



مدرسان شریف

فصل اول

« اعداد و توابع مختلط »

اعداد مختلط

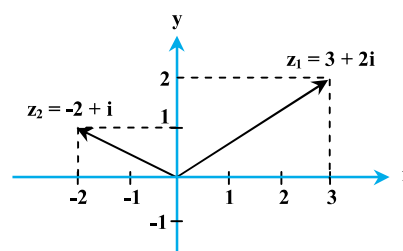
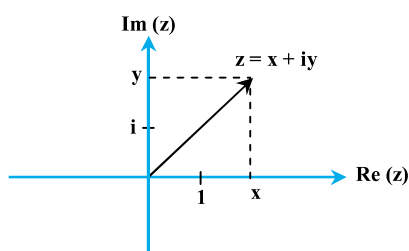
❖ **تعریف ۱:** هر عدد مختلط به فرم $Z = x + iy$ نمایش داده می‌شود که x و y دو عدد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ و لذا $i^2 = -1$ می‌باشد که از این رابطه در ضرب، تقسیم و روابط محاسباتی اعداد مختلط زیاد استفاده می‌شود. معمولاً در مهندسی برق جریان را با i نمایش می‌دهند و به همین دلیل در بعضی کتب به جای i از حرف j استفاده می‌شود) این فرم را دکارتی عدد مختلط می‌گویند. x را قسمت حقیقی Z و y را قسمت موهومی Z می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

پس به طور کلی مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

❖ **تعریف ۲:** به صفحه‌ای که در آن دو محور عمود بر هم به صورت افقی و عمودی بر صفحه رسم شوند، و واحد محور افقی ۱ و واحد محور قائم i باشد، صفحه مختلط می‌گوییم.



$$\bar{z} = x - iy$$

❖ **تعریف ۳:** مزدوج عدد مختلط $Z = x + iy$ را با $\bar{Z}$ نشان می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌شود:

برای مثال، مزدوج $Z = 5 + 2i$ برابر $\bar{Z} = 5 - 2i$ خواهد بود.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

❖ **تعریف ۴:** قدر مطلق (اندازه) عدد مختلط $Z = x + iy$ به صورت مقابل تعریف می‌شود:

برای مثال، قدر مطلق عدد مختلط $Z = 1 + i\sqrt{3}$ برابر $|Z| = 2$ می‌باشد.

❖ **تذکره ۱:** قدر مطلق یک عدد مختلط، عددی حقیقی و مثبت است و فاصله تا مبدأ مختصات را نشان می‌دهد.



اعمال حسابی در اعداد مختلط

جمع: مجموع دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

تفریق: تفاضل دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ به صورت روبرو است:

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ضرب: برای ضرب دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ کافی است دو عدد را بطور معمولی جمله به جمله در هم ضرب کنیم و بجای i^2 مقدار -1 را قرار دهیم.

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

تقسیم: برای بدست آوردن خارج قسمت دو عدد مختلط $Z_1 = x_1 + iy_1$ و $Z_2 = x_2 + iy_2$ صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

خواص اعداد مختلط

فرض کنید Z_1 و Z_2 دو عدد مختلط باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{Z_1 \pm Z_2} &= \overline{Z_1} \pm \overline{Z_2} & 2) \quad |z| &= |\overline{z}| & 3) \quad \overline{Z_1 Z_2} &= \overline{Z_1} \overline{Z_2} & 4) \quad \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} &= \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \\ 5) \quad z \overline{z} &= |z|^2 & 6) \quad |Z_1 Z_2| &= |Z_1| |Z_2| & 7) \quad \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| &= \frac{|Z_1|}{|Z_2|} & 8) \quad |Z_1 + Z_2| &\leq |Z_1| + |Z_2| \end{aligned}$$

مثال ۱: حاصل $A = (1 + 2i)(i + 2)$ برابر است با:

۵ (۴)

۵ (۳)

-۵i (۲)

۵i (۱)

$$A = (1 + 2i)(2 + i) = 2 + i + 4i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$$

☒ پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۲: حاصل $A = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}$ کدام است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

-i (۲)

i (۱)

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2}{3 + 1} = \frac{4i}{4} = i$$

☒ پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۳: حاصل $A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)}$ کدام است؟

- $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{10}$ (۳)- $\frac{i}{10}$ (۲) $\frac{i}{10}$ (۱)

$$A = \frac{1}{(1+i)(2+i)(3+i)} = \frac{1}{(2+i+2i+i^2)(3+i)} = \frac{1}{(1+3i)(3+i)} \Rightarrow A = \frac{1}{3+i+9i+3i^2} = \frac{1}{10i} = \frac{1}{10i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{10i^2} = -\frac{i}{10}$$

☒ پاسخ: گزینه «۲»

مثال ۴: در معادله مختلط $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ ، مقادیر اعداد حقیقی x و y کدام است؟

 $x = 1, y = 0$ (۴) $x = 0, y = -2$ (۳) $x = 1, y = -2$ (۲) $x = -1, y = 2$ (۱)

$$(3x + 5y) + (2y - x)i = 7 + 5i$$

☒ پاسخ: گزینه «۱» ابتدا طرف چپ تساوی را مرتب می کنیم:

برای آنکه تساوی فوق برقرار باشد، لازم است مقادیر حقیقی و موهومی در طرفین تساوی با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6y - 3x = 15 \end{cases} \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2, x = -1$$

مثال ۵: مقدار $\frac{i^{26} - i^{27}}{i^{124} - i^{12} + i^5}$ برابر کدام است؟

- (۱) $1 - i$ (۲) $1 + i$ (۳) $i - 1$ (۴) $-i - 1$

پاسخ: گزینه «۱» می‌دانیم $i^2 = -1$ ، بنابراین:

$$\frac{i^{26} - i^{27}}{i^{124} - i^{12} + i^5} = \frac{(i^2)^{13} - (i^2)^{13} i}{(i^2)^{62} - (i^2)^6 + (i^2)^2 i} = \frac{(-1)^{13} - (-1)^{13} i}{(-1)^{62} - (-1)^6 + (-1)^2 i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i$$

مثال ۶: فرض کنید $z \in \mathbb{C}$ و $|z + ai| = |z + bi|$ و a و b اعداد حقیقی و $a \neq b$ در این صورت مقدار $z - \bar{z}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $-(a+b)i$ (۲) $-(a-b)i$ (۳) $(a-b)i$ (۴) $(a+b)i$

پاسخ: گزینه «۱» با فرض $z = x + iy$ داریم:

$$|x + iy + ai| = |x + iy + bi| \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2 \Rightarrow y+a = \pm(y+b) \Rightarrow y = -\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (1)$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2yi \xrightarrow{(1)} z - \bar{z} = 2\left[-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]i = -(a+b)i$$

مثال ۷: فرض کنیم z_1 و z_2 دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|z_1 + \bar{z}_2|} = 1$ ، در این صورت:

- (۱) $\text{Re}(z_1 z_2) = 0$ (۲) $\text{Re}(z_1 z_2) < 0$ (۳) $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$ (۴) $\text{Re}(z_1 z_2) > 0$

پاسخ: گزینه «۱» این سؤال را به روش تشریحی و روش تستی پاسخ می‌دهیم:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|x_1 + iy_1 - (x_2 - iy_2)|}{|x_1 + iy_1 + x_2 - iy_2|} = 1 \Rightarrow \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2$$

$$\Rightarrow 4x_1x_2 - 4y_1y_2 = 0 \Rightarrow x_1x_2 - y_1y_2 = 0 \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \Rightarrow x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 \xrightarrow{(1)} \text{Re}(z_1 z_2) = 0$$

روش تستی: اگر فرض کنیم $z_1 = i$ و $z_2 = 1$ ، آنگاه شرایط صورت سؤال برقرار است و برای این دو عدد داریم:

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}(i \times 1) = \text{Re}(i) = 0 \\ \text{Im}(z_1 z_2) = \text{Im}(i \times 1) = \text{Im}(i) = 1 \end{cases}$$

واضح است فقط گزینه (۱) صحیح است.

