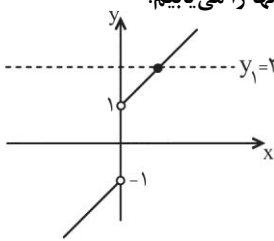


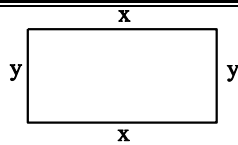
سؤال‌های امتحان درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع
پایه یازدهم آموزش متوسطه - نیمسال اول		مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	حاصل عبارت زیر را بدست آورید. $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$	۱
۲	محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.	۱/۲۵
۳	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) جواب معادله‌ی $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر ... می‌باشد. ب) اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر ... است.	۱
۴	معادله‌ی $3 = \frac{x}{ x } + x$ را به روش هندسی حل کنید.	۱/۵
۵	در دنباله‌ی حسابی ... ، ۷ ، ۲ ، مجموع چند جمله‌ی اول برابر ۸۷ می‌شود؟	۰/۵
۶	اگر با ۱۰۰ متر نرده بخواهیم یک زمین مستطیل شکل را محصور کنیم، بیشترین مساحت ممکن چقدر است؟	۱/۵
۷	معادله‌ی زیر را حل کنید: $\sqrt{\frac{2x+1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2x+1}} = 2$	۱
۸	نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) =   x-1  -  x+1  $ را رسم کنید.	۱
۹	اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - x - 4 = 0$ باشند بدون حل معادله، معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{2+\alpha}$ و $\frac{1}{2+\beta}$ باشد.	۱/۲۵
۱۰	دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار $(f+g)(0)$ را بدست آورید. ب) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.	۱
۱۱	اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$ .	۱/۵
۱۲	آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید	۱
۱۳	آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ با هم مساویند؟ چرا؟	۱/۵
۱۴	نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ یک به یک است. سپس معکوس آن را بنویسید	۲
۱۵	دامنه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{[x]}$ را بیابید.	۱

۲	<p>۱۶ فرض کنید <math>P</math> تعداد سلول های بدن یک جاندار باشد که در هر <math>40</math> ساعت دو برابر می شود، تعداد سلول های اولیه <math>m</math> می باشد. ابتدا رابطه تعداد سلول ها را بر حسب ساعت به صورت یک تابع نمایی بنویسید و محاسبه کنید پس از گذشت <math>2</math> سال تعداد سلول های بدن جاندار چه مقدار می شود؟</p>	
۲۰	جمع	«موفق باشید»

پاسخ تشریحی سؤال‌های امتحان درس: حسابان	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
پایه یازدهم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان	

