

صو الرب الرحيم

نام و نام خانوادگی:

آزمون آمادگی مرحله اول المپیاد ریاضی



مدت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

پایه دوم

صفحه: از

سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان
دبیرستان علامه حلی (۸)

نظریه اعداد

۱. تمام n های طبیعی را بیابید که $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ اول باشد.

۲. تمام جواب های طبیعی معادله $x^2 = n! + 2001$ را بیابید.

۳. نشان دهید بی نهایت n وجود دارد که $n! - 1$ مرکب باشد.



۱- دستگاه معادلات زیر در اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 1 = yz \\ y - 1 = xz \\ z - 1 = xy \end{cases}$$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) جواب ندارد.

۲- بیشترین مقدار $ab + bc + cd$ برای $a, b, c, d \geq 0$ با شرط $a + b + c + d = 1$ چند است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{9}$ (۵) $\frac{3}{16}$

۳- بزرگترین عدد حقیقی M را طوری بیابید که برای هر $a, b \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$a^2 + b^{1389} \geq Mab$$

(۱) صفر (۲) 2^{-1386} (۳) ۱ (۴) $\frac{1391}{1389}$ (۵) ۲

۴- فرض کنید $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 1600$ در این صورت حداقل مقدار عبارت $\frac{x}{y} + \frac{z}{t}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{40}$ (۲) $\frac{1}{30}$ (۳) $\frac{1}{25}$ (۴) $\frac{1}{20}$ (۵) $\frac{1}{16}$

۵- کدام گزاره در مورد عدد $(\sqrt{50})^{\sqrt{50}}$ درست است؟

(۱) عددی گنگ است (۲) مربع کامل است (۳) عددی طبیعی نیست

(۴) مکعب کامل است (۵) توان پنجم کامل است



۶- اگر $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله ای درجه ۲ باشد به طوری که ضریب جمله درجه دو آن ها ۱ است و داریم

$$p(1) + p(10) + p(100) = q(1) + q(10) + q(100)$$

آن گاه کدام یک از مقادیرهای زیر در معادله $p(x) = q(x)$ صدق می کند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۶ (۳) ۳۷ (۴) ۴۲ (۵) ۵۶

۷- دستگاه معادله های زیر در مجموعه عددهای حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y \\ y + \frac{1}{y} = z \\ z + \frac{1}{z} = x \end{cases}$$

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) چهار (۵) هشت

۸- کوچکترین عدد طبیعی مانند m که به ازای آن چند جمله ای هایی با ضریب های صحیح مانند $p(x)$ و $q(x)$ وجود دارند که

$$m = (x + 2)(x + 5)(x + 7)p(x) - (x - 2)(x - 5)(x - 7)q(x)$$

برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۱۲۶۰ (۳) ۱۶۸۰ (۴) ۳۷۸۰ (۵) ۷۵۶۰



شرکبیات

۱- الگوریتم زیر را در نظر بگیرید.

* عدد x را از ورودی بگیر.

* عدد a را برابر صفر قرار بده.

* تا زمانی که عدد x بزرگ تر از سه است، کارهای زیر را انجام بده:

- باقی مانده ی تقسیم x بر ۸ را در k بریز.

- باقی مانده ی تقسیم x بر ۴ را در l بریز.

- S را برابر $k - l$ قرار بده.

- اگر S برابر صفر است، به مقدار a یک واحد اضافه کن.

- x را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.

* مقدار a را به عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال اگر به این الگوریتم عدد ۱۹ را بدهیم، خروجی الگوریتم مقدار ۲ را برمی گرداند. اکنون فرض کنید اعداد ۱ تا ۱۳۹۳ را یکی یکی به

الگوریتم می دهیم و هر بار خروجی الگوریتم را یادداشت می کنیم. بزرگ ترین عددی که یادداشت می کنیم چند است؟

۱۲ (۵)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۲- جدول ۴×۴ زیر را در نظر بگیرید. به تعدادی خانه از این جدول که محیط آن ها یک مربع تشکیل بدهد، یک زیرمربع گفته می شود. مثلاً

هر خانه از این جدول، خود به تنهایی یک زیرمربع است. هم چنین کل جدول نیز یک زیرمربع است. برای هر زیرمربع از این جدول اعداد

درون آن زیرمربع را جمع کرده و روی یک کاغذ می نویسیم. سپس جمع تمام اعداد روی کاغذ را حساب می کنیم. حاصل این جمع چه قدر