مثال ۸: حاصل عبارت $k = \frac{\sqrt{1+z^2} + iz}{z - i\sqrt{1+z^2}}$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $-i$ (۳) -1 (۴) $+i$

پاسخ: گزینه «۴»

روش اول: با ضرب کردن مزدوج عبارت مخرج، در صورت و مخرج کسر داریم:

$$k = \frac{(\sqrt{1+z^2} + iz)(z + i\sqrt{1+z^2})}{(z - i\sqrt{1+z^2})(z + i\sqrt{1+z^2})} = \frac{z\sqrt{1+z^2} + i(1+z^2) + iz^2 + i^2 z\sqrt{1+z^2}}{z^2 - i^2(1+z^2)} = \frac{i(2z^2 + 1)}{2z^2 + 1} = i$$

روش دوم: راه حل ساده‌تر این است که با توجه به عبارت‌های صورت و مخرج، کسر را در عبارت $\frac{i}{i}$ ضرب کنیم و i را در صورت، پشت پرانتز، نگه داشته

$$\frac{(\sqrt{1+z^2} + iz)}{(z - i\sqrt{1+z^2})} \times \frac{i}{i} = \frac{i(\sqrt{1+z^2} + iz)}{(iz + \sqrt{1+z^2})} = i$$

و i در مخرج کسر را در پرانتز ضرب می‌کنیم:



شکل قطبی اعداد مختلط

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به شکل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نوشت. این نوع نمایش را شکل قطبی عدد مختلط می‌نامند. در رابطه فوق r و θ از فرمولهای زیر بدست می‌آیند:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

θ را آرگومان یا آوند عدد مختلط z و r را قدر مطلق، مدول و یا اندازه عدد مختلط z می‌گویند.

تذکره ۲: در تعیین مقدار θ از رابطه $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$ استفاده می‌شود باید دقت کنید که نقطه (x, y) در کدام ناحیه دستگاه مختصات قرار دارد و با توجه به آن θ را تعیین کنید، مثلاً اگر نقطه (x, y) در ناحیه دوم مختصات قرار داشته باشد، باید θ نیز در ناحیه دوم مثلثاتی انتخاب شود.

نمونه مثال ۹: شکل قطبی اعداد مختلط زیر را تعیین کنید.

الف) $z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ب) $z = 1 - \sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2, \operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

θ می‌تواند دو مقدار $\frac{5\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ باشد ولی مقدار $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $(1, -\sqrt{3})$ در ناحیه چهارم است و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه چهارم باشد.

$$\Rightarrow z = 2 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right]$$

ج) $z = -1 - i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$

θ می‌تواند $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4}$ باشد، ولی فقط $\frac{5\pi}{4}$ قابل قبول است زیرا نقطه $(-1, -1)$ در ناحیه سوم قرار دارد و بنابراین زاویه‌ای قابل قبول است که در ناحیه سوم باشد.

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

د) $z = 5i \Rightarrow r = \sqrt{0+25} = 5, \operatorname{tg} \theta = \frac{5}{0} = +\infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

خ) $z = -2i \Rightarrow r = \sqrt{0+4} = 2, \operatorname{tg} \theta = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

شکل نمایی عدد مختلط

با استفاده از فرمول $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، هر عدد مختلط به شکل قطبی $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را می‌توان به فرم $z = re^{i\theta}$ نوشت که به آن فرم نمایی یک عدد مختلط می‌گویند. عدد $z = re^{i\theta}$ را به شکل $z = r \angle \theta$ نیز می‌توان نمایش داد.

نمونه مثال ۱۰: عدد مختلط $z = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

پاسخ: ☒

ضرب و تقسیم اعداد مختلط به فرم قطبی یا نمایی

برای جمع یا تفریق دو عدد مختلط استفاده از فرم دکارتی ساده‌تر از فرم قطبی یا نمایی می‌باشد ولی برای محاسبه ضرب و تقسیم دو عدد مختلط استفاده از فرم نمایی ساده‌تر از فرم دکارتی می‌باشد.

اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$1) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{و} \quad 2) z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

مثال ۱۱: اگر $z_1 = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ و $z_2 = \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}$ مقدار $\frac{z_1^4}{z_2}$ کدام است؟

(۱) $-i$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) i

☒ پاسخ: گزینه «۲» ابتدا اعداد داده شده را به فرم نمایی می‌نویسیم. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$ و $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ داریم:

$$\frac{z_1^4}{z_2} = \frac{(e^{i\frac{\pi}{5}})^4}{e^{-i\frac{\pi}{5}}} = e^{\frac{4\pi i}{5}} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

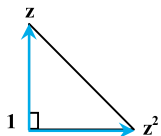
تذکره ۳: روابط زیر بسیار کاربردی هستند به خاطر بسپارید:

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{-\frac{3\pi i}{2}} = i, \quad e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i, \quad e^{\pi i} = e^{-\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

نکته ۱: هرگاه دو بردار z_1 و z_2 از نظر اندازه با هم برابر باشند و ابتدای هر دو بردار یک نقطه باشد و با هم زاویه θ بسازند آنگاه: $z_1 = z_2 e^{i\theta}$

مثال ۱۲: برای اینکه اعداد مختلط z و z^2 رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه با رأس قائمه در نقطه ۱ باشند، کدام شرط کافی است؟

(۱) $z = i - 1$ (۲) $z = 2i$ (۳) $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (۴) $z = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}$



☒ پاسخ: گزینه «۱» دقت کنید چون مثلث قائم‌الزاویه است، لذا بردارهای $z - 1$ و $z^2 - 1$ بر هم عمود

هستند. یعنی اختلاف زاویه این دو بردار باید برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، اما چون در صورت تست گفته شده مثلث

متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$|z^2 - 1| = |z - 1| \xrightarrow[\text{هم زاویه } \pm \frac{\pi}{2} \text{ می‌سازند}]{\text{اندازه با هم برابر است و با}} (z^2 - 1) = (z - 1)e^{\pm \frac{\pi i}{2}} \Rightarrow z^2 - 1 = \pm i(z - 1)$$

$$\Rightarrow (z - 1)(z + 1) = \pm i(z - 1) \Rightarrow z + 1 = \pm i \Rightarrow z = -1 \pm i$$

توان یک عدد مختلط

برای به توان رساندن یک عدد مختلط بهتر است، ابتدا آنرا به شکل قطبی یا نمایی بنویسیم و سپس آنرا به توان برسانیم. فرض

کنید $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ باشد، در این صورت:
فرمول فوق فرمول دموآور نام دارد که در آن n عددی طبیعی است.

مثال ۱۳: i^{-i} برابر چیست؟

(۱) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (۲) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (۳) 1 (۴) -1

☒ پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ ، لذا داریم:

$$i^{-i} = (e^{\frac{\pi i}{2}})^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$$



مثال ۱۴: مقدار $(1+i)^{10}$ را بدست آورید.

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}})^{10} = 2^5 e^{\frac{10\pi i}{4}} = 32(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32i$$

پاسخ: می‌دانیم $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ ، بنابراین:

مثال ۱۵: حاصل $(2+2\sqrt{3}i)^5$ کدام است؟

$$(4) \quad 256\sqrt{2}\angle 60^\circ$$

$$(3) \quad 256\sqrt{2}\angle 30^\circ$$

$$(2) \quad 1024\angle 300^\circ$$

$$(1) \quad 1024\angle 60^\circ$$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $2+2\sqrt{3}i = 4e^{\frac{\pi i}{3}}$ ، بنابراین:

$$(2+2\sqrt{3}i)^5 = (4e^{\frac{\pi i}{3}})^5 = 4^5(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 1024\angle 300^\circ$$

مثال ۱۶: حاصل $A = (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ کدام است؟

$$(2) \quad 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{n\alpha}{2} - i \sin \frac{n\alpha}{2}]$$

$$(1) \quad 2^{n+1} \cos^n \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2}]$$

$$(4) \quad 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2}]$$

$$(3) \quad 2^{n+1} \cos^n \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{n\alpha}{2} - i \sin \frac{n\alpha}{2}]$$

پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ، و همچنین $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ با جایگذاری این مقادیر در رابطه داریم:

$$A = (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})^n$$

$$A = [2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})]^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} [\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2}]$$

با فاکتورگیری از عبارت $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ داریم:

مثال ۱۷: اگر $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ آنگاه حاصل $z^n + \frac{1}{z^n}$ برابر کدام گزینه است؟

$$(4) \quad (2 \sin \theta)^n$$

$$(3) \quad (2 \cos \theta)^n$$

$$(2) \quad 2 \cos n\theta$$

$$(1) \quad 2 \sin n\theta$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا با توجه به فرض، مقدار z را حساب می‌کنیم:

$$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}}{1} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta}$$

$$z = \cos \theta \pm i \sqrt{\sin^2 \theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 2 \cos n\theta$$

اگر $z = e^{i\theta}$ ، آنگاه $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ ، لذا داریم:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} + e^{in\theta} = (\cos n\theta - i \sin n\theta) + (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 2 \cos n\theta$$

اگر $z = e^{-i\theta}$ ، آنگاه $\frac{1}{z} = e^{i\theta}$ ، لذا داریم:

همان‌طور که ملاحظه کردید در هر دو حالت مقدار عبارت برابر $2 \cos n\theta$ به دست آمد.