ردیف	نمره	
۱	۱	<p>عبارت مذکور مجموع تعداد نامتناهی جمله از دو دنباله‌ی هندسی به صورت زیر است:</p> $B = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right)$ <p>در دنباله‌ی اول <math>a_1 = \frac{1}{2}</math> و <math>q = \frac{1}{2}</math> و در دنباله‌ی دوم <math>a'_1 = \frac{1}{3}</math> و <math>q' = \frac{1}{3}</math> است. با استفاده از فرمول حد مجموع داریم:</p> $B = \frac{a_1}{1-q} + \frac{a'_1}{1-q'} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
۲	۱/۲۵	<p>اگر طول مستطیل را با <math>a</math> و عرض آن را با <math>b</math> نمایش دهیم آنگاه: <math>2(a+b) = 18 \Rightarrow S = a+b = 9</math></p> <p>مساحت: <math>ab = 14 \Rightarrow P = ab = 14</math></p> <p>بنابراین اضلاع مستطیل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم <math>x^2 - Sx + P = 0</math> هستند.</p> $x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 7$ <p>پس <math>a = 7</math> و <math>b = 2</math>.</p>
۳	۱	<p>الف) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم:</p> $2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ <p>حال طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:</p> $2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{0 \leq x \leq \sqrt{2}} x = 1$ <p>ب)</p> $f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [5 - \sqrt{2}] \approx [5 - 1/4] = [3/6] = 3$
۴	۱/۵	<p>نمودار دو تابع <math>y_1 = 3</math> و <math>y_2 = x + \frac{x}{ x }</math> را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و محل تلاقی آنها را می‌یابیم.</p>  $y_2 = x + \frac{x}{ x } = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ <p>بنابراین خط <math>y_1 = 3</math>، نمودار تابع <math>y = x + \frac{x}{ x }</math> را در یک نقطه قطع می‌کند.</p> <p>محل تلاقی را از معادله‌ی رو به رو می‌یابیم:</p> $x+1 = 3 \rightarrow x = 2$
۵	۰/۵	<p>در این دنباله <math>a_1 = 2</math> و <math>d = 7 - 2 = 5</math> است. با توجه به فرمول مجموع <math>n</math> جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی داریم:</p> $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 87$ $\Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1) \times 5) = 87$ $\Rightarrow n(4 + 5n - 5) = 87 \times 2 = 174$ $\Rightarrow 5n^2 - n - 174 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 3480 = 3481$ $\Rightarrow n = \frac{1 \pm 59}{2 \times 5} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{58}{10} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$ <p>بنابراین مجموع ۶ جمله از دنباله‌ی مذکور برابر ۸۷ می‌شود.</p>
۶	۱/۵	<p>با توجه به فرض، محیط مستطیل برابر ۱۰۰ است. تابع مساحت آن را بر حسب یک متغیر می‌نویسیم:</p>



$$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \quad (1)$$

$$S = x \times y \stackrel{(1)}{\Rightarrow} S = x \times (50 - x)$$

$$\Rightarrow S = -x^2 + 50x$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع مساحت، یک تابع درجه‌ی دوم است که با توجه به علامت ضریب  $x^2$  ( $a < 0$ )، طول

ماکزیمم از رابطه‌ی  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌آید و با جایگذاری طول در تابع مقدار ماکزیمم به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{-2} = 25$$

$$\Rightarrow S_{\max} = -(25)^2 + 50(25) = -625 + 1250 = 625$$

۱

۷

ابتدا دامنه‌ی عبارت را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq 0 \Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

اشتراک  
 $\rightarrow$  دامنه:  $x > -\frac{1}{2}$

حال طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x+1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2x+1}} &= 2 \quad \text{توان ۲} \\ \frac{2x+1}{3} + \frac{3}{2x+1} + 2\sqrt{\frac{2x+1}{3} \times \frac{3}{2x+1}} &= 4 \\ \Rightarrow \frac{2x+1}{3} + \frac{3}{2x+1} + 2 &= 4 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} + \frac{3}{2x+1} = 2 \\ \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = 1 \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

چون  $x = 1$  در دامنه قرار دارد و در معادله‌ی اولیه صدق می‌کند، جواب معادله است.  
 نکته:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1 \\ a + \frac{1}{a} = -2 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

۱

۸

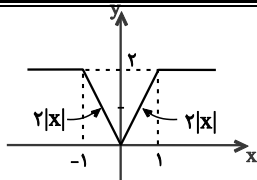
$$f(x) = ||x-1| - |x+1||$$

عبارت‌های درون دو قدرمطلق داخلی را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	-1	1	
x-1	-	+	+
x+1	-	+	+
f(x)	$ 1-x+x+1 =2$	$ 1-x-x-1 =-2x=2 x $	$ x-1-x-1 =2$



