاهی مجازی در اثر نشست تکیه‌گاهی می‌باشد.

دقت داریم که چون در هنگام اعمال جابجایی‌های واقعی، نیروهای مجازی به حداکثر مقدار خود رسیده‌اند لذا در محاسبه مقدار کار، ضریب $\frac{1}{2}$ لازم نیست.

در روش کار مجازی برای ساده‌تر کردن مسأله، نیروی خارجی مجازی را معمولاً واحد فرض می‌کنند پس رابطه کار مجازی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\omega_R + \overline{1}.\Delta = \sum \overline{f}.\delta$$

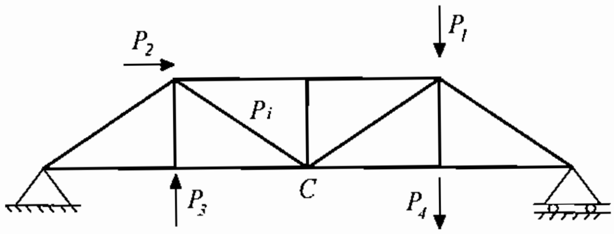
برای ساده‌تر کردن مسائل روش کار مجازی از تقسیم‌بندی زیر استفاده می‌کنیم.

محاسبه تغییر شکل خرپا با استفاده از روش کار مجازی (بار واحد مجازی):

۱- خرپا تحت تأثیر بارگذاری تنها:

برای محاسبه تغییر شکل خرپا تحت اثر بارگذاری تنها، یک بار واحد مجازی در جایی که مقدار تغییر شکل آن مورد نظر است و در امتداد تغییر مکان دلخواه قرار می‌دهیم که این بار واحد، سبب ایجاد نیروهای داخلی می‌شود.

به طور مثال فرض می‌کنید مقدار تغییر مکان قائم نقطه C در خرپای زیر مورد نظر است.



بدین منظور یک بار مجازی واحد و قائم در نقطه C اعمال می‌کنیم و خرپا را تحت این نیرو نیز تحلیل می‌کنیم. در اثر این بار واحد نیروهای داخلی مجازی $\overline{P}_i$ ایجاد می‌شود. سپس نیروهای داخلی خرپا در اثر بارگذاری واقعی را نیز به‌دست می‌آوریم. که با P_i نشان داده شده است. چون تغییر مکان داخلی حقیقی در اثر این نیروهای داخلی حقیقی برابر $\Delta_L = \frac{PL}{EA}$ می‌باشد لذا برای یافتن تغییر مکان نقطه اعمال بار واحد خواهیم داشت:

$$\overline{1}.\Delta + \cancel{W}_{\overline{R}}^{\,0} = \Sigma\, \overline{f}_i.\delta_i \quad \Rightarrow \quad \overline{1}.\Delta = \sum_{i=1}^{M} \overline{P}_i \; \frac{P_i L_i}{EA_i}$$

که در آن: $\overline{P}_i$ نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت بار واحد مجازی

P_i نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت بارگذاری حقیقی

L_i طول عضو i

A_i سطح مقطع عضو i

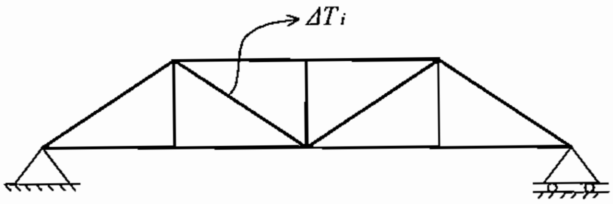
توجه داشته باشید که در دوصورت زیر اعضا در تغییر شکل خرپا تأثیر ندارد و از محاسبات حذف می‌شوند:

۱- P_i صفر باشد.

۲- $\overline{P}_i$ صفر باشد.

۲- خرپا تحت تاثیر حرارت تنها:

در این حالت خرپا هیچگونه بارگذاری ندارد و تغییر شکل اعضا فقط ناشی از تغییر حرارت است. فرض کنید در خرپای زیر هر عضو تحت یک ΔT قرار گرفته باشد.



بدیهی است تغییر شکل هر عضو تحت ΔT_i به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta_i = \alpha L_i \Delta T_i$$

حال اگر به طور مثال تغییر مکان نقطه C خواسته شده باشد در نقطه C بار واحد مجازی اعمال کرده و خرپا را تحلیل می‌کنیم و مجدداً نیروهای داخلی مجازی ($\overline{P}_i$ ها) را می‌یابیم. حال طبق اصل کار مجازی داریم:

$$\overline{1}.\Delta = \sum_{i=1}^{M} \overline{P}_i \left(\alpha L_i \Delta T_i\right)$$

$\overline{P}_i$: نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت بار واحد مجازی

α: ضریب انبساط حرارتی اعضا

L_i: طول عضو i

ΔT_i: تغییر حرارت ایجاد شده در عضو i

در این حالت هم در دو صورت اعضا در تغییر شکل خرپا تاثیر ندارند واز محاسبات حذف می‌شوند:

۱- $\overline{P}_i$ صفر باشد.

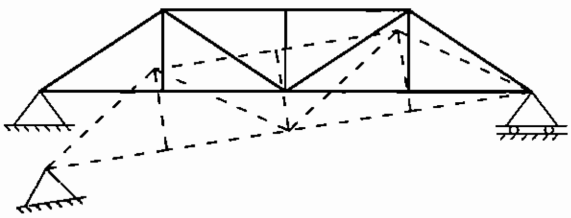
۲- ΔT_i صفر باشد.

توجه: اگر هم بارگذاری و هم تغییر درجه حرارت داشته باشیم از ترکیب دو حالت استفاده کرده و می‌نویسیم:

$$\overline{1}\times\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{P}_i\,\frac{P_i\,L_i}{E_i\,A_i}+\overline{P}_i\,\alpha_i\,L_i\,\Delta T_i\right)$$

۳- خرپا تحت تاثیر نشست تکیه‌گاهی تنها:

فرض کنید خرپای زیر تحت نشست تکیه‌گاهی قرار گرفته باشد.



بدیهی است تحت این نشست نیروهای داخلی خرپا تغییر نمی‌کنند و صفر خواهند بود پس اگر Δ هر نقطه را بخواهیم بار مجازی واحد را در آن نقطه و در امتداد دلخواه قرار داده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ناشی از آن را به‌دست می‌آوریم. حال خواهیم داشت:

$$\overline{1}.\Delta+\overline{w}_R=0$$

$$\Rightarrow\quad \Delta=-\overline{w}_R=-\sum_{i=1}^{M}\overline{R}_i.\Delta_{si}$$

$\overline{R}_i$: عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی خرپا تحت بار واحد مجازی

Δ_{si}: میزان تغییر مکان تکیه‌گاه‌ها در سازه واقعی تحت نشست تکیه‌گاهی

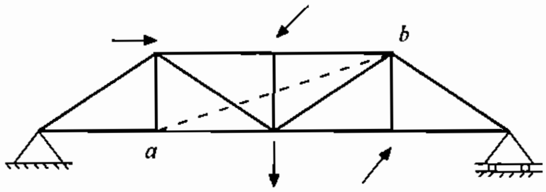
۴- خرپا تحت تاثیر بارگذاری، حرارت و نشست تکیه‌گاهی:

در حالت کلی با توجه به اصل برهم‌نهی در این‌حالت خواهیم داشت:

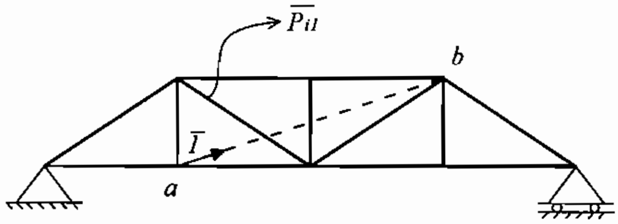
$$\overline{1}.\Delta+\overline{w}_R=\sum\overline{P}_i\left(\frac{P_iL_i}{EA_i}+\alpha L_i\Delta T_i\right)\;\Rightarrow\;\Delta=\sum\overline{P}_i\left(\frac{P_i\,L_i}{EA_i}+\alpha L_i\,\Delta T_i\right)-\sum\overline{R}_i\,\Delta_{Si}$$

۵- محاسبه تغییر مکان‌های نسبی در خرپا:

فرض کنید در خرپای زیر بخواهیم میزان تغییر مکان‌های a,b را نسبت به هم تحت یک بارگذاری خاص بیابیم.



برای محاسبه میزان تغییر مکان نقطه a در امتداد خط ab کافی است بار واحد را به صورت زیر در نقطه a اعمال کنیم:

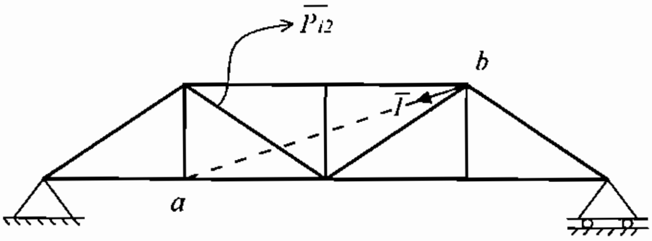


و با توجه به اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\overline{1}.\Delta_a = \sum\left(\overline{P}_{i1}\right)\frac{P_i L_i}{EA_i}$$

که $\overline{P_{i_1}}$: نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت بار واحد مجازی در a است.

برای محاسبه میزان تغییر مکان نقطه b در امتداد ab کافی است بار واحد را به صورت زیر در نقطه b اعمال کنیم:



و با توجه به اصل کار مجازی خواهیم داشت:

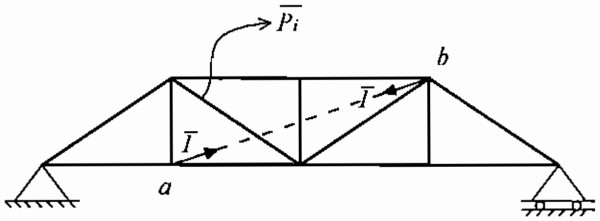
$$\overline{1}.\Delta_b = \sum\left(\overline{P}_{i2}\right)\frac{P_i L_i}{EA_i}$$

که $\overline{P_{i_2}}$، نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت بار واحد مجازی در b است.

برای محاسبه میزان تغییر مکان دو نقطه a و b نسبت به هم خواهیم داشت:

$$\Delta_{ab} = \Delta_a + \Delta_b$$

بنابراین به عنوان نتیجه‌گیری کلی و با استفاده از اصل برهم‌نهی، برای محاسبه تغییر مکان دو نقطه نسبت به هم دوبار واحد مجازی در امتداد هم به دو نقطه اعمال کرده و سپس از اصل کار مجازی استفاده می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:



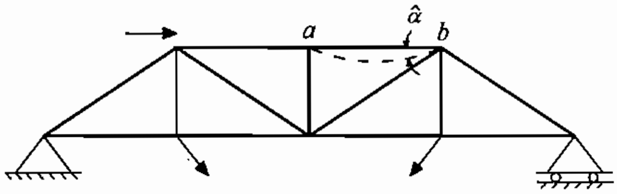
$$\overline{1}.\Delta_{ab}=\sum_{i=1}^{M}\overline{P}_i\,\frac{P_iL_i}{EA_i}$$

که $\overline{P}_i$ ، نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت دو بار واحد مجازی در b و a است.

P_i و L_i و A_i مانند قبل.

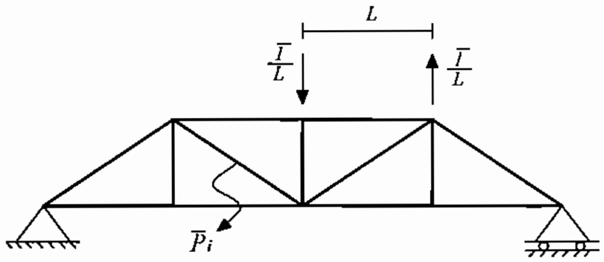
۶- محاسبه دوران یک عضو خرپا:

فرض کنید بخواهیم دوران عضو ab را در خرپای زیر تحت بارگذاری مشخص بیابیم. می‌دانیم که دوران ab برابر است با:



$$\hat{\alpha}_{ab}=\frac{\Delta_a^{\uparrow}+\Delta_b^{\downarrow}}{L}=\frac{\Delta_a^{\uparrow}}{L}+\frac{\Delta_b^{\downarrow}}{L}$$

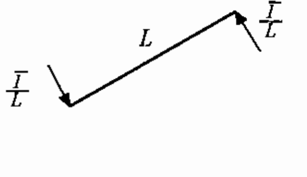
دیدیم که برای محاسبه Δ_a و Δ_b در راستا و جهت مورد نظر کافی است بار واحد مجازی را در آن راستا و جهت قرار داده و از اصل کاری مجازی استفاده کنیم بنابراین برای محاسبه $\frac{\Delta_a^{\uparrow}}{L}$ و $\frac{\Delta_b^{\downarrow}}{L}$ کافی است بار $\frac{\overline{1}}{L}$ را در جهت خواسته شده اعمال کنیم بنابراین خواهیم داشت:



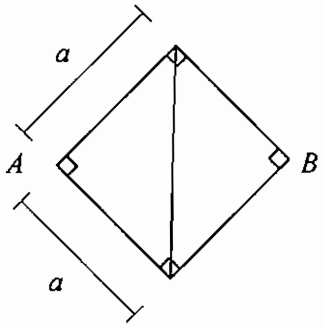
$$\overline{1}.\hat{\alpha}_{ab}=\sum\overline{P}_i\,\frac{P_iL_i}{EA_i}$$

$\overline{P}_i$: نیروی داخلی در عضو i از خرپای تحت جفت بار مجازی $\frac{1}{L}$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که در واقع یک کوپل واحد بر عضو وارد کرده‌ایم. پس برای اعضای مورب نیز یک جفت نیروی $\frac{\overline{1}}{L}$ عمود بر عضو در دو انتها قرار می‌دهیم.

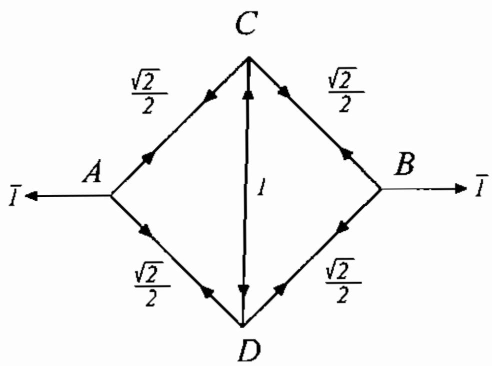


مثال : **در سازه زیر مطلوبست محاسبه میزان تغییر مکان نسبی دو نقطه A و B وقتی تغییر دمای میله‌ها به اندازه ΔT باشد.**



برای محاسبه تغییر مکان نسبی A و B، دو بار واحد مجازی در این نقاط اعمال می‌کنیم و سازه را تحلیل می‌کنیم پس خواهیم داشت:

عضو	$\bar{P}_i$	δ_i
AC	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ کششی	$\alpha a\Delta T$
AD	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ کششی	$\alpha a\Delta T$
BC	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ کششی	$\alpha a\Delta T$
BD	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ کششی	$\alpha a\Delta T$
CD	فشاری 1	$\alpha\sqrt{2}a\Delta T$

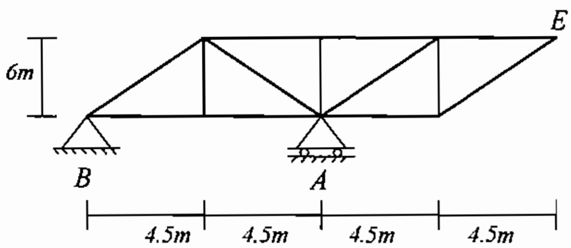


بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{1}.\overset{\rightarrow\leftarrow}{\Delta}_{ab} = \sum_{i=1}^{5}\bar{P}_i\delta_i = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha a\Delta T\right) + \left[-1\left(\alpha\sqrt{2}a\Delta T\right)\right]$$

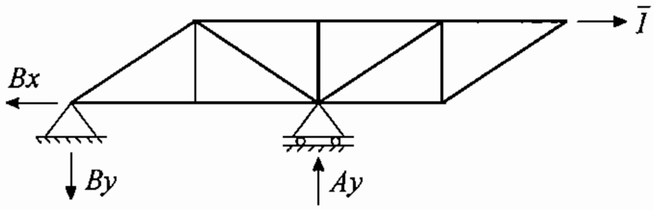
$$\Rightarrow \overset{\rightarrow\leftarrow}{\Delta}_{ab} = \alpha\sqrt{2}\ a\Delta T$$

مثال : **در خرپای زیر تکیه‌گاه A به اندازه 1 cm به سمت پائین و تکیه‌گاه B به اندازه 2 cm به سمت پائین و 1.5 cm به سمت چپ تغییر مکان داشته است. مطلوبست محاسبه تغییر مکان افقی E.**



برای محاسبه تغییر مکان افقی E، بار واحد مجازی را در E در جهت افقی وارد مـی‌کنـیم و عکـس‌العمـل‌هـای تکیـه‌گـاهی را بدسـت می‌آوریم:

$$\Sigma\bar{M}_B = 0 \Rightarrow A_y = \frac{2}{3}\uparrow$$
$$\Sigma\bar{F}_x = 0 \Rightarrow B_x = 1 \leftarrow$$
$$\Sigma\bar{F}_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{2}{3}\downarrow$$



پس خواهیم داشت:

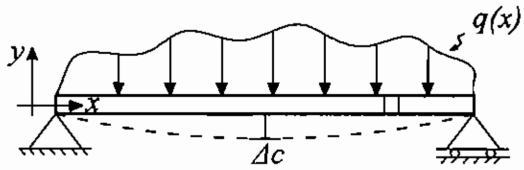
$$\bar{\Delta}_E = -\sum_{i=1}^{3}\bar{R}_i\,\Delta_{si} = -\left[(\bar{1}\times 1.5)+\left(\frac{\bar{2}}{3}\times 2\right)+\left(\frac{\bar{2}}{3}\times(-1)\right)\right]$$
$$\bar{\Delta}_E = -2.17 \text{ cm}$$

پس نقطه E به اندازه 2.17 cm به سمت چپ جابجا می‌شود.

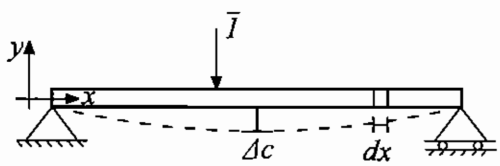
در حل مسأله دقت کنید، چون عکس‌العمل A رو به بالا و تغییر مکان رو به پایین است برای کار انجام شده علامت منفی قرار دادیم ولی در بقیه حالات، عکس‌العمل‌ها و تغییر مکان‌ها هم جهت هستند پس علامت کار انجام شده آن‌ها مثبت است.

روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل‌های ناشی از خمش (تیرها)

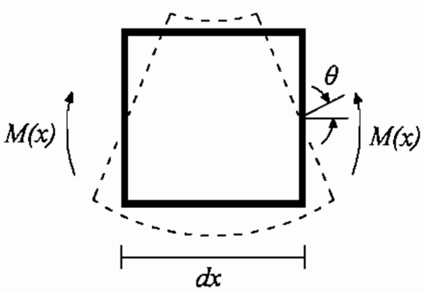
فرض کنید در تیر مقابل که تحت اثر بار $q(x)$ می باشد بخواهیم تغییر مکان نقطه C را بیابیم:

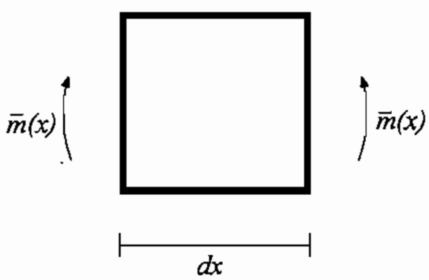


بدین منظور یک بار واحد مجازی در نقطه C اعمال می‌کنیم:



اگر از هرکدام از دو تیر فوق المانی به طول dx بیرون بکشیم لنگر داخلی در تیر اصلی را $M(x)$ و لنگر داخلی در تیر تحت بار واحد مجازی را $\bar{m}(x)$ می‌نامیم.





با توجه به اصل کار مجازی داریم:

$$\bar{1}.\Delta + \bar{w}_R = \Sigma \bar{f}\delta_i$$

چون در هر عضو از تیر لنگرهای داخلی تغییر می‌کند (برخلاف خرپا که نیروی داخلی در کل عضو ثابت بود) لذا Σ را به انتگرال تبدیل می‌کنیم پس اگر نشست تکیه‌گاهی نداشته باشیم خواهیم داشت:

$$\bar{1} \times \Delta = \int_0^L \bar{m}(x)\ d\theta$$

برای محاسبه $d\theta$ داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow d\theta = \frac{M(x)}{EI}\ dx$$

لذا:

$$\bar{1} \times \Delta = \int_0^L \bar{m}(x).\frac{M(x)}{EI}dx$$

در محاسبه انتگرال فوق دو شرط لازم است:

۱- توابع $\bar{m}(x)$ و $M(x)$ در ناحیه انتگرال‌گیری پیوسته باشند.

۲- ضوابط این توابع در یک دستگاه مختصات و با مبدأ یکسان بدست آمده باشد.

دقت کنید که اگر دوران یک مقطع مشخص تیر مورد نظر باشد نیز می‌توان از رابطه فوق استفاده کرد. فقط در این حالت به جای اعمال نیروی واحد مجازی باید لنگر واحد مجازی در مقطع اعمال شود. در این حالت داریم:

$$\bar{1} \times \theta = \int_0^L \bar{m}(x)\frac{M(x)}{EI}\, dx$$

باز هم فرض شده که نشست تکیه‌گاهی وجود نداشته است.

در هر دو حالت فوق اگر نشست تکیه‌گاهی نیز وجود داشت باید W_R در سمت چپ معادله لحاظ می‌شود.

به طور کلی استفاده از روش فوق در امتحان بسیار وقت‌گیر است پس روش زیر که تست‌های این بخش با آن حل می‌شوند را بررسی می‌کنیم:

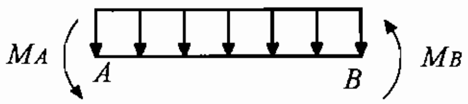
روش ترسیمی مور برای حل انتگرال $\int_A^B \bar{m}(x)\frac{M(x)}{EI}dx$:

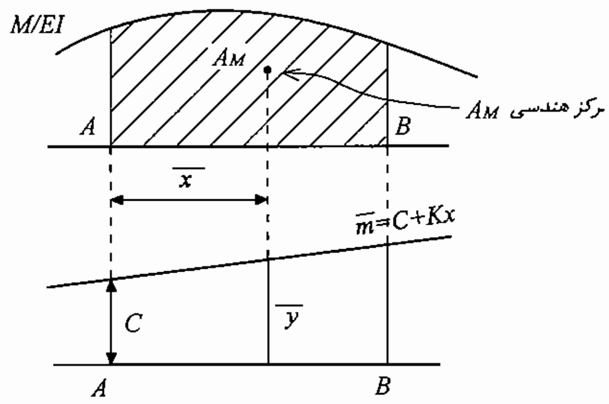
شرایط استفاده از این روش به صورت زیر است:

۱- توابع $\bar{m}(x)$ و $M(x)$ در ناحیه AB پیوسته باشند.

۲- تابع $\bar{m}(x)$ خطی باشد (که همواره چنین است زیرا بارگذاری همواره بار متمرکز است)

حال فرض کنید در تیر مقابل نمودارهای $\frac{M(x)}{EI}$ و $\bar{m}(x)$ به صورت زیر باشد:





حال برای محاسبه انتگرال مورد نظر خواهیم داشت:

$$\int_A^B \overline{m}(x).\frac{M(x)}{EI}dx = \int_A^B (C+kx)\frac{M(x)}{EI}\,dx = C\int_A^B \frac{M(x)}{EI} + k\int_A^B x.\frac{M(x)}{EI}\,dx$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\int_A^B \frac{M(x)}{EI}dx = A_M$$

$$\int_A^B x.\frac{M(x)}{EI}dx = \overline{x}\,A_M$$

لذا خواهیم داشت:

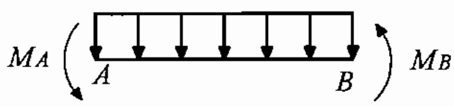
$$\int_A^B \overline{m}(x).\frac{M(x)}{EI}\,dx = CA_M + k\overline{x}A_M = A_M\left(C+k\overline{x}\right)$$

که مقدار $C+k\overline{x}$ نیز برابر $\overline{y}$ می‌باشد پس به عنوان یک رابطه مهم خواهیم داشت:

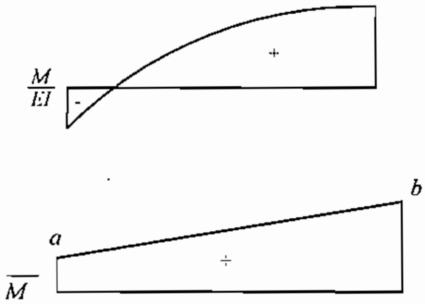
$$\int_A^B \overline{m}(x)\frac{M(x)}{EI}\,dx = A_M.\overline{y}$$

قضیه: مقدار انتگرال فوق در ناحیه AB برابر است با سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ در فاصله A تا B ضربدر مقدار لنگر داخلی مجازی $(\overline{m})$ درست در موقعیت مرکز سطح A_M.

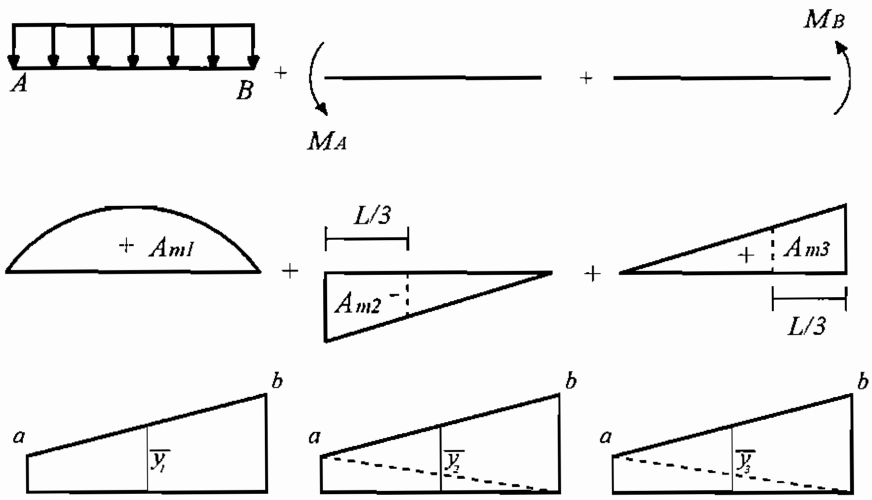
نکته : فرض کنید قطعه‌ای به صورت زیر بارگذاری شده باشد:



چنانچه نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ و $\bar{m}$ این بارگذاری رسم شود نمودار $\frac{M(x)}{EI}$ نموداری درجه 2 خواهد شد و نمودار $\bar{m}$ نیز همواره خطی است:



با استفاده از اصل برهم‌نهی این مسأله را به صورت حاصل جمع سه حالت زیر در نظر می‌گیریم:



بنابراین خواهیم داشت:

$$A_M\bar{y} = A_{M_1}\bar{y}_1 + A_{M_2}\bar{y}_2 + A_{M_3}\bar{y}_3$$

که در آن داریم:

$$\bar{y}_1 = \frac{a+b}{2}$$

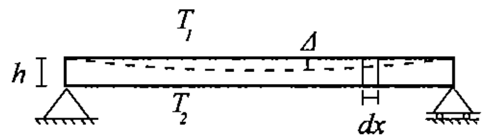
$$\bar{y}_2 = \frac{2}{3}a + \frac{b}{3}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}$$

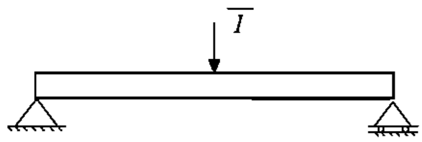
به دلیل به‌دست آمدن مقادیر فوق دقت کنید.

محاسبه تغییر شکل‌های حرارتی:

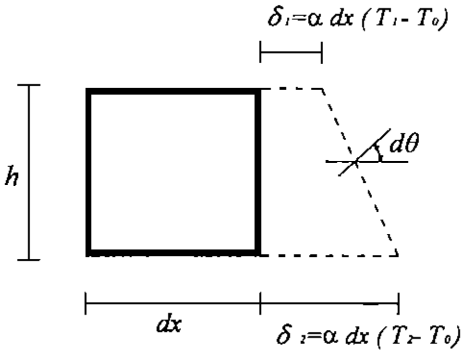
فرض کنید در تیر مقابل دمای سطح فوقانی تیر T_1 و سطح تحتانی تیر T_2 باشد. برای محاسبه تغییر مکان یک نقطه، بار واحد مجازی را در آن نقطه اعمال کرده و خواهیم داشت:



$$\bar{1}.\Delta = \int \bar{m}(x)\, d\theta$$



با بیرون آوردن یک المان به طول dx می‌توان $d\theta$ را بدست آورد:



$$d\theta = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} = \alpha\left(\frac{T_2 - T_1}{h}\right) dx$$

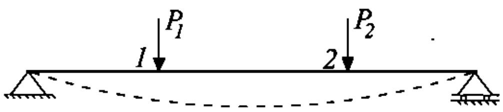
پس خواهیم داشت:

$$\bar{1}.\Delta = \int_0^h \bar{m}(x)\ \alpha\left(\frac{T_2 - T_1}{h}\right) dx$$

به مقدار $\frac{T_2 - T_1}{h}$ گرادیان حرارتی یا شیب حرارتی گویند.

قانون بتی (تقابل کار) و قانون ماکسول (تقابل تغییر مکان)

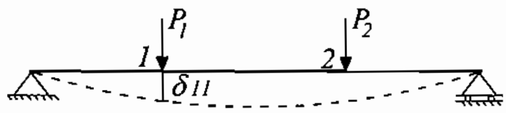
سازه‌ای مطابق شکل در نظر بگیرید که تحت دوبار P_1 و P_2 در نقاط 1 و 2 قرار گرفته است.



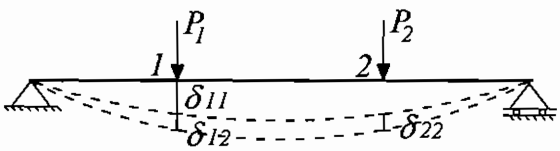
قرارداد: منظور از δ_{ij} تغییر مکان نقطه i در اثر اعمال بار در نقطه j است. برای اثبات قانون بتی دو نوع بارگذاری در نظر می‌گیریم. در حالت اول ابتدا بار P_1 و سپس بار P_2 و در حالت دوم ابتدا بار P_2 و سپس بار P_1 اعمال می‌شود.

حالت اول:

فرض کنید بار P_1 به نقطه 1 اعمال شود. در این‌صورت چون بار P_1 به آهستگی بارگذاری شده و تغییر مکان δ_{11} را در راستای بار P_1 ایجاد می‌کند لذا کار خارجی انجام شده برابر $\frac{1}{2}P_1\delta_{11}$ است.



حال فرض کنید بار P_2 را به سازه اضافه کنیم. در این‌صورت کار خارجی انجام شده از دو قسمت ایجاد می‌شود. قسمت اول: چون بار P_2 به آهستگی اعمال شده و تغییر مکان δ_{22} را در راستای P_2 اعمال می‌کند کار خارجی انجام شده برابر $\frac{1}{2}P_2\delta_{22}$ است.



قسمت دوم: چون بار P_2 سبب تغییر مکانی به اندازه δ_{12} در نقطه 1 می‌شود که این تغییر مکان در راستای بار P_1 است و چون بار P_1 از قبل روی سازه وجود داشته لذا کار خارجی انجام شده کل برابر با $P_1\delta_{12}$ است. (دیگر ضریب $\frac{1}{2}$ نداریم چون در حضور بار، تغییر مکان ایجاد شده است.) پس کل بار خارجی در حالت اول برابر است با:

$$w_1 = \frac{1}{2}P_1\delta_{11} + \frac{1}{2}P_2\delta_{22} + P_1\delta_{12}$$

اگر ابتدا بار P_2 و سپس بار P_1 اعمال شود اگر مطابق حالت قبل عمل کنیم بار خارجی کل در این حالت برابر است با:

$$w_2 = \frac{1}{2}P_2\delta_{22} + \frac{1}{2}P_1\delta_{11} + P_2\delta_{21}$$

چون در هر دو حالت، مقدار بار خارجی یکسان است لذا:

$$w_1 = w_2 \Rightarrow P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

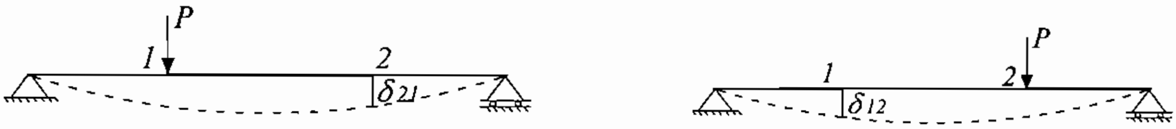
این رابطه به قانون بتی معروف و مفهومش این است که:

در یک سازه با رفتار خطی در دمای ثابت و بدون نشست تکیه‌گاهی، کار خارجی انجام شده توسط نیروی اعمال شده در نقطه 1 در اثر تغییر مکان ناشی از بارگذاری در نقطه 2 برابر است با کار خارجی انجام شده توسط نیروی اعمال شده در نقطه 2 در اثر تغییر مکان ناشی از بارگذاری در نقطه 1.

در حالت خاص اگر $P_1 = P_2$ باشد، رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید که به قانون ماکسول معروف است:

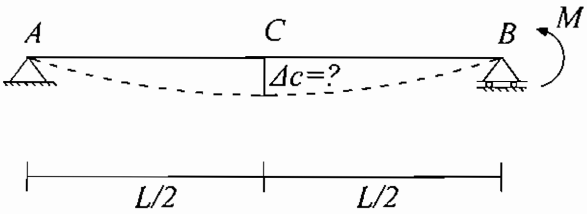
$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

مفهوم این قانون آن است که تغییر مکان نقطه 1 وقتی بار در نقطه 2 است برابر با تغییر مکان نقطه 2 است وقتی که بار در نقطه 1 قرار دارد.

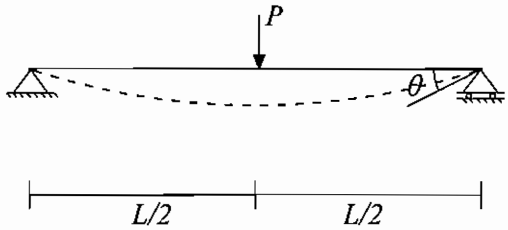


$$\delta_{21} = \delta_{12}$$

مثال : در سازه زیر تغییر مکان وسط تیر چقدر است؟



به جای تحلیل این تیر می‌توانیم تیری به صورت زیر در نظر بگیریم:



در این‌صورت طبق قانون ماکسول می‌توانیم بنویسیم:

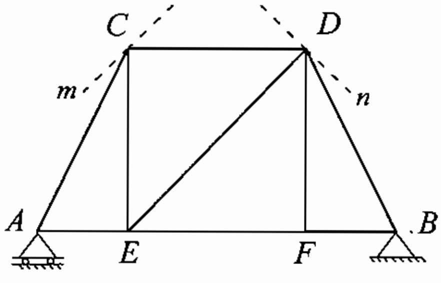
$$M\theta = P\Delta_c$$

طبق خواص تیرهای مهم داریم:

$$\theta = \frac{PL^2}{16EI} \Rightarrow M \times \frac{PL^2}{16EI} = P\Delta_c \Rightarrow \Delta_c = \frac{ML^2}{16EI}$$

که البته رابطه‌ای آشنا است.