مثال ۱۸: حاصل عبارت $\frac{(1+i\sqrt{3})^8}{2^7(-1+i\sqrt{3})}$ کدام است؟

$$(4) \quad \frac{-1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad -1$$

$$(1) \quad 1$$

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, -1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{2^4(-1+i\sqrt{3})} = \frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}})^4}{2^4 \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = 1$$

پاسخ: گزینه «۱» ✓

نکته ۲: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه همواره داریم:

$$1) (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right], \quad 2) (\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right]$$

نکته ۳: مقدار عبارت $(1+i)^n$ با توجه به مقدار n به صورت زیر نیز قابل محاسبه است:

$$(1+i)^n = (2i)^{\frac{n}{2}} \quad \text{برای } n \text{ های زوج}$$

$$(1+i)^n = (2i)^{\frac{n-1}{2}} (1+i) \quad \text{برای } n \text{ های فرد}$$

مثال ۱۹: حاصل $z = (1+i)^{200}$ کدام است؟

(۱) 2^{200} (۲) 2^{100} (۳) 2^{50} (۴) $2^{50} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ✓ با توجه به نکته فوق $n = 200$ و لذا $z = (2i)^{\frac{200}{2}} = (2i)^{100} = 2^{100}$ می باشد.

مثال ۲۰: اگر $1+i$ ریشه‌ی معادله $z^5 + az^3 + b = 0$ باشد، آنگاه مقدار $a-b$ کدام است؟

(۱) -4 (۲) 6 (۳) -6 (۴) $+4$

پاسخ: گزینه «۳» ✓ چون $1+i$ ریشه معادله می باشد، لذا در معادله صدق می کند:

$$(1+i)^5 + a(1+i)^3 + b = 0 \quad \text{طبق نکته (۳) حاصل } (1+i)^n \text{ برای } n \text{ های فرد برابر } (2i)^{\frac{n-1}{2}} (1+i) \text{ می باشد، لذا با توجه به اینکه در این تست } n=3 \text{ و } n=5 \text{ است، داریم:}$$

$$(2i)^{\frac{5-1}{2}} (1+i) + a(2i)^{\frac{3-1}{2}} (1+i) + b = 0 \Rightarrow (2i)^2 (1+i) + a(2i)(1+i) + b = 0 \Rightarrow 4i^2 (1+i) + a(2i)(1+i) + b = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 4i + 2ai - 2a + b = 0 \Rightarrow (-4 + 2a)i - 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2a = 0 \\ -4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 8 \Rightarrow a - b = 2 - 8 = -6$$

توضیح: لازم به ذکر است، حفظ کردن قسمت (۱) از نکته (۲) مفید است. معمولاً در تست‌ها زیاد مورد استفاده قرار می گیرد، حل مثال ۲۰ با استفاده از قسمت (۱) نکته (۲) نیز به راحتی ممکن است.

مثال ۲۱: حاصل $z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{1392}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{i+1}{i-1}$ (۴) $-\frac{i+1}{i-1}$

پاسخ: گزینه «۲» ✓ با شرط $k \neq 1$ ، به ازای هر k رابطه‌ی مقابل را همواره داریم:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

$$z = \frac{i^{1393} - 1}{i - 1} = \frac{i(i^{1392}) - 1}{i - 1} = \frac{i(i^2)^{696} - 1}{i - 1} = \frac{i(-1)^{696} - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1$$

با توجه به صورت سؤال خواهیم داشت:



ریشه‌ی یک عدد مختلط

برای محاسبه ریشه‌ی یک عدد مختلط، ابتدا آنرا به فرم نمایی یا قطبی می‌نویسیم در این صورت $\sqrt[n]{Z}$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], k = 0, 1, \dots, n-1$$

با توجه به مقادیر مختلف k نتیجه می‌شود $\sqrt[n]{Z}$ دارای n جواب متمایز است که به ازای مقادیر مختلف k بدست می‌آیند.

مثال ۲۲: ریشه‌های سوم عدد مختلط $Z = 8i$ را بدست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $Z = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، بنابراین:

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{8} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) \right]$$

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i \\ k=1 \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = -\sqrt{3} + i \\ k=2 \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i) = -2i \end{cases}$$

مثال ۲۳: حاصل $Z = \sqrt{1+\sqrt{3}i}$ کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

$$\begin{array}{llll} \sqrt{1+\sqrt{3}i} & \frac{\sqrt{3}}{2} + i & \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{1+\sqrt{3}i} \end{array} \quad (۴) \quad (۳) \quad (۲) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، بنابراین:

$$Z = \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2} e^{i \frac{\frac{\pi}{3}}{2}} = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$k=0 \Rightarrow Z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۲۴: یکی از کعب‌های عدد $Z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \end{array} \quad (۴) \quad (۳) \quad (۲) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲»

$$Z = \frac{1+i}{1+i+(1-i)^2} = \frac{1+i}{1+i+1-i^2-2i} = \frac{1+i}{1-i} \xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در عبارت } (1+i)} Z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{+2} = i \Rightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{1} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) \right] \xrightarrow{k=0} \sqrt[3]{Z} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

❏ مثال ۲۵: یکی از ریشه‌های معادله $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$ کدام است؟

- (۱) $1 - i$ (۲) $2 + 3i$ (۳) $2 - 3i$ (۴) $-1 - i$

❏ پاسخ: گزینه «۳» ابتدا باید دلتای معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(1)(5 - i)} = \sqrt{4i^2 + 9 - 12i - 20 + 4i} = \sqrt{-15 - 8i} = \sqrt{(1 - 4i)^2} = 1 - 4i$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2i - 3) \pm (1 - 4i)}{2 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-2i + 3 + 1 - 4i}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \\ z_2 = \frac{-2i + 3 - 1 + 4i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

❏ مثال ۲۶: مجموع قدر مطلق ریشه‌های معادله $z^2 + z^2 + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{8}$

❏ پاسخ: گزینه «۲» با فرض $z^2 = A$ داریم:

$$A^2 + A + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

با توجه به اینکه $A = z^2$ لذا داریم:

$$z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

با توجه به تساوی به دست آمده لازم است ریشه‌های دوم عبارت $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ حساب شود، برای به دست آوردن ریشه دوم $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ داریم:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \theta = \text{Arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \text{Arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_1 = \cos \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{2} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{2} = \cos(k\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(k\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(k\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

برای به دست آوردن ریشه دوم $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ داریم:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \theta = \text{Arctg}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \text{Arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \frac{4\pi}{3} \xrightarrow{\text{نقطه در ربع سوم است}} \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{2k\pi + \frac{4\pi}{3}}{2}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \frac{4\pi}{3}}{2}\right) = \cos(k\pi + \frac{2\pi}{3}) + i \sin(k\pi + \frac{2\pi}{3})$$

$$k = 0 \Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad k = 1 \Rightarrow z_2 = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

قدر مطلق هر ریشه برابر با عدد یک است، لذا مجموع قدر مطلق ریشه‌ها برابر عدد چهار است.