1/25	<p>کافی است جمع و ضرب ریشه‌های جدید را بدست آوریم و از معادله‌ی <math>x^2 - Sx + P = 0</math> استفاده کنیم:</p> $x^2 - x - 4 = 0$ <p><math>S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = 1</math> و <math>P_{\text{قدیم}} = \alpha\beta = -4</math></p> $S_{\text{جدید}} = \frac{1}{\gamma + \alpha} + \frac{1}{\gamma + \beta} = \frac{\gamma + \beta + \gamma + \alpha}{\gamma + \alpha + \gamma + \beta} = \frac{\gamma + \beta + \gamma + \alpha}{\gamma + \alpha + \gamma + \beta}$ $= \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\gamma + \alpha + \gamma + \beta} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 2 \times 1 + (-4)} = \frac{5}{\gamma}$ $P_{\text{جدید}} = \frac{1}{\gamma + \alpha} \times \frac{1}{\gamma + \beta} = \frac{1}{\gamma + \alpha + \gamma + \beta}$ $= \frac{1}{\gamma + 2 \times 1 + (-4)} = \frac{1}{\gamma}$ $\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{\gamma}x + \frac{1}{\gamma} = 0$ <p><math>\times \gamma \rightarrow \gamma x^2 - 5x + 1 = 0</math> معادله‌ی جدید</p>	9
1	<p>(الف) <math>(f + g)(0) = f(0) + g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} = \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2}</math></p> <p>(ب) <math>D_f = R - \{2\}</math> و <math>D_g = [-4, +\infty)</math></p> $D_{f+g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = ([-4, +\infty) - \{2\}) - \{-4\} = (-4, +\infty) - \{2\}$	10
1	<p>(1) <math>(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 4x + 5</math></p> <p>(2) <math>f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2</math> در تابع <math>f(x) = x^2 + 2x + 2</math> را تشکیل می‌دهیم:</p> <p>سمت چپ دو معادله‌ی (1) و (2) با هم برابرند، پس سمت راست آنها نیز با هم برابر است.</p> $g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 + 1 = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2$ $\Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2) \Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$	11
1	<p>اگر به ازای دو مقدار متمایز از دامنه‌ی تابع <math>(x_1 \neq x_2)</math> مقادیر <math>y</math> (خروجی) برابر باشد تابع یک به یک نیست. در این تابع خواهیم داشت: <math>f(0) = 0</math> و <math>f(2) = 0</math> پس تابع یک به یک نیست.</p>	12
1/5	<p>دامنه‌ی هر دو تابع <math>R</math> است، یعنی <math>D_f = D_g = R</math>. از طرفی:</p> $f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \times \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 + x^2})}{1 - (1 + x^2)} = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 + x^2})}{-x^2}$ $= \sqrt{x^2 + 1} - 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$	13

	پس دو تابع f و g مساویند	
۲	<p>می‌دانیم تابع f زمانی معکوس پذیر است که یک به یک باشد. ابتدا باید رابطه‌ی زیر را ثابت کنیم:</p> $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 1}}$ <p>به توان</p> $\frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2}{x_2^2 + 1}$ $\Rightarrow x_1^2 x_2^2 + x_1^2 = x_1^2 x_2^2 + x_2^2$ $\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ یک به یک است.}$ <p>(*) دقت کنید که از رابطه‌ی <math>\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 1}}</math> نتیجه می‌شود که <math>x_1</math> و <math>x_2</math> هم‌علامت هستند، زیرا مخرج هر دو کسر مثبت است.</p> <p>برای یافتن ضابطه‌ی تابع معکوس کافی است x را بر حسب y مرتب کنیم و در آخر جای x و y را عوض کنیم:</p> <p>به توان</p> $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ $\Rightarrow x^2 y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 (1 - y^2) = y^2$ $\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1 - y^2} \quad \begin{matrix} x \text{ و } y \text{ هم‌علامتند} \\ -1 < y < 1 \end{matrix} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{و} \quad -1 < x < 1$	۱۴
۱	$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ریشه‌های مخرج $[x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$ $\Rightarrow D_f = [-1, 1] - [0, 1) \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup \{1\}$	۱۵
۲	تعداد سلول‌های این جاندار پس از t ساعت به صورت زیر می‌باشد: $P = m(2)^{\frac{t}{40}}$ بنابراین تعداد سلول‌های جاندار پس از دو سال برابر می‌شود با: $P = m(2)^{\frac{2 \times 365}{40}} = m(2)^{18.25}$	۱۶
۲۰	جمع	«موفق باشید»