می شود؟

۳	۰	-۲	۱
۱	۲	-۴	۳
۱	۵	۳	-۱
-۵	-۴	۲	۲

۷۰ (۱)

۷۶ (۲)

۶۸ (۳)

۴۴ (۴)

۶۴ (۵)

۳- مجموعه ی $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ چند زیرمجموعه دارد که تعداد اعضای آن زوج و مجموع اعضای آن فرد باشد؟

۳۳ (۵)

۲۴ (۴)

۶۴ (۳)

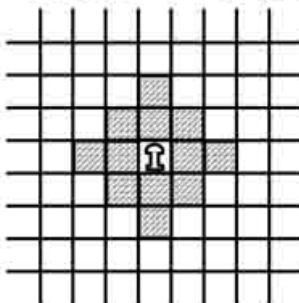
۸ (۲)

۹۶ (۱)

۴- مهره شطرنج جدیدی به اسم «دیو» اختراع شده است. در حالت کلی اگر این مهره مانند شکل زیر در جدول قرار گیرد تمام ۱۲ خانه ی

مشخص شده را تهدید می کند. به چند طریق می توان در یک صفحه ی شطرنج ۸×۸ دو مهره ی دیو متمایز قرار داد که یکدیگر را تهدید

کنند؟



۵۷۲ (۱)

۶۱۲ (۲)

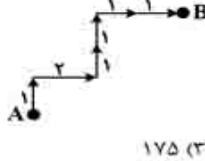
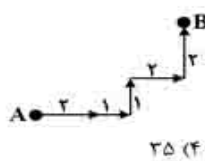
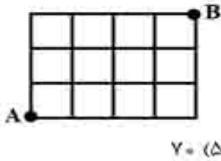
۳۰۶ (۳)

۲۸۶ (۴)

۷۶۸ (۵)



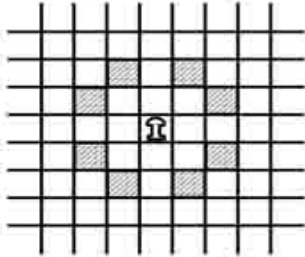
۵- ملخی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود. او در هر مرحله می تواند ۱ یا ۲ واحد به سمت راست یا به سمت بالا ببرد. به چند طریق این کار ممکن است؟ برای مثال دو مسیر مطلوب به صورت زیر است:



$155 = (2)$

$2 = 7 = (1)$

۶- به چند حالت می توان چهار اسب یکسان را روی یک صفحه 3×3 قرار داد طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟ می دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می کند یعنی در حالت کلی اسب مانند شکل زیر خانه های مشخص شده را تهدید می کند. هم چنین فرض کنید صفحه 3×3 ثابت است و نمی چرخد. فرض کنید دو مهره اسب هم رنگ نیز می توانند هم دیگر را تهدید کنند و تهدید کردن به رنگ مهره ربطی ندارد بلکه فقط به جایشان ربط دارد.



$1 = 8 = (1)$

$17 = (2)$

$18 = (3)$

$16 = (4)$

$2 = (5)$

۷- اعداد مضرب ۵ را مطابق زیر از چپ به راست می نویسیم. 3923 آمین رقم این دنباله چند است؟

$51015202530354045 \dots$
 $514 = (5)$

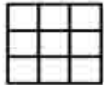
$613 = (4)$

$712 = (3)$

$811 = (2)$

$91 = (1)$

۸- فرض کنید که در مربع 3×3 زیر اعداد ۱ تا ۹ را طوری قرار می دهیم که حاصل جمع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر شود. چند جدول مختلف با این ویژگی داریم. فرض کنید مربع 3×3 ثابت است و نمی چرخد.



$8 = (2)$

$64 = (4)$

$1 = (1)$

$1 = (3)$

$16 = (5)$

۹- برنامه زیر را در نظر بگیرید.

* عدد x را از ورودی بگیر.

* عدد a را برابر صفر قرار بده.

* تا زمانی که عدد x بزرگ تر از صفر است کارهای زیر را انجام بده.

- باقی مانده تقسیم x بر ۲ را در k بریز.

- اگر k برابر صفر بود به مقدار a یک واحد اضافه کن.

- x را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده.

* باقی مانده a بر ۲ را در b قرار بده.

* b را به عنوان خروجی الگوریتم برگردان.