مثال ۲۷: در معادله $z^2 - 4z + 7 + 4i = 0$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ ، تفاضل دو ریشه به صورت $a + ib$ است. مقدار ab کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) -۴

(۱) -۸

پاسخ: گزینه «۱» ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta' = \sqrt{b'^2 - ac} = \sqrt{(2)^2 - 1 \times (7 + 4i)} = \sqrt{4 - 7 - 4i} = \sqrt{-3 - 4i} = \sqrt{(2i - 1)^2} = 2i - 1$$

$$z = \frac{2 \pm (2i - 1)}{1} = 2 \pm (2i - 1) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + 2i - 1 = 1 + 2i \\ z_2 = 2 - (2i - 1) = 3 - 2i \end{cases}$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 - 2i) = -2 + 4i = a + ib \Rightarrow a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = (-2)(4) = -8$$

نکته ۴: برای حل معادلاتی به صورت کلی $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ باید طرفین معادله را در $1 - z$ ضرب کنیم و در نهایت به

$$\text{معادله } z^n = 1 \text{ می‌رسیم که جواب‌های این معادله (با شرط } z \neq 1 \text{) به صورت } z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \text{ می‌باشد.}$$

نکته ۵: برای حل معادلاتی به صورت کلی $1 - z + z^2 - \dots + z^{n-1} = 0$ باید طرفین معادله را در $1 + z$ ضرب کنیم و در نهایت به

$$\text{معادله } z^n = -1 \text{ می‌رسیم که جواب‌های این معادله (با شرط } z \neq -1 \text{) به صورت } z = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}} \text{ می‌باشد.}$$

مثال ۲۸: یکی از جوابهای معادله $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ کدام است؟

$$\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \quad (۴)$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\cos \frac{4k\pi}{5} - i \sin \frac{4k\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» طبق نکته گفته شده باید طرفین معادله را در $1 - z$ ضرب کنیم و خواهیم داشت:

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0 \Rightarrow 1 - z^5 = 0 \Rightarrow z^5 = 1$$

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \xrightarrow{n=5} z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$$

باید ریشه‌های پنجم عدد یک را به دست بیاوریم:

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

به ازای $k = 1$ یکی از جوابها به صورت مقابل است:

مثال ۲۹: یکی از جوابهای معادله $1 - iz - z^2 + iz^3 + z^4 = 0$ به صورت $\cos \alpha + i \sin \alpha$ است، کمترین مقدار α در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$\frac{3\pi}{10} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا طرفین معادله را در $(1 + iz)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(1 + iz)(1 - iz - z^2 + iz^3 + z^4) = 0 \Rightarrow 1 + (iz)^5 = 0 \Rightarrow 1 + iz^5 = 0 \Rightarrow z^5 = \frac{-1}{i} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + \dots + b^{n-1})$$

یادآوری: اگر n فرد باشد آنگاه داریم:

مثال ۳۰: اگر z یکی از ریشه‌های موهومی n ام عدد یک باشد، آنگاه حاصل عبارت $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$ کدام است؟

$$n(n-1) \quad (۴)$$

$$2 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۱» چون z یکی از ریشه‌های n ام موهومی عدد یک است، لذا $z^n = 1$ و $z \neq 1$ است، چون گفته شده z یکی از ریشه‌های موهومی

عدد یک است. پس $z^n - 1 = 0$ می‌باشد، لذا داریم:

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = 0$$

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \quad \text{یا} \quad 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

با توجه به معادله به دست آمده باید یکی از پرانتزها برابر عدد صفر شود.

از طرفی گفتیم $z = 1$ قابل قبول نیست، پس حتماً تساوی $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ برقرار می‌باشد.

نکته ۶: ریشه‌های n ام عدد 1 ، رئوس یک ضلعی منتظم محاط در دایره واحد هستند که فاصله‌ی این رئوس از یکدیگر $\frac{2\pi}{n}$ است.

نکته ۷: در معادله $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ با شرط $a_0 \neq 0$ همواره مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{a_1}{a_0}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{(-1)^n a_n}{a_0}$ می‌باشد.

نکته ۸: هرگاه $z = p + iq$ یکی از جواب‌های معادله $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ باشد، که در این معادله $a_0, a_1, \dots, a_n$ تا a_n و p و q همگی اعداد حقیقی هستند. آنگاه $\bar{z} = p - iq$ نیز حتماً جواب معادله خواهد بود.

حد و پیوستگی توابع مختلط

تابع مختلط $w = f(z)$ که $z = x + iy$ و $w = u + iv$ را در نظر بگیرید. می‌گوئیم تابع $w = f(z) = u + iv$ در نقطه z_0 دارای حد است، اگر هر دو تابع u و v در نقطه z_0 دارای حد باشند یعنی داشته باشیم:

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u = u_0 \quad \text{و} \quad 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v = v_0$$

و تابع را در نقطه z_0 پیوسته می‌گوئیم، هرگاه شرط روبرو برقرار باشد:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

توضیح: تعریف فوق شبیه تعریفی است که در ریاضیات عمومی برای اعداد حقیقی داشتیم و فقط یک اختلاف دارد و آن این‌که در حالت حقیقی، x فقط در امتداد محور حقیقی به x_0 میل می‌کرد، ولی در اینجا، z_0 می‌تواند از هر امتدادی در صفحه مختلط به z_0 میل کند.

مثال ۳۱: هرگاه $f(z) = \frac{xy}{x^2 - y^2} + i(2xy)$ آنگاه $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) i (۴) حد موجود نیست.

☒ پاسخ: گزینه «۴» مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$ موجود نیست، چون اگر روی خط $y = mx$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 - y^2} \stackrel{y=mx}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 - (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1-m^2)} = \frac{m}{1-m^2}$$

چون جواب به m بستگی دارد (یعنی به ازای مقادیر مختلف m ، حاصل حد مقادیر مختلفی پیدا می‌کند و این با تعریف منحصر به فرد بودن حد تابع در تناقض است) پس حد موجود نیست. دقت کنید دیگر لازم نیست مقدار $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2xy$ را بررسی کنیم، چون برای وجود حد باید حد هر دو قسمت وجود داشته باشد.

مثال ۳۲: مقدار $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} \stackrel{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z^2}{2}}{z^2} = \frac{1}{2}$$

☒ پاسخ: گزینه «۲»

تذکره ۴: توابع چند جمله‌ای مختلط در تمام نقاط پیوسته هستند و توابع کسری در تمام نقاط به جز ریشه‌های مخرج پیوسته هستند.

تذکره ۵: توابع $f(z) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$ ، $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ ، $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ در $z = 0$ حد ندارند.

تذکره ۶: توابع $f(z) = \bar{z}$ ، $f(z) = \text{Re}(z)$ و $f(z) = |z|^2$ در همه نقاط پیوسته هستند.

مشتق توابع مختلط

مشتق تابع مختلط $w = f(z)$ در نقطه z_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \text{یا} \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

البته تعیین مشتق پذیری توابع مختلط با توجه به تعریف فوق معمولاً کار مشکلی است و ما بیشتر از قضایایی که در ادامه فصل گفته می‌شود استفاده خواهیم کرد.

نکته ۹: توابع $f(z) = \bar{z}$ ، $f(z) = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ، $f(z) = \operatorname{Im}(z) = i \frac{\bar{z} - z}{2}$ و $f(z) = |z|$ در هیچ‌جا مشتق پذیر نیستند.

نکته ۱۰: تابع $f(z) = |z|^2$ فقط در $z = 0$ مشتق پذیر است ولی تابع $f(z) = z^2$ در همه جا مشتق پذیر است.

توابع تحلیلی

تابع تحلیلی بر یک ناحیه: تابع $f(z)$ را در ناحیه D تحلیلی می‌نامند، اگر $f(z)$ در تمام نقاط ناحیه D مشتق پذیر باشد.

تابع تحلیلی در یک نقطه: تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی می‌گوئیم، هرگاه یک همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که f در تمام نقاط آن همسایگی

مشتق داشته باشد. برای مثال کلیه توابع چند جمله‌ای در همه نقاط همواره تحلیلی هستند. همچنین تابع $f(z) = \frac{C}{(z - z_0)^m}$ به ازای هر عدد صحیح

مثبت m به جز در نقطه z_0 در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد. تابع $f(z) = |z|^2$ فقط در $z = 0$ مشتق پذیر است و در همسایگی این نقطه

مشتق پذیر نیست، پس در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

تابع تام: اگر $f(z)$ در تمام نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد، آن را تابع تام می‌گوئیم.