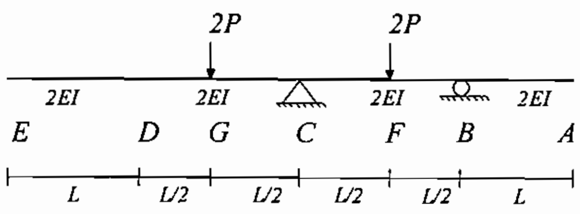
مثال : اگر بار 5kN به نقطه C و در امتداد m – m اعمال شود نقطه D در امتداد n – n تغییر مکانی برابر 4 cm دارد. اگر بار 20kN به نقطه D در امتداد n – n اعمال شود تغییر مکان نقطه C در امتداد m – m چقدر است؟



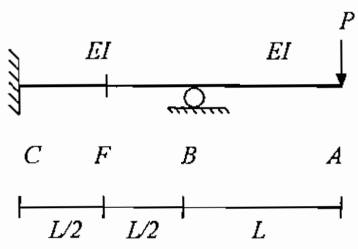
طبق قانون بتی داریم:

$$P_C \Delta_{CD} = P_D \Delta_{DC} \Rightarrow 5 \times \Delta_{CD} = 20 \times 4 \Rightarrow \Delta_{CD} = 16 \text{ cm}$$

مثال : در سازه (الف) با اعمال بارگذاری نشان داده شده انتهای A به اندازه Δ بالا می‌آید. در سازه (ب) با اعمال بار p در انتهای A، F چقدر تغییر مکان دارد؟

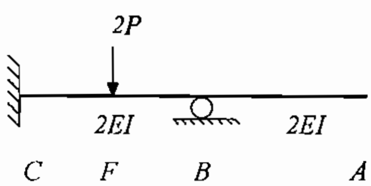


(الف)

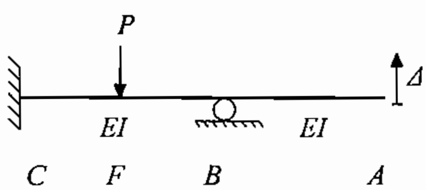


(ب)

قانون ماکسول تنها زمانی قابل استفاده است که مشخصات هندسی و مقطع دو سازه با هم برابر باشند. با دقت در سازه (الف) چون سازه دارای تقارن است، لذا شیب در نقطه c برابر صفر است پس می‌توان سازه (الف) را به صورت زیر معادل کرد:



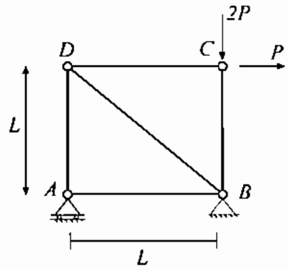
از طرفی در همین سازه اگر مشخصات مقطع از 2EI به EI تبدیل شود تغییر مکان آن دو برابر شده و برابر 2Δ می‌شود ولی با تبدیل نیروی 2P به P مجدداً تغییر مکان نصف شده و برابر Δ می‌شود پس سازه (الف) به صورت زیر قابل معادل سازی است:



حال طبق قانون ماکسول داریم: (چون نیروها برابرند از ماکسول استفاده می‌کنیم):

$$\delta_{AF} = \delta_{FA} = \Delta$$

مثال : خرپای مقابل را در نظر بگیرید مطلوبست یافتن:



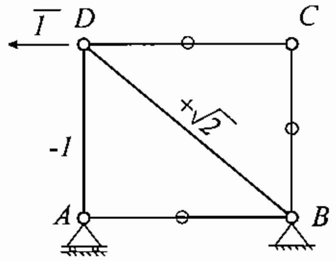
الف) تغییر مکان افقی نقطه D

ب) تغییر مکان قائم نقطه D

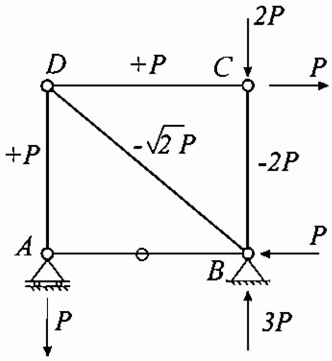
ج) دوران عضو DC

د) میزان تغییر مکان دو نقطه A و C نسبت به هم

الف) برای یافتن تغییر مکان افقی نقطه D یک بار واحد مجازی به نقطه D اعمال می‌کنیم و نیروهای مجازی داخلی را به دست می‌آوریم. طبق نکات خرپا دو عضو DC و BC صفر نیرویی هستند. نیروی اعضای دیگر روی اعضا نوشته شده است.



نیروی داخلی اعضاء تحت بارگذاری اصلی نیز به صورت زیر می‌باشد. حال می‌توان نوشت:

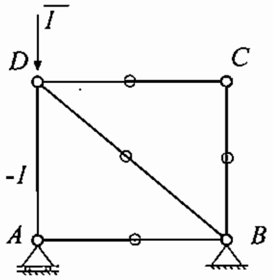


$$1 \times \Delta = \sum_{i=1}^{M} \overline{P}_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

در محاسبه حاصل جمع فوق اعضایی از هر کدام از خرپاها که صفر است حذف می‌شود پس:

$$\Delta = \left(\sqrt{2} * \frac{-\sqrt{2}P * \sqrt{2}L}{EA} + (-1)\frac{P \times L}{EA}\right) = -\left(2\sqrt{2}+1\right)\frac{PL}{EA}$$

علامت منفی بدان معنی است که نقطه D، در خلاف جهت نیروی مجازی نشان داده شده یعنی به سمت راست تغییر مکان دارد.

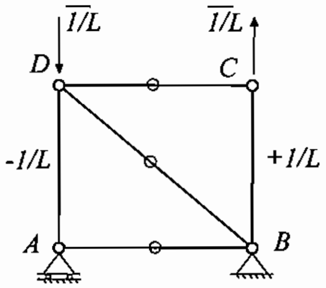


ب) برای یافتن تغییر مکان قائم نقطه D، بار واحد قائم روی نقطه D اعمال می‌شود. طبق نکات خرپا دو عضو DC و CB صفر نیرویی هستند. با صفر نیرویی شدن این دو عضو، چون عکس‌العمل‌های افقی و قائم تکیه B صفر است دو عضو DB و AB نیز صفر نیرویی می‌شوند و کل بار واحد به عضو AD منتقل می‌شود. حال با توجه به نیروهای داخلی خرپای اصلی می‌توانیم بنویسیم: (اعضای صفر نیرویی حذف می‌شوند)

$$1\times\Delta=\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_i\,\frac{p_iL_i}{E_iA_i}=\left((-1)\times\frac{PL}{EA}\right)=\frac{-PL}{EA}$$

یعنی گره D به اندازه $\frac{PL}{EA}$ به سمت بالا تغییر مکان دارد.

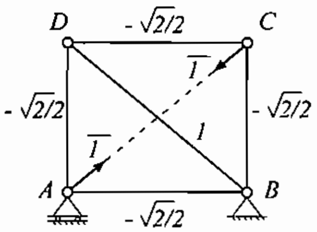
ج) برای یافتن دوران عضو DC دو نیروی $\frac{\overline{1}}{L}$ به صورت مقابل به عضو DC وارد می‌کنیم. میزان دوران عضو DC برابر است با:



$$\overline{1}\,.\,\alpha_{DC}=\sum_{i=1}^{m}\overline{p}_i\,\frac{p_iL_i}{E_iA_i}=\left(\frac{-1}{L}*\frac{PL}{EA}+\frac{1}{L}*\frac{-2PL}{EA}\right)=\frac{-3P}{EA}$$

پس دوران عضو DC خلاف جهت کوپل وارد شده یعنی ساعتگرد می‌باشد.

د) برای یافتن تغییر مکان دو نقطه A و C نسبت به هم، دوبار واحد در امتداد AC اعمال کرده و نیروهای مجازی را می‌یابیم. پس با توجه به نیروهای داخلی تحت بارگذاری اصلی می‌نویسیم:



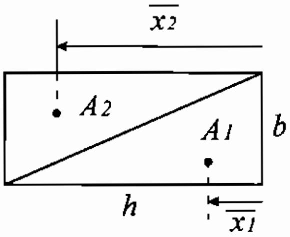
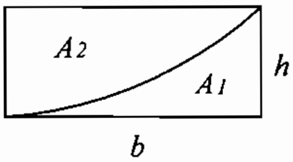
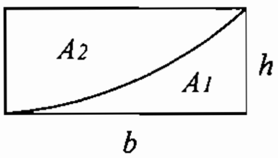
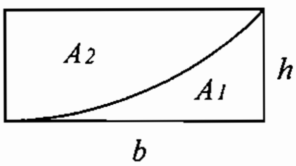
$$\overline{1}.\,\Delta_{AC}=\sum_{i=1}^{m}\overline{P}_i\frac{P_iL_i}{E_iA_i}$$

$$=\left\{\left(\frac{\sqrt{-2}}{2}\right)\left(\frac{PL}{EA}\right)+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-2PL}{EA}\right)+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{PL}{EA}\right)+(1)\left(\frac{-\sqrt{2}P\times\sqrt{2}L}{EA}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\quad\Delta_{AC}=\frac{-2PL}{EA}$$

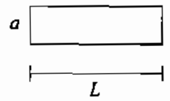
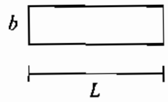
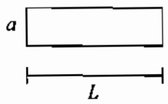
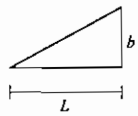
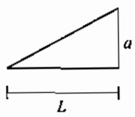
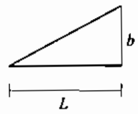
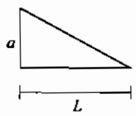
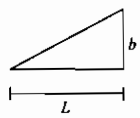
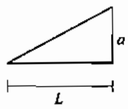
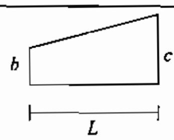
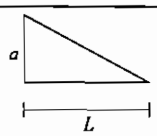
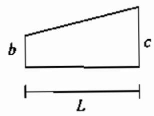
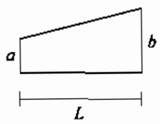
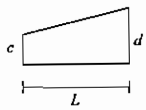
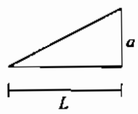
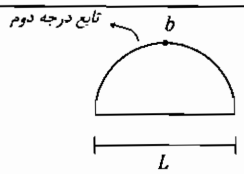
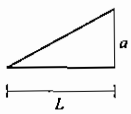
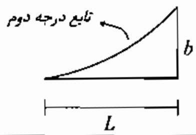
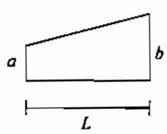
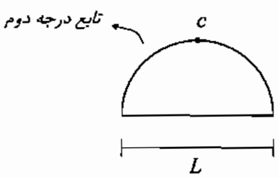
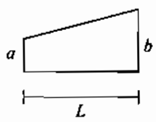
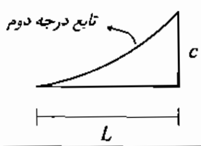
یعنی دو گروه A و C به اندازه $\frac{2PL}{EA}$ از هم دور می‌شوند.

نکته : در محاسبه مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ و مرکز سطح نکات زیر قابل استفاده است:

نمودار $\frac{M}{EI}$		مساحت		مرکز سطح	
		A_1	A_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
خط		$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{2b}{3}=\frac{4b}{6}$
سهمی درجه دوم		$\frac{bh}{3}$	$\frac{2bh}{3}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{5b}{8}$
سهمی درجه سوم		$\frac{bh}{4}$	$\frac{3bh}{4}$	$\frac{b}{5}$	$\frac{3b}{5}=\frac{6b}{10}$
سهمی درجه nام		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}bh$	$\frac{b}{n+2}$	$\left(\frac{n+3}{2}\right)\bar{x}_1$

البته در تمام منحنی‌های فوق، منحنی به خط افق پائین مماس است.

نکته : در محاسبه $\int_A^B \bar{m}(x)\dfrac{M(x)}{EI}dx$ برای به دست آوردن $A_M \cdot \bar{y}$ از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

	$\bar{m}(x)$	$\dfrac{M(x)}{EI}$	$\bar{y}A_m$
1			$a * bL = abL$
2			$a \times \dfrac{bL}{2} = \dfrac{abL}{2}$
3			$\dfrac{2a}{3} \times \dfrac{bL}{2} = \dfrac{abL}{3}$
4			$\dfrac{a}{3} \times \dfrac{bL}{2} = \dfrac{abL}{6}$
5			$\dfrac{a(b+2C)L}{6}$
6			$\dfrac{a(2b+C)L}{6}$
7			$\dfrac{C(2a+b)L}{6} + \dfrac{d(a+2b)L}{6}$
8			$\dfrac{abL}{3}$
9			$\dfrac{abL}{4}$
10			$\dfrac{(a+b)CL}{3}$
11			$\dfrac{(a+3b)CL}{12}$

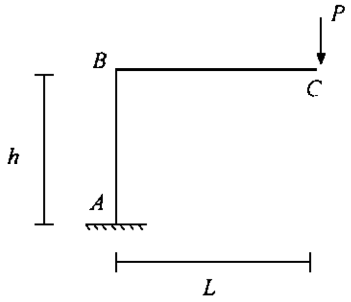
توجه: دقت داریم که روابط مربوط به حالات 1 تا 6 با رابطه ارائه شده برای حالت 7 همگی قابل استنتاج است.

مثال : در شکل مقابل مطلوب است یافتن:

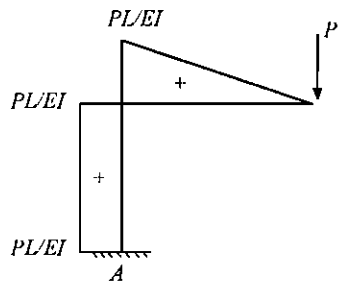
الف) تغییر مکان افقی نقطه C

ب) تغییر مکان قائم نقطه C

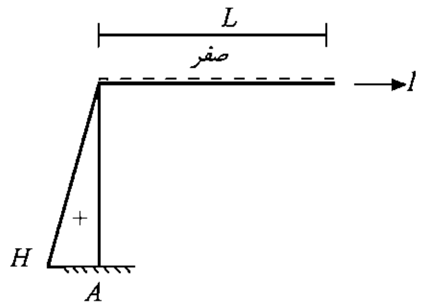
ج) دوران نقطه C



ابتدا نمودار لنگر خمشی بر صلبیت خمشی $\left(\frac{M}{EI}\right)$ سازه را رسم می‌کنیم:



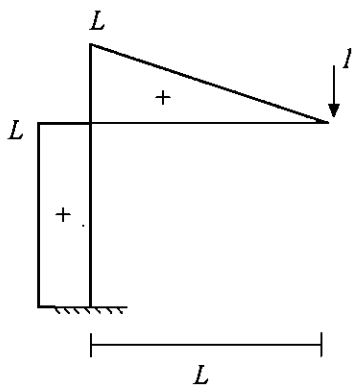
الف) برای یافتن تغییر مکان افقی نقطه C بار افقی واحد را به نقطه C اعمال کرده و دیاگرام خمش سازه را رسم می‌کنیم. برای حل ترسیمی می‌توان با توجه به جدول بالا نوشت:



$$\Delta_{HC} = \frac{(PL)(H)(H)}{2EI} = \frac{PLH^2}{2EI}$$

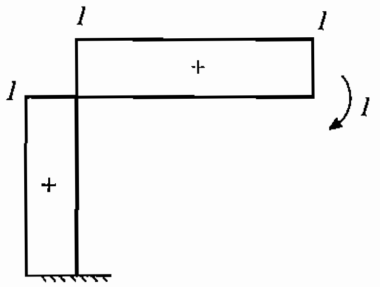
دقت داریم که چون ارتفاع $\overline{m}$ در قطعه BC صفر است، لذا این عضو در تغییر مکان افقی C تأثیری ندارد.

ب) برای یافتن تغییر مکان قائم نقطه C، بار قائم واحد را به نقطه C اعمال کرده و دیاگرام خمشی سازه را رسم می‌کنیم. با توجه به حل ترسیمی و جدول بالا داریم:



$$\Delta_{VC} = \frac{\left(\frac{PL}{EI}\right)(L)L}{3} + \left(\frac{PL}{EI}\right)(L)H = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2H}{EI}$$

ج) برای یافتن دوران نقطه C، لنگر واحد را به نقطه C اعمال کرده و دیاگرام خمش سازه را رسم می‌کنیم. با توجه به حل ترسیمی و جدول بالا داریم:



$$\theta_c = \frac{\left(\frac{PL}{EI}\right)(1)L}{2} + \left(\frac{PL}{EI}\right)(1)(H) = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{PLH}{EI}$$

روش دوم: این مسأله را یک بار دیگر با استفاده از روابط تیرهای مهم حل می‌کنیم.

الف) با وارد کردن بار P به نقطه C، لنگر PL در نقطه B ایجاد می‌شود. چون نقطه B به راحتی دوران و جابه‌جایی دارد پس می‌توان قطعه AB را به صورت یک تیر یک سر گیردار که لنگر PL به انتهای آن وارد می‌شود در نظر گرفت. در اثر این لنگر نقطه B به اندازه $\frac{M_{AB}(L_{AB})^2}{2EI} = \frac{2LH^2}{2EI}$ به سمت راست تغییر مکان می‌دهد.

ب) اگر مجدداً مثل حالت قبل لنگر PL را در نقطه B در نظر بگیریم در این صورت نقطه B به اندازه $\frac{PLH}{EI} = \frac{M_{AB}L_{AB}}{EI}$ دوران می‌کند. در اثر این دوران در B، انتهای C یک جابه‌جایی به سمت پائین دارد که برابر است با:

$$\Delta_{CV1} = \left(\frac{PLH}{EI}\right) \times L = \frac{PL^2H}{EI}$$

پس از انجام این تغییر مکان، نقطه B ثابت شده و مانند یک انتهای گیردار عمل می‌کند پس قطعه BC مانند تیر یک سر گیردار خواهد بود که تغییر مکان آن در اثر بار P برابر است با:

$$\Delta_{CV2} = \frac{PL^3}{3EI}$$

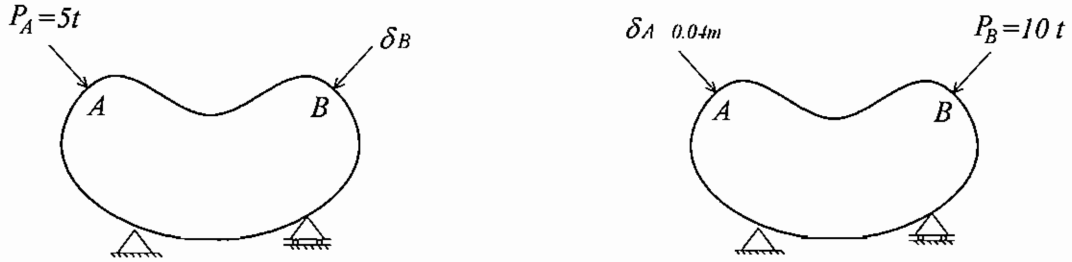
$$\Delta_{CV} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2H}{EI}$$

ج) اگر لنگر PL را به نقطه B منتقل کنیم، انتهای B به اندازه $\frac{PLH}{EI} = \frac{M_{AB}L_{AB}}{EI}$ دوران می‌کند که در اثر این دوران، انتهای C نیز به همین اندازه دوران می‌کند. پس از انجام این دوران نقطه B ثابت شده و قطعه BC مانند قطعه یک سرگیردار عمل می‌کند پس دوران دیگری به اندازه $\frac{PL^2}{2EI}$ انجام می‌شود پس در مجموع داریم:

$$\theta_C = \frac{PLH}{EI} + \frac{PL^2}{2EI}$$

تست‌های بخش محاسبه تغییر شکل سازه‌ها با استفاده از روش‌های انرژی

۱ ـ در سازه زیر مقدار δ_B برابر است با: (سراسری ۱۳۷۲)



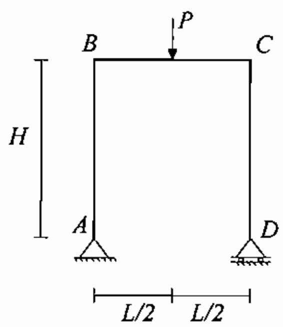
۱) 0.03 m ۲) 0.2 m ۳) 0.02 m ۴) 0.04 m

حل :

از قانون تقابل بتی استفاده کرده و داریم:

$$P_A \cdot \delta_A = P_B \cdot \delta_B \;\Rightarrow\; 5\times 0.04 = 10\times \delta_B \;\Rightarrow\; \delta_B = 0.02\ \text{m}$$

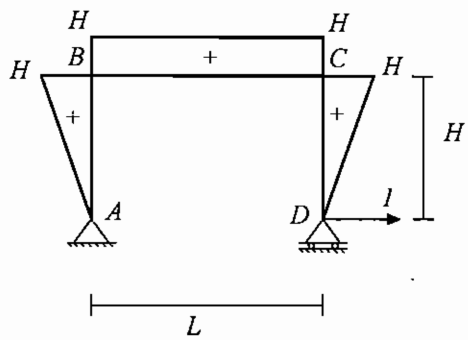
۲ ـ برای قاب نشان داده شده در شکل زیر مطلوبست محاسبه تغییر مکان افقی تکیه‌گاه D. (EI ثابت است.) (سراسری ۱۳۷۲)



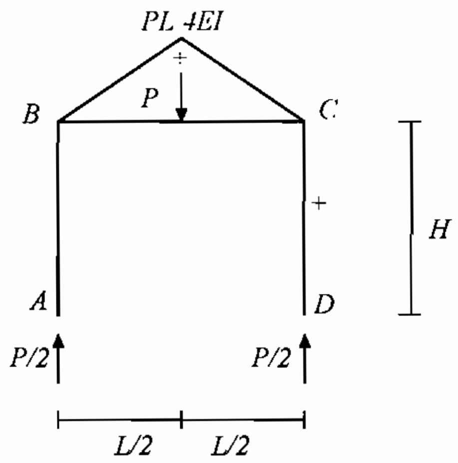
۱) $\frac{PL^2H}{8EI}$ ۲) $\frac{PL^2H}{4EI}$ ۳) $\frac{PL^2H}{16EI}$ ۴) $\frac{PL^2H}{12EI}$

حل :

با استفاده از روش بار واحد این مسأله را حل می‌کنیم. ابتدا بار واحد را در نقطه‌ای که تغییر مکان آن را می‌خواهیم و در جهت مورد سؤال اعمال می‌کنیم. یعنی بار واحد را در نقطه D و در جهت افقی اعمال می‌کنیم. در این‌صورت نمودار لنگر خمشی سازه به‌صورت زیر خواهد بود:



حال نمودار لنگر خمشی سازه در اثر بار خارجی اعمال شده روی سازه را نیز رسم می‌کنیم:



$$\Delta_{HD}=\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)(L)\times H=\frac{PL^2H}{8EI}$$

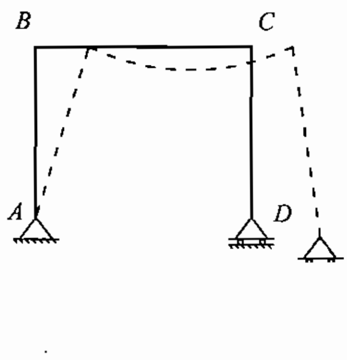
که در آن؛ $\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)(L)$ همان سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ و H، مقدار لنگر داخلی مجازی در موقعیت مرکز سطح A_M می‌باشد.

دقت داریم که چون لنگر داخلی در سازه تحت اثر بار خارجی در قطعات AB و CD صفر است، لذا این قطعات در محاسبه تغییر مکان فوق تأثیری ندارد.

روش دوم:

با توجه به این‌که تکیه‌گاه B غلتکی است لذا به سادگی در جهت افق تغییر مکان می‌دهد لذا اعضای AB و CD هیچ نقشی در تحمل بار ندارند و به صورت مستقیم باقی می‌مانند لذا دوران نقاط B و C برابر دوران تیر ساده BC است که تحت بار P در وسط دهانه قرار گرفته است (چون قطعات AB و CD هیچ ممانعتی در مقابل این دوران ندارند.)

در این‌صورت تغییر مکان افقی D برابر است با:



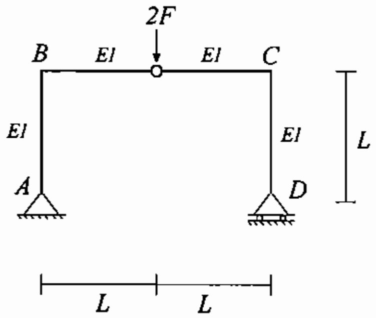
$$\theta_B=\theta_C=\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\Delta_D=\theta_B\times H+\theta_C\times H=2\theta_B H=\frac{2PL^2H}{16EI}=\frac{PL^2H}{8EI}$$

۳ـ تغییر فاصله G نسبت به A چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۷۳)**

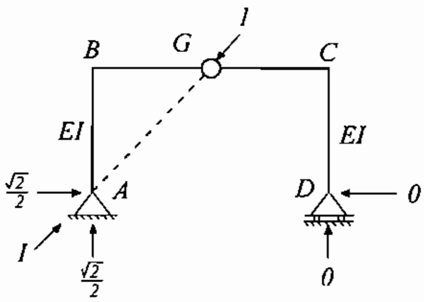
۱) $\frac{\sqrt{2}\,FL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}\,FL^3}{EI}$

۳) $\frac{FL^3}{\sqrt{2}\,EI}$ ۴) $\frac{FL^3}{EI}$

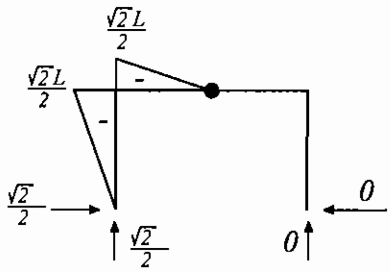


حل :

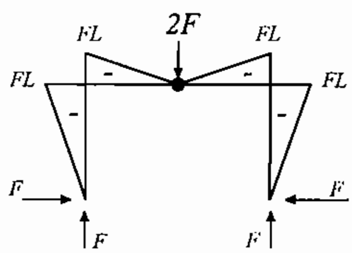
چون تغییر مکان G نسبت به A خواسته شده است لذا لازم است بار واحدی در نقطه G در امتداد AG وارد کرده و دیاگرام لنگر خمشی سازه را تحت این بار واحد مجازی رسم کنیم. چون ABG دو نیرویی است لذا یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی در امتداد AG در A ایجاد می‌شود. با تجزیه مؤلفه‌های این نیرو، عکس‌العمل‌های افقی و قائم تکیه‌گاه A به‌دست می‌آید.



حال با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه A، مؤلفه قائم تکیه‌گاه D صفر می‌شود و با نوشتن معادله تعادل لنگر حول گره G برای قطعه GCD عکس‌العمل افقی D صفر می‌شود. پس با توجه به این واکنش‌های تکیه‌گاهی دیاگرام لنگر داخلی تحت این بار واحد مجازی به‌صورت زیر است:



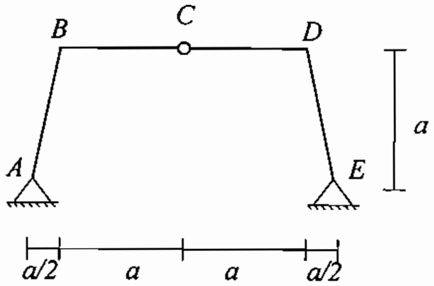
حال دیاگرام خمش ناشی از بارگذاری واحد را نیز رسم می‌کنیم.



حال طبق روش ترسیمی مور می‌توان نوشت:

$$\Delta_{G/A}=\frac{1}{2}(FL)(L)\left(\frac{\sqrt{2}L}{3EI}\right)+\frac{1}{2}(FL)(L)\left(\frac{\sqrt{2}L}{3EI}\right)\Rightarrow\Delta_{G/A}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{FL^3}{EI}$$

۴ـ چنانچه تکیه‌گاه A به اندازه u به سمت پایین و 3u به سمت چپ حرکت کند، شیب نقطه B در جهت حرکت عقربه‌های ساعت کدام است؟(سراسری ۱۳۷۵)



۱) $\frac{3u}{a}$

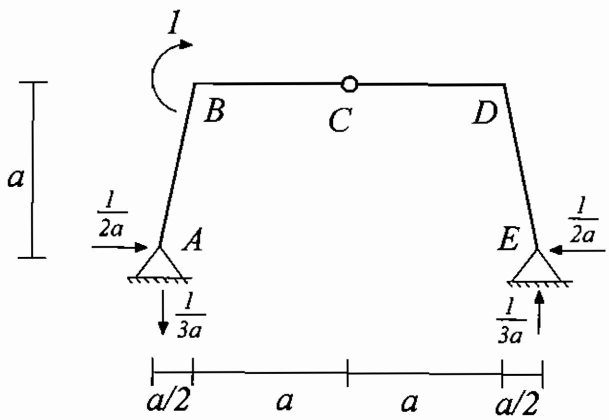
۲) $\frac{4u}{3a}$

۳) $\frac{7u}{6a}$

۴) $\frac{2u}{a}$

حل :

چون می‌خواهیم دوران نقطه B را به‌دست آوریم یک لنگر واحد مجازی در نقطه B اعمال می‌کنیم و تحت تأثیر آن، عکس‌العمل‌های مجازی سازه را به‌دست می‌آوریم:



$$\sum M_A=0\Rightarrow E_y\times 3a=1\Rightarrow E_y=\frac{1}{3a}$$

$$\sum F_y=0\Rightarrow A_y=\frac{-1}{3a}$$

در نقطه CDE:

$$\sum M_C=0\Rightarrow E_x\times a=\frac{1}{3a}\times\frac{3}{2}a\Rightarrow E_x=\frac{1}{2a}$$

و:

$$\sum F_x=0\Rightarrow A_x=\frac{-1}{2a}$$

حال با توجه به نشست‌های تکیه‌گاهی داده شده به عنوان فرض و نکات ارائه شده می‌نویسیم:

$$\bar{1}\cdot\theta+\overline{W_R}=0 \Rightarrow \theta=-\sum \overline{R}_i\Delta_{Si}$$

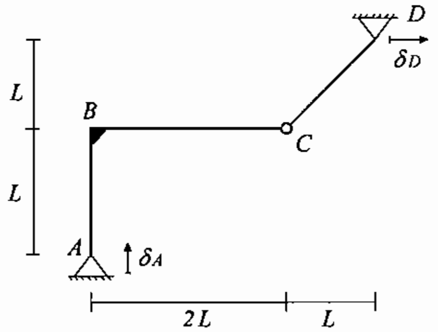
$$\theta=-\left(u\times\frac{1}{3a}-3u\times\frac{1}{2a}\right)=\frac{7u}{6a}$$

توجه ۱: دقت داریم در روش بار واحد اگر هدف یافتن تغییر مکان باشد از بار واحد مجازی و اگر هدف یافتن دوران باشد از لنگر واحد مجازی استفاده می‌کنیم.

توجه ۲: چون سازه معین است نشست‌های تکیه‌گاهی سبب ایجاد نیروهای داخلی در سازه نمی‌شوند.

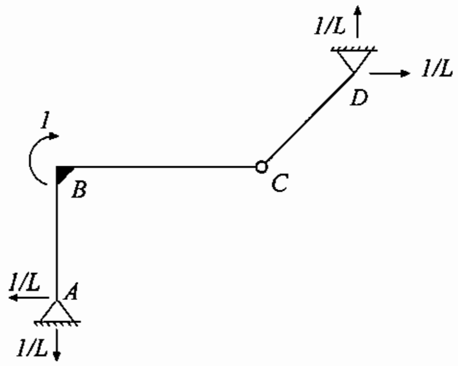
۵ ـ قاب شکل زیر دارای صلبیت مقاطع یکسان، رفتار خطی و نشست‌های تکیه‌گاهی $\delta_A=\frac{L}{1000}$ و $\delta_D=\frac{L}{500}$ است. مقدار دوران گره B بر اثر نشست‌ها چند رادیان است؟ **(سراسری ۱۳۷۵)**

۱) $\frac{1}{500}$
۲) $\frac{1}{600}$
۳) $\frac{1}{800}$
۴) $\frac{1}{1000}$



حل :

مانند مسأله قبل لنگر واحد مجازی را در نقطه B وارد کرده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به‌صورت زیر خواهد بود:

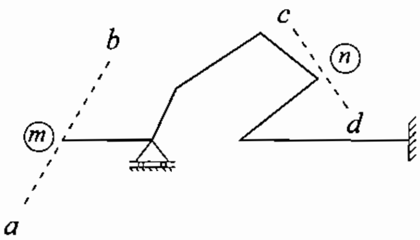


دقت کنید که در به‌دست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یک بار معادله تعادل حول نقطه D و یک بار حول نقطه C نوشته می‌شود که دو معادله برحسب A_x و A_y به‌دست می‌آید. با یافتن این عکس‌العمل**ها** نوشتن معادلات تعادل نیرو، عکس‌العمل‌های D نیز به‌دست می‌آید. (جزئیات برعهده دانشجویان). در این‌صورت داریم:

$$1\times\theta+\overline{W}_R=0 \Rightarrow \theta=-\sum \overline{R}_i\Delta_{Si} \Rightarrow \theta=-\left(\frac{1}{L}\times\delta_D-\frac{1}{L}\times\delta_A\right)=-\left(\frac{1}{L}\times\frac{L}{500}-\frac{1}{L}\times\frac{L}{1000}\right)$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{-1}{1000}\,\text{Rad}$$

۶ـ در صورتی‌که تحت اثر بار $10t$ در نقطه m در امتداد $a-b$ جابه‌جایی در نقطه n در امتداد $c-d$ برابر 5 mm باشد، جابجایی نقطه m در امتداد $a-b$ را تحت اثر نیروی $30t$ در نقطه n در امتداد $c-d$ حساب کنید. (سراسری ۱۳۷۶)

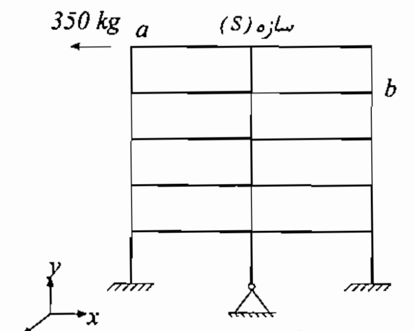


۱) $\frac{3}{5}$ mm
۲) $\frac{5}{3}$ mm
۳) 5 mm
۴) 15 mm

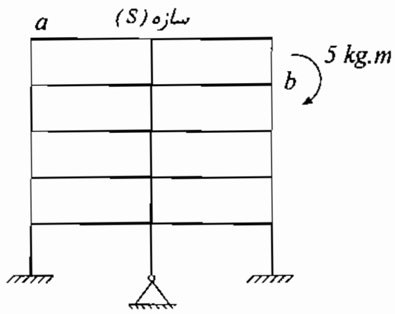
حل: طبق قانون تقابل بتی می‌توان نوشت:

$$P_m \delta_{ba} = P_n \delta_{cd} \quad \Rightarrow \quad 10 \times \delta_{ba} = 30 \times 5 \quad \Rightarrow \quad \delta_{ba} = 15 \text{ mm}$$

۷ـ اگر در سازه (s) تحت بارگذاری (الف) دوران گره b حول محور oz برابر 0.07 رادیان باشد، آنگاه تغییر مکان گره a در امتداد محور ox تحت بارگذاری (ب) برابر است با: (سراسری ۱۳۷۷)



بارگذاری (الف)



بارگذاری (ب)

۱) $\delta_{ix} = -0.1$ cm
۲) $\delta_{ix} = 0.01$ cm
۳) $\delta_{ix} = 0.1$ cm
۴) $\delta_{ix} = -0.01$ cm

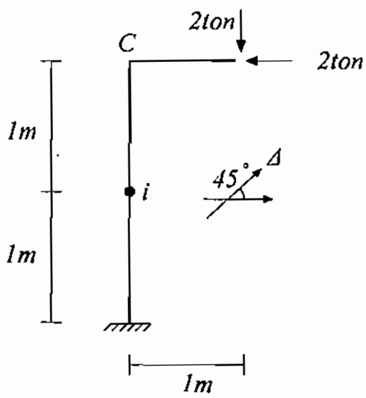
حل:

طبق قانون تقابل بتی می‌نویسیم:

$$F_a \cdot \Delta_a = M_b \theta_B \quad \Rightarrow \quad -350 \times \Delta_a = 5 \times (-0.07) \quad \Rightarrow \quad \Delta_a = +\frac{1}{1000} \text{ m} = +0.1 \text{ cm}$$

در این مسأله فرض کردیم که دوران نقطه b خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. البته واضح است که اگر خلاف فرض می‌شود گزینه -0.1 cm صحیح می‌بود.

۸ـ اگر صلبیت مقاطع اعضاء سازه مطابق شکل زیر برابر EA ، GA و EI باشد، آنگاه تغییر مکان مقطع i در امتداد محور Δ برابر کدام است؟ (سراسری ۱۳۷۸)

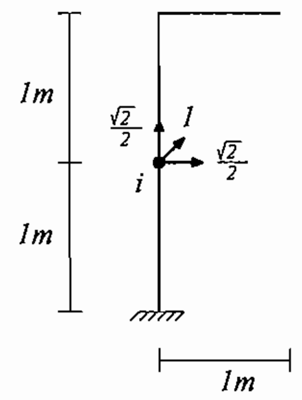


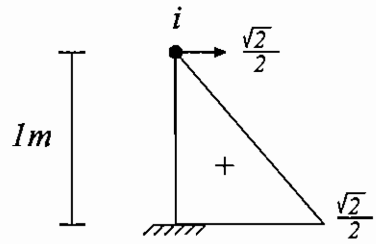
۱) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$
۲) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{2EI}\right)$
۳) $-\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{2EI}\right)$
۴) $-\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$

حل :

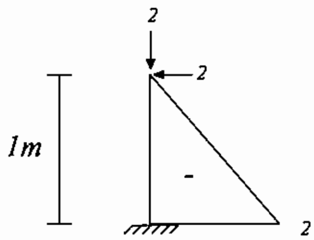
طبق روش‌های انرژی باید یک بار واحد مجازی در جهت Δ در نقطه i قرار دهیم و نیروهای داخلی سازه را تحت این بار واحد مجازی به‌دست آوریم. واضح است که در اثر این نیرو، فقط قطعه پایین i دارای نیروهای داخلی خواهد بود، لذا در به‌دست آوردن نیروهای داخلی تحت اثر بارگذاری اصلی و بار واحد مجازی فقط نیروهای این قسمت را می‌یابیم.