برای مثال اگر به این الگوریتم عدد ۱۰ را بدهیم خروجی برابر صفر است و اگر عدد ۸ را بدهیم خروجی برابر یک است. به ازای چند تا از اعداد ۱ تا ۳۲ خروجی الگوریتم یک است؟

$14 = (5)$

$6 = (4)$

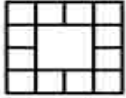
$16 = (3)$

$15 = (2)$

$5 = (1)$



۱- در شکل زیر به چند طریق می توان ۴ مربع با ضلع به طول یک انتخاب کرد به طوری که مربع های انتخاب شده در رأس و ضلع با یکدیگر اشتراک نداشته باشند؟ (شکل زیر یک مربع ۴×۴ است که مربع ۲×۲ وسط آن حذف شده است.) هم چنین شکل زیر ثابت است و نمی چرخد.



۵۷ (۱)

۵۱ (۲)

۴۷ (۳)

۴۹ (۴)

۶۱ (۵)

۱۱- فرض کنید A کوچک ترین عدد بزرگ تر از ۲۲۱۵۰ است که بر ۱۳ بخش پذیر بوده و رقم های آن (در مبنای ۱۰) فقط از ۱ و ۹ تشکیل شده اند. تعداد رقم های A چند است؟

۹ (۵)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

۱۲- سه چند جمله ای $x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x + 1$ و $12x^{12} + 11x^{11} + \dots + 2x^2 + x \cdot x^{20} + x^{18} + x^{16} + \dots + x^2 + 1$ را در هم ضرب می کنیم. اگر مجموع ضرایب چند جمله ای حاصل D باشد، باقی مانده ی D بر ۵ چند است؟

۴ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۱۳- به چند طریق می توان عدد ۲۰ را به صورت $a + 2b + 8c + 16d$ نمایش داد که در آن a, b, c, d دارای مقادیر ۰, ۱, ۲ یا ۳ یا ۴ هستند.

۸ (۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۴- برای کدام مقدار n می توان اعداد ۱ تا n را به چهار دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد هر دسته برابر باشد؟

۲۰۱۷ (۵)

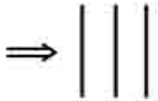
۲۰۱۴ (۴)

۲۰۰۴ (۳)

۱۳۹۳ (۲)

۱۳۹۱ (۱)

۱۵- سه شیشه موازی یا هم داده شده اند. از سمت چپ ۱۰۰۰ واحد نور می تابانیم. می دانیم هر یک از این شیشه ها اگر ۱۰۰۰ واحد نور دریافت کنند، ۱۰۰ واحد آن را در جهت عکس تابش می کنند، ۱۰۰ واحد را جذب می کنند و ۸۰۰ واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می دهند. چند واحد نور به سمت راست شیشه ها منتقل می شود؟



$$\frac{5120000}{9801} \quad (3)$$

$$\frac{51200}{99} \quad (2)$$

۵۱۲ (۱)

$$\frac{5120000}{99} \quad (5)$$

$$\frac{51200}{9801} \quad (4)$$

۱۶- اعداد ۱ تا ۱۴ را به این صورت نوشته ایم که هر عدد را به اندازه ی خودش نوشته ایم و به ترتیب از چپ به راست کنار هم قرار دادیم و بین اعداد متوالی \oplus گذاشته ایم. حال \oplus عدد اول و دوم را حساب و نتیجه را با عدد سوم \oplus می گیریم و نتیجه را با عدد چهارم \oplus می گیریم و

$$1 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 3 \oplus 4 \oplus \dots \oplus 14 \oplus \dots \oplus 14 \quad ? \text{ نتیجه ی نهایی چند است؟}$$

۱۴ بار

$C = A \oplus B$ را به این صورت تعریف می کنیم: اگر a_i, b_i, c_i به ترتیب رقم های i ام (از سمت راست) A و B و C در مبنای دو باشند در این-

$$51 \oplus 25 = (110011)_2 \oplus (11001)_2 = (101010)_2 = 42$$

$$\text{صورت } c_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases} \text{ مثلاً:}$$

۱۵ (۵)

۱۶ (۴)

۹ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

۱۷- چند عدد ۱۱ رقمی از ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ داریم که مجموع هر ۵ رقم متوالی بر ۳ بخش پذیر باشد و هم چنین مجموع ۵ رقم آخر (۵ رقم سمت راست) بر ۶ نیز بخش پذیر باشد؟

۸۲۹۴۴ (۵)

۲۸۳۴۳۵۲ (۴)

۱۲۹۶ (۳)

۲۰۴۸ (۲)

۱۶۵۸۸۸ (۱)