نکته ۱۱: هرگاه $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و بتوان u و v را برحسب یکدیگر نوشت، آنگاه $f(z)$ حتماً باید تابعی ثابت باشد (x و y در

ضابطه آن وجود نداشته باشد). به تعبیر دیگر اگر بتوان u و v یک تابع غیر ثابت را برحسب یکدیگر نوشت، آنگاه آن تابع، قطعاً تحلیلی نیست، برای مثال

تابع $f(z) = \cos^2 x + i \sin^2 x$ نمی‌تواند تحلیلی باشد. چون $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ است.

نکته ۱۲: هرگاه تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد، اگر یکی از عبارت‌های $|f(z)|$ ، $\operatorname{Arg}[f(z)]$ ، $\operatorname{Im}[f(z)]$ ، $\operatorname{Re}[f(z)]$ ثابت باشند، آنگاه

می‌توان نتیجه گرفت $f(z)$ نیز تابعی ثابت است.

نکته ۱۳: اگر $f'(z) = 0$ باشد آنگاه $f(z)$ نیز تابعی ثابت است.

نکته ۱۴: اگر علاوه بر $f(z)$ ، $\overline{f(z)}$ هم در D تحلیلی باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $f(z)$ تابعی ثابت است.

تذکره ۷: هرگاه در تابعی عبارت $\bar{z}$ وجود داشت، می‌توان نتیجه گرفت آن تابع قطعاً تحلیلی نیست. (البته با شرط اینکه پس از ساده کردن هنوز $\bar{z}$ در

ضابطه تابع باقی بماند).

تذکره ۸: اگر دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ تحلیلی باشند، مجموع، تفاضل، ضرب و ترکیب آنها نیز همواره تحلیلی می‌باشد و تابع خارج قسمت آنها در کلیه

نقاط به غیر از صفرهای مخرج تحلیلی خواهد بود.

تعریف نقطه تکین: نقطه $z = z_0$ را برای تابع $f(z)$ یک نقطه تکین می‌گوئیم، هرگاه $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد ولی هر همسایگی $z = z_0$ ، شامل نقاطی

باشد که $f(z)$ در آن نقاط تحلیلی باشد. مثلاً نقطه $z_0 = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ تکین می‌باشد.

🔗 مثال ۳۳: تابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(۱) همه جا مشتق پذیر است. (۲) تنها در مبدأ مختصات تحلیلی نیست. (۳) دارای خط شاخه‌ای است. (۴) هیچ جا تحلیلی نیست.

✅ پاسخ: گزینه «۲» ممکن است در نگاه اول با توجه به وجود $\bar{z}$ در ضابطه تابع گزینه (۴) انتخاب شود، اما با کمی دقت ملاحظه می‌گردد با توجه به رابطه $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ عامل $\bar{z}$ از ضابطه تابع حذف خواهد شد.

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}$$

و تابع در تمام نقاط غیر از نقطه $z = 0$ تحلیلی است.

تابع نمایی e^z

این تابع برای هر $z = x + iy$ به صورت روبرو تعریف می‌شود: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

پس اندازه e^z برابر e^x و آرگومان اصلی آن $\theta = \text{Arg}(e^z) = y$ می‌باشد.

🔗 مثال ۳۴: اگر $|e^{-iz}| \leq 1$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $y \leq 0$ (۲) $y = 0$ (۳) $x \geq 0$ (۴) $x = 0$

✅ پاسخ: گزینه «۱» با توجه به اینکه اندازه عدد مختلط e^{-iz} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد، داریم: $|e^{-iz}| = |e^{-i(x+iy)}| = |e^{-ix+y}| = e^y \leq 1 \Rightarrow y \leq 0$

اندازه e^{-ix+y} باید کوچکتر یا مساوی یک باشد و می‌دانیم اندازه این عدد مختلط برابر e^y می‌باشد و این عبارت زمانی کوچکتر یا مساوی یک می‌شود که $y \leq 0$ باشد.

🌟 تذکره ۹: تابع $f(z) = e^z$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشد و در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد.

توابع مثلثاتی مختلط

توابع $\sin z$ و $\cos z$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

🌟 تذکره ۱۰: توابع $\sin z$ و $\cos z$ توابعی تام (در تمام نواحی صفحه مختلط تحلیلی هستند) با دوره تناوب 2π می‌باشند. بقیه توابع مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, & \operatorname{cosec}(z) &= \frac{1}{\sin z} \end{aligned}$$

🌟 تذکره ۱۱: توابع $\tan z$ و $\sec z$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی که ریشه‌های معادله $\cos z = 0$ هستند، تحلیلی می‌باشند و توابع $\cot z$ و $\operatorname{cosec} z$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی که ریشه‌های معادله $\sin z = 0$ هستند، تحلیلی می‌باشند.

🌟 تذکره ۱۲: کلیه معادلات حاکم بر توابع مثلثاتی در مورد توابع مثلثاتی مختلط نیز صحیح هستند.

📖 نکته ۱۵: دو رابطه زیر با استفاده از روابط مثلثاتی برای هر $z = x + iy$ صادق است:

$$1) \sin z = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y \quad \text{و} \quad 2) \cos z = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$$



کج مثال ۳۵: معادله $\cos z = 2$ وقتی که z عدد موهومی محض می باشد:

- (۱) دارای بی نهایت جواب حقیقی است.
 (۲) دارای هیچ جوابی نیست چون $-1 < \cos z < 1$ است.
 (۳) دارای بی نهایت جواب مختلط است.
 (۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

پاسخ: گزینه «۳» ☒

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y = 2 \xrightarrow{\text{باید مقدار قسمت موهومی صفر باشد}} \sin x \cdot \sinh y = 0$$

اگر $\sin x = 0$ باشد، آنگاه $x = k\pi$ خواهد بود و می دانیم وقتی $x = k\pi$ باشد، آنگاه $\cos x = (-1)^k$ خواهد بود، لذا داریم:

$$(-1)^k \cosh y = 2 \Rightarrow \cosh y = \pm 2 \xrightarrow{\cosh y > 0} \cosh y = 2$$

از معادله ی فوق، مقادیری برای y بدست می آید. که چون این دو مقدار y به ازای x های مختلف، $(x = k\pi)$ حاصل می شوند، z دارای بیشمار جواب مختلط است.

هر چند نیازی به بررسی نیست، اما حالت دیگر معادله (۱) را نیز بررسی می کنیم اگر $\sinh y = 0$ آنگاه بر طبق اتحاد $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ مقدار $\cosh y = 1$ می شود و آنگاه داریم:

$$\cos x \times 1 = 2 \Rightarrow \cos x = 2 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

کج مثال ۳۶: معادله $\operatorname{tg} z = i$.

- (۱) فقط ریشه حقیقی دارد.
 (۲) فقط ریشه موهومی دارد.
 (۳) هم ریشه موهومی و هم ریشه حقیقی دارد.
 (۴) ریشه ندارد.

پاسخ: گزینه «۴» با توجه به مقادیر $\sin z$ و $\cos z$ به راحتی مقدار $\operatorname{tg} z$ برای ما مشخص است: ☒

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = i \Rightarrow \frac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1} = i \Rightarrow e^{iz} - 1 = i(e^{iz} + 1) \Rightarrow 2e^{iz} = 0 \Rightarrow$$

معادله ریشه ندارد

توابع مثلثاتی معکوس

$$1) \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$2) \operatorname{Arcos} z = -i \operatorname{Ln}(z + i\sqrt{z^2 - 1})$$

$$3) \operatorname{Arctg} z = +\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i+z}{i-z}$$

$$4) \operatorname{Arc cot} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}$$

تذکره ۱۳: توصیه می شود روابط فوق به خاطر سپرده شود. در تست ها معمولاً با روابط فوق مستقیماً مورد سؤال قرار می گیرد و با از آنها می توان در حل معادلات بهره برد.