در این قطعه نیروی برشی عدد ثابت $V=\frac{\sqrt{2}}{2}$، نیروی محوری عدد ثابت $P=\frac{\sqrt{2}}{2}$ بوده و لنگر داخلی نیز به‌صورت زیر است:





حال نیروهای داخلی این قسمت را تحت اثر بارگذاری اصلی نیز می‌یابیم. نیروهای موجود را به i منتقل می‌کنیم که در اثر این انتقال لنگری منتقل نمی‌شود.



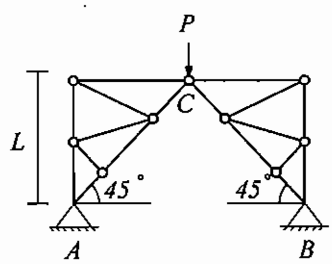
نیروی برشی در این حالت $V=-2$ و نیروی محوری $P=-2$ است.

حال با توجه به مطالب ارائه شده در روش‌های انرژی داریم:

$$\bar{1}\cdot\Delta=\sum \bar{f}\cdot S=\bar{P}\frac{PL}{EA}+\int\frac{\bar{V}V}{GA}dx+\int\frac{mM}{EI}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{EA}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{GA}\right)+\left(-\frac{1}{2}\times2\times1\right)\frac{1}{EI}\times\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{EA}-\frac{\sqrt{2}}{GA}-\frac{\sqrt{2}}{3EI}=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$$

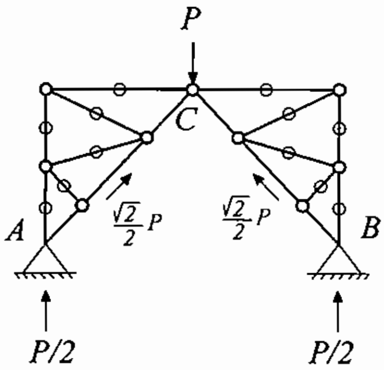
۹ـ در سازه شکل زیر تغییر مکان قائم نقطه C چقدر است؟ (صلبیت محوری کلیه اعضاء برابر EA می‌باشد.) **(سراسری ۱۳۷۸)**



۱) صفر
۲) $\frac{PL}{EA}$
۳) $\frac{PL}{2EA}$
۴) $\frac{\sqrt{2}PL}{EA}$

حل :

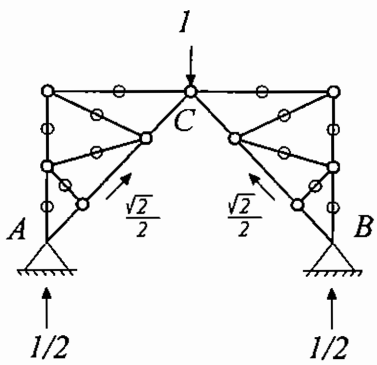
تحت بارگذاری اعمال شده نیروهای داخلی به‌وجود آمده به‌صورت زیر خواهد بود:



غیر از اعضای AC و BC بقیه اعضا صفر نیرویی هستند و نیروی داخلی این دو عضو نیز $\frac{\sqrt{2}\,P}{2}$ است.

حال یک بار واحد نیز در نقطه C اعمال کرده و نیروهای داخلی مجازی را می‌یابیم.

در این حالت نیز فقط اعضای AC و AB دارای نیروی داخلی هستند که این نیرو برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



حال طبق نکات ارائه شده می‌نویسیم:

$$\overline{1}\cdot\Delta=\sum \overline{P}_i\,\frac{P_i L_i}{EA_i}=2\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}P\right)\frac{\sqrt{2}\,L}{EA}\right]=\sqrt{2}\,\frac{PL}{EA}$$

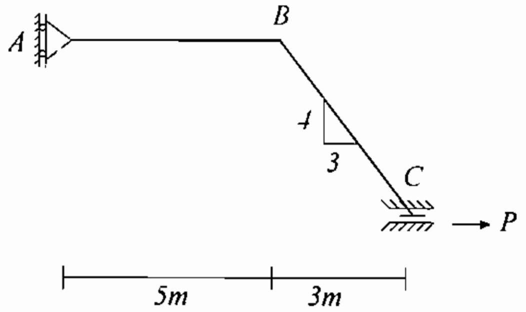
۱۰ ـ انرژی داخلی U و انرژی مکمل U^* زمانی برابرند که تنش ـ کرنش: **(سراسری ۱۳۷۸)**

۱) خطی باشد. ۲) غیرخطی باشد.

۳) خطی بوده، شیب $45°$ داشته باشد. ۴) هیچ‌کدام

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۱ ـ در قاب زیر، تغییر مکان افقی Δ در تکیه‌گاه لغزندهٔ گیردار C چقدر است؟ (صلبیت خمشی هر دو عضو برابر EI است و از تغییر طول عضوها صرف‌نظر می‌شود.) **(سراسری ۱۳۸۰)**



۱) $\Delta = \frac{20P}{3EI}$

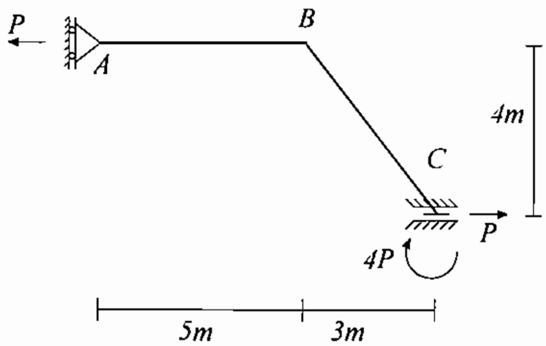
۲) $\Delta = \frac{40P}{3EI}$

۳) $\Delta = \frac{80P}{3EI}$

۴) سازه ناپایدار است و تغییر مکان Δ قابل محاسبه نیست.

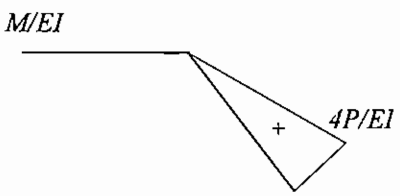
حل :

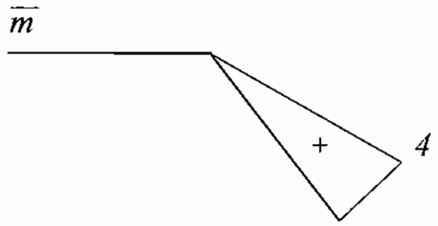
ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اثر بار P به‌دست می‌آوریم. با نوشتن معادله تعادل نیرو در جهت افق نیروی عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر P و به سمت چپ خواهد بود. در اثر این نیرو یک لنگر به اندازه 4P در تکیه‌گاه C وارد می‌شود. (لنگر تکیه‌گاهی ساعتگرد) حال با نوشتن معادله تعادل لنگر حول تکیه‌گاه A درمی‌یابیم که نیروی قائم عکس‌العمل تکیه‌گاه C صفر است.



چون می‌خواهیم تغییر مکان افقی C را بیابیم، لذا یک بار واحد مجازی در تکیه‌گاه C اعمال کنیم. واضح است که تحت این بار واحد، عکس‌العمل تکیه‌گاه C برابر 4 واحد (ساعتگرد) و عکس‌العمل A به اندازه 1 واحد و به سمت چپ است.

حال لنگر داخلی را می‌یابیم.



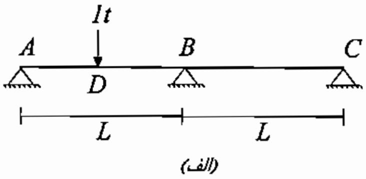


حال می‌توان نوشت:

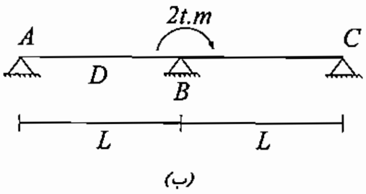
$$\overline{1} \cdot \Delta_C = A_M \cdot \overline{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{4P}{EI}\right)(5) \times \left(\frac{2}{3} \times 4\right) \Rightarrow \Delta_C = \frac{80P}{3EI}$$

۱۲ ـ تیر ABC تحت بارگذاری (الف) و (ب) قرار گرفته است. اگر تحت اثر بارگذاری (الف) $\theta_B = 0.01R$ باشد، تغییر مکان نقطه D تحت اثر بارگذاری (ب) چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**

۱) 0.01 L
۲) 0.02 L
۳) 1 cm
۴) 2 cm



(الف)



(ب)

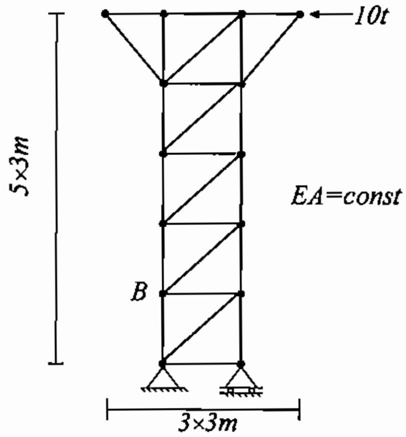
حل :

طبق قانون بقای بتی داریم:

$$P_D \Delta_D = M_B \theta_B \Rightarrow 1 \times \Delta_D = 2 \times 0.01 \Rightarrow \Delta_D = 0.02\,m \Rightarrow \Delta_D = 2\,cm$$

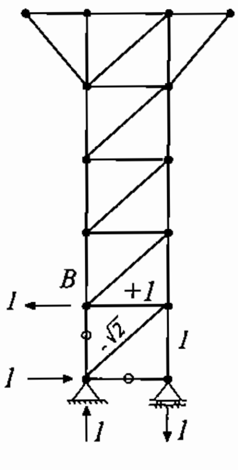
۱۳ ـ در خرپای شکل زیر، جابه‌جایی افقی نقطه B چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**

۱) $\frac{180}{EA}$
۲) $\frac{60\sqrt{2}}{EA}$
۳) $\frac{204.8}{EA}$
۴) $\frac{264.8}{EA}$

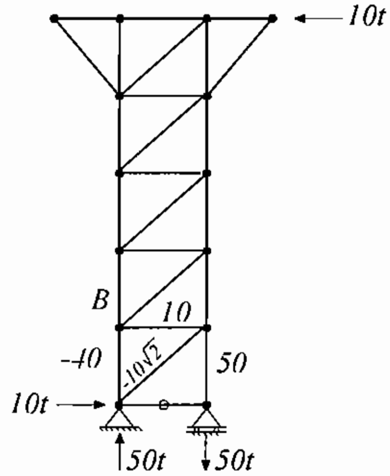


حل :

چون تغییر مکان افقی نقطه B را می‌خواهیم یک بار واحد مجازی افقی در B اعمال می‌کنیم. نیروهای داخلی در اثر این بار واحد روی شکل نشان داده شده است.



بدیهی است بقیه نیروهای نشان داده شده صفر نیرویی هستند. حال نیروهای داخلی را تحت بارگذاری اصلی به‌دست می‌آوریم. واضح است که فقط کافی است نیروی داخلی اعضایی را به‌دست آوریم که تحت بار واحد مجازی صفر نیرویی نیستند. نیروهای داخلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

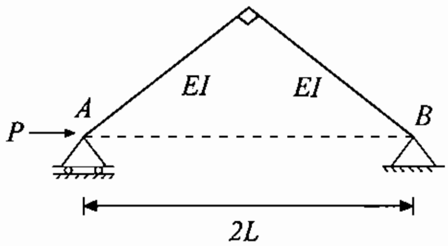


حال می‌نویسیم:

$$\bar{1}\cdot\Delta_B=\sum \bar{P}_i\,\frac{P_i\,L_i}{EA_i}$$

$$\bar{1}\cdot\Delta_B=\frac{1}{EA}\left[\left(\left(-10\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\right)+\left(10\times1\times3\right)+\left(50\times1\times3\right)\right]\ \Rightarrow\ \Delta_B=\frac{264.8}{EA}$$

۱۴ ـ مقدار نزدیک‌شدگی تکیه‌گاه‌های A و B سازه زیر چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**



۱) $\frac{PL^3}{3EI}$

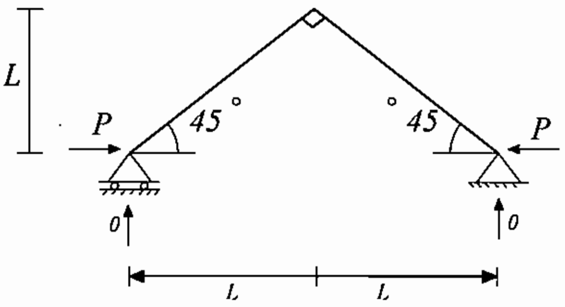
۲) $\frac{2PL^3}{3EI}$

۳) $\frac{\sqrt{2}\,PL^3}{3EI}$

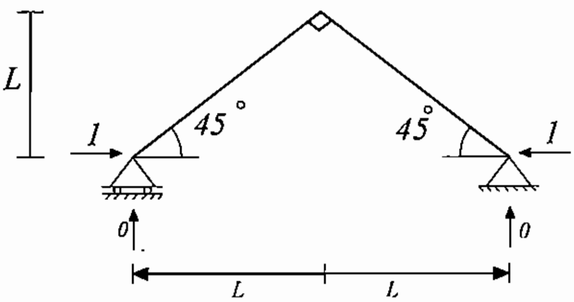
۴) $\frac{2\sqrt{2}\,PL^3}{3EI}$

حل :

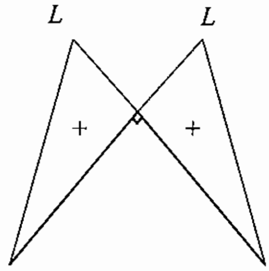
چون تکیه‌گاه B ثابت است لذا کافی است تغییر مکان افقی تکیه‌گاه A را بیابیم. نمودار لنگر داخلی عضوها را تحت بارگذاری اصلی و بار واحد افقی اعمال شده در تکیه‌گاه A رسم می‌کنیم.



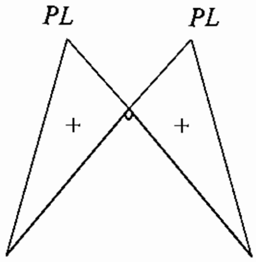
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تحت بارگذاری اصلی



عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تحت بار واحد مجازی



دیاگرام خمش تحت بار واحد مرکزی

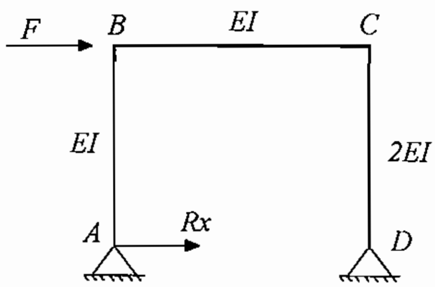


دیاگرام خمش تحت بارگذاری اصلی

$$\Delta = 2A_M \cdot \bar{y} = 2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EA}\right)\left(\sqrt{2}\,L\right)\times\frac{2}{3}L\right\} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{PL}{EI}$$

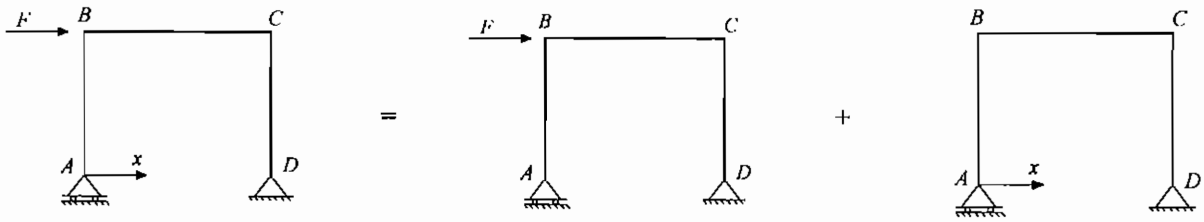
۱۵ ـ در قاب شکل زیر طول کلیه اعضا یکسان است. نیروی عکس‌العمل R_x را به‌دست آورید. **(سراسری ۱۳۷۲)**

۱) $-\frac{7}{24}F$
۲) $-\frac{4}{9}F$
۳) $\frac{4}{9}F$
۴) $-\frac{3}{12}F$

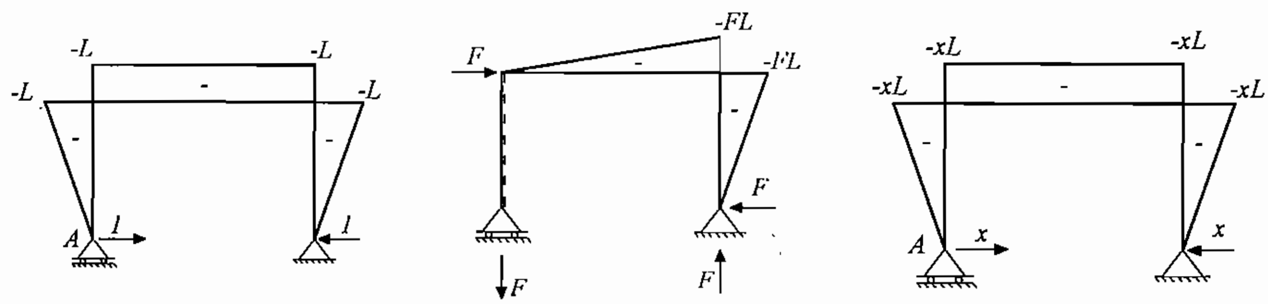


حل :

عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A را حذف می‌کنیم و به جای آن نیروی مجازی x را قرار می‌دهیم.



حال باید تغییر مکان نقطه A در اثر اعمال بار F در B و بار x در A را بیابیم. برای این کار از روش بار واحد استفاده کرده و بار واحد مجازی را در نقطه A اعمال کرده و لنگر داخلی مجازی را می‌یابیم. لنگر داخلی در اثر نیروی F و x را نیز می‌یابیم.



از روش مور برای محاسبه تغییر مکان‌های مورد نیاز استفاده می‌کنیم.

تغییر مکان نقطه A در اثر بار F:

$$\Delta_{A_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{-FL\times L}{EI}\right)\times(-L)+\frac{1}{2}\left(\frac{-FL\times L}{2EI}\right)\left(\frac{-2L}{3}\right)=\frac{4FL^3}{6EI}=\frac{2FL^3}{3EI}$$

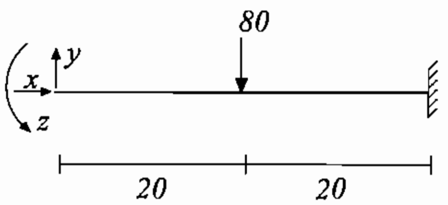
تغییر مکان نقطه A در اثر بار x:

$$\Delta_{A_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-xL\times L}{EI}\right)\left(\frac{-2L}{3}\right)+\left(\frac{-xL\times L}{EI}\right)(-L)+\frac{1}{2}\left(\frac{-xL\times L}{2EI}\right)\left(-\frac{2L}{3}\right)=\frac{3xL^3}{2EI}$$

طبق سازگاری تغییر شکل‌ها تغییر مکان نقطه A باید صفر باشد لذا:

$$\Delta=\Delta_{A_1}+\Delta_{A_2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{2FL^3}{3EI}+\frac{3xL^3}{2EI}=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-4F}{9}$$

۱۶ ـ در سازه مطابق شکل زیر، انرژی ذخیره شده مینیمم است اگر: $(GA=\infty\ ,\ EA=20\ ,\ EI=300)$ **(سراسری ۱۳۷۳)**



۱) $z=420\ ,\ y=70\ ,\ x=20$

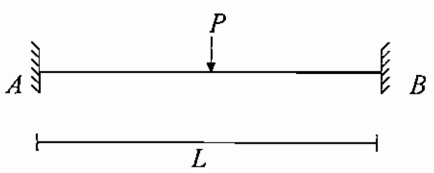
۲) $z=400\ ,\ y=40\ ,\ x=0$

۳) $z=420\ ,\ y=40\ ,\ x=40$

۴) $z=475\ ,\ y=60\ ,\ z=0$

حل :

انرژی ذخیره شده در سازه زمانی مینیمم است که سازه در مقیدترین وضعیت خود باشد یعنی انتهای دیگر سازه نیز گیردار باشد. در تیر دو سر گیردار با طول L که بار P در وسط دهانه آن واقع است داریم:

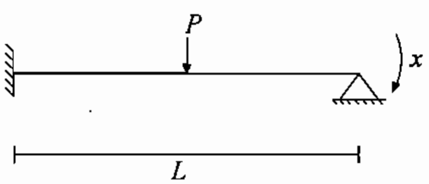


$$\begin{cases} R_{Ay}=R_{By}=\dfrac{P}{2} \\ R_{Ax}=R_{Bx}=0 \\ M_A=M_B=\dfrac{PL}{8} \end{cases}$$

در این سازه $P=80$ و $L=40$ است پس:

$$\begin{cases} x=R_{Ax}=0 \\ y=R_{Ay}=\dfrac{80}{2}=40 \\ z=M_A=\dfrac{80(40)}{8}=400 \end{cases}$$

۱۷ ـ در سازه‌ای مطابق شکل، به ازاء .... انرژی داخلی سازه مینیمم است. (سراسری ۱۳۷۷)



۱) $x=\frac{PL}{4}$

۲) $x=\frac{PL}{12}$

۳) $x=\frac{PL}{8}$

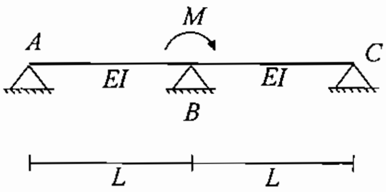
۴) $x=0$

حل :

برای مینیمم شدن انرژی داخلی سازه باید مقیدترین حالت را داشته باشد یعنی تکیه‌گاه سمت راست باید گیردار شود پس x، باید برابر لنگر تیر دو سر گیردار به طول L با بار P در وسط دهانه است یعنی:

$$x=\frac{PL}{8}$$

۱۸ ـ در شکل زیر مقدار R_B کدام است؟ **(سراسری ۱۳۷۹)**

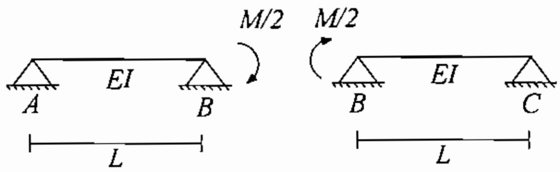


۱) صفر ۲) $\frac{M}{2L}\uparrow$

۳) $\frac{M}{2L}\downarrow$ ۴) $\frac{M}{L}\uparrow$

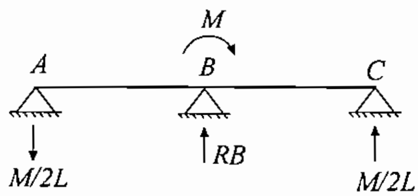
حل :

با توجه به تقارن سازه از لنگر M مقدار $\frac{M}{2}$ توسط تیر AB و مقدار $\frac{M}{2}$ توسط تیر BC تحمل می‌شود. (این نتیجه را می‌توان با روش سه لنگری بررسی کرد.) در این صورت اگر در B برش بزنیم خواهیم داشت:



$$\sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_{y_A} = \frac{M}{2L}\downarrow \qquad \sum M_B = 0 \;\Rightarrow\; R_{y_C} = \frac{M}{2L}\uparrow$$

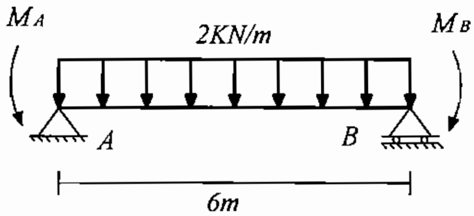
پس در سازه اصلی داریم:



$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_B = 0$$

این مطلب را به‌طور شهودی نیز می‌توان دریافت.

۱۹ ـ در صورتی که شیب در نقاط A و B صفر شود، مقادیر M_A و M_B کدام است؟ (برحسب $KN \cdot m$) **(سراسری ۱۳۸۰)**

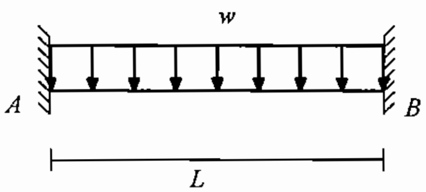


۱) $M_A = M_B = 6$ ۲) $M_A = M_B = 3$

۳) $M_A = 6 , = M_B = 3$ ۴) $M_A = 3 , = M_B = 6$

حل :

چون شیب در A و B صفر است لذا می‌توان این‌گونه فرض کرد که A و B تکیه‌گاه گیردار است. در این‌صورت لنگرهای گیرداری سازه همان M_A و M_B خواهد بود. در تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده داریم:



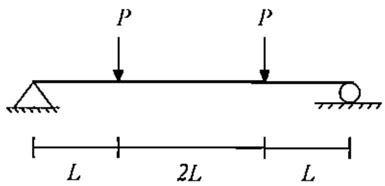
$$M_A = M_B = \frac{WL^2}{12}$$

در این سازه داریم:

$$\begin{cases} W = 2\ \dfrac{KN}{m} \\ L = 6 \end{cases} \Rightarrow \quad M_A = M_B = \frac{(2)(6)^2}{12} = 6\ KN \cdot m$$

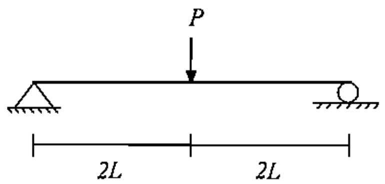
۲۰ ـ اگر تغییر شکل حداکثر مربوط به حالت‌های (الف) و (ب) مطابق زیر داده شده باشد، نیروی به‌وجود آمده در تکیه‌گاه فنری چقدر خواهد بود؟(سراسری ۱۳۸۱)

(الف)



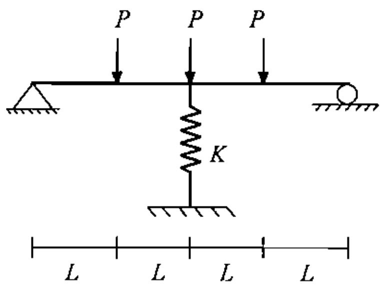
$$\Delta_{max} = \frac{11PL^3}{6EI}$$

(ب)



$$\Delta_{max} = \frac{4PL^3}{3EI}$$

(ج)



$$K = \frac{EI}{5L^3}$$

۱) P　　۲) 2P　　۳) $\frac{P}{2}$　　۴) $\frac{3P}{2}$

حل :

در سازه (ج) فرض کنید فنر وجود نداشته باشد. در این‌صورت طبق اصل جمع آثار قوا تغییر مکان ماکزیمم تیر برابر است با:

$$\Delta_{max} = \frac{11PL^3}{6EI} + \frac{4PL^3}{3EI} = \frac{19PL^3}{6EI}$$

ولی چون فنر وجود دارد یک نیروی اضافی F ناشی از وجود فنر به وسط دهانه تیر و به سمت بالا وارد می‌شود. این نیرو همان نیروی ایجاد شده در فنر است. پس میزان تغییر مکان برابر است با:

$$\Delta = \frac{19PL^3}{6EI} - \frac{4FL^3}{3EI}$$

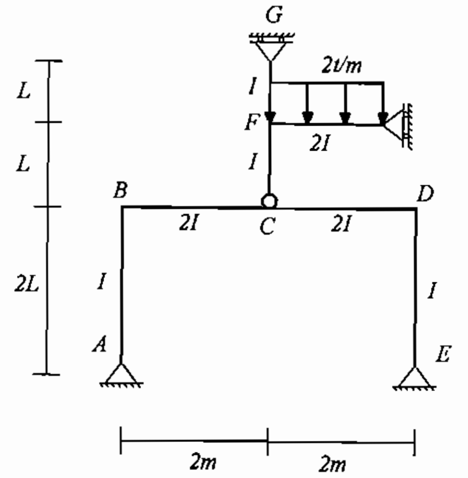
این تغییر مکان برابر تغییر مکان فنر است یعنی:

$$\Delta_K = \frac{F}{K} = \frac{5FL^3}{EI}$$

طبق سازگاری تغییر شکل‌ها چون تیر به فنر متصل است لذا تغییر مکان تیر با تغییر مکان فنر یکسان است یعنی:

$$\Delta = \Delta_K \Rightarrow \frac{19PL^3}{6EI} - \frac{4FL^3}{3EI} = \frac{5FL^3}{EI} \Rightarrow \frac{19PL^3}{6EI} = \frac{19FL^3}{3EI} \Rightarrow F = \frac{P}{2}$$

۲۱ـ M_{BC} را برحسب $t \cdot m$ حساب کنید. (از تغییر طول اعضاء صرف‌نظر شود.) (سراسری ۱۳۸۱)



۱) صفر
۲) 4
۳) 6
۴) 8

حل :

چون از تغییر طول اعضاء صرف‌نظر شده است لذا در اثر بارگذاری موجود؛ عضو CG تغییر طولی نخواهد داشت یعنی گره C جابه‌جایی قائم نمی‌کند پس هیچ باری روی BD وارد نمی‌شود تا سبب ایجاد لنگر در B شود پس M_{BC} برابر صفر است.

فصل پنجم

تحلیل سازه‌های نامعین

در فصل اول راجع به تشخیص سازه‌ها و معینی یا نامعینی آن‌ها بحث شد. در این فصل روش تحلیل سازه‌های نامعین بحث می‌شود. تفاوتی که تحلیل سازه‌های معین و نامعین با هم دارند آن است که در سازه‌های نامعین محاسبه مجهولات تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی علاوه بر هندسه سازه به مشخصات مقطع نیز بستگی دارد. همچنین در سازه‌های نامعین تغییر درجه حرارت و نشست‌های تکیه‌گاهی نیز می‌تواند سبب ایجاد نیروهای داخلی شود. در تحلیل سازه‌های نامعین دو روش اصلی وجود دارد که در زیر شرح داده می‌شود.

۱) روش نیرو یا نرمی:

در این روش نیروهای اضافی (اعم از تکیه‌گاهی یا داخلی) مجهول در نظر گرفته می‌شود. با حذف این مجهول سازه معین ایستایی می‌شود. در حالت بعد نیروی مجهول را به‌صورت نیروی خارجی در نظر گرفته و آن را طوری به‌دست می‌آوریم که شرایط اصلی سازه اولیه را ایجاد کند. از روش‌های تحلیل سازه که جزو روش‌های نیرو هستند می‌توان روش سازگاری تغییر شکل‌ها، روش کاستیگلیانو و روش سه لنگری را در نظر گرفت.

۲) روش تغییر مکان یا سختی:

در این روش تغییر شکل‌های سازه به عنوان مجهول در نظر گرفته می‌شود و پس از برقراری شرط سازگاری تغییر شکل‌ها، تغییر شکل‌های مجهول طوری به‌دست می‌آیند که شرایط اصلی مسأله و شرط ایستایی سازه برقرار شود. از روش‌های سختی می‌توان روش شیب ـ افت و روش توزیع لنگر و روش کانی را در نظر گرفت.

در ارائه کلیت این روش‌ها می‌توان گفت:

الف- روش سازگاری تغییر شکل‌ها: این روش جزء روش نیروها محسوب می‌شود. این روش برای تحلیل انواع سازه (تیر – قاب – خرپا) تحت اثر هرنوع عاملی (بارگذری، نشست و حرارت) به کار می‌رود. این روش برای سازه‌های یک درجه آزادی در کنکور موثر است.

ب- روش سه لنگری: این روش جزء روش نیروها محسوب می‌شود و معمولاً برای تحلیل تیرهای سراسری نوشته شده است.

ج- مدل‌سازی با فنر: با تعریف سختی انتقالی و دورانی برای اعضاء سازه‌ای می‌توان از این روش در تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کرد.

د- روش شیب و افت: این روش جزء روش سختی محسوب می‌شود و برای تحلیل تیرها و قاب‌های نامعین با تغییر شکل‌های خمشی تنها نوشته می‌شود.

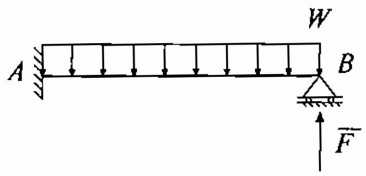
هـ- روش توزیع لنگر کراس: این روش جزء روش سختی محسوب می‌شود و برای تحلیل قاب‌های بدون درجه آزادی و تیرهای سراسری استفاده می‌شود.

الف) روش سازگاری تغییر شکل‌ها:

به طور کلی مراحل این روش عبارتند از:

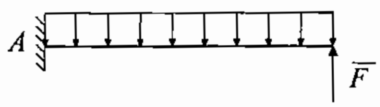
۱- تشخیص سازه (تعیین درجه نامعینی)

۲- انتخاب مجهول اضافه: این مجهول باید به گونه‌ای انتخاب شود که با حذف آن سازه پایدار و معین شود. این سازه به سازه اولیه موسوم است. مثلاً در مثال روبه‌رو واکنش تکیه‌گاه B به عنوان مجهول در نظر گرفته شده است.



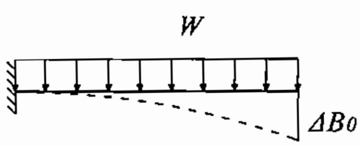
۳- برقراری شرط سازگاری تغییر شکل در امتداد مجهول اضافه: در مثال ارائه شده چون در سازه اصلی به دلیل وجود تکیه‌گاه تغییر مکان نقطه B صفر بوده لذا در سازه جدید نیز این شرط باید لحاظ شود یعنی:

$\Delta_B = 0$

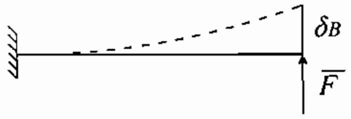


۴- استفاده از اصل جمع آثار:

حال از جمع آثار قوا استفاده کرده و شرط فوق را از لحاظ می‌کنیم. در این مثال تغییر مکان انتهای B برابر است با تغییر مکان انتهای تیر تحت اثر بار گسترده منهای تغییر مکان انتهای تیر تحت اثر بار مجهول اضافه. در این مسأله طبق اصل جمع آثار قوا خواهیم داشت:



سازه اولیه تحت اثر فقط بارگذاری،



سازه اولیه تحت اثر بار واحد در امتداد مجهول اضافه

$$\Delta_B = \Delta_{B_0} + \delta_B$$

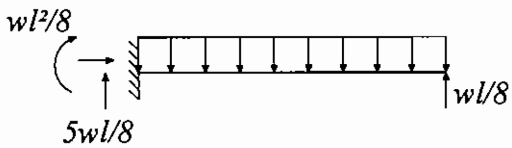
۵ـ یافتن مجهول اضافه با استفاده از روابط فوق.

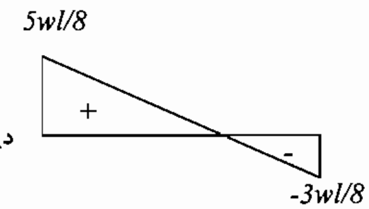
$$\Delta_B = 0 \;\Rightarrow\; \Delta_{B_0} - \delta_B = 0 \;\Rightarrow\; \Delta_{B_0} = \delta_B$$

در مسأله ارائه شده داریم:

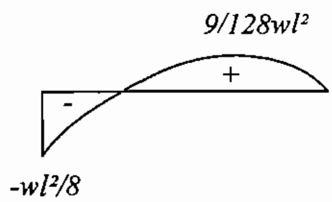
$$\Delta_{B_0} = \frac{WL^4}{8EI} \;,\; \delta_B = \frac{FL^3}{3EI} \;\Rightarrow\; \Delta_{B_0} = \delta_B \;\Rightarrow\; \frac{WL^4}{8EI} = \frac{FL^3}{3EI} \;\Rightarrow\; F = \frac{3WL}{8}$$

توجه: با یافتن مجهول اضافه بقیه نیروهای مجهول مسأله به کمک معادلات تعادل ایستایی قابل محاسبه خواهند بود، به طور مثال در این مسأله می‌توان تکیه‌گاه را حذف کرد و یک نیروی متمرکز $\frac{3wL}{8}$ به سمت بالا در نقطه B اعمال کرد که در این صورت دیاگرام برش و خمش سازه به صورت زیر قابل رسم خواهد بود.





دیاگرام برش



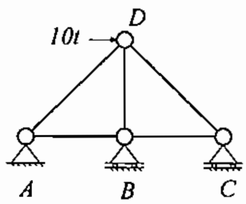
دیاگرام خمش

تحلیل خرپای نامعین با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها:

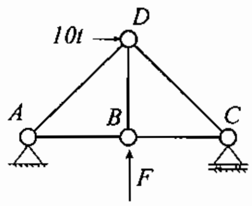
در خرپاهای نامعین، نامعینی به دو صورت خارجی یا داخلی اتفاق می‌افتد. در زیر راجع به این دو حالت توضیح داده شده است.

