بسمه تعالی

آزمون اول المپیاد فیزیک (تابستان 96)　　　　　مدت : 4 ساعت

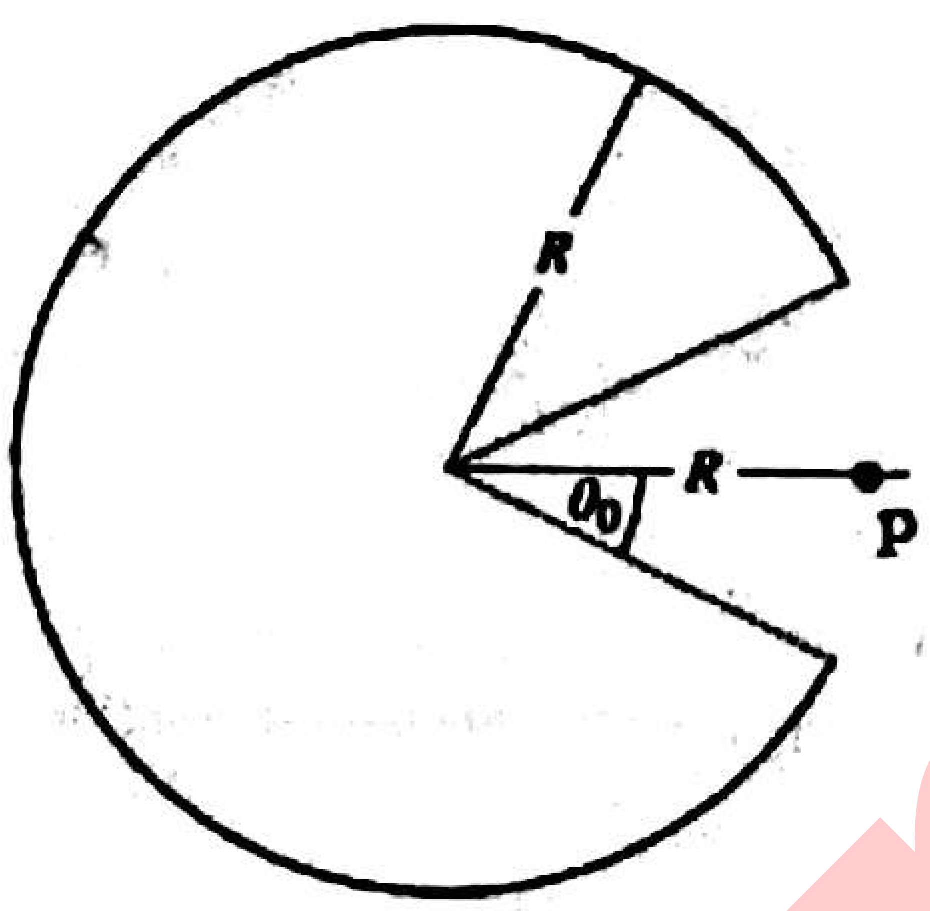
96/5/1

مسئله ی 1) این مسئله دو قسمت مجزا از هم دارد.

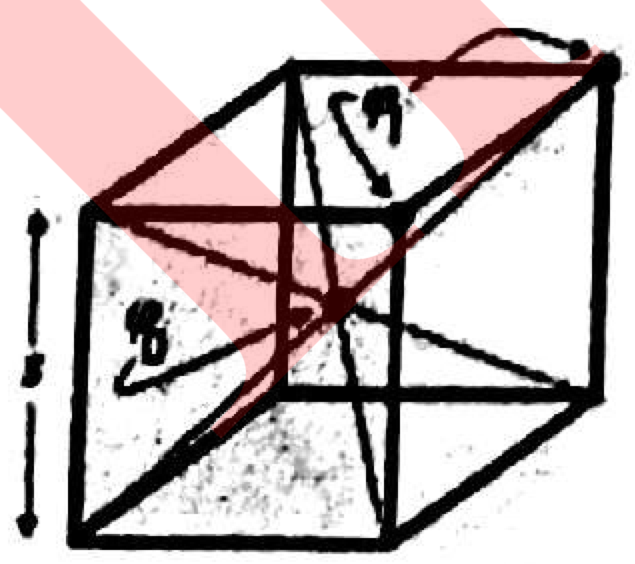
آ) یک پوسته ی کروی به شعاع $R$ دارای چگالی بار الکتریکی سطحی $\sigma$ است. یک حفره ی دایره ای روی این پوسته ایجاد می کنیم. زاویه ی مخروطی که رأس آن در مرکز کره، و قاعده ی آن حفره ی روی پوسته است، $\theta_0$ است.

آ-1) میدان الکتریکی را در نقطه ی P در مرکز حفره به دست آورید.

آ-2) در حالت $\theta_0 \ll 1$ ، میدان الکتریکی در نقطه ی P را به دست آورید.