کج مثال ۳۷: مقدار $\cosh^{-1} z$ برابر کدام گزینه است؟

$$\operatorname{Ln}[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}] \quad (4) \quad \operatorname{Ln}[(z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})] \quad (3) \quad \operatorname{Ln}[(2z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}})] \quad (2) \quad \operatorname{Ln}[z - (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴» ☒

$$w = \cosh^{-1} z \Rightarrow \cosh w = z \Rightarrow \frac{e^w + e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^w + e^{-w} = 2z \Rightarrow e^w + \frac{1}{e^w} = 2z$$

$$\Rightarrow e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0 \Rightarrow (e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$$

با فرض $A = e^w$ با یک معادله درجه دوم رو به رو هستیم و به راحتی داریم:

$$A^2 - 2zA + 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 1}}{1} \xrightarrow{A = e^w} e^w = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می گیریم}} w = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

دقت کنید چون تابع $\sqrt{z^2 - 1}$ یک تابع دو مقداری است، پس کافیست یکی از علامت های مثبت یا منفی را به دلخواه در نظر بگیریم. بنابراین پاسخ $w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ می باشد.

🔗 مثال ۳۸: جواب‌های معادله $\sin z = 2$ کدام است؟

$$z = (2n + \frac{1}{2})\pi - \text{Ln}(2 + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$z = (2n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2} + \text{Ln}(2 + \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$z = (2n + \frac{1}{2})\pi - i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) \quad (4)$$

$$z = 2n\pi + i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) \quad (3)$$

$$\sin z = 2 \Rightarrow z = \text{Arcsin } 2$$

☑ پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{aligned} z &= -i\text{Ln}[i(2) + \sqrt{1 - (2)^2}] = -i\text{Ln}(2i + \sqrt{-3}) = -i\text{Ln}(2i \pm \sqrt{3}i) = -i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i[\text{Ln} 2 + \text{Ln}(2 \pm \sqrt{3})] + 2n\pi \\ &= -i \times i \frac{\pi}{2} - i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi = (2n + \frac{1}{2})\pi - i\text{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

توابع هذلولی مختلط

دو تابع هذلولی $\sinh z$ و $\cosh z$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

🌟 تذکر ۱۴: توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ توابعی تام با دوره تناوب $2\pi i$ می‌باشند.

بقیه توابع هذلولی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{tgh} z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \cot \text{gh} z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \\ \text{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, & \text{cosech} z &= \frac{1}{\sinh z} \end{aligned}$$

🌟 تذکر ۱۵: تابع $\text{tgh} z$ در تمام صفحه مختلط به جز ریشه‌های معادله $\cosh z = 0$ تحلیلی و دوره تناوب آن πi می‌باشد.

🌟 تذکر ۱۶: کلیه روابط حاکم بر توابع هیپربولیک در این توابع نیز صادق هستند:

$$1) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 2) \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\begin{cases} (\sinh z)' = \cosh z, & (\cosh z)' = \sinh z \\ (\text{tgh} z)' = \text{sech}^2 z, & (\cot \text{gh} z)' = -\text{cosech}^2 z \end{cases}$$

با استفاده از روابط فوق، فرمولهای زیر نیز به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos z, & \sinh iz &= i \sin z \\ \cos iz &= \cosh z, & \sin iz &= i \sinh z \end{aligned}$$

🌟 تذکر ۱۷: برای به خاطر سپردن روابط توابع هذلولی مختلط باید در روابط عادی توابع مثلثاتی مختلط به جز عبارت $\cosh z$ یک منفی در بقیه

نسبت‌های مثلثاتی ضرب کنیم.

🔗 مثال ۳۹: از معادله $\cosh z = -1$ ، مقدار z کدام است؟

$$z = in\pi \quad (4)$$

$$z = i(2n+1)\pi \quad (3)$$

$$z = (2n+1)\pi \quad (2)$$

$$z = n\pi \quad (1)$$

☑ پاسخ: گزینه «۳» می‌دانیم $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -1 \Rightarrow e^z + \frac{1}{e^z} = -2 \Rightarrow \frac{(e^z)^2 + 1}{e^z} = -2$$

$$\Rightarrow (e^z)^2 + 2e^z + 1 = 0 \Rightarrow (e^z + 1)^2 = 0 \Rightarrow e^z = -1 \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} z = \text{Ln}(-1)$$

$$\text{Ln}(-1) = \text{Ln} 1 + i(\pi + 2n\pi) = i(2n+1)\pi \Rightarrow z = \text{Ln}(-1) = i(2n+1)\pi$$

می‌دانیم $-1 = e^{i\pi}$ لذا داریم:

🌟 تذکر ۱۸: توابع $\sinh z$ ، $\cosh z$ ، $\sin z$ ، $\cos z$ و e^z در تمام صفحه مختلط، تحلیلی هستند.



لگاریتم یک عدد مختلط

برای محاسبه لگاریتم یک عدد مختلط ابتدا آنرا به فرم نمائی می‌نویسیم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(re^{i\theta}) = \operatorname{Ln} r + i\theta$$

البته فرم کلی رابطه‌ی فوق به صورت زیر است:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i(2k\pi + \theta)$$

مثال ۴۰: حاصل عبارت $A = \operatorname{Ln}(4 + 4\sqrt{3}i)$ کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

$$3\operatorname{Ln} 2 + \frac{\pi}{3}i \quad (۴)$$

$$\operatorname{Ln} 2 + \frac{\pi}{4}i \quad (۳)$$

$$3\operatorname{Ln} 2 - \frac{\pi}{6}i \quad (۲)$$

$$\operatorname{Ln} 2 + \pi i \quad (۱)$$

$$A = \operatorname{Ln}(4e^{\frac{\pi}{3}i}) = \operatorname{Ln} 4 + \frac{\pi}{3}i = 2\operatorname{Ln} 2 + \frac{\pi}{3}i$$

☒ پاسخ: گزینه «۴» می‌دانیم $4 + 4\sqrt{3}i = 8e^{\frac{\pi}{3}i}$ ، بنابراین:

مثال ۴۱: تابع $\operatorname{Ln} z$ با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است؟

$$\operatorname{Ln}(x^2 + y^2) - i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad (۴) \quad \operatorname{Ln}(x^2 + y^2) + i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad (۳) \quad \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2 + y^2) - i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad (۲) \quad \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2 + y^2) + i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \quad (۱)$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\theta = \operatorname{Ln}\sqrt{x^2 + y^2} + i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2 + y^2) + i\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

☒ پاسخ: گزینه «۱»

مثال ۴۲: اگر z یک عدد مختلط ناصفر، $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta$ و $-\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$ باشد، آنگاه $\operatorname{Ln}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ برابر است با:

$$\operatorname{Ln} \sqrt{3} + \frac{i\pi}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{i\pi}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{i2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{i\pi}{3} \quad (۱)$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z| = 1, \operatorname{Arg} z = -\frac{2\pi}{3}$$

☒ پاسخ: گزینه «۲»

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\operatorname{Arg} z = \operatorname{Ln} 1 + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -i\frac{2\pi}{3}$$

مقدار اصلی لگاریتم، نقطه‌ی شاخه‌ای و خطوط شاخه‌ای

تساوی $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i(2k\pi + \theta)$ ($-\pi < \theta \leq \pi$)، نمی‌تواند یک تابع باشد، اما به ازای هر k ثابت می‌تواند تابع باشد، به ازای هر k ثابت $\operatorname{Ln} z$ را یک شاخه لگاریتم می‌نامند. شاخه‌ای که به ازای $k = 0$ حاصل می‌شود، شاخه اصلی لگاریتم نامیده می‌شود.

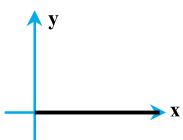
$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} r + i\theta; -\pi < \theta \leq \pi$$

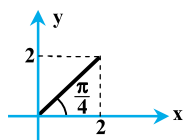
تابع فوق بر روی محور حقیقی منفی پیوسته نیست در نتیجه در این ناحیه تحلیلی نمی‌باشد به همین دلیل این قسمت محور را خط شاخه‌ای تابع $\operatorname{Ln} z$ می‌نامند.

