کنترل خطی

جلسه هشتم

استاد : اصفهانیان

رشته :کارشناسی ارشد مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب

انواع کنترل کننده :

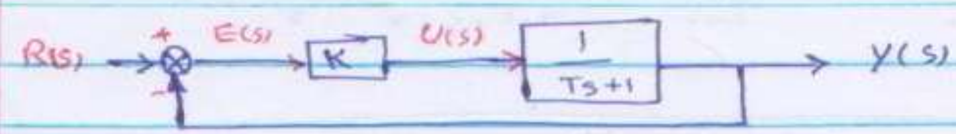
1) P-Cont. $\quad G_c(s) = K$

$\qquad\qquad\qquad\quad G_c(s) = K(1 + T_d s)$

2) PD-Cont $\quad G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

3) PI-Cont

4) PID-Cont $\quad G_c(s) = K\left(1 + T_d S + \frac{1}{T_i s}\right)$



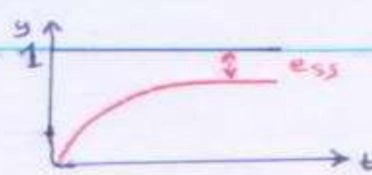
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} =$$

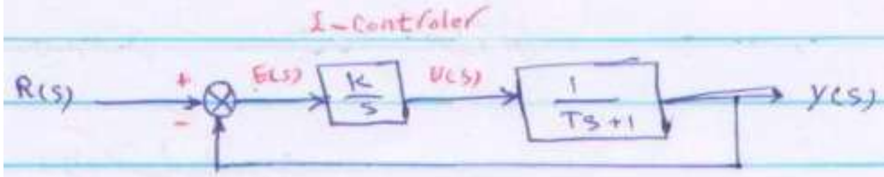
$$\Rightarrow 1 - \left[\frac{\frac{K}{Ts+1}}{1 + \frac{K}{Ts+1}}\right] = 1 - \frac{K}{Ts+1+K} = \frac{Ts+1}{Ts+1+K}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{Ts+1}{Ts+1+K} \times \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \times \frac{Ts+1}{Ts+1+K} \times \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$= \frac{1}{1+K}$$





$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{R(s)-Y(s)}{R(s)}=1-\frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$=1-\left[\frac{\frac{K}{(Ts+1)s}}{1+\frac{K}{(Ts+1)s}}\right]=1-\frac{K}{Ts^2+s+K}=\frac{Ts^2+s}{Ts^2+s+K}$$

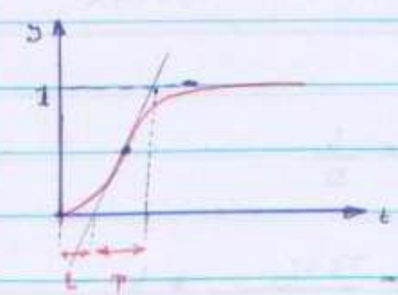
$$R(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow E(s)=\frac{Ts^2+s}{Ts^2+s+K}\times\frac{1}{s}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} \cancel{s}\times\frac{Ts^2+s}{Ts^2+s+K}\times\frac{1}{\cancel{s}}=0$$

روش زیگلر – نیکولز

حالت اول :

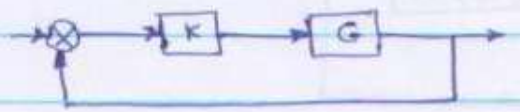
$R(s)=\frac{1}{s}$

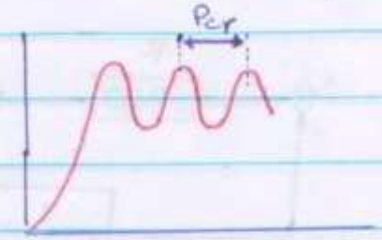


کنترل کننده	ضرایب
P	$K=\frac{1}{TL}$
PI	$K=\frac{0.9}{TL}$ $\quad T_i=3.3L$
PID	$K=\frac{1.2}{TL}$ $\quad T_i=2L$ $\quad T_d=0.5L$

حالت دوم:

$R(s) = \frac{1}{s}$





K_{cr} : مقدار K که باعث نوسانی شدن سیستم می‌شود.

