دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی– دانشکده ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۱ (نیمسال دوم ۹۷-۹۶) جمع نمرات: ۶۰

تاریخ آزمون: ۱۳۹۷/۲/۱۹ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

- **این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.**

۱- ریشه‌های معادله $z^{۳} - \frac{۱-i}{۱+i} = ۰$ را بیابید. (۱۰ نمره)

۲- با استفاده از قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) ثابت کنید: (۱۰ نمره)

$$|\sin x_۱ - \sin x_۲| \leq |x_۱ - x_۲|$$

۳- ثابت کنید معادله $x^{۵} + x^{۳} + ۲x - ۳ = ۰$ دقیقاً یک ریشه حقیقی در بازه $(۰,۱)$ دارد. (۱۰ نمره)

۴- مقدار حد مقابل را بیابید: (۶ نمره)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+۱}{x+۲}\right)^{x}$$

۵- الف) نشان دهید $\tanh^{-۱} x$ را می‌توان به صورت $\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$ نوشت. سپس، دامنه و برد (حوزه تعریف و حوزه مقادیر) آن را بدست آورده و نمودار آن را رسم نمایید. (۷ نمره)

ب) مطلوب است حاصل عبارت زیر (۷ نمره)

$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{\cosh(\ln x) - \sinh(\ln x)}$$

۶- سری تیلور تابع $f(x) = e^{x^{۲}+۲x}$ را حول نقطه $x = -۱$ بیابید. (۱۰ نمره)

با آرزوی موفقیت

math-teacher.blog.ir

math-teacher.blog.ir

$$1)\ z^3 - \frac{1-i}{1+i} = 0 \rightarrow z^3 = \frac{1-i}{1+i} \xrightarrow[\text{مزدوج مخرج}]{\times \frac{1-i}{1-i}} z^3 = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$$

$$\xrightarrow{i^2=-1} z^3 = \frac{-2i}{2} = -i \rightarrow z = (-i)^{1/3}$$

$$\xrightarrow{\text{با نوشتن فرم مثلثاتی}} 0 - i \begin{cases} r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \\ tg\theta = \frac{-1}{0} = -\infty \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{دستور دموآور}} z = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{1/3} = \left(\cos\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$\xrightarrow{k=0} z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{z = i}$$

$$\xrightarrow{k=1} z = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} \rightarrow \boxed{z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$

$$\xrightarrow{k=2} z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} \rightarrow \boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

- ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

2) $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$ اثبات؛

$f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$f'(x) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} \longrightarrow \cos x = \dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}$

$\xrightarrow{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \text{ می‌دانیم}} -1 \leqslant \dfrac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} \leqslant 1$

$\longrightarrow -(x_1 - x_2) \leqslant \sin x_1 - \sin x_2 \leqslant x_1 - x_2$

$\xrightarrow{|x| \leqslant a \rightarrow -a \leqslant x \leqslant a} |\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$

ابراهیم شاه ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۷

• ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛
• ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

3) $x^5+x^3+2x-3=0 \qquad (0,1)$

$f(0)=-3$
$f(1)=1$ $\longmapsto f(0)\,f(1)<0$

چون تابع $f(x)$ در بازه $(0,1)$ پیوسته است و $f(0)\,f(1)<0$

طبق قضیه بولتزانو حداقل یک ریشه حقیقی در بازه $(0,1)$ دارد.

$f'(x)=5x^4+3x^2+2>0 \longrightarrow$ همواره صعودی

چون تابع صعودی اکید است بنابراین فقط همان یک ریشه را دارد.

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

- ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x} = 1^{\infty}$ مبهم

math-teacher.blog.ir

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x} \xrightarrow{\text{از}\ Ln} LnA=\lim_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$$

$$\to LnA=\lim_{x\to+\infty} x\cdot Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+3x+2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x^2+3x+2}\ \frac{\text{بالاترین درجه صورت}}{\text{بالاترین درجه مخرج}}\ -1$$

$$\to LnA=-1 \to \boxed{A=e^{-1}=\frac{1}{e}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی اردیبهشت ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

5) الف) $tgh^{-1}x = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ اثبات؛ math-teacher.blog.ir

$$\boxed{y = tgh^{-1}x} \Rightarrow x = tghy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \rightarrow xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$$

$$\rightarrow e^y(x-1) = -e^{-y}(x+1) \rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \xrightarrow{Ln \text{ با گرفتن}}$$

$$\rightarrow 2y = Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

ب)
$$\frac{Cosh(Lnx) + Sinh(Lnx)}{Cosh(Lnx) - Sinh(Lnx)}$$

می‌دانیم
$$\begin{cases} Coshx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ Sinhx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - ارشد عمران ۹۷

$$= \frac{e^{Lnx} + \cancel{e^{-Lnx}} + e^{Lnx} - \cancel{e^{-Lnx}}}{\cancel{e^{Lnx}} + e^{-Lnx} - \cancel{e^{Lnx}} + e^{-Lnx}}$$

$$= \frac{2e^{Lnx}}{2e^{-Lnx}} = e^{2Lnx} = e^{Lnx^2} \xrightarrow[\text{می‌دانیم}]{e^{LnA} = A} = \boxed{x^2}$$

- ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛

- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

• ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد؛
• ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

6) $f(x) = e^{x^2+2x}$ $\quad x = -1$

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}$$

فرمول بسط تیلور

$f(x) = e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f(-1) = e^{-1}$

$f'(x) = (2x+2)\, e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = 0$

$f''(x) = 2e^{x^2+2x} + (2x+2)^2 e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 2e^{-1}$

$f'''(x) = 2(2x+2)e^{x^2+2x} + 4(2x+2)e^{x^2+2x} + (2x+2)^3 e^{x^2+2x} \xrightarrow{x=-1} f'''(-1) = 0$

$\vdots$

$$y = e^{-1} + 0 + \frac{2e^{-1}\cdot(x+1)^2}{2!} + 0 + \frac{12e^{-1}\cdot(x+1)^4}{4!} + 0 + \dots$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{e} + \frac{(x+1)^4}{2e} + \frac{(x+1)^6}{6e} + \dots}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