لازم به ذکر است خط شاخه‌ای قابل جابه‌جایی است یعنی اگر این خط به صورت $\alpha < \theta \leq 2\pi + \alpha$ تعریف شود، آنگاه محور $\theta = \alpha$ خط شاخه‌ای تابع است، (مثلاً در تعریف اولیه به ازای $\alpha = -\pi$ ناحیه $-\pi < \theta \leq \pi$ حاصل شده بود) به هر ترتیب تمام شاخه‌ها از مبدأ مختصات عبور می‌کنند و به همین دلیل به نقطه‌ی $z = 0$ ، **نقطه‌ی شاخه‌ای** می‌گویند، در این نقطه نیز تابع $\operatorname{Ln} z$ پیوسته نمی‌باشد و در نتیجه تحلیلی نیست. به چند مثال جالب زیر توجه کنید:

(۱) اگر تابع f به صورت $f(z) = \operatorname{Ln} z$; $0 < \theta \leq 2\pi$ تعریف شود خط $\alpha = 0$ خط شاخه‌ای این تابع می‌باشد و برای مثال

این تابع در نقطه $z = -1$ مشتق دارد، چون سمت راست محور حقیقی خط شاخه‌ای است.





۲) برای تابع $\text{Ln} z$ اگر θ به صورت $\frac{\pi}{4} < \theta \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$ تعریف شود، خط $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، خط شاخه‌ای تابع می‌باشد و این تابع در نقطه‌ای مانند $2 + 2i$ که بر روی خط شاخه‌ای قرار دارد، مشتق ندارد و در نتیجه تحلیلی نمی‌باشد.

یکی دیگر از تفاوت‌های تابع لگاریتمی این است که اکثر توابع مختلط (مانند توابع مثلثاتی، هیپربولیک، نمایی و ...) رفتارشان شبیه توابع متناظر آن‌ها در توابع حقیقی است. اما تابع لگاریتم $f(z) = \text{Ln} z$ رفتارش مانند $\text{Ln} x$ نیست برای مثال Ln در حوزه اعداد مختلط برابر صفر نیست و همان‌طور که گفتیم برابر است با:

و به همین شکل $\text{Ln}(-1)$ در حوزه اعداد حقیقی تعریف نشده است. اما در حوزه اعداد مختلط چون $-1 = 1e^{i\pi}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Ln}(-1) = \text{Ln}(1 + i(2k\pi + \pi)) = i(2k + 1)\pi$$

به همین ترتیب قوانین لگاریتمی که قبلاً بلد بودیم این‌جا برقرار نیست. یکی از آن‌ها، تساوی $\text{Ln} x^2 = 2\text{Ln} x$ است. مثلاً فرض کنید اگر $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\text{Ln} z^2 = \text{Ln}(e^{i\frac{3\pi}{4}})^2 = \text{Ln} e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

تعریف شود، در این صورت $\text{Ln} z^2$ به صورت مقابل حساب می‌شود:

اما چون $\frac{3\pi}{2} = 1/5\pi$ در بازه $-\pi < \theta \leq \pi$ قرار ندارد. پس آن را به صورت $-\frac{\pi}{2}$ می‌نویسیم و داریم:

$$\text{Ln} z^2 = \text{Ln} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \text{Ln}(1 - i\frac{\pi}{2}) = -i\frac{\pi}{2}$$

$$2\text{Ln} z = 2\text{Ln} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2[\text{Ln}(1) + i\frac{3\pi}{4}] = i\frac{3\pi}{2}$$

اما اگر بخواهیم برای $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ مقدار $2\text{Ln} z$ را حساب کنیم، داریم:

همان‌طور که دیدید این دو مقدار با هم مساوی نیستند.

مثال ۴۳: قسمت موهومی تابع مختلط $w = i^{\text{Ln}(1+i)}$ برابر کدام گزینه است؟ (Ln را شاخه اصلی در نظر بگیرید).

$$e^{-\frac{\pi^2}{4}} \sin(\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2) \quad (۴)$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2) \quad (۳)$$

$$e^{-\frac{\pi^2}{4}} \cos(\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2) \quad (۲)$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} \text{Ln} 2) \quad (۱)$$

☒ پاسخ: گزینه «۴» ابتدا مقدار اصلی $\text{Ln}(1+i)$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{Ln}(1+i) = \text{Ln}\sqrt{1+1} + itg^{-1}1 = \text{Ln}\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\text{Ln} 2 + i\frac{\pi}{4} \Rightarrow w = i^{\text{Ln}(1+i)} = i^{(\frac{1}{2}\text{Ln} 2 + i\frac{\pi}{4})}$$

می‌دانیم $i = e^{\text{Ln} i}$ ، پس به جای i می‌توانیم $e^{\text{Ln} i}$ قرار دهیم:

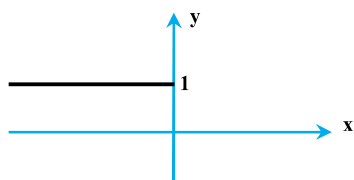
$$w = e^{\text{Ln} i (\frac{1}{2}\text{Ln} 2 + i\frac{\pi}{4})} \xrightarrow{\text{Ln} i = \text{Ln} 1 + i\frac{\pi}{2}} w = e^{i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}\text{Ln} 2 + i\frac{\pi}{4})} = e^{-\frac{\pi^2}{4} + i\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2}$$

$$\Rightarrow w = e^{-\frac{\pi^2}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2} = e^{-\frac{\pi^2}{4}} [\cos(\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2) + i\sin(\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2)] = e^{-\frac{\pi^2}{4}} \cos(\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2) + ie^{-\frac{\pi^2}{4}} \sin(\frac{\pi}{4}\text{Ln} 2)$$

نکته ۱۶: اگر برای تابع $\text{Ln} f(z)$ ، شاخه اصلی Ln را در نظر بگیریم با برقرای دو شرط زیر می‌توانیم ناحیه غیر تحلیلی بودن

$$۱) \text{Im}[f(z)] = 0, \quad ۲) \text{Re}[f(z)] \leq 0$$

$\text{Ln}[f(z)]$ را به دست بیاوریم:



یعنی جایی که قسمت موهومی تابع برابر صفر باشد و قسمت حقیقی آن کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد.

برای مثال تابع $\text{Ln}(z-i)$ در ناحیه زیر تحلیلی نیست:

$$z-i = x+iy-i = x+i(y-1) \Rightarrow \begin{cases} y-1=0 \Rightarrow y=1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



مثال ۴۴: تابع $f(z) = \text{Ln} \frac{1-z}{1+z}$ در چه ناحیه‌ای پیوسته نیست؟ (شاخه اصلی Ln مورد نظر است).

$$(۱) \text{Im} z = 0, -1 \leq \text{Re} z \leq 1 \quad (۲) \text{Im} z < -1, \text{Re} z > 1 \quad (۳) \text{Im} z = 1, \text{Re} z > -1 \quad (۴) \text{Im} z = 0, \text{Re} z \leq -1$$

پاسخ: گزینه «۴» ابتدا باید قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت جلوی Ln را مشخص کنیم:

$$f(z) = \text{Ln} \left(\frac{1-z}{1+z} \right) = \text{Ln} \left(\frac{1-x-iy}{1+x+iy} \right) = \text{Ln} \left[\frac{(1-x)-iy}{(1+x)+iy} \times \frac{(1+x)-iy}{(1+x)-iy} \right] = \text{Ln} \left[\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} + i \frac{-2xy}{(1+x)^2+y^2} \right]$$

با توجه به مثبت بودن مخرج‌های قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت جلوی Ln ، شرایط زیر را داریم:

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} 1-x^2 \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در ناحیه $\text{Im} z = 0$ و $\text{Re} z \leq -1$ و $\text{Re} z \geq 1$ پیوسته نیست. یعنی گزینه (۴) صحیح است.

تذکره ۱۹: توابع $\text{Ln} z$ و $\sqrt[n]{z}$ در تمام نقاط به جز نقاط مربوط به بریدگی شاخه‌هایشان تحلیلی هستند.

اصل بازتاب

فرض کنیم تابع f در حوزه D تحلیلی باشد، که حوزه D شامل قطعه‌ای از محور x ها است و نسبت به این محور متقارن است. در این صورت برای هر نقطه‌ای مانند z در حوزه D رابطه $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ برقرار است، اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه x بر این قطعه، $f(x)$ حقیقی باشد. (یعنی جاهایی در حوزه که $y = 0$ است، $f(x)$ حقیقی باشد).