(یک سطر کاملا صفر در جدول راوث)

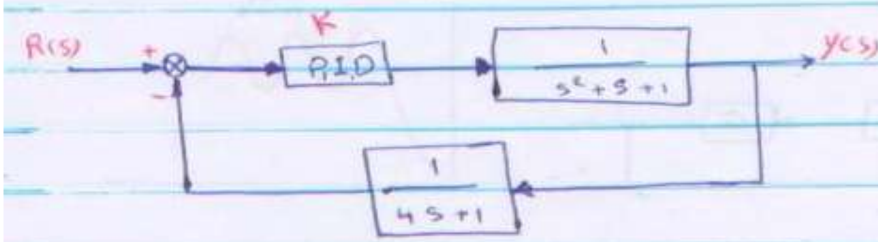
P_{cr} : دوره تناوب

$P_u = \frac{2\pi}{\omega_n}$

$s_{1,2} = \pm j\omega_n$ از حل معادله کمکی :

کنترل کننده	شرایط
P	$K = 0.5\ K_{cr}$
PI	$K = 0.45\ K_{cr}$, $T_i = 0.83\ P_{cr}$
	$K = 0.6\ K_{cr}$, $T_i = 0.5\ P_{cr}$, $T_d = 0.125\ P_{cr}$

مثال ۱) انتخاب کنترل کننده ها با روش زیگلر – نیکولز



ضرایب کنترل کننده را با استفاده از روش زیگلر-نیکولز بدست آورید.

جدول دوم - راوث - برای معادله کل مشخصه

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s^2+s+1}}{1+\frac{K}{(s^2+s+1)(4s+1)}} = \frac{K}{(s^2+s+1)(4s+1)+K}$$

معادله مشخصه : $4s^3 + 5s^2 + 5s + \underbrace{1 + K}_{\text{ضرایب}}$

s^3	4	5	
s^2	5	$1+K$	
s^1	$\frac{25-4(1+K)}{5}$	0	
s^0	$1+K$	0	سطرهای s بتوان فرد را می توان صفر کرد

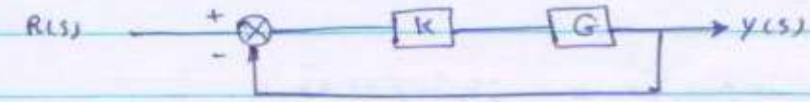
$$s^1 \Rightarrow \frac{25-4(1+K)}{5} \Rightarrow 25 = 4+4K \Rightarrow 4K = 21 \Rightarrow \boxed{K_{cr} = 5.25}$$

معادله $s^2 \Rightarrow 5s^2 + 1 + K = 0 \xrightarrow{K=5.25} 5s^2 + 6.25 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1.1j$

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{1.1} \Rightarrow \boxed{5.7}$$

$K = 0.6\ K_{cr}$ $\quad T_i = 0.5\ P_{cr}$ $\quad T_d = 0.125\ P_{cr}$

مکان هندسی ریشه ها :



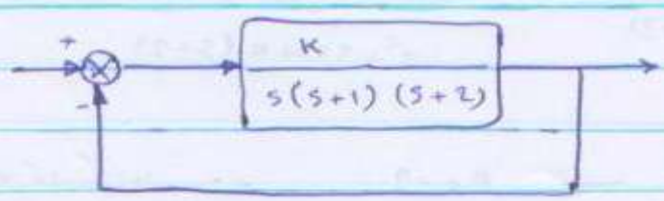
$$G(s) = \frac{KG}{1+KG} \qquad 1+KG=0$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$1+KG = 1+\frac{K}{(s+1)(s+2)} = 0 \qquad s^2+3s+2+K=0$$

$$\Delta = 9-4(2+K) \quad , \quad s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2+4)}}{2}$$

مکان هندسی ریشه‌ها :



۱) محل صفر و قطب های تابع تبدیل حلقه باز در صفحه مختلط

قطبها که مخرج را صفر میکنند : $P_1=0 \ , \ P_2=-1 \ , \ P_3=-2$

با تغییر K از 0 تا ∞ محل قطب های حلقه بسته مدار را بدست می آوریم.