A) انتخاب واکنش اضافی به عنوان مجهول اضافه:

خرپای زیر را در نظر بگیرید:

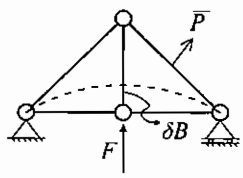


با فرض اینکه تکیه‌گاه B واکنش اضافه می‌باشد آن‌را حذف کرده و به جای آن یک نیروی مجهول قرار می‌دهیم:

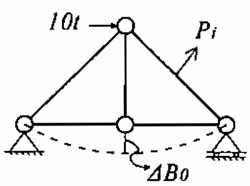


سازه اولیه تحت اثر بارگذاری + مجهول اضافه

حال با استفاده از قانون جمع آثار می‌توان این سازه را تبدیل به دو سازه زیر کرد:



سازه اولیه تحت اثر بار مجازی در امتداد مجهول اضافه



سازه اولیه تحت اثر فقط بارگذاری

حال می‌توان تغییر مکان نقطه B را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta_B = \Delta_{B_0} - \delta_B$$

شرط سازگاری تغییر شکل آن است که با توجه به وجود عکس‌العمل در نقطه B (در سازه اصلی) تغییر مکان این نقطه صفر است لذا داریم:

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow \Delta_{B_0} - \delta_B = 0 \Rightarrow \Delta_{B_0} = \delta_B$$

که مقادیر فوق را طبق اصل کار مجازی می‌توان به صورت زیر نوشت:

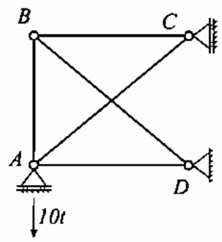
$$\Delta_{B_0} = \delta_B \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \overline{p}_i \frac{p_i L_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{p}_i^2 L_i}{EA_i}$$

چون $\overline{p}_i$ ها برحسب F می‌باشد، در تساوی فوق F بدست می‌آید.

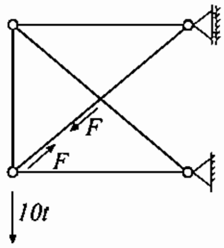
B) انتخاب یک میله به عنوان مجهول اضافه:

حال یک خرپای نامعین داخلی را بررسی می‌کنیم.

خرپای زیر را در نظر بگیرید که یک درجه نامعین داخلی است.

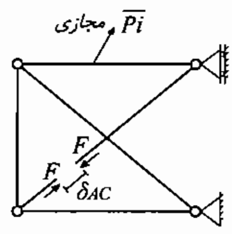


میله AC را به عنوان مجهول اضافه در نظر می‌گیریم، باید توجه داشت که در سازه‌های نامعین داخلی برای حذف نامعینی کافی است عضو را ببریم. در این صورت دیگر در عضو نیرو ایجاد نمی‌شود، حالا به‌جای نیروی عضو مورد نظر یک نیروی مجهول در محل برش اعمال می‌کنیم.



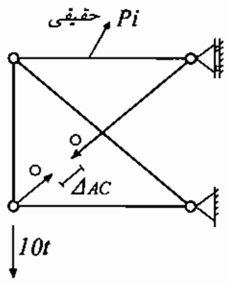
سازه اولیه تحت اثر بارگذاری + مجهول اضافه

حال می‌توان طبق اصل جمع آثار قوا سازه فوق را به دو سازه زیر تبدیل کرد.



شکل دوم

سازه اولیه تحت اثر یک جفت بار واحد در امتداد مجهول اضافه



شکل اول

سازه اولیه تحت اثر فقط بارگذاری

شرط سازگاری تغییر شکل‌ها بیان می‌کند که شکاف ایجاد شده باید صفر باشد. (با توجه به شرایط سازه اصلی) لذا خواهیم داشت:

$$\Delta_{AC}+\delta_{AC}=0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{AC}=-\Delta_{AC}$$

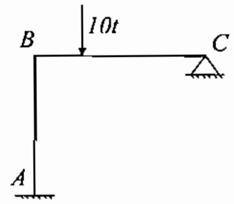
و طبق قضیه کار مجازی خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\overline{P}_i^2 L_i}{EA_i}=-\sum_{i=1}^{m}\overline{P}_i\frac{P_i L_i}{EA_i}$$

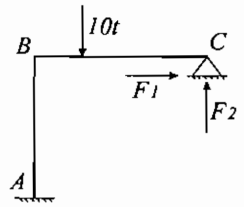
از حل این معادله نیروی مجهول به‌دست می‌آید.

تحلیل سازه‌های نامعین با درجه نامعینی بیش از یک:

قاب زیر را در نظر بگیرید:

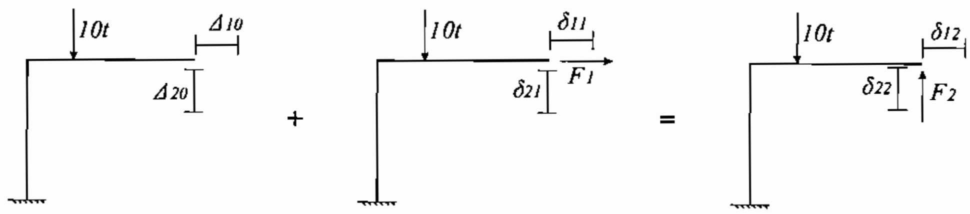


در این قاب دو درجه نامعینی خارجی داریم پس می‌توان عکس‌العمل C را حذف کرده و دو نیروی مجهول F_1 و F_2 را به سازه در تکیه‌گاه C اعمال کنیم:



سازه تحت بارگذاری + مجهول اضافه

طبق اصل آثار قوا این سازه را به سه سازه زیر تقسیم می‌کنیم:



حال با توجه به اینکه تغییر مکان نقطه C در سازه اصلی صفر است می‌توان شرط سازگاری تغییر شکل‌ها را برای Δ_1 و Δ_2 نوشت:

$$\begin{cases} \Delta_{10} = \delta_{11} + \delta_{12} = 0 \\ \Delta_{20} = \delta_{21} + \delta_{22} = 0 \end{cases}$$

چون δ_{11}، δ_{12}، δ_{21} و δ_{22} به F_1 و F_2 وابسته است لذا دستگاه فوق دو معادله و دو مجهول است و می‌توان F_1 و F_2 را از این دستگاه به‌دست آورد.

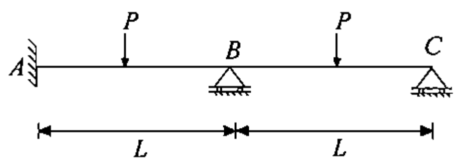
جمع‌بندی کلی در مورد تحلیل سازه‌های نامعین به روش سازگاری تغییر شکل‌ها:

هرگاه سازه‌ای دارای n درجه نامیعنی استاتیکی باشد با حذف n مجهول اضافه، سازه‌ای پایدار بدست می‌آوریم.این سازه می‌باید n+1 بار تحلیل شود که یک بار تحت تاثیر بارگذاری تنها و n بار تحت اثر بار واحد در امتداد هر یک از مجهولات اضافه تحلیل می‌شود.

- اگر سازه دارای نشست و تغییرات حرارت نیز باشد باید تغییر شکل‌های ناشی از این عوامل نیز به سازه اضافه شود.

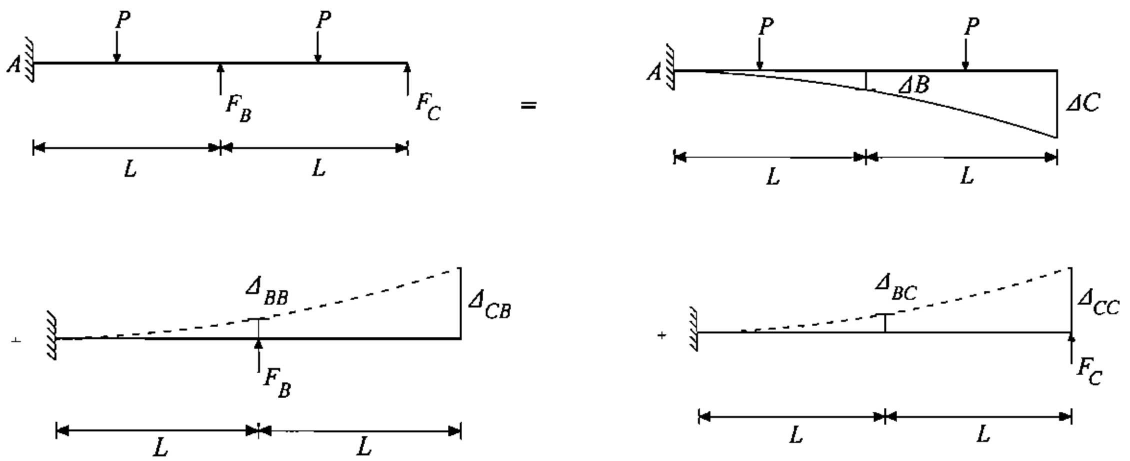
- توجه داشته باشید که پس از n+1 بار تحلیل گفته شده، n مجهول اضافه بدست می‌آید که می‌توان آن‌ها را در سازه اعمال کرده و بقیه نیروها و مجهولات را همانند یک سازه معین استاتیکی محاسبه کرد.

مثال : عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های B و C را بیابید. (با روش سازگاری تغییر شکل‌ها)



حل :

ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های B و C را به عنوان مجهول اضافه در نظر می‌گیریم با استفاده از اصل جمع آثار قوا داریم:



از روابط تیرهای مهم داریم:

$$\Delta_B = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \times \frac{L}{2} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)L^2}{2EI} = \frac{11}{16}\frac{PL^3}{EI}\downarrow$$

$$\Delta_C = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \times \frac{3L}{2} + \frac{P\left(\frac{3L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{P\left(\frac{3L}{2}\right)^2}{2EI} \times \frac{L}{2} = \frac{92}{48}\frac{PL^3}{EI}\downarrow$$

$$\Delta_{BB} = \frac{F_B L^3}{3EI} \quad , \quad \Delta_{CB} = \frac{F_B L^3}{3EI} + \frac{F_B L^2}{2EI} \times L = \frac{5F_B L^3}{6EL}$$

$$\Delta_{BC} = \frac{F_C L^3}{3EI} + \frac{(F_C L)L^2}{2EI} = \frac{5}{6}\frac{F_C L^3}{EI}$$

$$\Delta_{CC} = \frac{F_C (2L)^3}{3EI} = \frac{8}{3}\frac{F_C L^3}{EI}$$

طبق سازگاری تغییر شکل‌ها داریم:

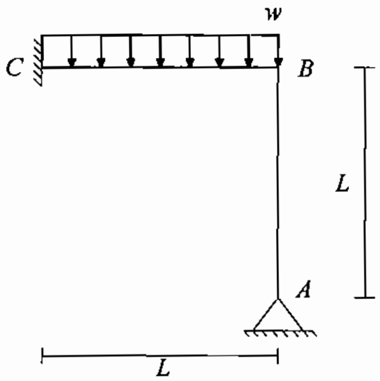
$$\begin{cases}\Delta_B=\Delta_{BB}+\Delta_{BC}\\ \Delta_C=\Delta_{CB}+\Delta_{CC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{11}{16}\dfrac{PL^3}{EI}=\dfrac{F_BL^3}{3EI}+\dfrac{5F_CL^3}{6EI}\\ \dfrac{92}{48}\dfrac{PL^3}{EI}=\dfrac{5F_BL^3}{6EI}+\dfrac{8}{3}\dfrac{F_CL^3}{EI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{11P}{16}=\dfrac{F_B}{3}+\dfrac{5F_C}{6}\\ \dfrac{92P}{48}=\dfrac{5F_B}{6}+\dfrac{8F_C}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{33}{48}P=\dfrac{16F_B}{48}+\dfrac{40F_C}{48}\\ \dfrac{92P}{48}=\dfrac{40F_B}{48}+\dfrac{128F_C}{48}\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر F_B و F_C به‌دست می‌آید.

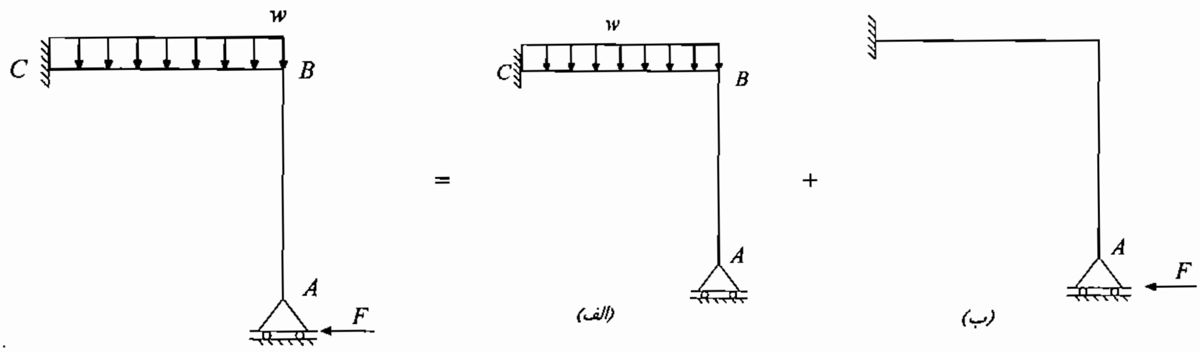
این مسأله فقط به عنوان تمرین ارائه شده است و قطعاً به عنوان یک مسأله تستی مناسب نمی‌باشد.

مثال : در سازه زیر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A را به‌دست آورید.



حل :

تکیه‌گاه A را به تکیه‌گاه غلتکی تبدیل می‌کنیم و عکس‌العمل افقی A را به‌صورت یک نیروی مجهول اعمال می‌کنیم. حال طبق اصل جمع آثار قوا می‌توان سازه را به صورت زیر مدل کرد.



می‌خواهیم تغییر مکان افقی تکیه‌گاه A را در سازه (الف) بیابیم. چون در این سازه تکیه‌گاه A غلتکی است لذا ستون BA به سادگی تغییر مکان می‌دهد (در جهت افق) پس این قطعه هیچ نقشی در تحمل خمش ندارد پس می‌توان نقطه B را به‌صورت یک مفصل ساده در نظر گرفت. در این صورت در تیر BC که یک تیر یک سرگیردار و یک سر مفصل است، تحت اثر بار گسترده W دوران B برابر است با:

$$\theta_{B_1}=\frac{WL^3}{48EI}$$

پس:

$$\Delta_{A_1} = \theta_{B_1} \times L = \frac{WL^4}{48EI}$$

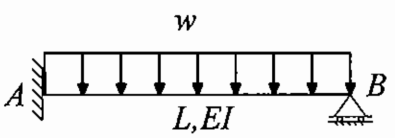
حال تغییر مکان افقی تکیه‌گاه A را در سازه (ب) می‌یابیم. تغییر مکان A در این سازه برابر است با تغییر مکان انتهای ستون BA و تغییر مکان ناشی از دوران گره B. در اثر این نیرو لنگر FL در B ایجاد می‌شود که دورانی برابر با $\frac{ML}{4EI} = \frac{FL^2}{4EI}$ ایجاد می‌شود. پس تغییر مکان انتهای A برابر است با:

$$\Delta_{A_2} = \theta_{B_2} \times L + \frac{FL^3}{3EI} = \frac{FL^3}{4EI} + \frac{FL^3}{3EI} = \frac{7FL^3}{12EI}$$

چون در سازه اصلی تکیه‌گاه A مفصلی است لذا تغییر مکان انتهای A صفر است، پس:

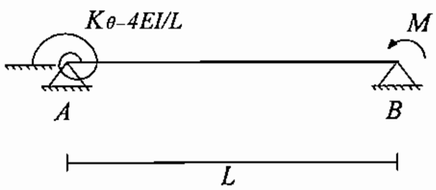
$$\Delta_{A_1} = \Delta_{A_2} \Rightarrow \frac{WL^4}{48EI} = \frac{7FL^3}{12EI} \Rightarrow F = \frac{WL}{28}$$

نکته :



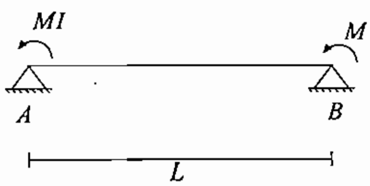
$$\begin{cases} M_A = \frac{WL^2}{8} \\ R_A = \frac{5WL}{8} \\ R_B = \frac{3WL}{8} \\ \theta_B = \frac{qL^3}{48EI} \end{cases}$$

مثال : در سازه زیر دوران نقطه A چقدر است؟



حل :

لنگر ایجاد شده در فنر را به عنوان مجهول اضافی در نظر می‌گیریم. در اثر اعمال این دو لنگر در دو انتهای تیر میزان دوران A برابر است با:



$$\theta_{A_1} = \frac{ML}{6EI} - \frac{M_1 L}{3EI}$$ ساعتگرد

از طرفی این لنگر در فنر دورانی برابر $\frac{M_1}{K_\theta}$ ایجاد می‌کند پس:

$$\theta_{A_2}=\frac{M_1}{K_\theta}=\frac{M_1}{\frac{4EI}{L}}=\frac{M_1 L}{4EI} \quad \text{ساعتگرد}$$

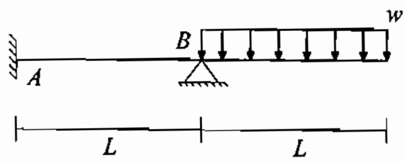
چون هر دو دوران با هم برابرند لذا داریم:

$$\frac{ML}{6EI}-\frac{M_1 L}{3EI}=\frac{M_1 L}{4EI} \Rightarrow \frac{ML}{6EI}=\frac{7M_1 L}{12EI} \Rightarrow M_1=\frac{2}{7}M$$

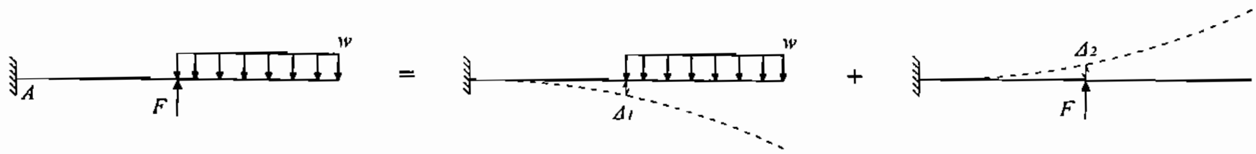
پس دوران A برابر است با:

$$\theta_A=\frac{M_1}{K_\theta}=\frac{\frac{2}{7}M}{\frac{4EI}{L}}=\frac{ML}{14EI}$$

مثال : در سازه زیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟



حل : تکیه‌گاه A را حذف کرده و به جای آن نیروی مجهول F قرار می‌دهیم.



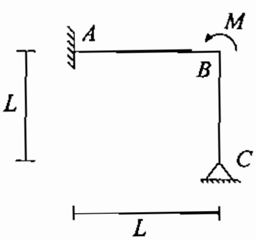
$$\Delta_1=\frac{(WL)L^3}{3EI}+\frac{\left(\frac{WL^2}{2}\right)L^2}{2EI}=\frac{7}{12}\frac{WL^4}{EI}$$

$$\Delta_2=\frac{FL^3}{3EI}$$

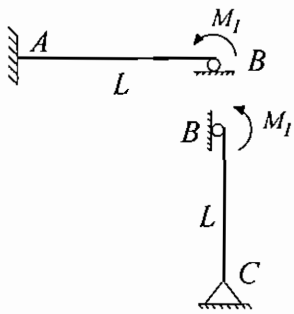
طبق شرط سازگاری تغییر شکل‌ها:

$$\Delta_1=\Delta_2 \Rightarrow \frac{7}{12}\frac{WL^4}{EI}=\frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow F=\frac{7WL}{4}$$

مثال : در سازه زیر چرخش نقطه B چقدر است؟



حل : در نقطه B برشی ایجاد می‌کنیم. فرض کنید از لنگر M مقدار M_1 به قطعه AB و مقدار M_2 به قطعه BC وارد شود. چون نقطه B به سادگی دوران می‌کند لذا می‌توان آن را به صورت مفصل در نظر گرفت.



در تیر AB دوران B برابر است با:

$$\theta_{B_1} = \frac{M_1 L}{4EI}$$

در تیر BC دوران نقطه B برابر است با:

$$\theta_{B_2} = \frac{M_2 L}{3EI}$$

طبق شرط سازگاری تغییر شکل‌ها دوران نقطه B در هر دو قطعه با هم برابر است پس:

$$\theta_{B_1} = \theta_{B_2} \Rightarrow \frac{M_1 L}{4EI} = \frac{M_2 L}{3EI} \Rightarrow \frac{M_1}{4} = \frac{M_2}{3}$$

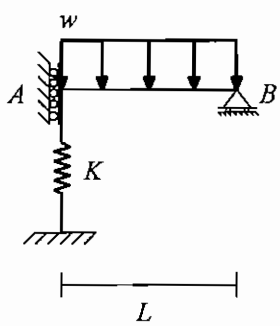
از طرفی می‌دانیم $M_1 + M_2 = M$ است پس:

$$\begin{cases} \frac{M_1}{4} = \frac{M_2}{3} \\ M_1 + M_2 = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = \frac{4}{3} M_2 \\ M_1 + M_2 = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 = \frac{3M}{7} \\ M_1 = \frac{4M}{7} \end{cases}$$

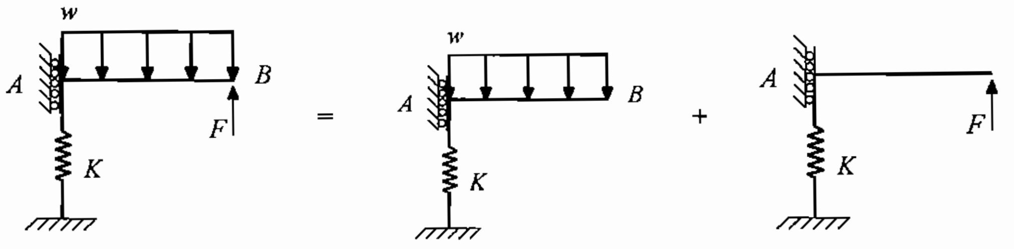
پس دوران نقطه B برابر است با:

$$\theta_B = \frac{M_1 L}{4EI} = \frac{\frac{4M}{7} L}{4EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{ML}{7EI}$$

مثال : در تیر زیر اگر سختی فنر $K = \frac{6EI}{L^3}$ باشد، تغییر مکان نقطه A و نیروی فنر را بیابید.



حل : عکس‌العمل B را حذف کرده و به جای آن عکس‌العمل مجهول F را در نقطه B اعمال می‌کنیم. با توجه به اصل جمع آثار قوا سازه به‌دست آمده را به دو سازه دیگر تبدیل می‌کنیم.



(۱) (۲)

$$\Delta_B = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2}$$

$$\Delta_{B_1} = \frac{WL}{K} + \frac{WL^4}{8EI} = \frac{WL^4}{6EI} + \frac{WL^4}{8EI} = \frac{7WL^4}{24EI}$$

$$\Delta_{B_2} = -\left(\frac{F}{K} + \frac{FL^3}{3EI}\right) = -\left(\frac{FL^3}{6EI} + \frac{FL^3}{3EI}\right) = -\frac{FL^3}{2EI}$$

در سازه اصلی چون تکیه‌گاه B وجوددارد لذا $\Delta_B = 0$ است پس:

$$\Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7WL^4}{24EI} = \frac{FL^3}{2EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{7}{12}WL \uparrow$$

با نوشتن معادله تعادل نیروی در راستای قائم نیروی فنر به‌دست می‌آید:

$$F_K = WL - F \quad \Rightarrow \quad F_K = \frac{5}{12}WL \uparrow$$

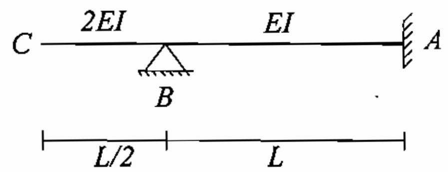
و تغییر مکان نقطه A همان تغییر مکان فنر است که برابر است با:

$$\Delta_A = \frac{F_K}{K} = \frac{\frac{5WL}{12}}{\frac{6EI}{L^3}} = \frac{5WL^4}{72EI}$$

نکته در مورد نشست تکیه‌گاهی

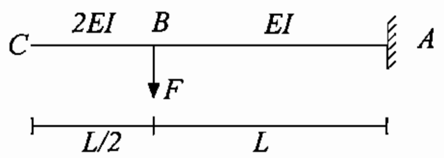
در سازه‌هایی که دارای یک درجه نامعینی است می‌توان سازه را با روش سازگاری تغییر شکل‌ها تحلیل کرد بدین صورت که با حذف عامل نامعینی مناسب و قرار دادن مجهول اضافی به جای آن، می‌توان وضعیت سازه را بررسی کرد.

مثال : در سازه زیر اگر تکیه‌گاه A به اندازه Δ نشست کند، اولاً عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟ ثانیاً: لنگر تکیه‌گاه A چقدر است؟ ثالثاً: نسبت تغییر مکان C به تغییر مکان B چقدر است؟



حل :

به‌جای آن‌که در نقطه A تغییر مکان Δ اعمال کرده و نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه B را به‌دست آوریم. فرض می‌کنیم که در اثر این نشست نیروی عکس‌العمل F باشد، لذا تکیه‌گاه B را حذف کرده و به جای آن نیروی F قرار می‌دهیم. در این‌صورت تغییر مکان نقطه B برابر است با:



$$\Delta_B=\frac{FL^3}{3EI}$$

اولاً: طبق فرض این تغییر مکان برابر Δ است لذا:

$$\Delta=\frac{FL^3}{3EI}\ \Rightarrow\ \text{B عکس‌العمل}\ F=R_B=\frac{3EI\Delta}{L^3}$$

ثانیاً: لنگر تکیه‌گاه A برابر است با عکس‌العمل B ضربدر طول AB پس:

$$M_A=R_B\times L=\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

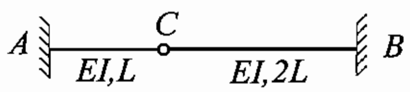
ثالثاً: اگر تغییر مکان C را بخواهیم، می‌نویسیم:

$$\Delta_C=\frac{FL^3}{3EI}+\frac{FL^2}{2EI}\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{7}{12}\frac{FL^3}{EI}$$

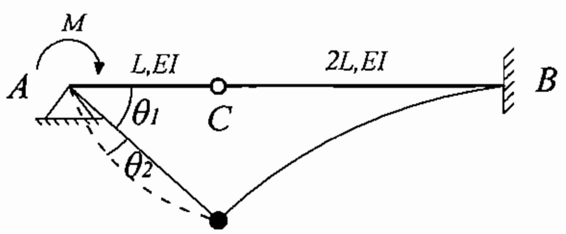
پس:

$$\frac{\Delta_C}{\Delta_B}=\frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{4}\ \Rightarrow\ \Delta_C=\frac{7}{4}\Delta_B$$

مثال : در سازه زیر تکیه‌گاه A به اندازه θ دوران کرده است. در این‌صورت لنگر تکیه‌گاه A چقدر است؟



حل : تکیه‌گاه A را به تکیه‌گاه مفصلی تبدیل کرده و به جای آن لنگر مجهول M را قرار می‌دهیم. با نوشتن معادله تعادل لنگر در نقطه AC داریم:



$$\sum M_A=0\ \Rightarrow\ C_y\times L=M\ \Rightarrow\ C_y=\frac{M}{L}$$

حال میزان دوران A را می‌یابیم. ابتدا تغییر مکان نقطه C را در اثر نیروی $\frac{M}{L}$ موجود در C به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta_{C_1}=\frac{FL_{CB}^3}{3EI}=\frac{\frac{M}{L}(2L)^3}{3EI}=\frac{8ML^2}{3EI}\ \Rightarrow\ \theta_{C_1}=\frac{\Delta_C}{L}\ \Rightarrow\ \theta_{C_1}=\frac{8ML}{3EI}$$

پس از آن‌که Δ_{C_1} ایجاد شد، قطعه AC در اثر لنگر M نیز دوران خواهد کرد یعنی:

$$\theta_{C_2}=\frac{ML}{3EI}$$

پس:

$$\theta_C=\theta_{C_1}+\theta_{C_2}=\frac{8ML}{3EI}+\frac{ML}{3EI}=\frac{3ML}{EI}$$

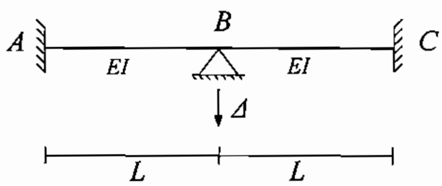
طبق فرض مسأله دوران A برابر θ است لذا:

$$\theta=\frac{3ML}{EI}$$

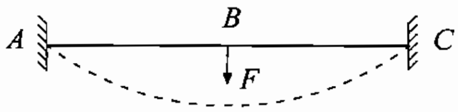
پس لنگر A برابر است با:

$$M=\frac{\theta EI}{3L}$$

مثال : در سازه زیر تکیه‌گاه B به اندازه Δ نشست می‌کند. عکس‌العمل تکیه‌گاه B و لنگر تکیه‌گاه‌های A و C را بیابید.



حل : تکیه‌گاه B را حذف کرده و به جای آن نیروی مجهول F را قرار می‌دهیم. در اثر این نیرو تغییر مکان B برابر است با:



$$\Delta_B=\frac{F(2L)^3}{192EI}\Rightarrow\Delta_B=\frac{FL^3}{24EI}$$

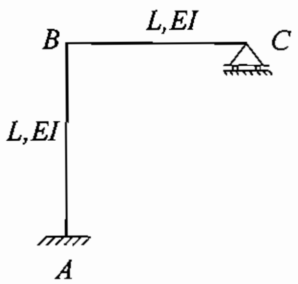
طبق فرض این تغییر مکان برابر Δ است پس:

$$\Delta=\frac{FL^3}{24EI}\Rightarrow F=\frac{24EI\Delta}{L^3}$$

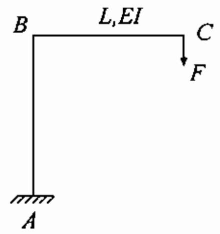
پس عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر $R_B=\frac{24EI\Delta}{L^3}$ خواهد بود. حال لنگر C و A را می‌یابیم. در تیر دو سر گیردار داریم:

$$M_A=M_C=\frac{PL_{AC}}{8}\Rightarrow M_A=M_C=\frac{\frac{24EI\Delta}{L^3}(2L)}{8}\Rightarrow M_A=M_C=\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

مثال : در سازه زیر اگر تکیه‌گاه C به اندازه Δ نشست کند مقدار لنگر A چقدر است؟



حل : تکیه‌گاه C را حذف کرده و به جای آن نیروی F قرار می‌دهیم. در این‌صورت تغییر مکان C برابر است با:



$$\Delta_C = \Delta_{C_1} + \theta_B L$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{(FL)L}{EI} \times L$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_C = \frac{4FL^3}{3EI}$$

چون طبق فرض تغییر مکان تکیه‌گاه C برابر Δ است لذا داریم:

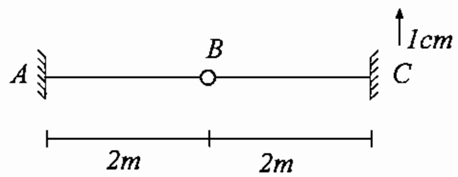
$$\Delta = \frac{4FL^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3EI\Delta}{4L^3}$$

پس لنگر A برابر است با:

$$M_A = FL \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{3EI\Delta}{4L^2}$$

توجه : در به‌دست آوردن θ_B، چون نقطه B می‌تواند به راست حرکت کند لذا باید AB را به‌صورت یک تیر یکسرگیردار در نظر گرفت.

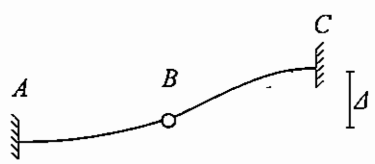
مثال : تیر دو سر گیردار ABC که در وسط آن مفصل داخلی B تعبیه شده است، مفروض است. اگر تکیه‌گاه C تیر به اندازه $\delta = 1cm$ به سمت بالا حرکت کند، با فرض $EI = 2000\, t \cdot m^2$، لنگر گیرداری در تکیه‌گاه A در جهت مثلثاتی برابر است با: (سراسری ۱۳۷۲)



۱) $-7.5\ t \cdot m$ ۲) $3.75\ t \cdot m$

۳) $-3.75\ t \cdot m$ ۴) $37.5\ t \cdot m$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



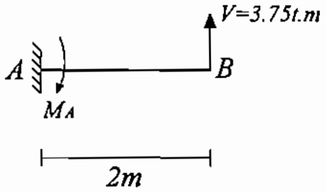
فرض کنید در اثر تغییر مکان انتهای C در عضوهای AB و BC نیروی برشی V ایجاد شود. در این‌صورت در تیر AB نیروی V تغییر مکانی برابر $\frac{VL^3}{3EI}$ به سمت بالا و در تیر BC نیروی V تغییر مکانی برابر $\frac{VL^3}{3EI}$ به سمت پایین ایجاد می‌کند پس با توجه به شکل داریم:

$$\Delta = \frac{2VL^3}{3EI} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{EI}{2L^3}$$

با توجه به فرضیات مسأله داریم:

$$V = \frac{0.03 \times 2000}{2 \times (2)^3} = \frac{60}{16} \quad \Rightarrow \quad V = 3.75\ t \cdot m$$

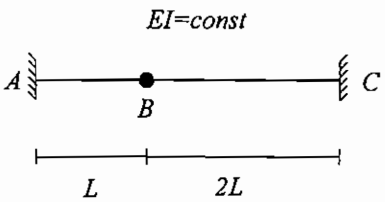
پس برش در انتهای B در تیر AB برابر 3.75 است لذا:



$$\Rightarrow \quad M_A = 3.75 \times 2 \quad \Rightarrow \quad M_A = 7.5 \text{ t}\cdot\text{m}$$

چون در جهت خلاف مثلثاتی است لذا علامت آن منفی است.

مثال : لنگر گیرداری M_C ناشی از نشست تکیه‌گاه C به مقدار Δ در تیر ABC کدام است؟ **(سراسری ۱۳۷۹)**

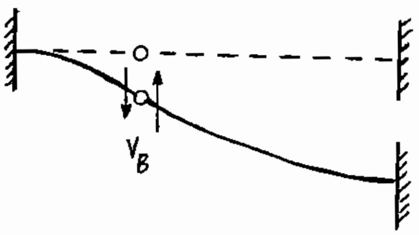


۱) $M_C = \dfrac{2EI\Delta}{5L^2}$ ۲) $M_C = \dfrac{EI\Delta}{2L^2}$

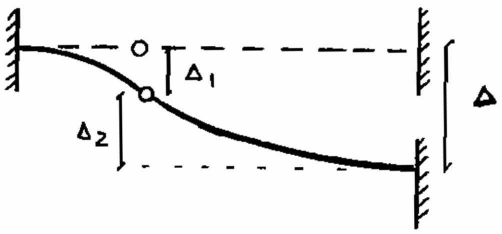
۳) $M_C = \dfrac{2EI\Delta}{3L^2}$ ۴) $M_C = \dfrac{EI\Delta}{L^2}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

فرض می‌کنیم در اثر نشست Δ در تکیه‌گاه C نیرویی به اندازه V در تیر ایجاد می‌شود. این نیرو در تکیه‌گاه B نیز اثر می‌کند لذا می‌توان گره B را تحت V در نظر گرفت:



از طرفی این نیروی V یک تغییر مکان در عضو AB ایجاد می‌کند که آن‌را Δ_1 و یک تغییر مکان در عضو BC ایجاد می‌کند که آن‌را Δ_2 می‌نامیم.



با نوشتن رابطه سازگاری تغییر شکل‌ها خواهیم داشت:

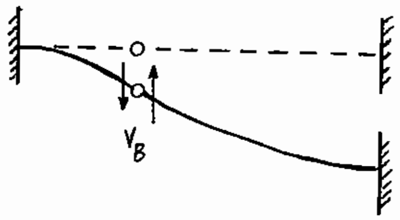
$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta \;\Rightarrow\; \frac{VL^3}{3EI} + \frac{V(2L)^3}{3EI} = \Delta$$

$$\Rightarrow \; \frac{3VL^3}{EI} = \Delta \;\Rightarrow\; V = \frac{EI\Delta}{3L^3}$$

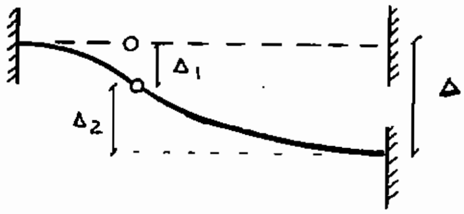
حال با به دست آوردن نیروی V می‌توان لنگر تکیه‌گاه C را بدست آورد یعنی داریم:

$$M_C = V\times(2L) = \frac{EI\Delta}{3L^3}\times 2L = \frac{2EI\Delta}{3L^2}$$

فرض می‌کنیم در اثر نشست Δ در تکیه‌گاه C نیرویی به اندازه V در تیر ایجاد می‌شود. این نیرو در تکیه‌گاه B نیز اثر می‌کند لذا می‌توان گره B را تحت V در نظر گرفت:



از طرفی این نیروی V یک تغییر مکان در عضو AB ایجاد می‌کند که آن‌را Δ_1 و یک تغییر مکان در عضو BC ایجاد می‌کند که آن‌را Δ_2 می‌نامیم.