نکته ۱۷: در اصل بازتاب اگر به جای شرط حقیقی بودن $f(x)$ ، شرط موهومی بودن را برای $f(x)$ قرار دهیم، آنگاه معادله به صورت $\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$ می‌شود.

قضایای کوشی ریمان

قضیه اول: هرگاه تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه z دارای مشتق باشد، آنگاه:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

و همچنین معادلات زیر که به معادلات کوشی ریمان معروف هستند، **شروط لازم** برای مشتق‌پذیری تابع $f(z)$ می‌باشند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

قضیه دوم: شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه $z = x + iy$ مشتق‌پذیر باشد، این است که چهار مشتق جزئی مرتبه اول آنها در z پیوسته بوده و در معادلات کوشی ریمان صدق کنند.

با برقراری شرایط فوق $f'(z)$ موجود بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{یا} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

البته در بعضی مسائل فقط یکی از u و v به ما داده شده و مشتق سؤال می‌شود و فرمول مشتق بر حسب یکی از آنها (u یا v) با توجه به قضایای کوشی ریمان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{یا} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

تذکره ۲۰: در قضایای کوشی ریمان برقراری روابط $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ مشتق‌پذیر بودن تابع را تضمین نمی‌کند. اما اگر در تابعی این روابط برقرار نبود، قطعاً می‌توان نتیجه گرفت که تابع مشتق ندارد.

تذکره ۲۱: توجه شود اگر شرایط قضیه دوم کوشی ریمان برای تابعی در نقطه z احراز شود، می‌توان نتیجه گرفت تابع در نقطه z تحلیلی خواهد بود.

❖ مثال ۴۵: تابع $f(z) = |z|^2$

(۱) در هیچ جا تحلیلی نیست. (۲) در همه جا مشتق پذیر است. (۳) در $z = 0$ مشتق پذیر است. (۴) در $z = 0$ مشتق پذیر است.

❑ پاسخ: گزینه «۱»

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow u = x^2 + y^2, v = 0$$

$$u_x = 2x, v_x = 0, u_y = 2y, v_y = 0$$

شرایط کوشی ریمان فقط در $z = 0$ و $2x = 0$ یا همان نقطه $z = 0$ و $y = 0$ برقرار است، پس تابع در هیچ جا تحلیلی نیست.

❖ مثال ۴۶: مشتق تابع $f(z) = z^3$ کدام است؟

(۴) $3z^2$

(۳) $3z$

(۲) $3z^2$

(۱) تابع مشتق ندارد.

❑ پاسخ: گزینه «۲»

$$f(z) = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

می باشد، چون معادلات کوشی ریمان برای تابع برقرار می باشد، پس تابع مشتق دارد: $u = x^3 - 3xy^2$ و $v = 3x^2y - y^3$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2 - 3y^2 + i(3xy) = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3z^2$$

از همین جا می توان نتیجه گرفت، مشتق چند جمله ای ها در حوزه توابع مختلط، دقیقاً مانند توابع حقیقی می باشد.

❖ مثال ۴۷: برای تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ روابط کوشی - ریمان:

(۱) صادق بوده و مشتق نیز دارد. (۲) صادق نبوده و مشتق ندارد. (۳) صادق بوده اما مشتق ندارد. (۴) صادق نبوده ولی مشتق دارد.

❑ پاسخ: گزینه «۳» ابتدا مشتق پذیری تابع را بررسی می کنیم:

$$f'(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}{x + iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3 + i(x^2 + y^2)}{(x + iy)(x^2 + y^2)}$$

مقدار حد تابع بر روی مسیر $z = 0$ و یا $y = 0$ برابر $1 + i$ می باشد اما بر روی مسیر $y = x$ مقدار حد فوق برابر $\frac{1+i}{2}$ است، لذا $f'(0)$ موجود

نیست. حال شرایط معادلات کوشی ریمان را بررسی می کنیم.

$$u_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = 1, v_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = -1, v_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = 1$$

با توجه به اینکه $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$ می باشد، لذا معادلات کوشی ریمان برقرارند. شاید در ذهن شما این سؤال پیش بیاید که چرا از تعریف مشتق مقادیر فوق را محاسبه کردیم، پاسخ این است که استفاده از فرمول مشتق گیری کمی مشکل تر از این حالت است. (خواستید امتحان کنید!)

❖ مثال ۴۸: فرض کنید $f(z)$ تابعی تحلیلی با قسمت حقیقی $e^{x^2-y^2} \cos 2xy$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(۴) $2e$

(۳) $-2e$

(۲) e

(۱) $-e$

❑ پاسخ: گزینه «۴» توجه شود چون تابع تحلیلی می باشد لذا روابط کوشی ریمان برقرارند و (۱) $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ می باشد، پس خواهیم داشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow{(1)} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 2xe^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2y \sin 2xy \times e^{x^2-y^2}$$

$$-i(-2ye^{x^2-y^2} \cos 2xy - 2x \sin 2xy \times e^{x^2-y^2})$$

$$z = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0, f'(1) = 2e$$



مثال ۴۹: اگر تابع $w = x^2 + \alpha y^2 - 2xy + i(\beta x^2 - y^2 + 2xy)$ ، تحلیلی باشد؛ حاصل $\beta - \alpha$ برابر کدام گزینه است؟

(۴) ۱

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) صفر

پاسخ: گزینه «۲» چون f تحلیلی است باید در شرایط قضیه کوشی - ریمان صدق کند، با توجه به ضابطه f داریم:

$$\left. \begin{aligned} u = x^2 + \alpha y^2 - 2xy &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2\alpha y - 2x \\ v = \beta x^2 - y^2 + 2xy &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2\beta x + 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2\alpha y - 2x = -(2\beta x + 2y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1 \\ 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = 1 - (-1) = 2$$

مثال ۵۰: تابع f با ضابطه $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & ; z \neq 0 \\ 0 & ; z = 0 \end{cases}$ مفروض است، کدام گزینه صحیح است؟

(۱) f در $z = 0$ پیوسته نیست.(۲) در $z = 0$ روابط کوشی ریمان برقرار نیستند، ولی تابع مشتق دارد.(۳) در $z = 0$ تابع f پیوسته است و روابط کوشی ریمان نیز برقرار است.(۴) در $z = 0$ تابع f مشتق ندارد و روابط کوشی ریمان نیز برقرار نیستند.

پاسخ: گزینه «۳» اگر تابع را در مختصات قطبی بررسی کنیم، داریم:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{r^2 e^{-2i\theta}}{r e^{i\theta}} = 0 = f(0) \Rightarrow \text{پس در } z = 0 \text{ تابع } f \text{ پیوسته است.}$$

$$u_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^3} = 0$$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3} = 1$$

ملاحظه می‌گردد $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$ لذا روابط کوشی ریمان در نقطه $z = 0$ برقرار هستند.

مثال ۵۱: هرگاه $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابعی تحلیلی باشد، $f(z)$ کدام است؟ (C عددی مختلط و K عددی حقیقی است)

(۴) $Kz + C$ (۳) $-Kiz + C$ (۲) $K\bar{z} + C$ (۱) $Ki\bar{z} + C$

پاسخ: گزینه «۳» چون تابع تحلیلی است، پس $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ، اما دقت کنید با توجه به این که v تابعی فقط بر حسب x است، لذا $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ و نتیجتاً

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ می‌شود و این یعنی تابع } u \text{ فقط بر حسب } y \text{ است، از طرفی چون}$$

$$\frac{\partial u(y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

دو تابع که مشتق آن‌ها بر حسب دو متغیر برابر با هم شده و این فقط در یک حالت اتفاق می‌افتد که این دو عبارت مساوی عدد ثابتی مثل K باشد:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = K &\Rightarrow u = Ky + C_1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -K &\Rightarrow v = -Kx + C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(z) = (Ky + C_1) + i(-Kx + C_2) \Rightarrow f(z) = -Ki(\underbrace{x+iy}_z) + \underbrace{C_1 + iC_2}_C \Rightarrow f(z) = -Kiz + C$$