

### نکات مهم کنکوری (حد و مفاهیم آن)

**نکته 1:** در محاسبه حدها می توان از هم ارزیهای مثلثاتی و جبری استفاده کرد.

**الف)** هم ارزیهای مثلثاتی: اگر  $u$  تابعی از  $x$  باشد که به سمت صفر میل کند ( $u \rightarrow 0$ ) آنگاه هم ارزیهای زیر را خواهیم داشت:

$$\sin^n u \approx u^n, \tan^n u \approx u^n \quad 1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$$

$$\text{Arc Sin}^n u \approx u^n, \text{Arc tan}^n u \approx u^n \quad u - \text{Sin} u \approx \frac{u^3}{6}$$

$$u \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos u \approx \frac{\pi}{2} - u \\ \cot u \approx \frac{\pi}{2} - u \end{cases}$$

$$u \rightarrow \pi \rightarrow \begin{cases} \text{Sin} u \approx \pi - u \\ \tan u \approx u - \pi \end{cases}$$

**مثال 1)** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \pi x}{|1-x|}$  را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \pi x}{|1-x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi x - \pi}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(x-1)}{1-x} = -\pi$$

**مثال 2)**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\tan(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{(x-2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

**تست)** حد کسر  $\frac{3 \text{Sin}^3 x - \tan x}{x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  چقدر است؟

- (1) 2      (2) 3      (3) -1      (4) صفر

(ب) هم ارزیهای جبری: 1) اگر  $x \rightarrow \infty$ ، هر چند جمله ای از  $X$ ، هم ارز جمله ای است که توانش بیشتر باشد.

2) اگر  $x \rightarrow 0$ ، هر چند جمله ای از  $X$ ، هم ارز جمله ای است که توانش کمتر باشد.

$$\text{اگر } x \rightarrow \infty \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 4x \approx x^3 \\ x^2 - 3x^4 + 5x + 2 \approx -3x^4 \end{cases} \quad \text{اگر } x \rightarrow 0 \begin{cases} x^3 - 7x^2 + 3x \approx 3x \\ 6x^4 + 3x^2 - 2 \approx -2 \end{cases}$$

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx \approx kx, \quad [u] \approx u \quad \begin{cases} \sqrt[n]{1+u} \approx 1 + \frac{u}{n} \\ (1+u)^n \approx 1 + nu \end{cases}$$

$$ax_{x \rightarrow \pm\infty}^n + bx^{n-1} + \dots + kx \approx ax^n$$

$$\sqrt{x^2 + k} \approx |x| \quad x \rightarrow \infty$$

مثال  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{1 - \sqrt{4x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + \frac{2x}{2})}{1 - (1 + \frac{4x}{2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-2x} = \frac{1}{2}$

قاعده هوییتال: اگر دو تابع  $f$  و  $g$  در همسایگی محذوف  $a$  مشتق پذیر بوده و  $g'(a) \neq 0$  باشد در این صورت برای

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{رفع ابهام حالت های } \frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty} \text{ می توان نوشت:}$$

مثال) حد کسر  $\frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  کدام است؟

(1)  $\frac{2}{3}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3) 4 (4) 12

حل:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$

نکته 2: اگر  $f$  در  $a$  پیوسته و  $g$  در  $a$  ناپیوسته باشد آنگاه مجموع و تفاضل آنها در  $a$  ناپیوسته بوده ولی در مورد ضرب و تقسیم آنها نمی توان نظر قطعی داد و باید محاسبه شود.

نکته 3: اگر توابع  $f$  و  $g$  در  $x=a$  پیوسته باشند آنگاه  $f \pm g$ ،  $f \cdot g$  در  $x=a$  پیوسته است و  $\frac{f}{g}$  در  $x=a$  پیوسته است به شرط اینکه  $g(a) \neq 0$  باشد.

نکته 4: تابع به معادله  $f(x) = [x]$  در نقاط  $x \in \mathbb{Z}$  حد نداشته و پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد. همچنین این تابع در نقاط  $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$  حد دارد و پیوسته است.

نکته 5: اگر تابع  $f$  در  $a$  پیوسته و تابع  $g$  در  $f(a)$  پیوسته باشد آنگاه تابع  $g \circ f$  در  $a$  پیوسته است.

آزمون چهار گزینه ای از (حد و مفاهیم آن)

(1) حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x} \right]$  کدام است؟

- (1) 0 (2) 1 (3)  $+\infty$  (4)  $-\infty$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi+}{4}} \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sin x - \cos x}$  برابر است با:

- (1) 1 (2) -1 (3) 0 (4)  $+\infty$

(3) حد تابع  $\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}-2\cos 2x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  برابر است با:

- (1) حد ندارد (2) -1 (3) 1 (4) 2

(4) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 - \sqrt{4-x^2}}$  کدام است؟

- (1) 8 (2) 12 (3) 16 (4) 18

(5) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]}{x}$  کدام است؟

- (1)  $+\infty$  (2)  $-\infty$  (3) صفر (4) 1

(6) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

- (1)  $\frac{\pi}{3}$  (2)  $-\frac{\pi}{3}$  (3)  $\frac{2\pi}{3}$  (4)  $\frac{3\pi}{2}$

(7) تابع  $y = \frac{|x|+1}{x}$  چند مجانب دارد؟

- (1) یک مجانب (2) دو مجانب (3) سه مجانب (4) مجانب ندارد

8) کدام یک از خطوط زیر مجانب منحنی  $y = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$  نیست؟

- (1)  $x = 2$       (2)  $x = 0$       (3)  $y = 1$       (4)  $y = 1 + x$

9) خط به معادله  $y = \frac{3}{4}$  مجانب افقی نمودار تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{Ax^2 + 1}{(A-1)x^2 + 16}$  است.

معادله مجانب قائم نمودار تابع  $f$  کدام است؟

- (1)  $x = -4$       (2)  $x = -2$       (3)  $x = 2$       (4)  $x = 4$

10) تابع  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$  چند خط مجانب دارد؟

- (1) 3      (2) 5      (3) 4      (4) 2

11) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (1) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته      (2) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته  
(3) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته      (4) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

12) تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$ ،

- (1) پیوستگی چپ دارد      (2) پیوستگی راست دارد  
(3) پیوسته است      (4) پیوستگی چپ و راست ندارد.

13) اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} & x \neq 1 \\ a + 1 & x = 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟

- (1) 1      (2) -1      (3)  $\frac{1}{2}$       (4)  $-\frac{1}{2}$