با نوشتن رابطه سازگاری تغییر شکل‌ها خواهیم داشت:

$$\Delta_1+\Delta_2=\Delta \;\Rightarrow\; \frac{VL^3}{3EI}+\frac{V(2L)^3}{3EI}=\Delta$$

$$\Rightarrow\; \frac{3VL^3}{EI}=\Delta \;\Rightarrow\; V=\frac{EI\Delta}{3L^3}$$

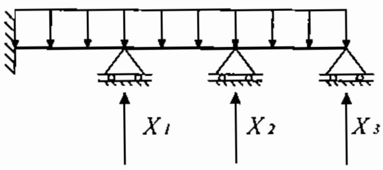
حال با به دست آوردن نیروی V می‌توان لنگر تکیه‌گاه C را بدست آورد یعنی داریم:

$$M_C = V\times(2L) = \frac{EI\Delta}{3L^3}\times 2L = \frac{2EI\Delta}{3L^2}$$

قضیه دوم کاستگلیانو و روش حداقل انرژی در تحلیل سازه‌های نامعین

براساس قضیه کاستیگلیانو هر یک از روابط سازگاری تغییر شکل، مشتق تابع انرژی نسبت به یکی از مجهولات اضافه است بنابراین مجهولات نیرویی یک سازه نامعین استاتیکی که در بینهایت شکل می‌توانست معادلات تعادل را ارضا، کند مقادیری را اختیار خواهند کرد که انرژی کرنشی داخلی سازه حداقل ممکن باشد.

به طور مثال در سازه زیر انرژی داخلی تابعی از x_1, x_2, x_3 می‌باشد و داریم:

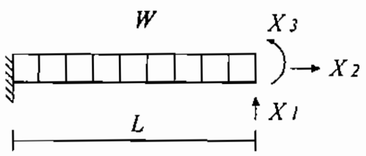


$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \Delta_2 = \dfrac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \\ \Delta_3 = \dfrac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

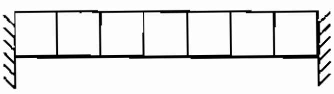
که ملاحظه می‌شود معادلات فوق بینهایت جواب صحیح می‌تواند داشته باشد. استفاده از روش کاستگلیانو، روش چندان مناسبی در حل مسائل امتحانی نیست ولی یک نتیجه مهم این قضیه به‌صورت زیر بیان می‌شود.

نکته : به طور کلی سازه هرچه مقیدتر باشد میزان انرژی داخلی کمتر می‌شود پس حداقل میزان انرژی داخلی در مقیدترین حالت سازه رخ می‌دهد.

مثال : مقادیر x_3, x_2, x_1 چقدر باشند تا انرژی داخلی سازه مینیمم شود:



مینیمم انرژی داخلی در مقیدترین حالت رخ می‌دهد، پس نقطه B باید تکیه‌گاه گیردار باشد تا مقیدترین حالت را داشته باشیم، لذا x_3, x_2, x_1 مجهولات تکیه‌گاه گیردار خواهند بود:



$$x_1 = \frac{wL}{2}$$

$$x_2 = 0$$

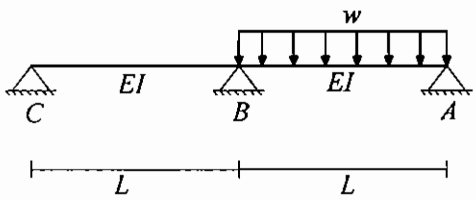
$$x_3 = \frac{-wL^2}{12}$$

ب) قضیه سه لنگری

روش سه لنگری ارتباط بین لنگرهای موجود در سه تکیه‌گاه متوالی از یک تیر سراسری را بیان می‌کند که در دهانه‌های مختلف تحت بارگذاری‌های مختلف قرار گرفته‌اند. نتیجه این روش بدین صورت است که برای تحلیل یک تیر سراسری، در نقاط مختلف برش‌هایی ایجاد می‌کنیم و لنگری مجازی در محل مقطع و در هر دو قطعه جدا شده در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که نقطه برش خورده دارای یک لنگر داخلی واحد است لذا حتماً ممان در سازه جدا شده چپ و راست با هم برابرند.

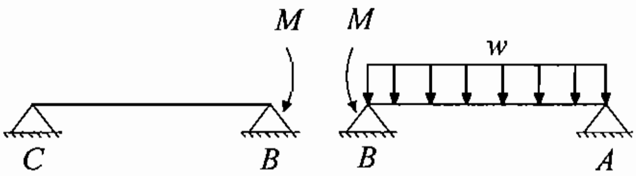
از طرفی چون تیر پیوسته است شیب سمت چپ و راست نیز با هم برابرند. با استفاده از این دو نکته می‌توان لنگر داخلی و یا شیب نقطه را به‌دست آورد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال : در سازه زیر عکس‌العمل تکیه‌گاه C کدام است؟



حل :

در نقطه B برشی ایجاد کرده و لنگر مجهول M را در این مقطع در نظر می‌گیریم. با به‌دست آوردن M در سازه جدا شده CB می‌توان عکس‌العمل C را به‌دست آورد. در سازه سمت چپ دوران نقطه B برابر است با:



$$\theta_{B_1} = \frac{ML}{3EI}$$ ساعتگرد

در سازه سمت راست دوران نقطه B برابر است با:

$$\theta_{B_2} = \frac{WL^3}{24EI} - \frac{ML}{3EI}$$ ساعتگرد

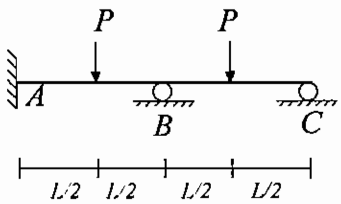
چون تیر یکسره است دوران راست و چپ نقطه B با هم برابرند لذا:

$$\theta_{B_1} = \theta_{B_2} \Rightarrow \frac{ML}{3EI} = \frac{WL^3}{24EI} - \frac{ML}{3EI} \Rightarrow \frac{2ML}{3EI} = \frac{WL^3}{24EI} \Rightarrow M = \frac{WL^2}{16}$$

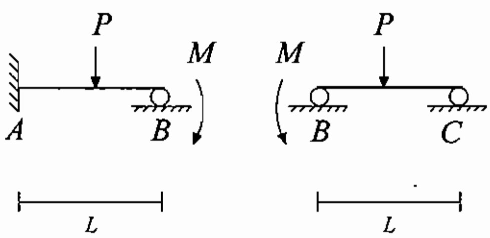
حال در قطعه CB داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow C_y \times L = \frac{WL^2}{16} \Rightarrow C_y = \frac{WL}{16}$$

مثال : در تیر زیر چرخش نقطه B چقدر است؟



در نقطه B برش ایجاد کرده و لنگر داخلی مجهول M اعمال می‌کنیم:



در قطعه AB داریم:

$$\theta_{1B}=\frac{PL^2}{32EI}-\frac{ML}{4EI} \quad \text{پادساعتگرد}$$

$$\theta_{2B}=\frac{PL^2}{16EI}-\frac{ML}{3EI} \quad \text{ساعتگرد}$$

چون شیب نقطه B در چپ و راست با هم برابر است لذا:

$$\theta_{1B}=-\theta_{2B} \Rightarrow \frac{PL^2}{32EI}-\frac{ML}{4EI}=\frac{ML}{3EI}-\frac{PL^2}{16EI} \Rightarrow \frac{3PL^2}{32EI}=\frac{7ML}{12EI} \Rightarrow M=\frac{9}{56}PL$$

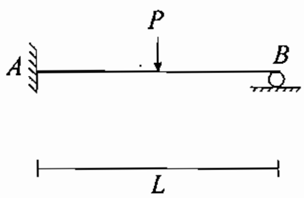
پس دوران B برابر است با:

$$\theta_{1B}=\frac{PL^2}{32EI}-\frac{9PL^2}{224EI}=\frac{-2PL^2}{224EI}=\frac{-PL^2}{112EI}$$

پس:

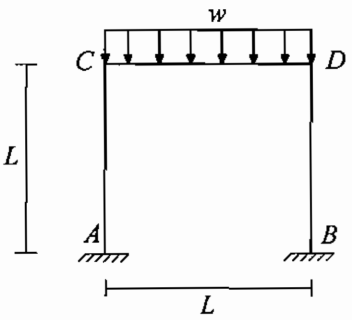
$$\theta_B=\frac{PL^2}{112EI} \quad \text{ساعتگرد}$$

نکته :



$$\begin{cases} R_A=\dfrac{11P}{16} \\ R_B=\dfrac{5P}{6} \\ M_A=\dfrac{3PL}{16} \\ \theta_B=\dfrac{PL^2}{32EI} \end{cases}$$

مثال : قاب زیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی B را بیابید.

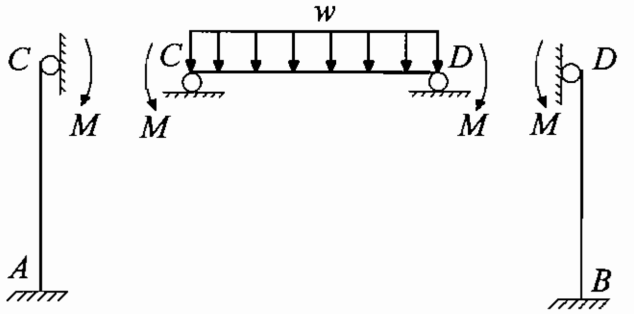


حل :

در نقاط D و C برش ایجاد کرده و لنگر داخلی M را اعمال می‌کنیم. با توجه به تقارن در هر دو نقطه C و D لنگر داخلی برابر است.

چون C و D تغییر مکان جانبی ندارند لذا C و D را به‌صورت مفصل مدل می‌کنیم.

در نقطه D، دوران را در هر دو قطعه CD و DB به‌دست می‌آوریم.



پادساعتگرد $\theta_{D_1}=\frac{WL^3}{24EI}-\frac{ML}{2EI}$

پادساعتگرد $\theta_{D_2}=\frac{ML}{4EI}$

طبق سازگاری تغییر شکل‌ها داریم:

$$\theta_{D_1}=\theta_{D_2} \Rightarrow \frac{WL^3}{24EI}-\frac{ML}{2EI}=\frac{ML}{4EI} \Rightarrow \frac{WL^3}{24EI}=\frac{3ML}{4EI} \Rightarrow M=\frac{WL^2}{18}$$

به عنوان یک نکته به خاطر می‌سپاریم که در یک تیر یک سرگیردار و یک سر مفصل اگر لنگر M به انتهای مفصل وارد شود لنگر $\frac{M}{2}$ در انتهای گیردار ایجاد می‌شود که هم علامت با M است، پس در این مسأله در قطعه BD، لنگر انتهای B برابر $\frac{M}{2}=\frac{WL^2}{36}$ و پادساعتگرد است.

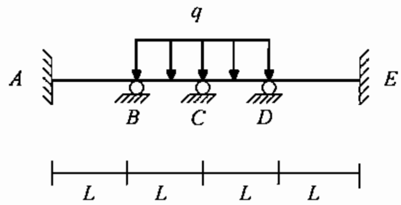
حال با نوشتن معادله تعادل لنگر در نقطه D داریم:

$$\sum M_D=0 \Rightarrow \frac{WL^2}{36}+\frac{WL^2}{18}=R_{xB_{xB}}\times L \Rightarrow R=\frac{WL}{12}$$

و واضح است که بنا به تقارن، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B برابر است با:

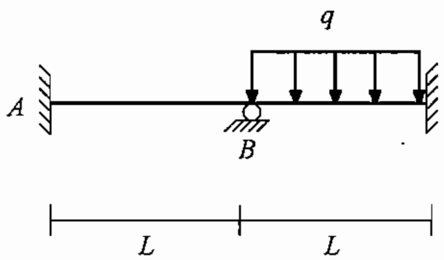
$$R_{y_B}=\frac{WL}{2}$$

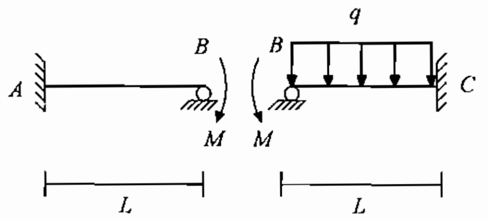
مثال : در تیر زیر شیب تیر در نقاط B و C چقدر است؟ $(EI=cte)$



حل :

با توجه به تقارن سازه می‌توان دریافت که دوران نقطه C صفر است همچنین به دلیل وجود تکیه‌گاه C، تغییر مکان قائم این نقطه نیز صفر است. پسی می‌توان به جای تحلیل سازه اصلی نصف سازه را به‌صورت زیر تحلیل کرد. برای یافتن شیب B، در نقطه B انفصالی ایجاد کرده و لنگر M مجهول در آن نقطه اعمال می‌کنیم.





$$\theta_{B_1}=\frac{ML}{4EI}$$ ساعتگرد

$$\theta_{B_2}=\frac{qL^3}{48EI}-\frac{ML}{4EI}$$ ساعتگرد

طبق شرط سازگاری تغییر شکل‌ها داریم:

$$\theta_{B_1}=\theta_{B_2} \Rightarrow \frac{ML}{4EI}=\frac{qL^3}{48EI}-\frac{ML}{4EI} \Rightarrow \frac{ML}{2EI}=\frac{qL^3}{48EI} \Rightarrow M=\frac{qL^2}{24}$$

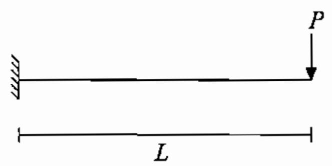
حال دوران B را به‌دست می‌آوریم:

$$\theta=\theta_{B_1}=\frac{\left(\frac{qL^2}{24}\right)(L)}{4EI} \Rightarrow \theta=\frac{qL^3}{96EI}$$

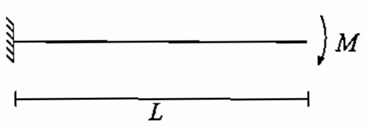
ج) مدل‌سازی با فنر

مطابق آنچه که در مقاومت مصالح دیده شد، در تحلیل‌سازه‌ها نیز می‌توان سازه را با فنر مدل کرد. راجع به چگونگی به‌دست آمدن روابط فنرها این‌جا صحبت نمی‌شود. در صورت لزوم می‌توانید به جزوه مقاومت مصالح رجوع کنید. نحوه مدل‌سازی با فنر به‌صورت زیر خواهد بود.

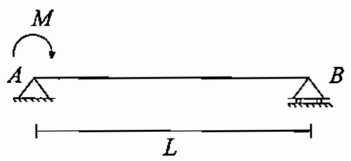
ابتدا سختی انتقالی و دورانی تیرهای مهم را به‌خاطر می‌سپاریم.



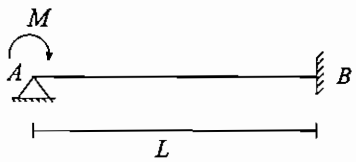
$$K_S=\frac{3EI}{L^3} \quad , \quad K_\theta=\frac{2EI}{L^2}$$



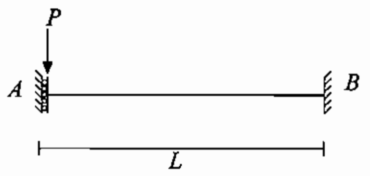
$$K_S=\frac{2EI}{L^2} \quad , \quad K_\theta=\frac{EI}{L}$$



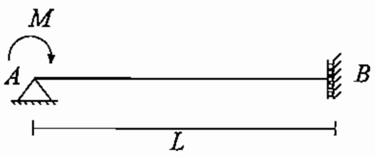
$$K_{\theta A}=\frac{3EI}{L} \quad , \quad K_{\theta B}=\frac{6EI}{L}$$



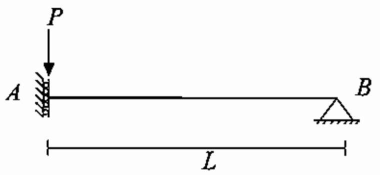
$$K_{\theta A}=\frac{4EI}{L}$$



$$K_{SA} = \frac{12EI}{L^3}$$



$$K_{\theta A} = \frac{EI}{L}$$



$$K_{SA} = \frac{3EI}{L^3}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این روابط از رابطه تیرهای مهم قابل استخراج است. در حالات دیگر می‌توان نتایج را به‌دست آوریم.

فنرهای سری: اگر فنرها (همان اعضای سازه) به گونه‌ای به هم متصل باشند که نیرو یا لنگر ایجاد شده در همگی آن‌ها با هم برابر باشد در این‌صورت سختی کلی فنرها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (K_iها سختی هر کدام از فنرها هستند.)

$$\frac{I}{K_t} = \frac{1}{K_1} + \frac{I}{K_2} + \frac{1}{K_3} + \cdots$$

در این‌حالت تغییر مکان یا دوران کل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \frac{P}{K_{tS}} \quad , \quad \theta = \frac{M}{K_{t\theta}}$$

فنرهای موازی: اگر فنرها (اعضای سازه) به گونه‌ای به هم متصل باشند که انتهای آن‌ها به هم متصل بوده و به تعبیری تغییر مکان یا دوران انتهای همه آن‌ها با هم برابر باشد در این‌صورت سختی کل فنرها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_t = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots$$

و در این‌حالت تغییر مکان یا دوران کل به صورت زیر تعریف می‌شود:

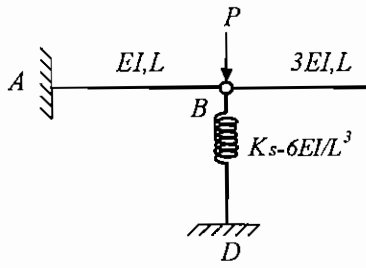
$$\Delta = \frac{\rho}{K_{tS}} \quad , \quad \theta = \frac{M}{K_t \theta}$$

توجه : در این‌حالت نیرو یا لنگر تحمل شده توسط هر عضو برابر است با:

$$P_i = \frac{K_{Si}}{K_{tS}} \cdot P \quad , \quad M_i = \frac{K_{\theta i}}{K_{t\theta}} \cdot M$$

از بحث تقارن و همچنین مدل‌سازی با فنر در برخی مسائل می‌توان به سادگی استفاده کرد و مسأله را به راحتی حل کرد.

مثال : در سازه زیر تغییر مکان نقطه B و نیروی ایجاد شده در فنر را به‌دست آورید.



حل :

تیر AB و BC یک سرگیردار هستند چون انتهای B آن‌ها به سادگی دوران می‌کند، پس سختی انتقالی هر کدام به‌صورت زیر است:

$$K_{SBA}=\frac{3EI}{L^3} \quad , \quad K_{SBC}=\frac{3(3EI)}{L^3}=\frac{9EI}{L^3}$$

چون در اثر بار P هر سه فنر به یک اندازه تغییر مکان می‌دهند لذا سه فنر موازی هستند پس:

$$K_{tS}=K_{SBA}+K_{SBC}+K_S=\frac{3EI}{L^3}+\frac{9EI}{L^3}+\frac{6EI}{L^3} \Rightarrow K_{tS}=\frac{18EI}{L^3}$$

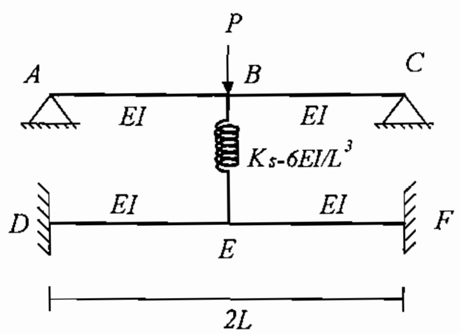
پس تغییر مکان B برابر است با:

$$\Delta_B=\frac{P}{K_{tS}}=\frac{P}{\frac{18EI}{L^3}} \Rightarrow \Delta_B=\frac{PL^3}{18EI}$$

و نیروی ایجاد شده در فنر نیز برابر است با:

$$F_{BD}=\frac{K_S}{K_{tS}}\cdot P=\frac{\frac{6EI}{L^3}}{\frac{18EI}{L^3}}\times P \Rightarrow F_{BD}=\frac{P}{3}$$

مثال : در سازه زیر تغییر مکان نقاط B و E چقدر است؟



حل :

از دورترین نقطه نسبت به بار P شروع می‌کنیم. عضو DF تیری دو سر گیردار است که بار وسط آن اعمال می‌شود. در این صورت سختی این تیر برابر است با:

$$K_{DF}=\frac{192EI}{(2L)^3}=\frac{24EI}{L^3}$$

از طرفی چون نیروی موجود در دو عضو BE و DF با هم برابر است پس دو فنر سری هستند پس سختی مجموع این دو عضو برابر است با:

$$\frac{1}{K_1}=\frac{1}{K_{DF}}+\frac{1}{K_S}=\frac{L^3}{24EI}+\frac{L^3}{6EI}=\frac{5L^3}{24EI} \Rightarrow K_1=\frac{24EI}{5L^3}$$

حال فنر با سختی K_1 و فنر عضو AC با هم موازی‌اند چراکه تغییر مکان آن‌ها با هم برابر است پس:

$$K_t=K_1+K_{AC}=\frac{24EI}{5L^3}+\frac{48EI}{(2L)^3}=\frac{54EI}{5L^3} \Rightarrow \Delta_B=\frac{P}{K_t} \Rightarrow \Delta_B=\frac{5PL^3}{54EI}$$

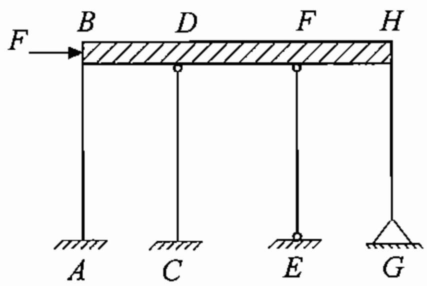
اگر بخواهیم تغییر مکان نقطه E را بیابید لازم است نیروی موجود در این فنر را بیابیم. چون دو فنر با سختی K_1 و K_{AC} با هم موازی‌اند پس نیروی ایجاد شده در فنر با سختی K_1 برابر است با:

$$F=\frac{K_1}{K_1+K_{AC}}\times P=\frac{\frac{24EI}{5L^3}}{\frac{54EI}{5L^3}}\times P=\frac{24}{54}P$$

از طرفی چون دو فنر BE و DF با هم سری هستند پس نیروی موجود در هر دوی آن‌ها همان F است پس نیروی F به نقطه E وارد می‌شود. در این‌صورت تغییر مکان نقطه E برابر است با:

$$\Delta_E=\frac{FL_{DF}^3}{192EI}=\frac{\frac{24P}{54}(2L)^3}{192EI}=\frac{PL^3}{54EI}$$

مثال : تغییر مکان نقطه B را به‌دست آورید. (طول همه اعضا L و $EI=cte$)



حل :

چون قطعه BH صلب است پس تغییر مکان انتهای همه ستون‌ها با هم برابرند پس فنرها موازی هستند. حال سختی هر کدام از فنرها را به‌دست می‌آوریم.

در ستون AB انتهای B تغییر مکان دارد ولی چون انتهای B به قطعه صلب اتصال صلب دارد لذا همواره زاویه قائمه با صفحه صلب دارد پس باید انتهای B را به‌صورت گیردار غلتکی در نظر گرفت پس:

$$K_{AB}=\frac{12EI}{L^3}$$

در ستون CD چون انتهای D دوران دارد پس CD یک عضو یک سر گیردار است پس:

$$K_{CD}=\frac{3EI}{L^3}$$

ستون EF دو سر مفصل است پس هیچ تحملی در خمش ندارد لذا سختی آن صفر است:

$$K_{EF} = 0$$

و ستون HG یک ستون یک سر مفصل و یک سر گیردار غلتکی است پس:

$$K_{HG} = \frac{3EI}{L^3}$$

پس سختی جانبی سازه برابر است با:

$$K_t = K_{AB} + K_{CD} + K_{EF} + K_{HG} \quad \Rightarrow \quad K_t = \frac{18EI}{L^3}$$

پس تغییر مکان B برابر است با:

$$\Delta = \frac{P}{K_t} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{PL^3}{18EI}$$

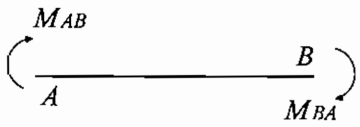
د) روش شیب و افت

۱- مجهولات نیرویی:

نیروهای مجهول در روش شیب و افت لنگرهای انتهایی اعضا هستند. علامت لنگرها در این روش از قرارداد زیر تبعیت می‌کند.

قرارداد علامت لنگرهای خمشی در روش شیب افت:

لنگرهای انتهایی یک عضو زمانی مثبت می‌باشند که در جهت عقربه‌های ساعت اثر کنند.



۲- مجهولات هندسی (تغییر شکل‌های مجهول):

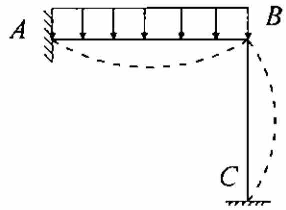
به طور کلی در روش شیب و افت برای هر گره غیر تکیه‌گاهی گیردار یک θ در نظر گرفته می‌شود. منظور از گره غیر تکیه‌گاهی گیردار گره آزاد می‌باشد.

نکته مهم - در روش شیب و افت از تغییر شکل‌های محوری اعضا (به دلیل کوچک بودن در مقایسه با تغییر شکل‌های خمشی) صرفنظر می‌شود.

درجه آزادی انتقالی: عبارت است از تعداد پارامترهای مستقلی که می‌توان کلیه حرکت‌های انتقالی در گره‌های سازه را برحسب آن‌ها بیان کرد.

به طور مثال سازه زیر را در نظر بگیرید:

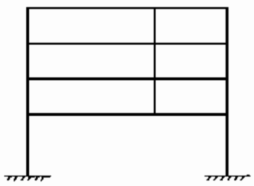
ملاحظه می‌شود که این سازه دارای درجه آزادی انتقالی نمی‌باشد چراکه هیچ نقطه‌ای از سازه تغییر مکان ندارد (دارای درجه آزادی دورانی می‌باشد)



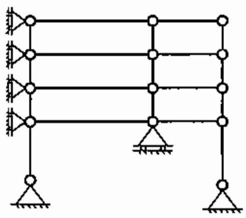
نحوه تشخیص درجات آزادی انتقالی سازه:

با مفصلی فرض کردن کلیه گره‌های سازه، سازه‌ای خرپایی بدست می‌آید که اگر پایدار باشد به علت داشتن صلبیت محوری بینهایت (مطابق با فرضیات شیب و افت) هیچکدام از گره‌های آن حرکت انتقالی ندارند، بنابراین در سازه اصلی نیز که اتصالات غیرمفصلی هستند به علت وجود چنین صلبیت محوری، هیچ یک از گره‌ها نمی‌توانند حرکت انتقالی داشته باشند. به چنین سازه‌هایی، سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی گفته می‌شود.

چنانچه سازه مفصلی شده را ناپایدار یافتیم، نشانه آن است که عامل پایداری سازه اصلی مقاومت خمشی اعضای آن بوده است پس به علت تغییر شکل‌های ناشی از خمش گره‌های سازه می‌توانند حرکت انتقالی داشته باشند. کلیه حرکت‌های انتقالی ممکن در این سازه را می‌بایست برحسب تعدادی پارامتر مستقل بیان کرد که همان درجه آزادی انتقالی سازه نامیده می‌شود و برابر است با تعداد مولفه‌های تکیه‌گاهی لازم و یا میله‌های مورد نیاز برای پایداری سازه خرپایی جایگزین. به طور مثال سازه زیر را در نظر بگیرید:

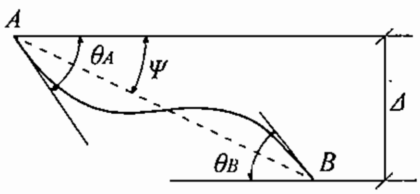


پس از مفصلی کردن تمام گره‌ها، 5 تکیه‌گاه برای پایدار کردن سازه خرپایی جایگزین مورد نیاز است پس درجه آزادی انتقالی سازه 5 می‌باشد.



روابط نیرو – تغییر شکل در روش شیب و افت:

کلی‌ترین حرکت یک قطعه در روش شیب و افت بدین صورت است که علاوه بر چرخش دو انتها، دو سر قطعه نسبت به هم دوران نیز داشته باشند.



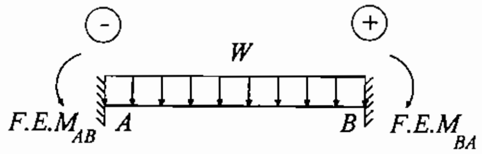
به طور کلی لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه در اثر این تغییر مکان‌ها و حرکات به صورت زیرتعریف می‌شود.

$$M_{ij}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_i+\theta_j-\frac{3\Delta}{L}\right)+FEM_{ij}$$

F.E.M.ij مقدار لنگر گیرداری که در عضو بدون حرکات انتقالی به وجود می‌آید. (قبل از تغییر مکان و در اثر بارگذاری سازه)

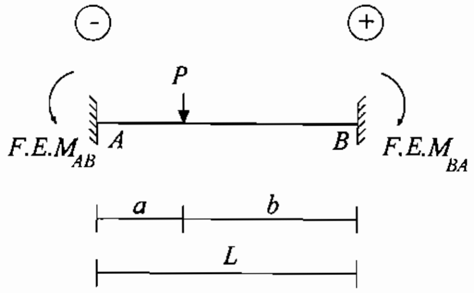
لنگرهای گیرداری مهم:

۱- بار گسترده یکنواخت:



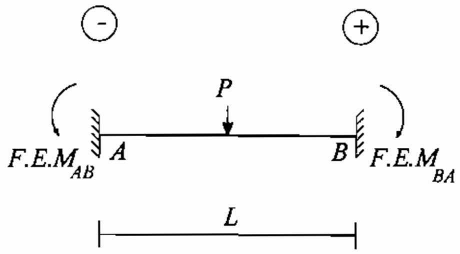
$$F.E.M_{AB}=\frac{-wL^2}{12}$$
$$F.E.M._{BA}=\frac{wL^2}{12}$$

۲- بار متمرکز:



$$F.E.M._{AB}=\frac{-Pab^2}{L^2}$$
$$F.E.M._{BA}=\frac{Pa^2b}{L^2}$$

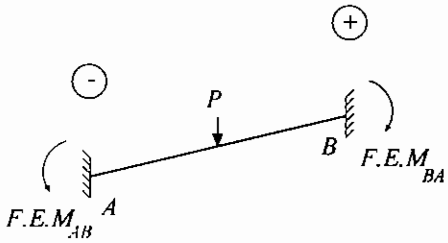
حالت خاص: اگر بار P وسط دهانه اعمال شود داریم:



$$F.E.M._{AB}=-F.E.M._{BA}=\frac{-PL}{8}$$

نکته : اگر عضو شیبدار باشد ولی نیروها عمود باقی بمانند بازهم لنگرهای گیرداری تفاوت نمی‌کند.

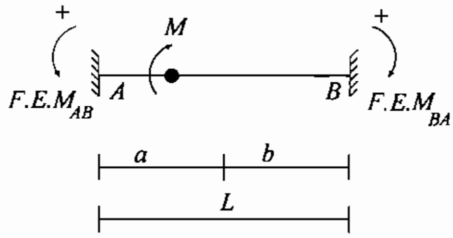
$$F.E.M._{AB} = -F.E.M._{BA} = \frac{-PL}{8}$$



۳- لنگر متمرکز:

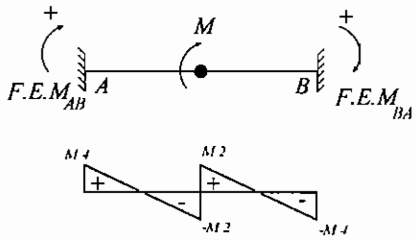
$$F.E.M._{AB} = \frac{+Mb}{L^2}(3a-L)$$

$$F.E.M._{BA} = \frac{+Ma}{L^2}(3b-L)$$



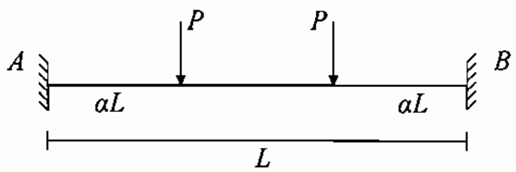
حالت خاص: اگر لنگر M وسط دهانه باشد داریم:

$$F.E.M._{AB} = F.E.M._{BA} = \frac{M}{4}$$



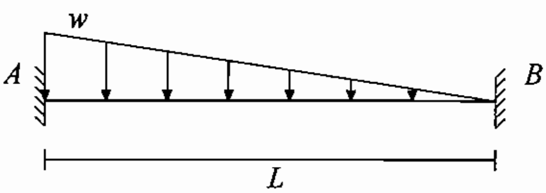
$$F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = -\alpha(1-\alpha)PL$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = +\alpha(1-\alpha)PL$$



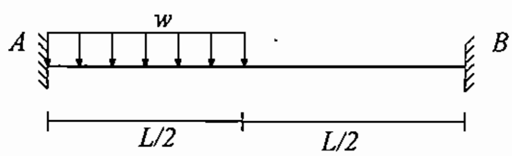
$$F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = -\frac{\omega L^2}{20}$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = +\frac{\omega L^2}{30}$$



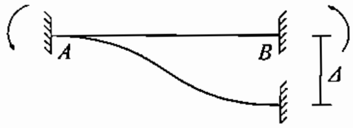
$$F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = -\frac{11\omega L^2}{192}$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = +\frac{5\omega L^2}{192}$$



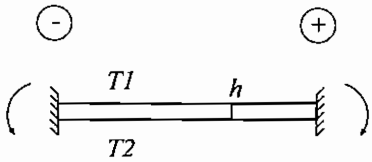
۴- نشست تکیه‌گاهی:

$$F.E.M._{AB} = F.E.M._{BA} = \frac{-6EI}{L^2}\Delta$$



دقت کنید که در نشست تکیه‌گاهی اگر Ψ مثبت باشد .F.E.M منفی می‌شود.

۵- گرادیان حرارتی:



اگر $T_1 > T_2$ باشد داریم:

$$F.E.M._{AB} = -F.E.M._{BA} = -EI\alpha\left(\frac{T_2 - T_1}{h}\right)$$

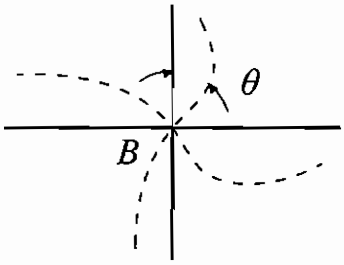
بارگذاری حرارتی تنها حالتی است که EI در .F.E.M آن نقش دارد پس در این حالت بارگذاری، با قوی و ضعیف شدن تیر مقدار .F.E.M تغییر می‌کند.

در زیر لنگر گیرداری‌های مهم ارائه شده است.

قرارداد علامت شیب‌ها و دوران‌ها در شیب و افت:

با توجه به اینکه در روش سختی (تغییر مکان) دستگاه معادلات تعادل حل می‌شود، می‌بایست سازگاری تغییر شکل‌ها برقرار فرض گردد. بدین ترتیب در هر یک از گره‌های سازه تنها یک θ مجهول منظور می‌گردد. در این‌صورت:

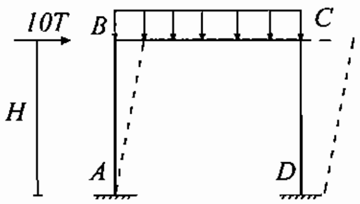
هرگاه گره در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده باشد دوران آن مثبت است و این دوران برای کلیه اعضای متصل به گره، مقداری مساوی فرض می‌شود.

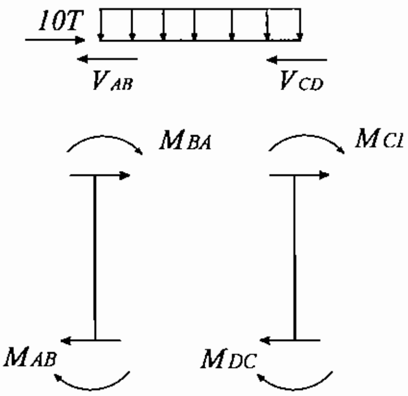


در ضمن برای هر عضو سازه $\Psi = \frac{\Delta}{L}$ دوران کلی عضو نامیده می‌شود که میزان دوران خط واصل بین دو انتهای عضو نسبت به وضعیت اولیه خواهد بود. هرگاه این عضو در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده باشد Ψ را مثبت در نظر می‌گیریم. کلیه Ψها باید برحسب Δ مستقل نوشته شوند بنابراین کلیه دوران‌های اعضا را نیز می‌توان برحسب تعداد درجات آزادی انتقالی سازه بیان کرد. به این کار حل هندسی یک سازه گویند.