$K: 0 \to \infty \quad \longrightarrow$ محل قطب های حلقه بسته

$K=0 \Rightarrow$ قطب های حلقه بسته = قطب های حلقه باز

$K=\infty \Rightarrow$ قطب های حلقه بسته = صفرهای حلقه باز

صفرها را با علامت o مشخص می کنیم.
قطب ها را با علامت × مشخص می کنیم.

حلقه باز $= \dfrac{K(s+2)}{s(s+3)}$ $\qquad Z=-2$, $P_1=0$, $P_2=-3$

حلقه بسته $= \dfrac{\dfrac{K(s+2)}{s(s+3)}}{1+\dfrac{K(s+2)}{s(s+3)}} = \dfrac{K(s+2)}{\underbrace{s(s+3)+K(s+2)}_{s^2+3s+K(s+2)}}$

در K=∞ تعداد قطب ها $\xrightarrow{K\to\infty} K(s+2) \longrightarrow P=-2$

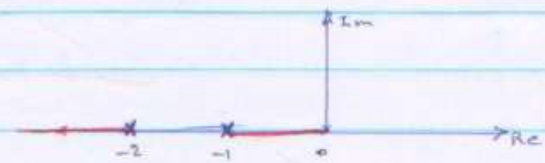
نکته 1:
مکان هندسی ریشه ها در K=0 از قطب های حلقه باز شروع شده در K=∞ به صفرهای حلقه باز ختم خواهد شد.

نکته 2:
همواره به تعداد قطب ها باید صفر داشته باشیم. بنابراین به تعداد صفرهایی که لازم داریم صفر در بی نهایت در نظر می گیریم

پس: $Z_{1,2,3} \longrightarrow \infty$

۲) تعیین مکان هندسی روی محور حقیقی :

با حرکت از سمت راست صفحه مختلط به سمت چپ در هر ناحیه‌ای که مجموع تعداد صفرها و قطب‌های حلقه باز فرد شود به شرط آن ناحیه جزء مکان هندسی روی محور اعداد حقیقی خواهد بود .



۳) مجانب ها :

اولین قدم : بررسی تعداد مجانب‌ها :

$$\text{تعداد مجانب‌ها} = n - m$$

n : درجه مخرج حلقه باز

m : درجه صورت حلقه باز

$$\theta \quad \text{زاویه مجانب‌ها با محور حقیقی} = \frac{\pm 180^\circ (2h+1)}{n-m} \qquad h = 0, 1, 2, \dots$$

$2h+1$: زوایای فرد

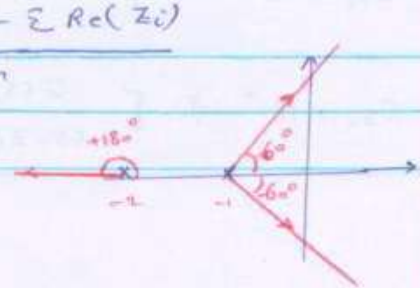
$$\theta_1 \quad \text{زاویه مجانب اول} = \frac{\pm 180^\circ}{3} = \pm 60^\circ$$

$$\theta_2 \quad \text{زاویه مجانب دوم} = \frac{\pm 180 \times 3}{3} = \pm 180$$

$$\text{تعداد مجانب‌ها} = 3$$

$$\sigma \quad \text{محل برخورد مجانب‌ها با محور حقیقی} = \frac{\sum Re(P_i) - \sum Re(Z_i)}{n-m}$$

$$\sigma = \frac{(-1-2) - 0}{3} = -1$$



مثال)