مراحل تحلیل سازه به روش شیب و افت:

۱- تشخیص درجه نامعینی سینماتیکی سازه: که با فرض چشم‌پوشی از تغییر شکل‌های محوری تعیین می‌گردد.
۲- با توجه به اینکه در روش شیب و افت که جزو گروه سختی محسوب می‌شود بایستی ابتدا مجهولات هندسی از حل دستگاه معادلات تعادل بدست آیند و سپس به تعداد درجهٔ نامعینی هندسی معادله تعادل تشکیل داد. به طور مثال سازه زیر را در نظر بگیرید،





در این سازه خواهیم داشت:

$$V_{AB}+V_{CD}=10$$

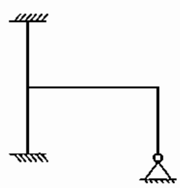
$$V_{AB}=\frac{M_{AB}+M_{BA}}{H} \quad , \quad V_{CD}=\frac{M_{CD}+M_{CD}}{H}$$

$$\Rightarrow \quad M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}=10\ H$$

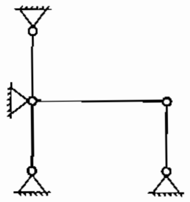
پس از تشکیل معادلات (به کمک معادلات شیب و افت که در این معادلات گذاشته می‌شوند)، مجهولات معادلات تعادل، تبدیل به تغییر مکان‌های مجهول خواهند شد. از حل این دستگاه معادلات کلیه تغییر شکل‌های مجهول (θ ها و Ψ ها) بدست می‌آیند. با قراردادن θ ها و Ψ ها در معادلات شیب و افت کلیه لنگرهای انتهایی اعضا محاسبه می‌شود و ادامه تحلیل سازه به صورت عضو به عضو، همانند تعدادی تیر معین، امکان‌پذیر خواهد بود.

مثال‌هایی در مورد تشخیص درجه آزادی انتقالی سازه‌ها:

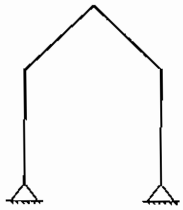
۱)



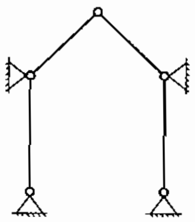
پس از مفصلی کردن گره‌ها ملاحظه می‌شود که سازه جدید با یک تکیه گاه پایدار می‌شود پس یک درجه آزادی انتقالی دارد.



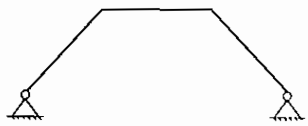
۲)



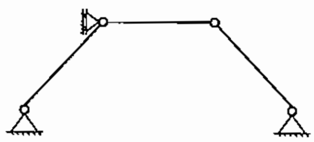
پس از مفصل کردن گره‌ها، سازه با دو تکیه‌گاه پایدار می‌شود پس دو درجه آزادی انتقالی دارد.



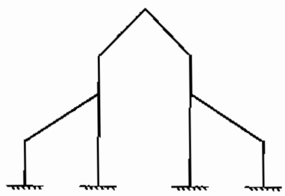
۳)

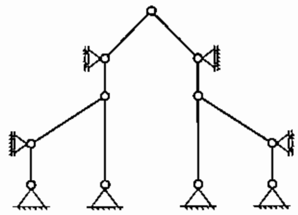


پس از مفصل کردن با یک تکیه‌گاه پایدار می‌شود.



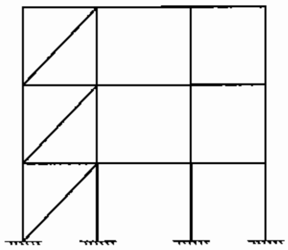
۴)



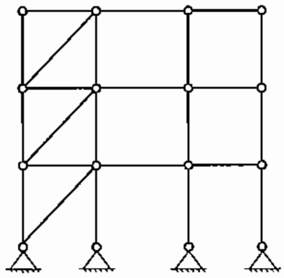


۴ درجه آزادی انتقالی دارد.

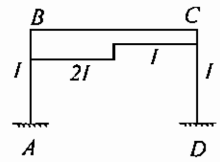
۵)



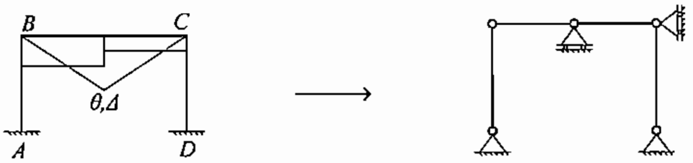
در این سازه ملاحظه می‌شود پس از مفصلی کردن گره‌ها و با توجه به اینکه سختی محوری اعضا بینهایت فرض شده است. سازه پایدار می‌ماند پس فاقد درجه آزادی انتقالی است.



نکته : سازه زیر را در نظر بگیرید:

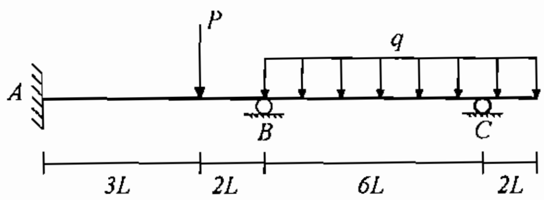


به علت وجود یک عضو غیرمنشوری، نمی‌توان معادلات شیب و افت را برای عضو BC نوشت بنابراین در چنین مواردی باید یک گره داخلی اضافه کنیم.



باید توجه نمود اضافه کردن گره در وسط عضو دو درجه نامعینی هندسی را بالا می‌برد.

مثال : در سازه زیر θ_B و θ_C چقدر است؟ $(EI = cte)$



در این مثال فقط قصد تمرین روابط شیب ـ افت و نکات مربوط به این روش داریم. قطعاً این مسأله با روش سه لنگری به راحتی حل می‌شود.

چون نشست نداریم لذا $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$ است. لنگرهای گیرداری هر کدام از انتهاها را به‌دست می‌آوریم:

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = -\frac{p(3L)(2L)^2}{(5L)^2} = -\frac{12PL}{25}$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = +\frac{p(2L)(3L)^2}{(5L)^2} = +\frac{18pL}{25}$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{BC} = -\frac{q(bL)^2}{12} = -3qL^2$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{CB} = +3qL^2$$

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{CD} = -q(2L)\left(\frac{2L}{2}\right) = -2qL^2$$

حال روابط لنگرهای انتهایی را می‌نویسیم:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L_{AB}}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L_{AB}}\right) + F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = \frac{2EI}{5L}(0 + \theta_B - 0) - \frac{12pL}{25} \Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI\theta_B}{5L} - \frac{12pL}{25}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_{BA}}\left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L_{BA}}\right) + F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = \frac{2EI}{5L}(2\theta_B + 0 - 0) + \frac{18pL}{25} \Rightarrow M_{BA} = \frac{4EI\theta_B}{5L} + \frac{18pL}{25}$$

در نوشتن روابط لنگرهای دو انتهای بالا چون A تکیه‌گاه گیردار بود θ_A صفر در نظر گرفته شد. همچنین چون نشست تکیه‌گاهی نداریم $\frac{\Delta}{L} = \psi = 0$ خواهد بود.

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}}\left(2\theta_B + \theta_C - \frac{3\Delta}{L_{BC}}\right) + F \cdot E \cdot M \cdot_{BC} = \frac{2EI}{6L}(2\theta_B + \theta_C - 0) - 3qL^2 \Rightarrow M_{BC} = \frac{2EI\theta_B}{3L} + \frac{EI\theta_B}{3L} - 3qL^2$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_{BC}}\left(2\theta_C + \theta_B - \frac{3\Delta}{L_{BC}}\right) F \cdot E \cdot M \cdot_{CB} = \frac{2EI}{6L}(2\theta_C + \theta_B - 0) + 3qL^2 \Rightarrow M_{CB} = \frac{2EI\theta_C}{3L} + \frac{EI\theta_B}{3L} + 3qL^2$$

با توجه به بارگذاری موجود لنگرهای موجود در نقاط B و C صفر است لذا می‌نویسیم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0$$

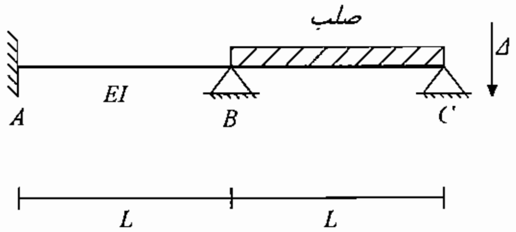
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{4EI\theta_B}{5L}+\dfrac{18pL}{25}+\dfrac{2EI\theta_B}{3L}+\dfrac{EI\theta_C}{3L}-3qL^2=0 \\ \dfrac{2EI\theta_C}{3L}+\dfrac{EI\theta_B}{3L}+3qL^2-2qL^2=0 \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول فوق θ_B و θ_C به‌دست می‌آید:

مثال : در شکل زیر تکیه‌گاه C به اندازه Δ نشست می‌کند. لنگر تکیه‌گاه‌های A و B را به‌دست آورید.



$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}$$

چون روی قطعه AB نیرویی وجود ندارد لذا $F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}=0$ است. از طرفی چون قطعه AB نشست ندارد، لذا $\frac{\Delta}{\ell}$ نیز صفر است. همچنین چون تکیه‌گاه A گیردار است، پس θ_A نیز صفر است، پس خواهیم داشت:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}(\theta_B)$$

چون قطعه BC صلب است، لذا در نقطه B، قطعه AB به‌صورت گیردار به قطعه صلب متصل است بنابراین چرخش B دقیقاً برابر شیب قطعه صلب است یعنی:

$$\theta_B=\frac{\Delta}{L}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\frac{\Delta}{L}\right) \Rightarrow M_{AB}=\frac{2EI\Delta}{L^2}$$

همچنین برای لنگر گیرداری قطعه AB در انتهای B می‌نویسیم:

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} \quad , \quad \theta_A=0 \quad , \quad \frac{\Delta}{L}=0 \quad , \quad F\cdot E\cdot M\cdot_{BA}=0 \Rightarrow M_{BA}=\frac{4EI\theta_B}{L}$$

چون $\theta_B=\frac{\Delta}{L}$ است لذا داریم:

$$M_{BA}=\frac{4EI\Delta}{L^2}$$

حال همین مسأله را با روش تیرهای مهم حل می‌کنیم.

فرض کنید در اثر نشست تکیه‌گاه C لنگری به اندازه M در تکیه‌گاه B ایجاد شود. در این صورت سازه به‌صورت زیر خواهد بود:

در اثر این لنگر، طبق روابط تیرهای مهم، نقطه B دورانی به‌صورت زیر دارد:

$$\theta_B = \frac{ML}{4EI}$$

در سازه اصلی می‌دانیم $\theta_B = \frac{\Delta}{L}$ است پس:

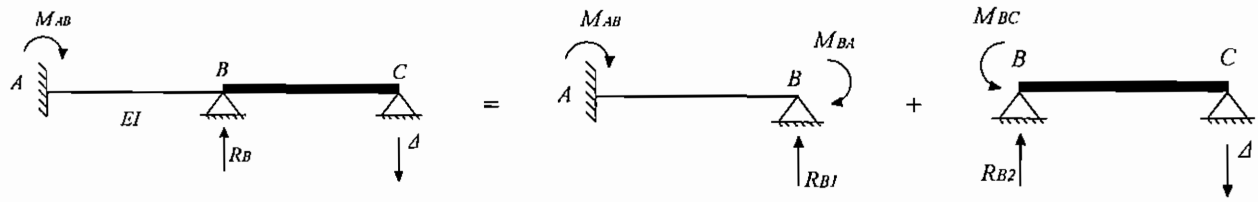
$$\frac{\Delta}{L} = \frac{ML}{4EI} \Rightarrow M = \frac{4EI\Delta}{L^2} \Rightarrow M_{BA} = \frac{4EI\Delta}{L^2}$$

همچنین در تیرهای یک سرگیردار و یک سرمفصل اگر لنگر M به انتهای مفصل وارد شود لنگر $\frac{M}{2}$ به انتهای گیردار منتقل می‌شود، پس:

$$M_{AB} = \frac{M}{2} \Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI\Delta}{L^2}$$

مثال : در سازه قبل عکس‌العمل تکیه‌گاه B چقدر است؟

با توجه به اصل جمع آثار قوا مسأله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:



با استفاده از حل مسأله قبل در نقطه B با توجه به بارگذاری سازه داریم:

$$M_{BA} = M_{BC} = \frac{4EI\Delta}{L^2}$$

در قطعه AB داریم:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} = R_{B_1} \times L \Rightarrow R_{B_1} = \frac{4EI\Delta}{L^3} + \frac{2EI\Delta}{L^3} \Rightarrow R_{B_1} = \frac{6EI\Delta}{L^3}$$

در قطعه BC داریم:

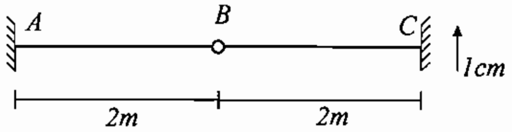
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{BC} = R_{B_2} \times L \Rightarrow R_{B_2} = \frac{4EI\Delta}{L^3}$$

طبق اصل جمع آثار قوا داریم:

$$R_B = R_{B_1} + R_{B_2} = \frac{10EI\Delta}{L^3}$$

تست‌های بخش تحلیل سازه‌های نامعین

۱ ـ تیر دو سرگیردار ABC که در وسط آن مفصل داخلی B تعبیه شده است، مفروض است. اگر تکیه‌گاه C تیر به اندازه $\delta = 1cm$ به سمت بالا حرکت کند. با فرض $EI = 2000\,t\cdot m^2$، لنگر گیرداری در تکیه‌گاه A در جهت مثلثاتی برابر است با: (سراسری ۱۳۷۲)



۱) $-7.5\,t\cdot m$ ۲) $3.75\,t\cdot m$ ۳) $-3.75\,t\cdot m$ ۴) $37.5\,t\cdot m$

حل :

معادلات لنگرهای انتهایی را برای قطعه AB می‌نویسیم:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L}\right) + F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}$$

چون بارگذاری نداریم:

$$F\cdot E\cdot M\cdot_{AB} = 0$$

چون A گیردار است:

$$\theta_A = 0$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(\theta_B - \frac{3\Delta}{L}\right) \qquad (I)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L}\right) + F\cdot E\cdot M\cdot_{BA}$$

چون بارگذاری نداریم:

$$F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} = 0$$

چون A گیردار است:

$$\theta_A = 0$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B - \frac{3\Delta}{L}\right) \qquad (II)$$

چون در نقطه B مفصل داخلی داریم لذا $M_{BA} = 0$ است پس:

$$2\theta_B - \frac{3\Delta}{L} = 0 \;\Rightarrow\; \theta_B = \frac{3\Delta}{2L}$$

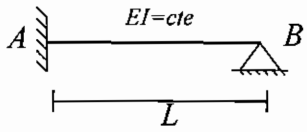
حال در رابطه (I) داریم:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(\frac{3\Delta}{2L} - \frac{3\Delta}{L}\right) = -\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

با توجه به تقارن، Δ موجود در روابط نصف تغییر مکان اعمال شده در C است پس:

$$M_{AB} = \frac{-3(2000)\left(0.5\times10^{-2}\right)}{2^2} = -7.5\,t\cdot m$$

۲ـ در شکل زیر، اگر Δ تغییر مکان در اثر نشست باشد، گشتاورهای گیرداری در دو انتهای تیر برابر است با: (سراسری ۷۳)



۱) $M_{BA}=0 \quad , \quad M_{AB}=-\dfrac{3EI\Delta}{L^2}$

۲) $M_{BA}=0 \quad , \quad M_{AB}=-\dfrac{4EI\Delta}{L^2}$

۳) $M_{BA}=0 \quad , \quad M_{AB}=-\dfrac{3EI\Delta}{4L^2}$

۴) $M_{BA}=0 \quad , \quad M_{AB}=-\dfrac{6EI\Delta}{L^2}$

حل :

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{BA}$$

به دلیل عدم بارگذاری:

$$F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}=F\cdot E\cdot M\cdot_{BA}=0$$

با توجه به گیرداری تکیه‌گاه A :

$$\theta_A=0$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right) \qquad (I)$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right) \qquad (II)$$

چون تکیه‌گاه B مفصل است لذا:

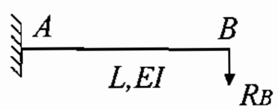
$$M_{BA}=0 \Rightarrow 2\theta_B-\frac{3\Delta}{L}=0 \Rightarrow \theta_B=\frac{3\Delta}{2L}$$

حال در معادله (I) داریم:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\frac{3\Delta}{2L}-\frac{3\Delta}{L}\right) \Rightarrow M_{AB}=-\frac{EI\Delta}{L^2}$$

روش دوم:

فرض کنید تکیه‌گاه B وجود نداشته باشد و به جای آن نیرویی برابر R_B در آن نقطه اعمال شده باشد:



تحت این بارگذاری تغییر مکان انتهای B برابر است با:

$$\Delta_B=\frac{R_B L^3}{3EI}$$

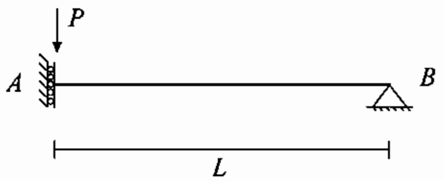
اگر این تغییر مکان را برابر Δ (فرض مسأله) در نظر بگیریم داریم:

$$\Delta=\frac{R_B L^3}{3EI} \Rightarrow R_B=\frac{3EI\Delta}{L^3}$$

این بدان مفهوم است که اگر در سازه تغییر مکانی به اندازه Δ ایجاد کنیم عکس‌العمل تکیه‌گاهی به اندازه $\frac{3EI\Delta}{L^3}$ به سمت بالا به سازه وارد می‌شود.

$$R_B=-\frac{3EI\Delta}{L^3} \Rightarrow M_A=R_B\times L=\frac{-3EI\Delta}{L^2}$$

۳ـ خیز قائم تکیه‌گاه A را حساب کنید. تنها اثر خمش مورد نظر است. **(سراسری ۱۳۷۴)**



۱) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^3}{6EI}$ ۳) $\frac{PL^3}{12EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{EI}$

حل :

در اثر نیروی وارد شده عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B برابر P است که در اثر این واکنش تکیه‌گاهی لنگر PL در تکیه‌گاه A ایجاد می‌شود. حال معادله لنگر انتهایی را در A می‌نویسیم. اگر تغییر مکان A، برابر Δ فرض شود در این صورت داریم:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}$$

θ_A صفر است چون تکیه‌گاه A گیردار غلتکی است. از طرفی چون در قطعه AB بارگذاری انجام نشده است، مقدار لنگر گیرداری صفر است. همچنین چون تکیه‌گاه A به اندازه Δ تغییر مکان داشته است لذا چرخش این تکیه‌گاه منفی است پس داریم:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\theta_B-\frac{3(-\Delta)}{L}\right) \Rightarrow M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\theta_B+\frac{3\Delta}{L}\right)$$

برای انتهای B نیز داریم:

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A-\frac{3\Delta}{L}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} \Rightarrow M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\frac{3\Delta}{L}\right)$$

چون لنگر B صفر است لذا:

$$M_{BA}=0 \Rightarrow \theta_B=-\frac{3\Delta}{2L}$$

پس:

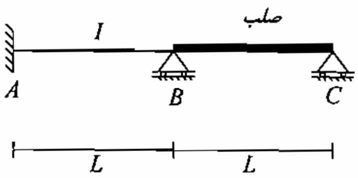
$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\frac{-3\Delta}{2L}+\frac{3\Delta}{L}\right)=\frac{3\Delta EI}{L^2}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$M_{AB}=PL \Rightarrow PL=\frac{3\Delta EI}{L^3} \Rightarrow \Delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

که البته این رابطه طبق روابط تیرهای مهم قابل استفاده است.

۴ ـ قدرمطلق لنگر خمشی در تکیه‌گاه گیردار A زیر اثر نشست قائم تکیه‌گاه B به اندازه δ را حساب کنید. **(سراسری ۱۳۷۴)**

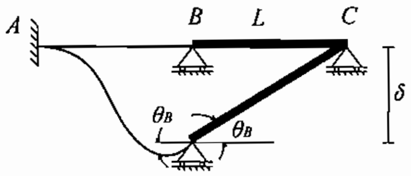


۱) $\frac{8\delta EI}{L^2}$ ۲) $\frac{12\delta EI}{L^2}$

۳) $\frac{16\delta EI}{L^2}$ ۴) $\frac{\delta EI}{L^2}$

حل :

در اثر نشست تکیه‌گاه B (به اندازه δ)، قطعه AB چرخشی برابر $\psi=\frac{\Delta}{L}=\frac{\delta}{L}$ دارد. حال فرم تغییر شکل یافته سازه را در نظر می‌گیریم:



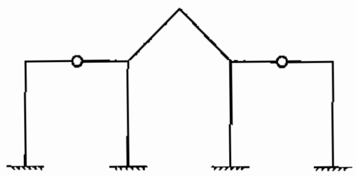
از شکل واضح است که دوران B برابر است با:

$$\theta_B=-\frac{\delta}{L}\ (\text{پادساعتگرد})$$

حال معادله لنگر انتهایی را می‌نویسیم:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\cancel{2\theta_A}_{0}+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+\cancel{F\cdot E\cdot M\cdot_{AB}}_{0} \Rightarrow M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(-\frac{\delta}{L}-\frac{3\delta}{L}\right) \Rightarrow M_{AB}=-\frac{8EI\delta}{L^2}$$

۵ ـ درجه آزادی دورانی و درجه آزادی انتقالی سازه زیر در حالات بارگذاری عمومی (به ترتیب از راست به چپ) کدام است؟ (از تغییر طول محوری صرف‌نظر می‌شود.) **(سراسری ۱۳۷۵)**



۱) 2 , 5 ۲) 4 , 5

۳) 2 , 9 ۴) 4 , 9

حل :

با توجه به نکات مطرح شده گزینه چهارم صحیح است.

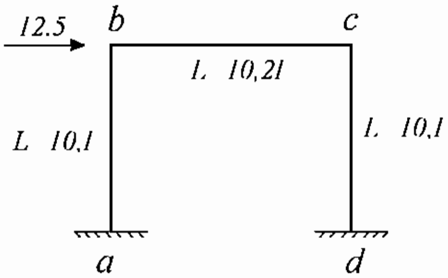
۶ ـ در روش شیب ـ افت کدام‌یک از فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود؟ **(سراسری ۱۳۷۷)**

۱) از تغییر شکل‌های خمشی صرف‌نظر می‌شود. ۲) از نیروهای محوری صرف‌نظر می‌شود.

۳) از تغییر شکل‌های محوری صرف‌نظر می‌شود. ۴) از نیروهای محوری و تغییر شکل‌های محوری صرف‌نظر می‌شود.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۷ـ قاب متقارن زیر را بار جانبی 12.5 مفروض است. لنگر M_{ab} برابر است با: **(سراسری ۱۳۷۸)**



۱) $M_{ab}=-37.5$ ۲) $M_{ab}=-50$

۳) $M_{ab}=-75$ ۴) $M_{ab}=-150$

حل :

در این سازه در اثر بارگذاری موجود، نقاط b و c دوران دارند که با توجه به تقارن موجود در سازه، دوران آن‌ها با هم برابر است که آن را θ فرض می‌کنیم. از طرفی طبق روابط شیب ـ افت می‌توانیم بنویسیم:

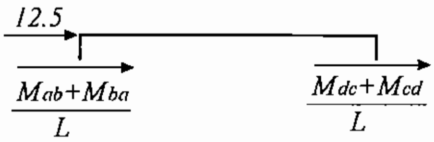
$$M_{dc}=M_{ab}=\frac{2EI}{10}\left(\theta-\frac{3\delta}{10}\right)$$

$$M_{ba}=M_{cd}=\frac{2EI}{10}\left(2\theta-\frac{3\delta}{10}\right)$$

که δ تغییر مکان افقی bc است. دقت داریم دوران‌های نقاط a و d صفر است. حال با نوشتن معادله تعادل b خواهیم داشت:

$$\sum M_b=0 \Rightarrow M_{ab}+M_{ba}=0 \Rightarrow \frac{2EI}{10}\left(8\theta-\frac{3\delta}{10}\right)=0 \Rightarrow 8\theta=\frac{3\delta}{10}$$

حال با نوشتن معادله تعادل در قطعه BC خواهیم داشت:



$$\frac{M_{ab}+M_{ba}}{2}+\frac{M_{cd}+M_{dc}}{2}+12.5=0$$

$$\frac{2EI}{10}\left(6\theta-\frac{12\delta}{10}\right)+12.5=0$$

با توجه به رابطه $8\theta=\frac{3\delta}{10}$ داریم:

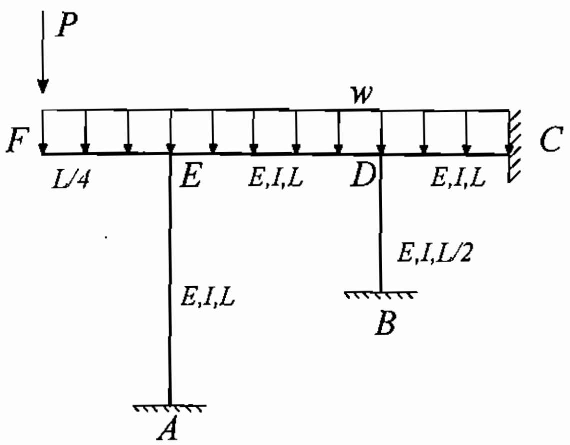
$$6\theta=\frac{9\delta}{40} \Rightarrow \delta=\frac{641}{EI} \quad , \quad \theta=\frac{24}{EI}$$

که از معادلات شیب ـ افت به‌دست می‌آید:

$$M_{ab}=-33.6$$

که در گزینه‌ها موجود نیست.

۸ـ مقدار لنگر تکیه‌گاه B با کدام رابطه برابر است با:



۱) $-\frac{2EI\theta_D WP}{L^2}$ ۲) $\frac{2EI\theta_B W}{L^2}$

۳) $\frac{4EI\theta_B}{L^2}$ ۴) $\frac{4EI\theta_D}{L}$

حل :

با توجه به روابط شیب ـ افت داریم:

$$M_{BD}=\frac{2EI}{L_{BD}}\left(2\theta_B+\theta_D-\frac{3\Delta}{L_{BD}}\right)+F\cdot E\cdot M\cdot_{BC}$$

چون روی BD بارگذاری نداریم لذا:

$$F\cdot E\cdot M\cdot_{BC}=0$$

چون تکیه‌گاه C گیردار است، با توجه به عدم وجود تغییر مکان محوری قطعه CF داریم:

$$\Delta=0 \Rightarrow \frac{3\Delta}{L_{BD}}=0$$

تکیه‌گاه B گیردار است لذا:

$$\theta_B=0$$

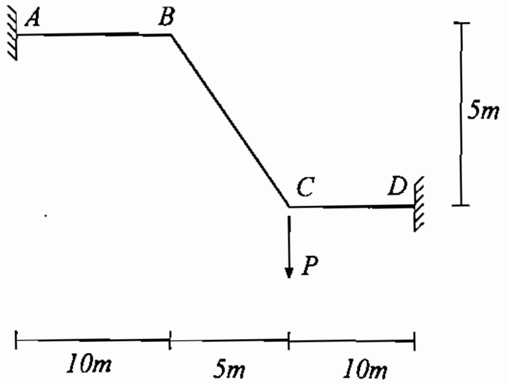
پس:

$$M_{BD}=\frac{2EI}{L_{BD}}(\theta_D)=\frac{2EI}{\frac{L}{2}}(\theta_D)=\frac{4EI\theta_D}{L}$$

۹ـ تعداد مجهولات در روش شیب ـ افت برای حل قاب شکل زیر را مشخص کنید. **(سراسری ۱۳۷۹)**

۱) 2 عدد ۲) 3 عدد

۳) 4 عدد ۴) 5 عدد



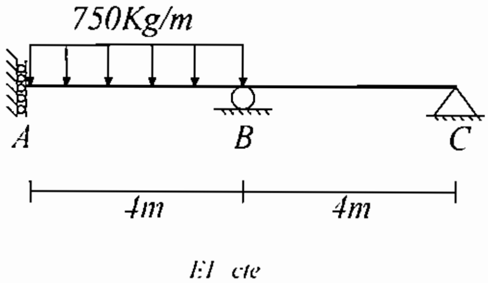
حل :

با توجه به نکات، گزینه ۲ صحیح است.

۱۰ ـ در تیر شکل زیر مقدار M_{CB} برحسب $Kg \cdot m$ کدام است؟ (تکیه‌گاه A لنگرپذیر است.) (سراسری ۱۳۸۰)

۱) 1500 ۲) 1600

۳) 2000 ۴) 3000



حل :

اگر A به اندازه Δ تغییر مکان داشته باشد:

$$F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = -F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = -\frac{qL^2}{12} = \frac{-0.75 \times 4^2}{12} = -1\ t \cdot m$$

پس:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(\cancel{2\theta_A}_0 + \theta_B + \frac{3\Delta}{L}\right) + F \cdot E \cdot M \cdot_{AB} = \frac{EI}{2}\left(\theta_B + \frac{3\Delta}{4}\right) - 1$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A}_0 + \frac{3\Delta}{L}\right) + F \cdot E \cdot M \cdot_{BA} = \frac{EI}{2}\left(2\theta_B + \frac{3\Delta}{4}\right) + 1$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_C}_0 - \cancel{\frac{3\Delta}{L}}_0\right) + \cancel{F \cdot E \cdot M \cdot_{BC}}_0 = \frac{4EI\theta_B}{L} = EI\theta_B$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}\left(\cancel{2\theta_C}_0 + \theta_B - \cancel{\frac{3\Delta}{L}}_0\right) + \cancel{F \cdot E \cdot M \cdot_{CB}}_0 = \frac{2EI\theta_B}{L} = \frac{EI\theta_B}{2}$$

با نوشتن تعادل لنگر در B داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{AB} = 0 \Rightarrow 2EI\theta_B + \frac{3EI\Delta}{8} + I = 0 \qquad (I)$$

در تکیه‌گاه A نیز با نوشتن تعادل در راستای قائم داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{M_{AB} + M_{BC}}{L} - \left(\frac{750 \times 4}{2} \times 10^{-3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3EI\theta_B}{8} + \frac{3EI\Delta}{16} - 1.5 = 0 \qquad (II)$$

دقت داریم از بار گسترده $750\ \frac{kg}{m}$ که روی AB اعمال می‌شود $1.75\,t = \left(\frac{750 \times 4}{2} \times 10^{-3}\right)$ به A و $1.5\,t$ به B اعمال می‌شود.

با توجه به روابط (I) و (II) داریم:

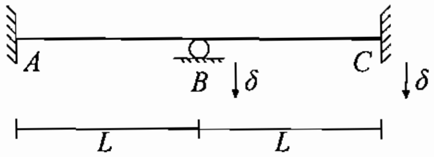
$$\theta_B = \frac{-16}{5EI} \quad , \quad \Delta = \frac{14.4}{EI}$$

که با قرار دادن در رابطه M_{CB} به‌دست می‌آید:

$$M_{CB} = -1.6\ t \cdot m = -1600\,kg \cdot m$$

۱۱ ـ در تیر ممتد شکل زیر با صلبیت خمشی ثابت EI، تحت نشست تکیه‌گاهی نشان داده شده، M_{AB} کدام است؟

(سراسری ۱۳۸۱)



۱) $\frac{3EI\delta}{L^2}$ ۲) $\frac{6EI\delta}{L^2}$

۳) $\frac{7.5EI\delta}{L^2}$ ۴) $\frac{4.5EI\delta}{L^2}$

حل :

با نوشتن معادلات شیب ـ افت برای انتهای اعضا داریم:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(\cancel{2\theta_A}_{0}+\theta_B-\frac{3\Delta}{L}\right)+\cancel{F\cdot E\cdot M_{AB}}_{0}=\frac{2EI}{L}\left(\theta_B-\frac{3\delta}{L}\right)$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\cancel{\theta_A}_{0}-\frac{3\Delta}{L}\right)+\cancel{F\cdot E\cdot M_{BA}}_{0}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B-\frac{3\delta}{L}\right)$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\cancel{\theta_C}_{0}-\frac{3\Delta}{L}\right)+\cancel{F\cdot E\cdot M_{BC}}_{0}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B\right)=\frac{4EI\theta_B}{L}$$

با نوشتن معادله تعادل لنگر در B داریم:

$$M_{BA}+M_{BC}=0 \Rightarrow \theta_B=\frac{3\delta}{4L}$$

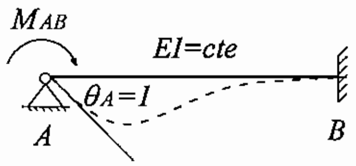
با قرار دادن θ_B در داریم:

$$M_{AB}=-\frac{4.5\ EI\delta}{L^2}$$

هـ) روش توزیع لنگر کراس:

به طور کلی این روش، روشی مستقل از شیب و افت نیست پس جزء روش‌های سختی محسوب می‌شود و قواعد لنگر و ..... در این روش همان قوانین شیب و افت می‌باشد. برای توضیح این روش تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- سختی دورانی مطلق (k')**:** سختی دورانی مطلق عبارتست از مقدار گشتاور لازم برای ایجاد دوران واحد در انتهای یک عضو زمانی که انتهای دیگر عضو گیردار باشد. به این گشتاور، سختی دورانی گفته می‌شود. اگر عضو منشوری باشد می‌توان از روش شیب و افت مقدار این گشتاور را بدست آورد. به طور مثال در سازه زیر داریم:



$$k'_{AB} = M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\Psi\right) + F.E.M.$$

در این سازه θ_A برابر واحد، θ_B صفر و .F.E.M نیز صفر می‌باشد (به علت آن توجه کنید) لذا داریم:

$$k'_{AB} = \frac{2EI}{L}(2) = \frac{4EI}{L}$$

توجه:با استفاده از روابط تیرهای مهم می‌توانستیم θ_A را به صورت زیر تحت اثر لنگر M بیابیم:

$$\theta_A = \frac{ML}{4EI}$$

با توجه به روابط فنر داریم $M = k\theta$ پس خواهیم داشت:

$$k = \frac{M}{\theta} = \frac{4EI}{L}$$

پس برای تیرهای مهم می‌توان سختی دورانی را بدین صورت یافت.

۲- ضریب انتقال لنگر عضو (C):

بنا به تعریف این ضریب عبارتست از نسبت گشتاور انتقال یافته به انتهای دور عضو به لنگر اعمال شده به انتهای نزدیک.

$$C_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}}$$

به طور مثال در تیر قبل داریم:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2\,\cancel{\theta_B}^{0} + \cancel{\theta_A}^{1} - 3\cancel{\Psi}^{0}\right) = \frac{2EI}{L}$$

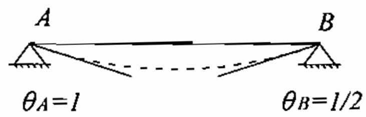
لذا خواهیم داشت:

$$C_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{1}{2}$$

این عدد را در تیر یک سرگیردار و یک سرمفصل به خاطر می‌سپاریم یعنی اگر در این تیر به سر مفصل لنگر M وارد شود $\frac{M}{2}$ لنگر به سرگیردار تیر منتقل می‌شود. (با همان جهت لنگر)

۳- سختی دورانی کاهش یافته: (k'^R)

بنابه تعریف عبارتست از مقدار گشتاور لازم برای ایجاد دوران واحد در یک انتها هنگامیکه طرف دیگر عضو مفصلی باشد.



برای یافتن سختی فوق داریم:

مقدار گشتاور منتقل شده به B صفر است (زیرا مفصل می‌باشد) لذا داریم:

$$M_{AB}=0$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A-3\Psi\right)$$

با $\theta_A=1$ و $\Psi=0$ داریم:

$$\theta_B=\frac{-1}{2}$$

یعنی اگر A به اندازه θ بچرخد، B نیز به اندازه $\frac{\theta}{2}$ چرخش دارد.

$$M_{AB}=k'^R=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-3\Psi\right)$$

با $\theta_B=\frac{-1}{2}$ و $\theta_A=1$ و $\Psi=0$ داریم:

$$k'^R=\frac{3EI}{L}$$

(این رابطه را نیز با استفاده از روابط تیرهای مهم بدست آورید.)

نکته : به طور کلی در اعضای منشوری داریم:

$$k'^R=\frac{3}{4}k'$$

۴- سختی دورانی نسبی (ضریب سختی یا سختی نسبی): (k)

عبارتست از نسبت ممان اینرسی عضو تقسیم بر طول آن

$$k=\frac{I}{L}$$

بنابراین k' را در تیر یک سرگیردار و یک سر مفصل می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$k'=4Ek$$

۵- ضریب توزیع لنگر (D):

این ضریب برای یک گره با اتصال صلب تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم که در گره j لنگری اثر کند. این لنگر با یک نسبت خاص بین اعضای متصل به گره توزیع می‌شود به طوریکه معادله تعادل در گره برقرار شود. پس به طور کلی ضریب توزیع لنگر در عضو را می‌توان به صورت نسبت لنگر توزیع شده در انتهای اعضا به میزان لنگر ایجاد شده در گره تعریف کرد. برای تیر یک سرگیردار یک سرمفصل داریم:

$$D_{jA}=\frac{M_{jA}}{M_A}=\frac{k'_{jA}}{\sum_{i=1}^{m}k'_j}=\frac{4Ek_{jA}}{\sum_{i=1}^{m}4Ek_j}=\frac{k_{jA}}{\sum_{i=1}^{m}k_j}$$

و با استفاده از تعریف $k=\frac{I}{L}$ داریم:

$$D_{ji}=\frac{\left(\frac{I}{L}\right)_i}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{I}{L}\right)_i}$$

البته این رابطه به شرطی برقرار است که E در همه اعضا یکسان باشد،

۶- لنگرهای گیرداری .F.E.M:

همان مفهومی است که در شیب و افت بررسی شد و در واقع مقدار لنگری است که در یک عضو با دو انتهای بسته در برابر دوران، فاقد جابجایی و تحت اثر بارگذاری مستقیم ایجاد می‌شود.

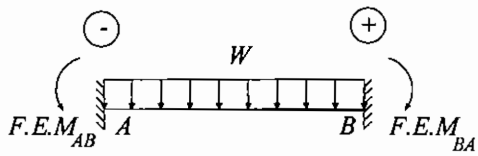
$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\cancel{\theta_A}^{0}+\cancel{\theta_B}^{0}-3\cancel{\psi}^{0}\right)+F.E.M.$$

لنگرهای گیرداری مهم:

۱- بار گسترده یکنواخت:

$$F.E.M_{AB}=\frac{-wL^2}{12}$$

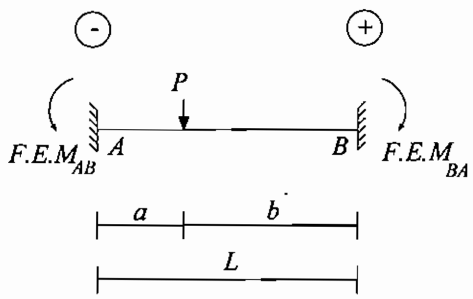
$$F.E.M._{BA}=\frac{wL^2}{12}$$



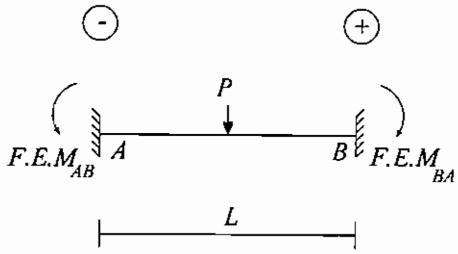
۲- بار متمرکز:

$$F.E.M._{AB}=\frac{-Pab^2}{L^2}$$

$$F.E.M._{BA}=\frac{Pa^2b}{L^2}$$

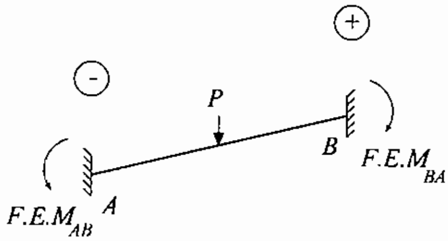


حالت خاص: اگر بار P وسط دهانه اعمال شود داریم:



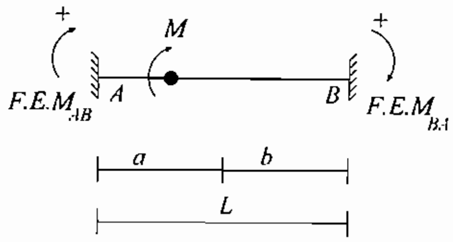
$$F.E.M._{AB} = -F.E.M._{BA} = \frac{-PL}{8}$$

نکته : اگر عضو شیبدار باشد ولی نیروها عمود باقی بمانند بازهم لنگرهای گیرداری تفاوت نمی‌کند.



$$F.E.M._{AB} = -F.E.M._{BA} = \frac{-PL}{8}$$

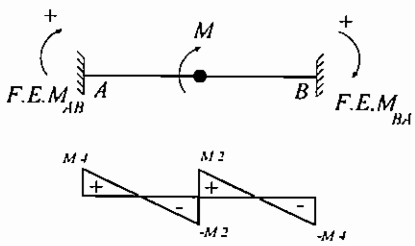
۳- لنگر متمرکز:



$$F.E.M._{AB} = \frac{+Mb}{L^2}(3a - L)$$

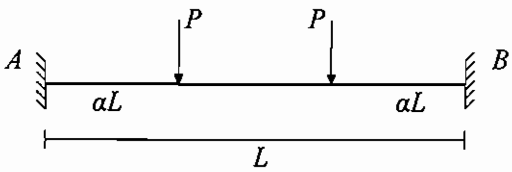
$$F.E.M._{BA} = \frac{+Ma}{L^2}(3b - L)$$

حالت خاص: اگر لنگر M وسط دهانه باشد داریم:

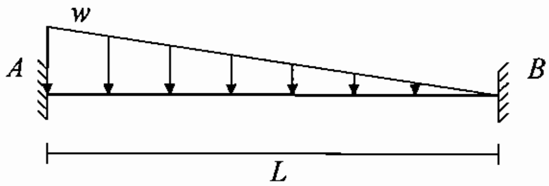


$$F.E.M._{AB} = F.E.M._{BA} = \frac{M}{4}$$

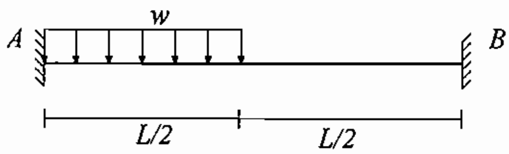
۴- چند بارگذاری خاص:



$$F\cdot E\cdot M\cdot_{AB} = -\alpha(1-\alpha)PL$$
$$F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} = +\alpha(1-\alpha)PL$$

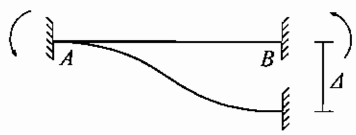


$$F\cdot E\cdot M\cdot_{AB} = -\frac{\omega L^2}{20}$$
$$F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} = +\frac{\omega L^2}{30}$$



$$F\cdot E\cdot M\cdot_{AB} = -\frac{11\omega L^2}{192}$$
$$F\cdot E\cdot M\cdot_{BA} = +\frac{5\omega L^2}{192}$$

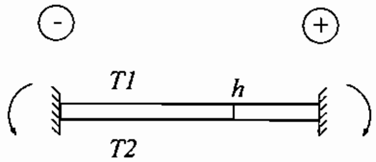
۵- نشست تکیه‌گاهی:



$$F.E.M._{AB} = F.E.M._{BA} = \frac{-6EI}{L^2}\Delta$$

دقت کنید که در نشست تکیه‌گاهی اگر Ψ مثبت باشد .F.E.M منفی می‌شود.

۶- گرادیان حرارتی:



اگر $T_1 > T_2$ باشد داریم:

$$F.E.M._{AB} = -F.E.M._{BA} = -EI\alpha\left(\frac{T_2 - T_1}{h}\right)$$

بارگذاری حرارتی تنها حالتی است که EI در .F.E.M آن نقش دارد پس در این حالت بارگذاری، با قوی و ضعیف شدن تیر مقدار .F.E.M تغییر می‌کند.

مراحل کار در روش توزیع لنگر:

الف- در سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی:

۱- انجام محسابات اولیه شامل:

محاسبه ضریب سختی اعضا $\left(\frac{I}{L}\right)$ و ضرایب توزیع لنگر اعضا (D) و محاسبه .F.E.M اعضای دارای بارگذاری

۲- گیردار نمودن کلیه گره‌های سازه:

در این مرحله کلیه گره‌های سازه گیردار فرض می‌شود حتی اگر تکیه‌گاه مفصلی داشتیم نیز باید آن‌را گیردار کنیم. پس در این مرحله در انتهای هر عضو لنگر خمشی معادل لنگر گیرداری مربوط به بارگذاری مستقیم روی عضو اتفاق می‌افتد.

۳- مرحله رهاسازی اولین گره سازه:

همان طور که دیدیم در گره‌ها به دلیل گیردار کردن لنگری به وجود آمد. حال باید لنگری خلاف این لنگر به وجود آمده در گره اعمال کنیم و گیرداری را آزاد کنیم. این لنگر با توجه به ضرائب توزیع لنگر در اعضای متصل به گره مورد نظر توزیع می‌شود.

۴- بستن مجدد گره متعادل کننده:

این کار به این دلیل انجام می‌شود که اگر خواستیم درگره بعدی توزیع لنگر کنیم دچار مشکل نشویم.

۵- انجام عملیات رها سازی و توزیع لنگر درگره بعدی.

۶- انجام کامل مراحل رهاسازی در گره‌ها:

این رهاسازی و گیرداری را آن قدر تکرار می‌کنیم تا مقدار لنگرهای نا متعادل در هر گره به سمت صفر میل کند. در واقع لنگرهای انتقال یافته باید با تقریب مورد نظرمان قابل چشم‌پوشی باشند.

۷- در پایان کار لنگر انتهایی هر عضو برابر خواهد بود با جمع آثار لنگرهای گیرداری به اضافه لنگرهای توزیع شده به اضافه لنگرهای انتقال یافته در کلیه مراحل.

نکات مربوط به روش توزیع لنگر:

۱- وجود انتهای مفصلی:

در این حالت می‌دانیم که در انتهای کار لنگر مفصل باید صفر باشد. به طور کلی اگر در انتهای عضوی مفصلی وجود داشت می‌توان پس از رهاسازی مفصل از حالت‌گیرداری اولیه، این گره را مجدداً گیردار نکرد مشروط بر آنکه،

اولاً: رهاسازی این گره قبل از گره‌های دیگر صورت پذیرفته باشد.

ثانیاً: هنگام توزیع لنگر در انتهای دیگر این عضو که قطعاً مفصلی نمی‌باشد از مفهوم سختی کاهش یافته برای توزیع لنگر استفاده نمود. بدین ترتیب دیگر به انتهای مفصلی لنگری نمی‌شود و همگرایی روش سریع‌تر انجام می‌پذیرد.

۲- لنگر متمرکز وارد بر گره:

هرگاه لنگر متمرکز گرهی در جهت عقربه‌های ساعت اثر کند به عنوان یک لنگر نامتعادل منفی محسوب شده لیکن هنگام توزیع لنگر با علامت مثبت توزیع می‌شود.

۳- نواحی طره:

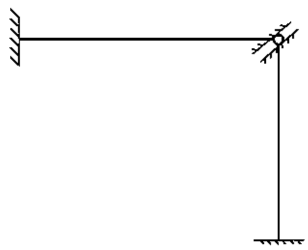
نواحی طره سازه‌ها، معین استاتیکی بوده و به کمک معادلات تعادل قابل تحلیل می‌باشند و در توزیع لنگر کافیست که نیروهای انتهایی ناحیه طره به صورت نیرو و گشتاور متمرکز گرهی، به گرهی که ناحیه طره به آن متصل است اثر کند. نیروی موثر برگره عکس نیروهای انتهایی قسمت طره خواهد بود.

۴- نیروی متمرکز گرهی:

در سازه‌های بدون درجه آزادی انتقالی، تنها باعث بوجود آمدن نیروهای محوری می‌شوند و در توزیع لنگر دخالت نخواهند داشت.

۵- گره مفصلی:

برای کلیه اعضای متصل به گره مفصلی نیز می‌توان از مفهوم سختی کاهش یافته استفاده نمود مشروط بر آنکه عملیات توزیع لنگر این مفصل قبلاً انجام پذیرفته باشد. ضمناً همان‌گونه که در روش شیب و افت در یک مفصل داخلی تعدادی θ مجهول وجود داشت در روش توزیع لنگر نیز به همان تعداد تکیه‌گاه گیردار منظور می‌شود که هنگام توزیع لنگر، هر یک جداگانه رها شده و به عبارت دیگر لنگری را به طرف دیگر مفصل منتقل نمی‌کند.

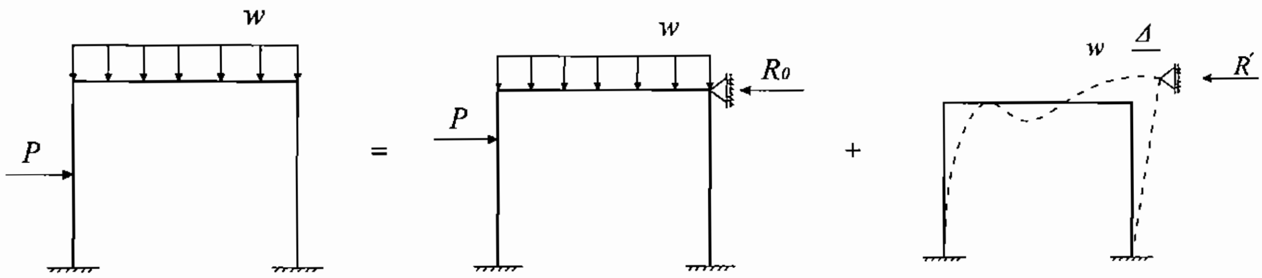


۶- انتهای گیردار:

ضریب توزیع لنگر انتهای گیردار را می‌توان صفر در نظر گرفت به این معنا که در این گره هیچگونه رهاسازی و انتقال انجام نمی‌شود.

ب) روش توزیع لنگر برای سازه‌های با درجه آزادی انتقالی:

در این حالت در ترازی که درجه آزادی داریم یک تکیه‌گاه مجازی قرار می‌دهیم و سازه را تحلیل می‌کنیم. مقدار عکس‌العمل بدست آمده برای این تکیه‌گاه را R_0 می‌نامیم. سپس فرض می‌کنیم که سازه فاقد بارگذاری است و فقط تکیه‌گاه مجازی دارای نشست به مقدار معینی می‌باشد. میزان عکس‌العمل به وجود آمده در تکیه‌گاه مجازی ناشی از این نشست را نیز R' می‌نامیم. آنگاه از جمع آثار خواهیم داشت:



$$aR' + R_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{-R_0}{R'}$$

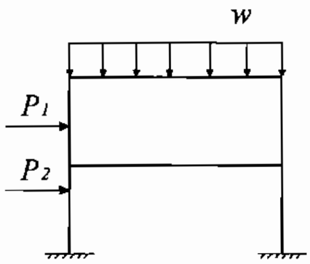
پس به طور کلی برای هر عضو ij داریم:

$$M_{ij} = (M_{ij})_0 + a(M_{ij})'$$

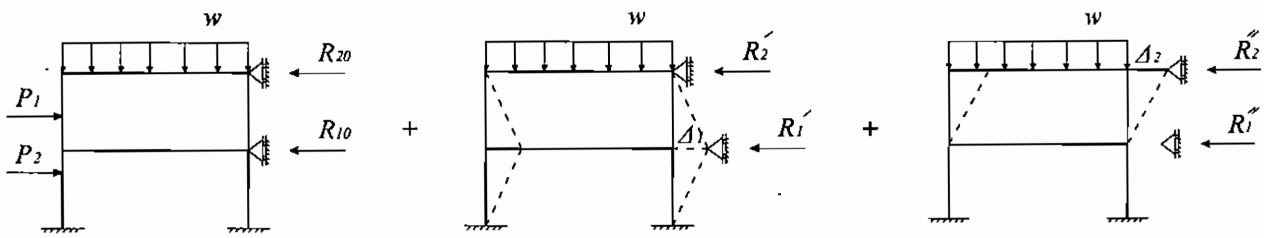
در سازه‌های با درجه آزادی انتقالی، روش توزیع لنگر براساس بارهایی که مستقیم براعضا اثر می‌کنند منجر به یک سازه متعادل نمی‌شود و در حقیقت ΣF برای اعضای دارای حرکت انتقالی صفر نیست و مقدار نیروی نامتعادل، معادل عکس‌العمل مجازی جانبی است که در این سازه پیاده شده است و برای حذف این عکس‌العمل بایستی سازه‌ای را تحت تاثیر نشست تکیه‌گاهی تحلیل نمود. از جمع آثار نتایج این دو سازه عکس‌العمل تکیه‌گاهی حذف شده و نتایج سازه اصلی بدست می‌آید.

ضریب ترکیب نتایج این دو سازه از معادله تعادل عضو دارای حرکت انتقالی بدست می‌آید بنابراین روش توزیع لنگر برای یک سازه با n درجه آزادی انتقالی نیز منجر به یک دستگاه n معادله، n مجهول تعادل خواهد شد که برای تشکیل این دستگاه می‌بایست n+1 بار برای سازه توزیع لنگر انجام شود (یک بار برای سازه تحت اثر بارگذاری و n بار برای نشست تکیه‌گاه‌های مجازی).

به طور مثال سازه زیر را در نظر بگیرید:



برای تحلیل این سازه می‌توان این سازه را به صورت جمع آثار سه سازه زیر در نظر گرفت:



بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R_{10}+aR'_1+bR''_1=0 \\ R_{20}+aR'_2+bR''_2=0 \end{cases}$$

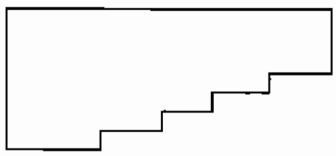
از حل دستگاه فوق مقادیر b و a بدست می‌آید بنابراین خواهیم داشت:

$$M_{ij}=\left(M_{ij}\right)_0+a\left(M_{ij}\right)'+b\left(M_{ij}\right)''$$

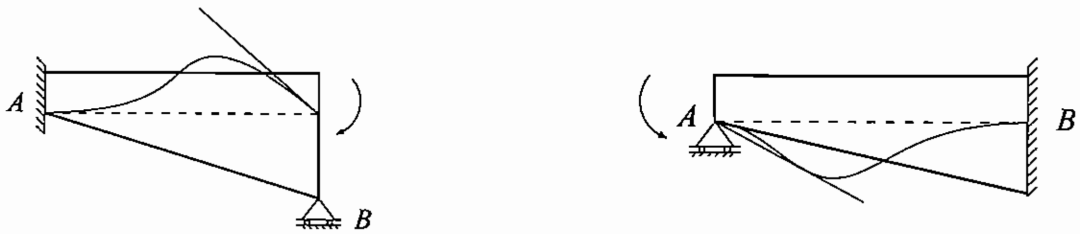
تعمیم روش توزیع لنگر برای اعضای غیرمنشوری:

به طور کلی دو نوع عضو غیرمنشوری در سازه ممکن است دیده شود:

در حالت الف، دیدیم که با اضافه کردن یک گره اضافه می‌توان مسأله را حل کرد. برای حالت ب یک روش آن است که سازه را به چند قسمت تقسیم کنیم و از روش الف استفاده کنیم که به علت زیاد بودن معادلات، حل آن‌ها مشکل می‌شود.



با مقایسه دو حالت زیر ملاحظه می‌شود،



$$F.E.M._{ba}\neq\frac{wL^2}{12} \quad و \quad F.E.M._{ab}\neq\frac{wL^2}{12} \quad و \quad C_{ab}\neq C_{ba}\neq\frac{1}{2} \quad و \quad k'_{ab}\neq k'_{ba}\neq\frac{4EI}{L}$$

در واقع تمامی مقادیر فوق با استفاده از جداول موجود و مشخصات مقطع قابل استخراج است.

چند قضیه در مورد اعضای غیرمنشوری:

قضیه ۱:

در اعضای غیرمنشوری همواره داریم:

$$C_{ab}.k'_{ab} = C_{ba}.k'_{ba}$$

قضیه۲:

سختی کاهش یافته عضو غیرمنشوری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$k'^{R}_{ab} = k'_{ab}\left(1 - C_{ab}.C_{ba}\right)$$

ملاحظه می‌شود که در رابطه فوق اگر عضو را منشوری فرض کنیم یعنی $C_{ab} = C_{ba} = \frac{1}{2}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$k'^{R} = k'\left(1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)\right) = 0.75\ k'$$

لنگر گیرداری ناشی از نشست عضو غیرمنشوری:

$$\begin{cases} F.E.M_{ab} = -k'_{ab}\left(1 + C_{ab}\right)\dfrac{\Delta}{L} \\ F.E.M_{ba} = -k'_{ba}\left(1 + C_{ba}\right)\dfrac{\Delta}{L} \end{cases}$$

(رابطه فوق را در اعضای منشوری کنترل کنید.)

معادلات شیب و افت برای اعضای غیرمنشوری:

$$\begin{cases} M_{ab} = k'_{ab}\left[\theta_a + C_{ab}\theta_b - \dfrac{\Delta}{L}\left(1 + C_{ab}\right)\right] + F.E.M_{ab} \\ M_{ba} = k'_{ba}\left[\theta_b + C_{ba}\theta_a - \dfrac{\Delta}{L}\left(1 + C_{ba}\right)\right] + F.E.M_{ba} \end{cases}$$

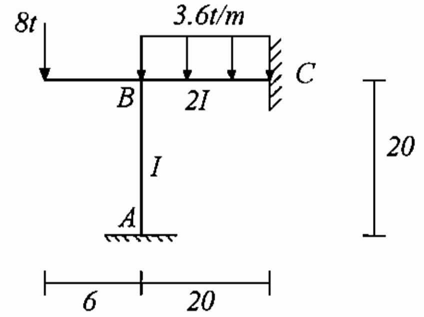
(روابط فوق را برای اعضای منشوری کنترل کنید.)

تست‌های بخش روش توزیع لنگر

۱ ـ ممان در تکیه‌گاه A برابر است با: **(سراسری ۱۳۷۲)**

۱) $12\,t\cdot m$ ۲) $18\,t\cdot m$

۳) $24\,t\cdot m$ ۴) $8\,t\cdot m$



حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا نقطه B را گیردار می‌کنیم. در این صورت لنگری به این تکیه‌گاه گیردار وارد می‌شود که از بارگذاری روی عضو BC و قطعه طره، حاصل می‌شود. این لنگر را حساب می‌کنیم:

$$M_{BC}=\frac{qL^2}{12}=\frac{3.6\times(20)^2}{12}=120\ t\cdot m \quad \text{ساعتگرد}$$

$$M_{BL}=pL=8\times 6=48\ t\cdot m \quad \text{پادساعتگرد}$$

پس لنگری برابر $72\ t\cdot m$ به‌صورت ساعتگرد به این تکیه‌گاه گیردار مجازی وارد می‌شود. با توجه به این که در سازه اصلی در نقطه B هیچ لنگری تحمل نمی‌شود لذا برای آزاد کردن این تکیه‌گاه مجازی و ایجاد شرایط سازه اصلی، لنگری برابر $72\ t\cdot m$ به صورت پادساعتگرد به نقطه B اعمال می‌کنیم. از جمع این دو سازه طبق جمع آثار قوا، سازه اصلی به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که در سازه مجازی (که در آن B گیردار بود) به انتهای A هیچ لنگری منتقل نمی‌شود لذا سهم انتهای A از لنگر، فقط از سازه دوم است که لنگری $72\ t\cdot m$ به B وارد می‌شود. با توجه به مفهوم سختی دورانی، قطعه BC و قطعه BA هر دو یک سر گیردار و یک سر مفصل هستند و سختی دورانی $\frac{4EI}{L}$ دارند لذا داریم:

$$K_{BC}=\frac{4EI_{BC}}{L_{BC}}=\frac{4E(2I)}{20}=\frac{2EI}{5L}$$

$$K_{BA}=\frac{4EI_{BA}}{L_{BA}}=\frac{4EI}{20}=\frac{EI}{5L}$$

یعنی لنگر به نسبت 2 به 1 به دو قطعه می‌رسد، پس:

$$M_{BA}=\frac{K_{BA}}{\Sigma K}\cdot M_B=\frac{1}{3}\times 72=24$$

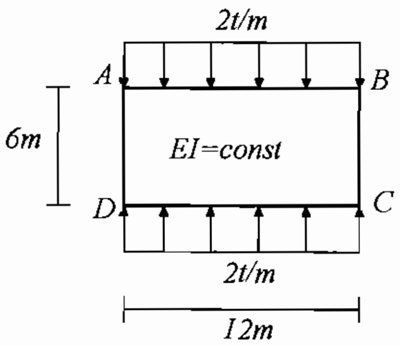
که طبق ضریب انتقال لنگر نصف لنگر وارد به انتهای BA به انتهای AB منتقل می‌شود، پس:

$$M_{AB}=12\ t\cdot m$$

۲ـ M_{BA} را پیدا کنید. (سراسری ۱۳۷۳)

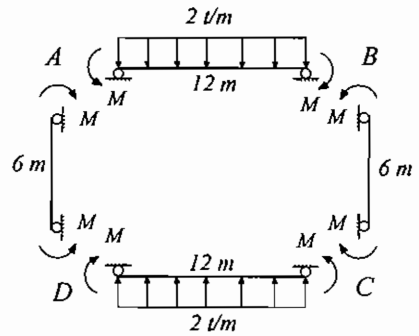
۱) $-12\,t\cdot m$ ۲) $-16\,t\cdot m$

۳) $-8\,t\cdot m$ ۴) $12\,t\cdot m$



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

اگر در نقاط A، B، C و D انفصال ایجاد کنیم، بنا به تقارن لنگر داخلی موجود در همه گره‌ها برابر است. اگر این لنگر را M فرض کنیم وضعیت سازه به صورت زیر خواهد بود.



چون دوران در همه گره‌ها مجاز است لذا این نقاط به صورت مفصل مدل شده است.

حال در گره B، دوران گره را برای دو قطعه BA و BC به‌دست می‌آوریم:

$$\theta_{BA}=\frac{q\ell^3_{AB}}{24\,EI}-\frac{ML_{AB}}{2\,EI}=\frac{2(12)^3}{24EI}-\frac{M(12)}{2EI}\quad \text{ساعتگرد}$$

$$\theta_{BC}=\frac{ML_{BC}}{2EI}=\frac{M(6)}{2EI}\quad \text{ساعتگرد}$$

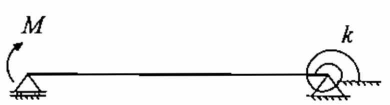
با توجه به پیوستگی سازه در B، دوران در هر دو عضو باید یکسان باشد، لذا:

$$\theta_{BA}=\theta_{BC}\ \Rightarrow\ \frac{2(12)^3}{24EI}-\frac{M(12)}{2EI}=\frac{M(6)}{2EI}\ \Rightarrow\ M=16\ t\cdot m$$

دقت کنید که چون با اعمال لنگر B در قطعه AB، رو به کشش می‌افتد لذا لنگر منفی است و:

$$M_{BA}=-16\,t\cdot m$$

۳ـ در تیر زیر صلبیت خمشی EI و مقدار سختی فنر $K=6\frac{EI}{L}$ است. در فنر چه لنگری به‌وجود می‌آید؟ تنها اثر خمش مورد نظر است. (سراسری ۱۳۷۴)



۱) $\frac{M}{3}$ ۲) $\frac{M}{4}$

۳) M ۴) $\frac{M}{2}$

حل :

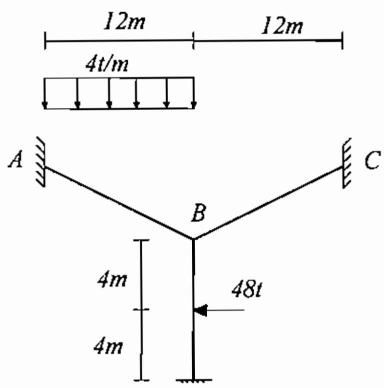
اگر انتهای متصل به فنر گیردار فرض شود در اثر اعمال گشتاور M در انتهای دیگر، لنگر $\frac{M}{2}$ به انتهای گیردار می‌رسد. در این حالت به فنر هیچ لنگری وارد نمی‌شود. حال برای آن‌که شرایط سازه اصلی را ایجاد کنیم لنگر $\frac{M}{2}$ در خلاف جهت اعمال می‌کنیم تا گره باز شود. در اثر این کار لنگر $\frac{M}{2}$ به نسبت سختی دورانی فنر و تیر تقسیم می‌شود. اگر K سختی فنر و K_1 سختی تیر باشد در این صورت داریم:

$$K_1 = \frac{3EI}{L} \quad , \quad K = \frac{6EI}{L}$$

پس، لنگر تحمل شده توسط فنر برابر است با:

$$M_S = \frac{K_1}{\sum K}\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{\frac{6EI}{L}}{\frac{9EI}{L}} \times \frac{M}{2} = \frac{M}{3}$$

۴ ـ کدام‌یک از گزینه‌ها در مورد سازه شکل زیر صحیح است؟ (EI برای تمام اعضاء ثابت است و تغییر شکل محوری اعضـاء قابـل صرف‌نظر کردن می‌باشد.) (سراسری ۱۳۷۴)



۱) $M_{BC} = 12\,t\cdot m\ ,\ M_{BD} = -48\,t\cdot m\ ,\ M_{BA} = 36\,t\cdot m$

۲) $M_{BC} = -12\,t\cdot m\ ,\ M_{BD} = -36\,t\cdot m\ ,\ M_{BA} = 48\,t\cdot m$

۳) $M_{BC} = 0\,t\cdot m\ ,\ M_{BD} = -48\,t\cdot m\ ,\ M_{BA} = 48\,t\cdot m$

۴) $M_{BC} = 12\,t\cdot m\ ,\ M_{BD} = -36\,t\cdot m\ ,\ M_{BA} = 24\,t\cdot m$

حل :

اگر گره B گیردار شود لنگرهای ایجاد شده در این تکیه‌گاه گیردار به صورت زیر است:

$$M_{BA} = \frac{qL_{AB}^2}{12} = \frac{4\times(12)^2}{12} = 48\ t\cdot m$$ ساعتگرد

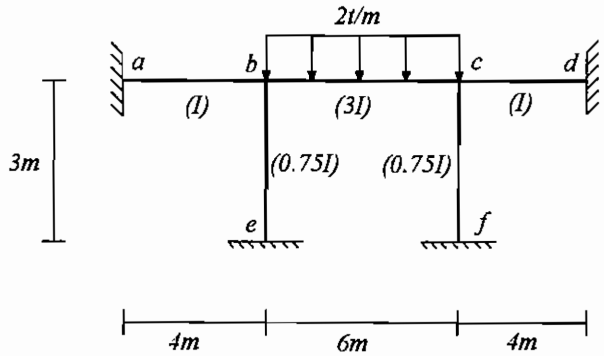
$$M_{BD} = \frac{qL_{BD}}{8} = \frac{48\times 8}{8} = 48\ t\cdot m$$ پادساعتگرد

پس مجموع لنگر وارد شده به این تکیه‌گاه گیردار صفر است یعنی برای آزاد کردن گره هیچ لنگری لازم نیست. لذا در مرحله باز کردن هیچ نیرویی پخش نمی‌شود یعنی لنگر انتهای عضو BC صفر و لنگرهای انتهای اعضای BA و BD همان 48 و 48‒ می‌باشد.

۵ ـ در سازه زیر لنگر M_{ab} چقدر می‌باشد؟ **(سراسری ۱۳۷۴)**

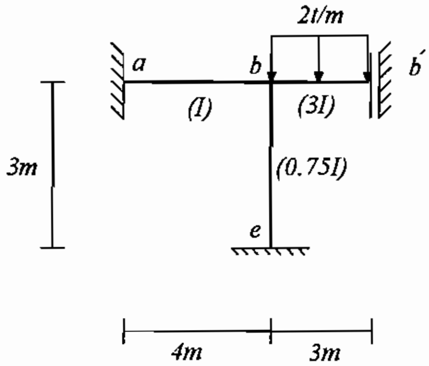
۱) $0.5\,t\cdot m$ ۲) $4.0\,t\cdot m$

۳) $2.0\,t\cdot m$ ۴) $1.0\,t\cdot m$



حل :

با توجه به تقارن می‌توان دریافت که شیب در وسط دهانه bc در اثر این بارگذاری صفر است و چون وسط دهانه تغییر مکان قائم دارد لذا می‌توان سازه را نصف کرده و در وسط دهانه bc تکیه‌گاه گیردار غلتکی در نظر گرفت.



حال اگر تکیه‌گاه b را ببندیم (گیردار کنیم) لنگر $6\,t\cdot m$ در b ایجاد می‌شود. حال سختی دورانی هر کدام از اعضاء را می‌یابیم.

$$k_{bc}=\frac{4EI_{bc}}{L_{bc}}=\frac{4EI}{4}=EI$$

$$k_{be}=\frac{4EI_{be}}{L_{be}}=\frac{4E(0.75I)}{3}=EI$$

$$k_{bb'}=\frac{EI_{bb'}}{L_{bb'}}=\frac{E(3I)}{3}=EI$$

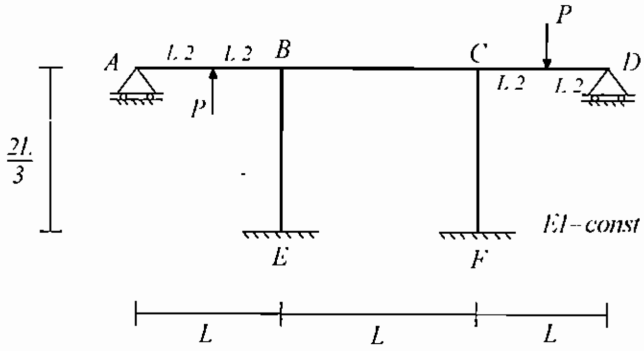
حال گره b را آزاد می‌کنیم. برای این‌کار لنگر $6\,t\cdot m$ در خلاف جهت لنگر ایجاد شده در b (ساعتگرد) اعمال می‌کنیم **تا** شرایط سازه اصلی به‌وجود آید. با توجه به سختی دورانی برابر در هر سه عضو سهم هر کدام از این اعضاء $\frac{1}{3}$ لنگر موجود است پس هر عضو لنگری به اندازه $2\,t\cdot m$ تحمل می‌کند، یعنی:

$$M_{ba}=2\,t\cdot m$$

چون ab یک تیر یکسرگیردار، یکسر مفصل است، نصف لنگر به انتهای گیردار می‌رسد پس:

$$M_{ab}=1\,t\cdot m$$

۶ـ با توجه به شکل زیر، M_{BA} کدام است؟ **(سراسری ۱۳۷۵)**



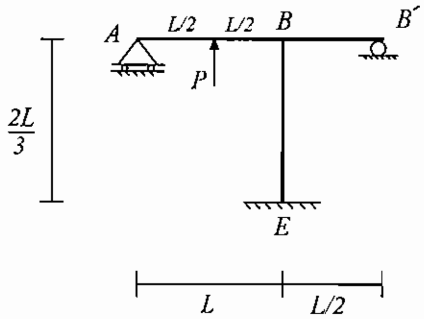
۱) $-\frac{PL}{16}$ ۲) $\frac{-3PL}{20}$

۳) $\frac{-PL}{8}$ ۴) $\frac{-PL}{20}$

حل :

با توجه به تقارن معکوس و با توجه به این‌که وسط عضو BC بدون جابه‌جایی قائم دوران می‌کند می‌توان برای تحلیل از نصف سازه به صورت زیر استفاده کرد.

اگر گره B را گیردار کنیم لنگری برابر $\frac{3PL}{16}$ می‌باشد (ساعتگرد).