$P_{1,2} = -2 \pm 3j \qquad z = -1$

$$\frac{(-2-2)-(-1)}{2-1}$$

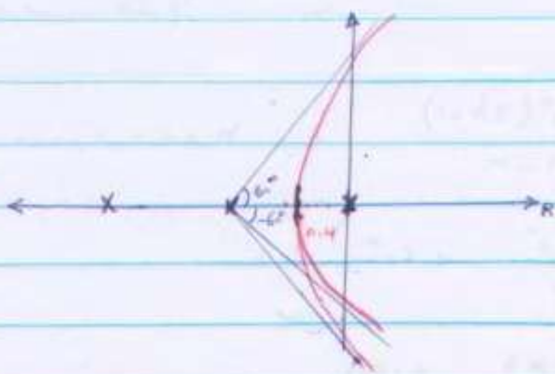
۴) تعیین نقاط شکست :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{G(s)}\right) = 0$$

حلقه باز

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow \frac{d}{ds}\left[s(s+1)(s+2)\right] = 0$$

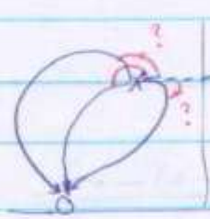
$$\frac{d}{ds}\left[s^3 + 3s^2 + 2s\right] = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0 \begin{cases} s = -0.4 \\ s = -1.6 \end{cases}$$



۵) تعیین زاویه خروج از قطب مختلط و ورود به صفر مختلط :

$$\theta_{p_i} = 180^\circ + \measuredangle\left[G(s)\,(s-P_i)\right]_{s=P_i}$$

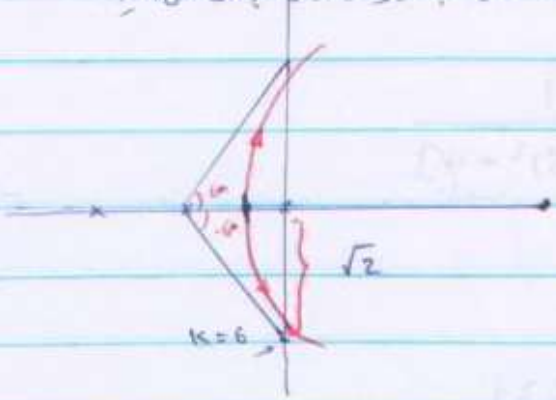
$$\theta_{z_i} = 180^\circ - \measuredangle\left[\frac{G(s)}{(s-z_i)}\right]_{s=z_i}$$



۶) تعیین محل برخورد مکان هندسی با محور موهومی :

با مساوی صفر قرار دادن یک سطر از جدول راوث، مقدار K ی که در آن مکان هندسی با محور موهومی برخورد می‌کند بدست می‌آید.

با حل معادله کمکی محل برخورد مکان هندسی با محور موهومی بدست می‌آید.



$$s(s+1)(s+2)+K=0$$

$$s^3+3s^2+2s+K=0$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	0

$\Rightarrow 3s^2+K=0 \xrightarrow{K=6} 3s^2=-6 \Rightarrow \boxed{s=\pm j\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 6-K=0 \Rightarrow \boxed{K=6}$

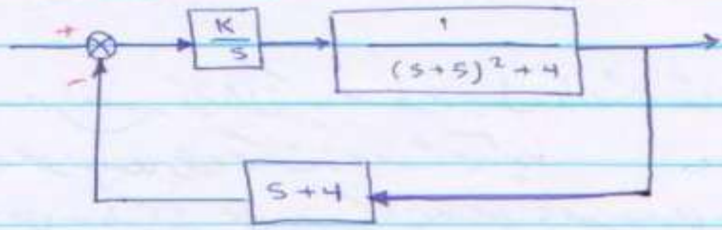
دستورات نرم افزار متلب (MATLAB)

```
rlocus(g)
```

ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها (محل برخورد)

تابع تبدیل حلقه باز

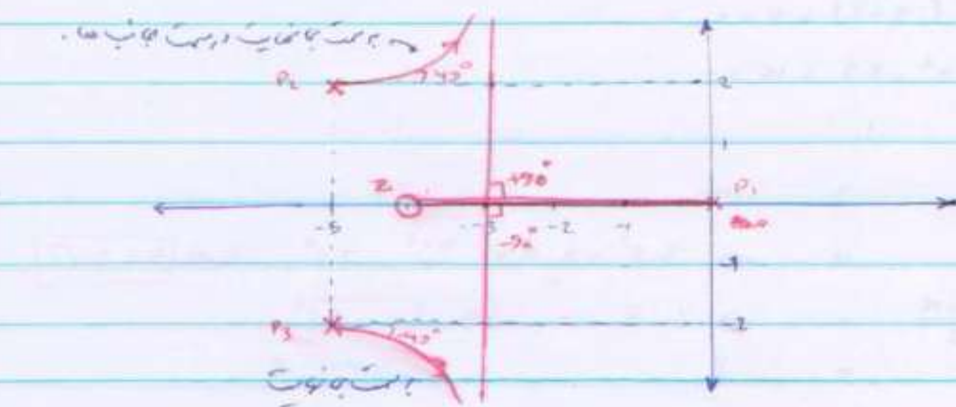
مثال ۱)



تابع تبدیل حلقه باز $G = \dfrac{K(s+4)}{s[(s+5)^2+4]}$

$Z_1 = -4 \qquad Z_{2,3} = \infty$

$P_1 = 0 \qquad P_{2,3} = -5 \pm 2j$



مجانب‌ها: $n-m = 3-1 = 2$

زاویه: $\dfrac{\pm 180^\circ(2h+1)}{n-m} = \dfrac{\pm 180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

محل برخورد: $\dfrac{\sum Re(P_i) - \sum Re(Z_i)}{n-m} = \dfrac{(-5-5+0)-(-4)}{2} = -3$

نقطه شکست ندارد چون دو قطب پشت سر هم ندارد.

تعیین زاویه خروج از قطب مختلط :

P2:

همیشه مقدارها در تابع تبدیل جایگذاری می‌کنیم با ماشین حساب زاویه را بدست آوریم می‌توانیم
نامساوی دیگر را از فرمول بدست آوریم.

$p = -5+2j$

$$\theta_p = 180^\circ + \measuredangle\left[\frac{(s+4)}{s\,\cancel{(s-(-5+2j))}\,(s-(-5-2j))} \times \cancel{(s-(-5+2j))}\right]_{s=-5+2j}$$

$$\theta_p = 180^\circ + \measuredangle\left[\frac{-1+2j}{(-5+2j)(4j)}\right]$$

جایگذاری مقدار $s=-5+2j$

$z = a+bj \qquad \theta = \tan^{-1}(b/a)$

$$\measuredangle\left[\frac{z_1 \times z_2}{z_3 \times z_4}\right] = [\theta_{z_1} + \theta_{z_2}] \quad [\theta_{z_3} + \theta_{z_4}]$$

$$= 180^\circ + \measuredangle(-1+2j) - \measuredangle(-5+2j) - \measuredangle(4j) =$$

$$= 180^\circ + \underset{-63^\circ}{(117^\circ)} - \underset{-22^\circ}{(158^\circ)} - (90^\circ) = 49^\circ \simeq 50^\circ$$

نکته: اگر با ماشین حساب کار می‌کنید زاویه‌های عادی را نشان می‌دهد یعنی زاویه کوچکتر که ما باید از 180° کم
کنیم. بنابراین باید بدانیم زاویه در کدام ربع می‌افتد.