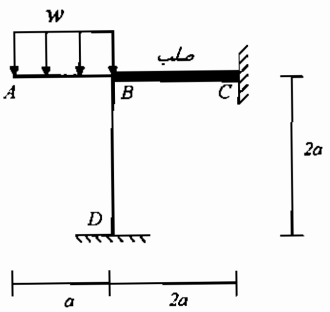
برای باز کردن تکیه‌گاه گیردار، لنگر $\frac{3PL}{16}$ به صورت پادساعتگرد به B اعمال می‌کنیم (تا شرایط اصلی سازه اعمال شود) در این صورت لنگر وارد شده به نسبت سختی‌ها تقسیم می‌شود. سختی اعضا را می‌یابیم:

$$\begin{cases} k_{BA} = \frac{3EI}{L_{AB}} = \frac{3EI}{L} \\ k_{BB'} = \frac{3EI}{L_{BB'}} = \frac{6EI}{L} \\ k_{BE} = \frac{4EI}{L_{BE}} = \frac{6EI}{L} \end{cases} \Rightarrow \quad M_{BA} = \frac{k_{BA}}{\sum k} \cdot \left(\frac{3PL}{16}\right) = \frac{\frac{3EI}{L}}{\frac{15EI}{L}} \times \frac{3PL}{16} = \frac{3PL}{80}$$

حال در انتهای B از قطعه BA یک بار لنگر $\frac{3PL}{16}$ ساعتگرد به‌وجود آمد (در اثر گیردار کردن گره) که پس از باز کردن گره، لنگری به اندازه $\frac{3PL}{80}$ پادساعتگرد به آن اضافه شد که در این‌صورت لنگر این انتها برابر است با:

$$M_{BAt} = \frac{3PL}{16} - \frac{3PL}{80} = \frac{3PL}{20} \text{ ساعتگرد}$$

۷ ـ در شکل زیر، اگر صلبیت خمشی عضو BC بی‌نهایت باشد، لنگر ستون BD در انتهای B برابر کدام است؟ (سراسری ۱۳۷۶)

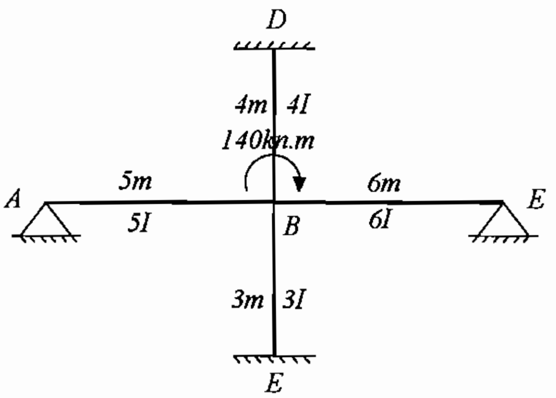


۱) صفر
۲) $\frac{\omega a^2}{2}$
۳) $\frac{\omega a^2}{4}$
۴) $\frac{2\omega a^2}{3}$

حل :

اگر گره B را گیردار کنیم لنگر $\frac{\omega a^2}{2}$ ساعتگرد به این تکیه‌گاه گیردار وارد می‌شود (به دلیل بار گسترده عضو طره AB). حال برای باز کردن گره، لنگر $\frac{\omega a^2}{2}$ پادساعتگرد B اعمال می‌کنیم، که این لنگر باید به نسبت سختی دورانی اعضا پخش شود و چون قطعه BC صلب است لذا سختی دورانی آن بی‌نهایت است لذا کل لنگر اعمال شده توسط قطعه BC تحمل می‌شود و به قطعه BD هیچ لنگری نمی‌رسد، لذا لنگر ستون BD صفر است.

۸ ـ عکس‌العمل تکیه‌گاه A (R_A) چند KN است؟ (سراسری ۱۳۷۷)



۱) 28
۲) 12.73
۳) 7
۴) 6

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

سختی دورانی اعضاء را می‌نویسیم:

$$k_{BA} = \frac{3EI_{BA}}{L_{BA}} = \frac{3E(5I)}{5} = 3EI$$

$$k_{BD} = \frac{4EI_{BD}}{L_{BD}} = \frac{4E(4I)}{4} = 4EI$$

$$k_{BE} = \frac{3EI_{BE}}{L_{BE}} = \frac{3E(6I)}{6} = 3EI$$

$$k_{BF} = \frac{4EI_{BF}}{L_{BF}} = \frac{4E(3I)}{3} = 4EI$$

لنگر وارد به گره B به نسبت سختی دورانی اعضا پخش می‌شود لذا لنگر تحمل شده در قطعه BA برابر است با:

$$M_{BA} = \frac{k_{BA}}{\sum k} \times M = \frac{3EI}{14EI} \times 140 = 30\ KN \cdot m$$

برای به‌دست آوردن عکس‌العمل تکیه‌گاه، معادله تعادل لنگر برای نقطه B در قطعه BA را می‌گوییم یعنی:

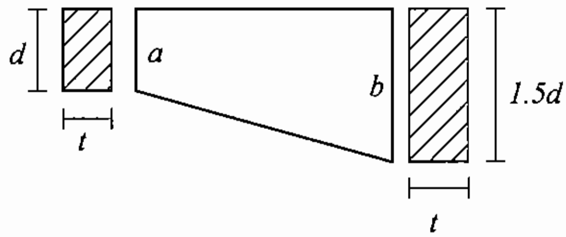
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow M_{BA} = R_A \times L_{BA} \Rightarrow R_A = \frac{M_{BA}}{L_{BA}} = \frac{30}{5} = 6\ \text{KN}$$

۹ ـ برای تیر مقطع متغیر زیر $C_{ab} = 0.675$ و $S_{ab} = 5.41\left(EI_a / L\right)$، $S_{ba} = 9.90\left(EI_a / L\right)$ می‌باشد مقدار C_{ba} برابر است با:

(سراسری ۱۳۷۸)

۱) $C_{ba} = 0.8250$ ۲) $C_{ba} = 0.5$ ۳) $C_{ba} = 0.3688$ ۴) $C_{ba} = 0.3255$

حل :



می‌دانیم:

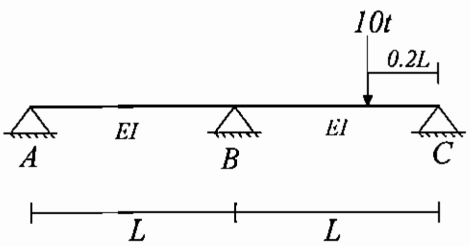
$$C_{ab}.S_{ab} = C_{ba}.S_{ba}$$

پس:

$$C_{ba} = \frac{0.675 \times 5.41\left(EI_a / L\right)}{9.90\left(EI_a / L\right)} = 0.3688$$

۱۰ ـ در تیر شکل زیر، I ،E و L ثابت هستند. در صورتی که $L = 4$ متر باشد، قدرمطلق لنگر در تکیه‌گاه B چند تن متر است؟؟

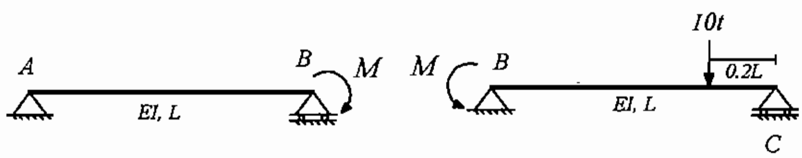
(سراسری ۱۳۷۹)



۱) 2 ۲) 4
۳) 1.92 ۴) 3.84

حل :

اگر در گره B انفصال ایجاد کرده و یک لنگر داخلی M در آن در نظر بگیریم، سازه به صورت زیر درمی‌آید:



دوران ایجاد شده در نقطه B ناشی از بار 10 t در قطعه سمت راست به صورت زیر است:

$$\theta_{B_1} = \frac{Pab(L+b)}{6EIL} = \frac{10\times(0.8L)(0.2L)(L+0.2L)}{6EIL} = 0.32\,\frac{L^2}{EI}$$

حال اگر لنگر داخلی M را نیز در نظر بگیریم، دوران B در قطعه سمت راست برابر است با:

$$\theta_{BR} = 0.32\,\frac{L^2}{EI} - \frac{ML}{3EI}\ \text{ساعتگرد}$$

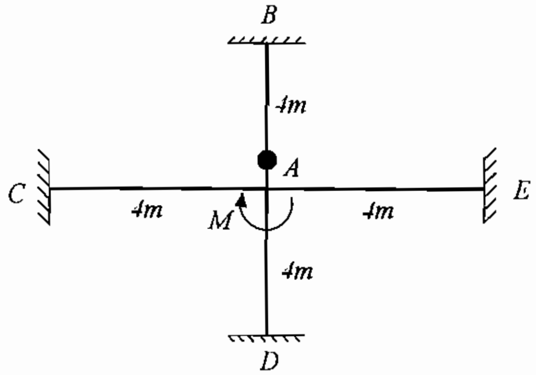
دوران B در قطعه سمت چپ نیز برابر است با:

$$\theta_{BL} = \frac{ML}{3EI}\ \text{ساعتگرد}$$

با توجه به پیوستگی سازه در B، دوران دو سمت آن با هم برابرند لذا:

$$\theta_{BL} = \theta_{BR} \Rightarrow 0.32\,\frac{L^2}{EI} - \frac{ML}{EI} = \frac{ML}{3EI} \Rightarrow 0.32\,L = \frac{2M}{3} \Rightarrow M = 0.48\,L = 0.48\times 4 = 1.92$$

۱۱ ـ در شکل زیر، مقدار M_{DA} چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۷۹)**



۱) $\frac{M}{8}$
۲) $\frac{M}{6}$
۳) $\frac{M}{4}$
۴) $\frac{M}{3}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

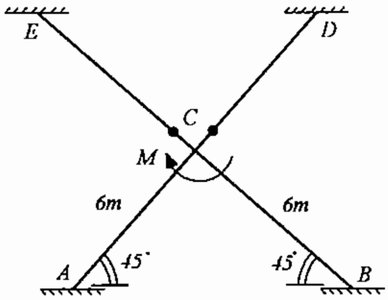
چون در انتهای A از عضو AB مفصل وجود دارد لذا در اثر اعمال لنگر M در گره A، لنگر وارد فقط توسط اعضای AE ،AC و AD تحمل می‌شود و عضو AB هیچ نقشی در تحمل لنگر ندارد. با توجه به برابری سختی دورانی هر سه عضو، لنگر $\frac{M}{3}$ به انتهای A از هر سه عضو وارد می‌شود که چون اعضا یک سر مفصل و یکسر گیردار (پس از باز کردن گره) هستند لذا نصف آن یعنی $\frac{M}{6}$ به انتهای گیردار آن منتقل می‌شود پس:

$$M_{CA} = M_{DA} = M_{EA} = \frac{M}{6}$$

۱۲ ـ در سازه شکل زیر، چنانچه مقدار طول و EI در اعضای DC و CE نصف اعضای AC و CB باشد لنگر انتهایی M_{BC} کدام است؟

۱) $\frac{M}{2}$ ۲) $\frac{M}{3}$

۳) $\frac{M}{4}$ ۴) $\frac{M}{6}$



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مانند مسأله قبل، با توجه به وجود مفصل داخلی در اعضای CD و CE، این دوعضو هیچ نقشی در تحمل لنگر وارد شده به گره C ندارند پس این لنگر فقط توسط دو عضو AC و BC تحمل می‌شود که با توجه به برابری سختی دورانی آن‌ها، هر کدام لنگر $\frac{M}{2}$ را تحمل می‌کنند. باتوجه به این‌که اعضاء یک سر گیردار و یک سر مفصل هستند (پس از باز کرده گره) نصف این لنگر به انتهای دیگر منتقل می‌شود لذا:

$$M_{BC} = M_{AC} = \frac{M}{4}$$

فصل ششم

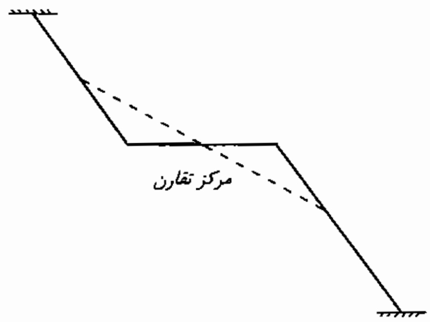
تقارن در سازه‌ها

با استفاده از بحث تقارن می‌توان سازه‌ها را ساده‌تر تحلیل کرد.

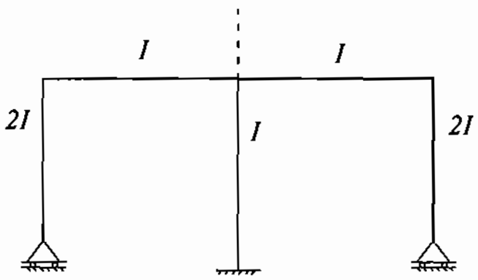
انواع تقارن هندسی سازه عبارتند از:

۱- تقارن محوری: این تقارن زمانی اتفاق می‌افتد که سازه دارای محور تقارن باشد.

۲- تقارن مرکزی: این تقارن زمانی اتفاق می‌افتد که سازه دارای مرکز تقارن باشد.



تقارن مرکزی



تقارن محوری

باید توجه داشت که تقارن هندسی سازه برای متقارن بودن آن کفایت نمی‌کند بلکه شرایط تقارن یک سازه عبارتند از:

الف) تقارن هندسی

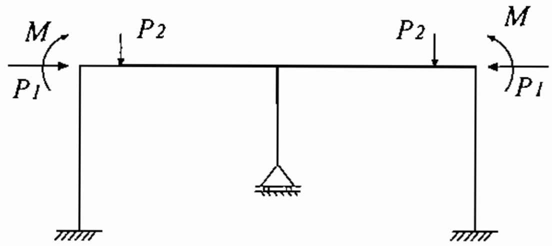
ب) تقارن شرایط تکیه‌گاهی، مشخصات الاستیکی (EI)

بارگذاری سازه به طور کلی دارای سه حالت زیر است،

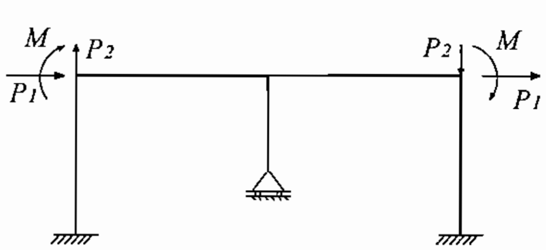
۱- متقارن مستقیم (متقارن)

۲- متقارن معکوس (پاد متقارن)

۳- بارگذاری کلی (بدون تقارن یا پادمتقارن)



متقارن محوری مستقیم



متقارن محوری معکوس

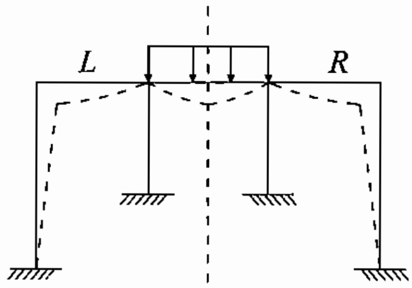
نکته : بر روی سازه با تقارن مستقیم اعمال لنگر متمرکز در محل محور تقارن و همچنین تأثیر نیروی عمودی بر محور تقارن شرط تقارن مستقیم را بر هم می‌زند ولی اعمال نیروی موازی با محور تقارن در محل تلاقی محور با سازه بلامانع است.

نکته : بر روی سازه با تقارن معکوس، در محل تلاقی محور تقارن با سازه، اعمال نیروی متمرکز موازی با محور تقارن شرط تعادل معکوس را بر هم می‌زند ولی اعمال نیروی عمود بر محور تقارن یا اعمال لنگر متمرکز در محل محور تقارن بلامانع است.

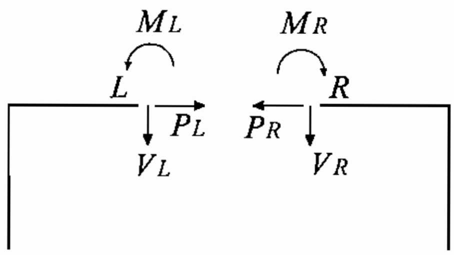
(به دلیل دو نکته فوق توجه کنید)

تحلیل سازه‌های متقارن محوری مستقیم:

در یک سازه متقارن کلیه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و تغییر شکل‌های سازه از شرط تقارن پیروی می‌کنند پس در سازه زیر اگر به دو نقطه R و L دقت کنیم ملاحظه می‌شود که:



محور تقارن



$$\begin{cases} P_L = -P_R \\ M_L = -M_R \\ V_L = V_R \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_{XL} = -\Delta_{XR} \\ y_L = y_R \\ \theta_L = -\theta_R \end{cases}$$

در یک سازه دارای تقارن مستقیم در محل تلاقی محور تقارن با یک عضو داریم:

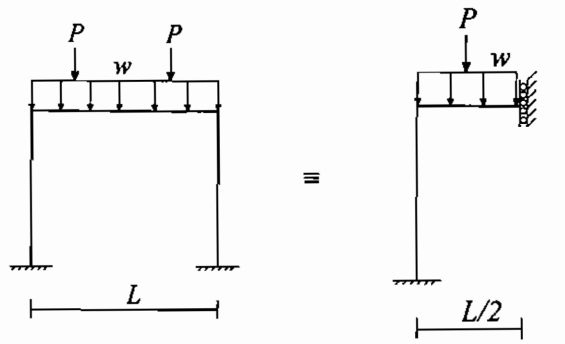
$$\begin{cases} V = 0 \\ \Delta x = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

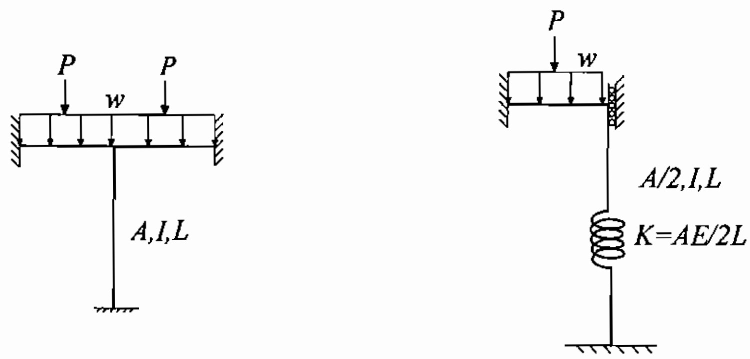
به طور کلی برای تحلیل سازه‌های متقارن مستقیم می‌توان سازه را از مرکز تقارن نصف کرده و فقط نصف سازه را تحلیل کرد (نتایج برای طرف دیگر نیز قابل بیان است). فقط برای این کار باید به مطالب زیر توجه کرد:

۱- تکیه‌گاه گیردار غلطکی در محور تقارن قرار گیرد.

۲- در صورتی که در سازه اصلی در محل محور تقارن، تکیه‌گاهی وجود داشت باید به جای تکیه‌گاه گیردار غلطکی، تکیه‌گاه گیردار قرارداد.

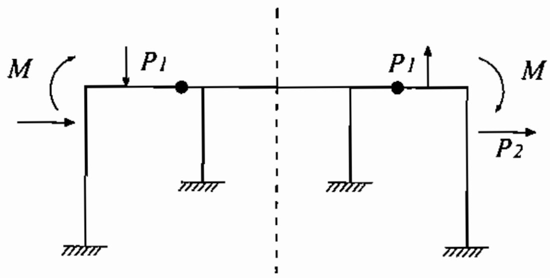
۳ـ در صورتی که محور تقارن از میان محور طولی عضوی عبور کند در صورتی که از سختی محوری صرفنظر شود باید در مرکز تقارن تکیه گاه گیردار غلطکی قرارداد و اگر از سختی محوری صرفنظر نشود باید در مرکز تقارن فنری با سختی برابر نصف سختی عضو سازه اصلی روی محور قرارداد.





تحلیل سازه‌های پاد متقارن:

دو نقطه R و L را در سازه پادمتقارن زیر بررسی می‌کنیم:



در این حالت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_L = +P_R \\ M_L = +M_R \\ V_L = -V_R \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_{XL} = \Delta_{XR} \\ y_L = -y_R \\ \theta_L = \theta_R \end{cases}$$

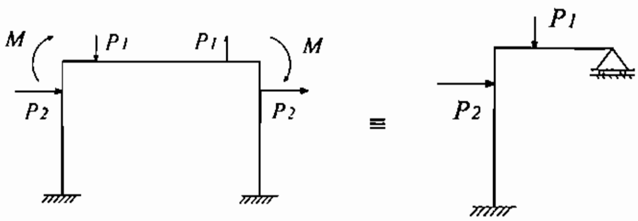
و در روی محور تقارن داریم:

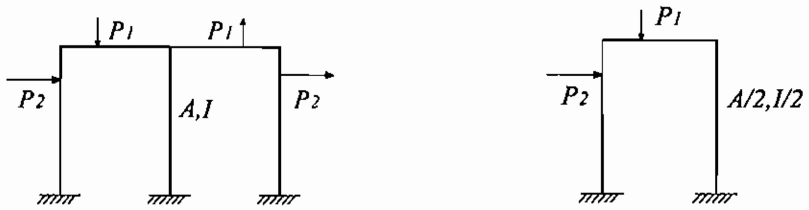
$$\begin{cases} P=0 \\ M=0 \\ y=0 \end{cases}$$

برای تحلیل سازه‌های پادمتقارن کافی است سازه را نصف کرده و نصف آن‌را تحلیل کنیم که باید به نکات زیر توجه کرد.

۱- اگر روی محور تقارن عضوی وجود نداشته باشد باید در مرکز تقارن تکیه‌گاه غلطکی قرارداد.

۲- اگر روی محور تقارن عضوی وجود داشته باشد باید پس از نصف کردن، عضوی با سطح مقطع و ممان اینرسی نصف سازه اصلی، در محل منقطع شده قرار داد.

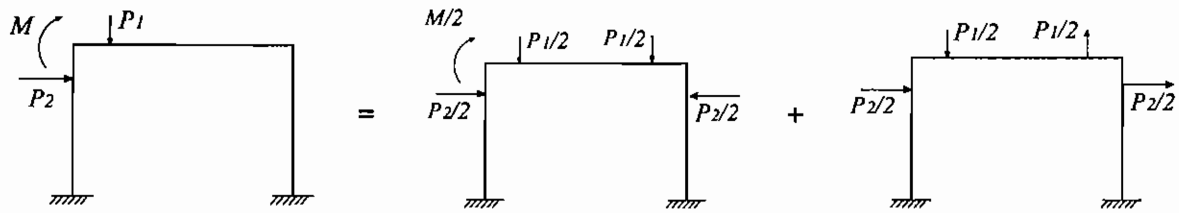




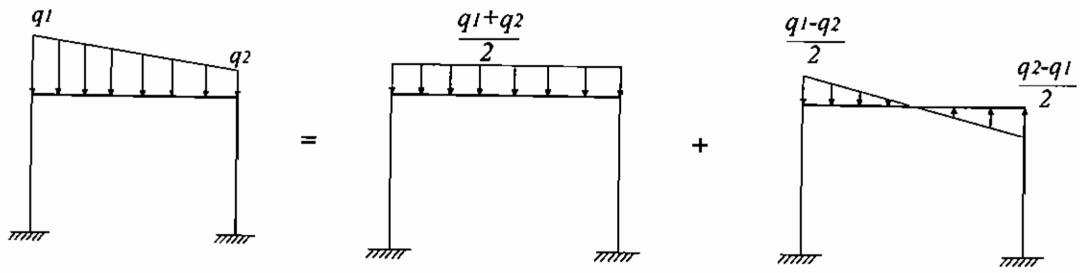
تحلیل یک سازه تحت بارگذاری کلی با استفاده از تقارن:

وقتی یک بارگذاری کلی بر سازه اثر کند می‌توان از جمع آثار قوا استفاده کرده و نصف بارها را روی یک سازه متقارن و نصف بارها را روی یک سازه دیگر پادمتقارن اعمال کرده و با تحلیل سازه‌های متقارن و پادمتقارن نتایج تحلیل را با هم جمع کنیم.

به طور مثال:



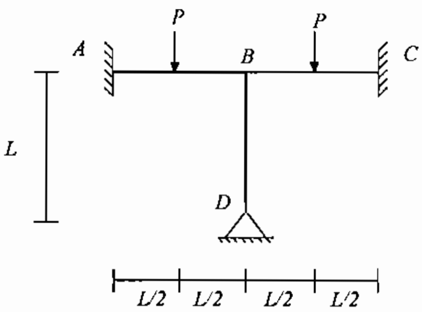
سازه تحت بارگذاری کلی　　　سازه متقارن مستقیم　　　سازه متقارن معکوس



حال هر کدام از سازه‌های متقارن و پادمتقارن فوق را با استفاده از خواص این سازه‌ها می‌توان تحلیل کرد.

تست‌های بخش تقارن در سازه‌ها

۱ ـ ممان در تکیه‌گاه A برابر است با: (ثابت = EI) **(سراسری ۱۳۷۲)**

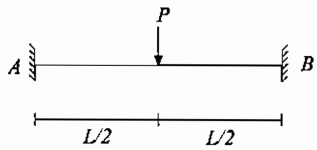


۱) $\frac{PL}{4}$ ۲) $\frac{PL}{8}$

۳) $\frac{PL}{10}$ ۴) هیچ‌کدام از موارد فوق

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

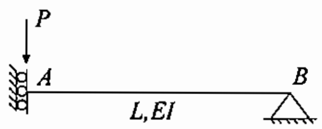
با توجه به تقارن سازه واضح است که نقطه B دوران ندارد. از طرفی اگر تغییر شکل‌های محوری صرف‌نظر کنیم نقطه B تغییر مکان قائم نیز ندارد پس می‌توان در نقطه B تکیه‌گاه گیردار قرار داد و قطعه AB را به‌صورت زیر مدل کرد:



در این‌صورت داریم:

$$M_A = \frac{PL}{8}$$

۲ ـ خیز قائم تکیه‌گاه A را حساب کنید. تنها اثر خمش مورد نظر است. **(سراسری ۱۳۷۴)**



۱) $\frac{PL^3}{3EI}$ ۲) $\frac{PL^3}{6EI}$

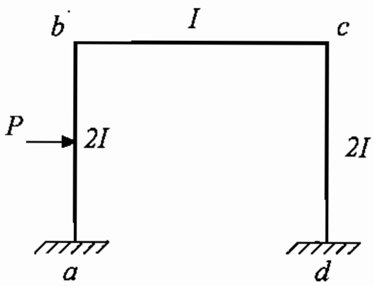
۳) $\frac{PL^3}{12EI}$ ۴) $\frac{PL^3}{EI}$

حل :

اگر بخواهیم از بحث تقارن استفاده کنیم این سازه را می‌توان مانند سازه‌ای در نظر گرفت با طول 2L که در وسط دهانه آن بار 2P اعمال شده است. در این صورت تغییر مکان وسط دهانه برابر است با:

$$\Delta_A = \frac{(2P)L_{BB'}^3}{48EI} = \frac{(2P)(2L)^3}{48EI} = \frac{PL^3}{3EI}$$

۳ ـ قاب متقارنی تحت اثر نیروی جانبی P به‌صورت زیر قرار دارد. این سازه دارای چه تقارنی می‌باشد؟ **(سراسری ۱۳۷۸)**



۱) تقارن مرکزی

۲) تقارن محوری

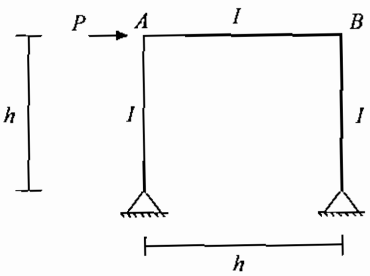
۳) تقارن مرکزی و محوری

۴) هیچ‌کدام

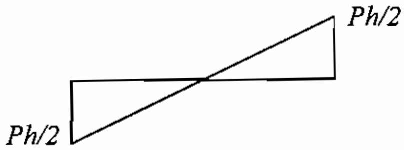
حل :

این سازه دارای هیچ تقارنی نیست.

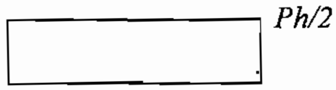
۴ ـ در قاب زیر دیاگرام لنگر تیر AB کدام است؟ **(سراسری ۱۳۷۷)**



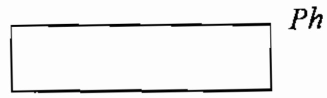
۱)



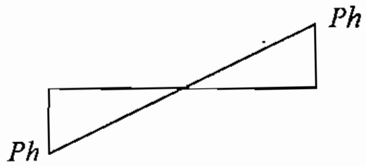
۲)



۳)



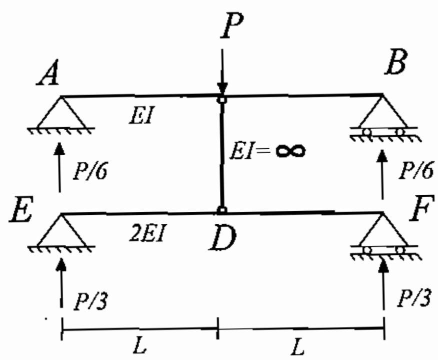
۴)



حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به تقارن، عکس‌العمل افقی هر کدام از تکیه‌گاه‌های پایین برابر $\frac{P}{2}$ است و عکس‌العمل قائم این تکیه‌گاه‌ها صفر است. در اثر این نیرو، لنگر در نقاط A و B برابر $\frac{Ph}{2}$ است ولی دقت داریم که یکی از این لنگرها زیر تیر را به کشش می‌اندازد و یکی روی آن را پس علامت لنگر یکسان نیست و گزینه ۱ صحیح است.

۵ ـ نیروهای عکس‌العمل در اثر بار متمرکز P در نقطه C در شکل زیر نشان داده شده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد تغییر مکان‌های C و D صادق است؟ **(سراسری ۱۳۷۹)**



۱) $\Delta_C \neq \Delta_D$

۲) $\Delta_C = \Delta_D = \frac{PL^3}{8EI}$

۳) $\Delta_C = \Delta_D = \frac{PL^3}{18EI}$

۴) Δ_C و Δ_D بستگی به طول میله صلب CD دارند.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

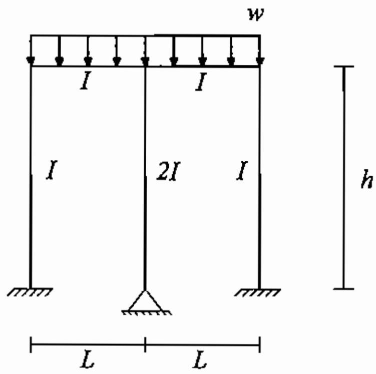
با توجه به صلب بودن قطعه CD می‌توان دریافت تغییر مکان در نقطه C و D با هم برابر است (در قطعه صلب تغییر مکان دو قطعه دلخواه نسبت به هم صفر است.) اگرچه می‌توان این مسأله را با ایده فنرهای موازی حل کرد ولی با توجه به عکس‌العمل‌های داده شده می‌توان دریافت که تیر AB نیرویی برابر $\frac{2P}{6} = \frac{P}{3}$ از بار P را تحمل می‌کند. در اثر این بار تغییر مکان مرکز تیر برابر است با:

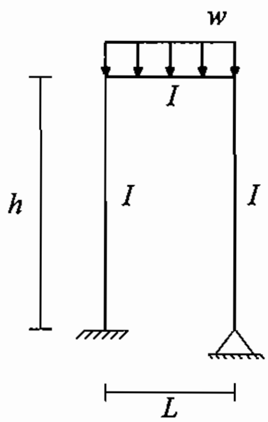
$$\Delta_C = \frac{\left(\frac{P}{3}\right)(2L)^3}{48EI} = \frac{PL^3}{18EI}$$

که با توجه به برابر Δ_C و Δ_D گزینه سوم صحیح است.

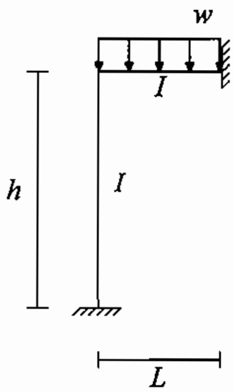
۶ـ در تحلیل سازه دو دهانه (۱) به روش شیب ـ افت، کدام‌یک از سازه‌های الف، ب و ج را می‌بایست تحلیل کرد؟

(سراسری ۱۳۷۸)

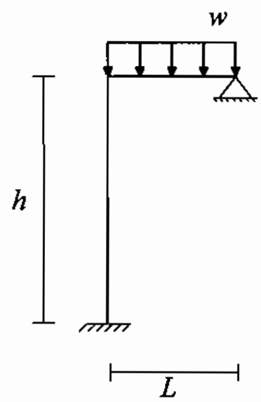




(الف)



(ب)

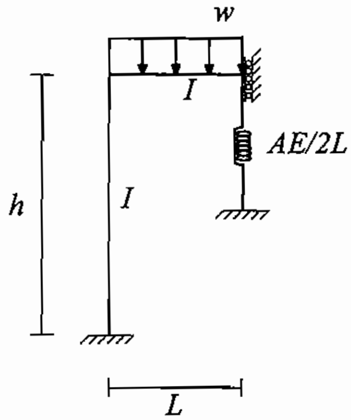


(ج)

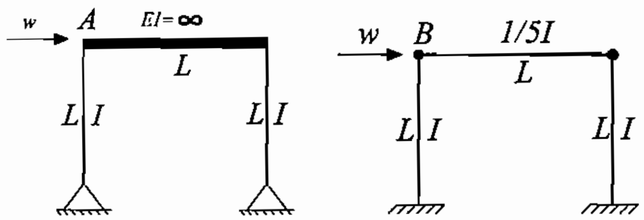
۱) سازه (الف»　　۲) سازه (ب)　　۳) سازه (ج)　　۴) هیچ‌کدام

حل :

از فرضیات روش شیب ـ افت آن است که تغییر مکان محوری سازه‌ها صفر است. با دقت در سازه (۱) بنا به تقارن دوران وسط دهانه صفر است. همچنین تغییر مکان وسط دهانه نیز به دلیل صرف‌نظر از تغییر مکان محوری صفر است پس وسط دهانه باید به‌صورت تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شود و گزینه (ب) صحیح است. دقت داریم که اگر از تغییر مکان محوری صرف‌نظر نمی‌شد سازه به‌صورت زیر مدل می‌شد:



۷ ـ دو سازه شکل زیر را در نظر بگیرید. تغییر مکان افقی نقطه A و نقطه B چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۷۹)**



۱) $\delta_A=\delta_B=\frac{WL^3}{6EI}$

۲) $\delta_B=2\delta_A=\frac{WL^3}{3EI}$

۳) $\delta_A=2\delta_B=\frac{WL^3}{1.5EI}$

۴) $\delta_A=\delta_B=\frac{WL^3}{3EI}$

حل :

در سازه اول چون تیر دارای سختی بی‌نهایت است لذا پس از تغییر مکان زاویه اتصال ستون‌ها به این تیر همچنان قائم باقی می‌ماند. از طرفی با توجه به تقارن افقی سازه سهم هر کدام از ستون‌ها $\frac{W}{2}$ است. چون در هر کدام از اتصالات تغییر مکان افقی داریم ولی شیب صفر است لذا انتهای هر کدام از ستون‌ها را با تکیه‌گاه گیردار غلتکی مدل می‌کنیم که به انتهای آن نیروی متمرکز $\frac{W}{2}$ وارد می‌شود. در این صورت تغییر مکان نقطه A یا همان قطعه صلب برابر است با:

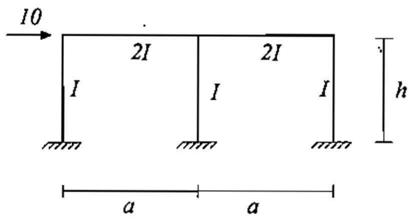
$$\delta_A=\frac{\frac{W}{2}(L)^3}{3EI}=\frac{WL^3}{6EI}$$

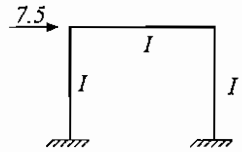
(به عنوان تمرین با روش فنرهای موازی مجدداً حل کنید.)

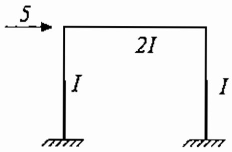
در سازه دوم، تیر موجود دو سر مفصل است پس هیچ نقشی در تحمل خمش ندارد. باز هم طبق تقارن افقی به هر کدام از ستون‌ها بار $\frac{W}{2}$ می‌رسد. چون انتهای ستون‌ها دارای دوران است پس مانند ستون با انتهای آزاد است پس:

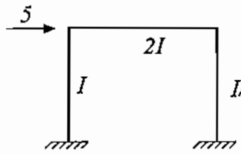
$$\delta_B=\frac{\frac{W}{2}(L)^3}{3EI}=\frac{WL^3}{6EI}$$

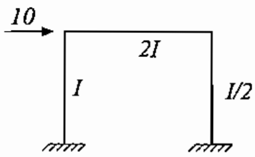
۸ـ برای تحلیل سازه زیر کدام‌یک از قاب‌های زیر را می‌توان تحلیل نمود؟ **(سراسری ۷۹)**



۱)


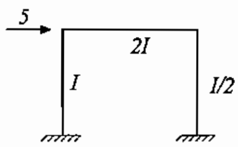
۲)


۳)


۴)


حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

این سازه در راستای افق دارای تقارن است پس می‌توان آن را به صورت دو قاب به صورت زیر در نظر گرفت که به هر کدام بار 5 واحد وارد می‌شود.

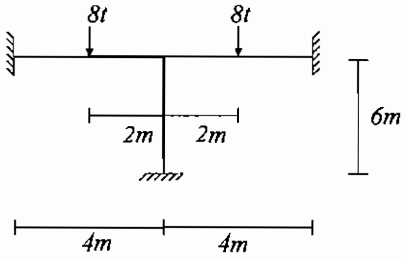


این مسأله را با تبدیل به دو سازه متقارن و پادمتقارن و استفاده از اصل جمع آثار قوا نیز حل کنید.

۹ـ M_A را برحسب $t \cdot m$ حساب کنید؟ **(سراسری ۱۳۸۱)**

۱) -2 ۲) -4

۳) -8 ۴) -16



حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

این سؤال مانند مسأله (سراسری ۷۲) حل می‌شود. از بیان جزئیات صرف‌نظر کرده و داریم:

$$M_A = \frac{(8)(4)}{8} = 4$$