ب) مکعبی با طول ضلع s، دارای چگالی بار الکتریکی یک نواخت است. پتانسیل در مرکز، و در یک رأس این مکعب را به ترتیب با $\varphi_0$ و $\varphi_1$ نشان می دهیم. نسبت $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ را به دست آورید.



مسئله ۲)

در این مساله می‌خواهیم یک مدل ساده از رشد سلولی را در نظر بگیریم. برای این منظور فرض می‌کنیم که یک سلول در بازه‌ی زمانی کوچک $\Delta t$ سه امکان دارد: ۱) سلول می‌تواند به احتمال $\omega\Delta t$ تقسیم و به دو سلول تبدیل شود، ۲) سلول به احتمال $\gamma\Delta t$ از بین می‌رود و ۳) برای سلول هیچ اتفاقی نمی‌افتد. فرض می‌کنیم $\omega \neq \gamma$. احتمال اینکه در لحظه‌ی $t$ در محیط رشد، $n$ سلول داشته باشیم را با $p(n,t)$ نشان می‌دهیم.

الف) معادله‌ی تحول زمانی، یعنی $\frac{\partial p(n,t)}{\partial t}$ را بنویسید.

تابع مولد، $G(s,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n p(n,t)$ مطابق معمول تعریف می‌شود.

ب) معادله‌ی تحول تابع مولد، یعنی $\frac{\partial G(s,t)}{\partial t}$ را بنویسید.

ج) با دانستن تابع توزیع اولیه، $p(n,t=۰)$، می‌توان تابع مولد در لحظه‌ی نخست را ساخت. با فرض اینکه $G(s,t=۰) = F(s)$ یک تابع داده شده است، پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل بخش ب، چنین است:

$$G(s,t) = F(x(s,t)), \qquad x(s,t) = \frac{\gamma - \omega s + \gamma(s-۱)e^{-kt}}{\gamma - \omega s + \omega(s-۱)e^{-kt}}, \qquad (۱)$$

که در آن $k$ یک ثابت است. $k$ را بر حسب $\gamma$ و $\omega$ تعیین کنید.

د) مقدار متوسط تعداد در زمان $t$، یعنی $\langle n(t)\rangle$ را بر حسب $\langle n(t=۰)\rangle$، $\gamma$، $\omega$ و $t$ حساب کنید.

حال فرض کنید $F(s) = s^N$، که در آن $N$ یک عدد ثابت مثبت است. علاوه بر آن احتمال نابودی کامل نمونه یا انقراض در زمان $t$ برابر با $p(۰,t)$ است.

ه) احتمال انقراض در زمان دلخواه $t$ را حساب کنید. اگر زمان بسیار زیادی بگذرد، احتمال انقراض چه‌قدر است؟

مسئله ۳ ـ توجه فرمایید این مسئله دارای چهار بخش مجزا از هم است.

الف) ماتریس $N$ متعامد گفته می شود اگر $N\tilde{N} = \tilde{N}N = 1$، که در آن $\tilde{N}$ ترانهاده ماتریس $N$ نامیده می شود و عناصر آن از رابطه $(\tilde{N})_{ij} = N_{ji}$ تعریف می شوند. ثابت کنید مجموعه ماتریس های متعامد $n \times n$ تحت عمل ضرب ماتریسی یک گروه است. (۲ نمره)

ب) چنانکه می دانید در هیأت اعداد مختلط عمل ضرب به صورت زیر تعریف می شود:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ثابت کنید مجموعه اعداد مختلط به جز صفر، ضرب فوق ، یک گروه آبلی است. (۲ نمره)

ج) با استفاده از نامساوی شوارتز ثابت کنید مجموعه توابع مجذور انتگرال پذیر یک فضای برداری است. (۲نمره)

د ۱) تعریف دترمینان یک ماتریس $n \times n$ به صورت زیر است

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det N = \epsilon_{i'_1 i'_2 \cdots i'_n} N_{i_1 i'_1} N_{i_2 i'_2} \cdots N_{i_n i'_n}$$

که در آن تانسور اپسیلون لوی ـ چیویتا تانسور کاملا پادمتقارن در $n$ بعد است، به این معنی که اگر شاخص های $i_1$ تا $i_n$ جایگشت زوجی از اعداد صحیح یک تا $n$ باشند مقدار آن ۱+، اگر جایگشت فردی از همان اعداد باشد مقدار آن ۱− و اگر دو تا یا بیشتر از شاخص ها یکسان باشند مقدار آن صفر است. با استفاده از این تعریف ثابت کنید اگر دو سطر یک ماتریس مشابه باشند، دترمینان آن صفر است. (۲نمره)

د ۲) در ادامه بخش (د ۱) ثابت کنید اگر کلیه عناصر یک سطر را با سطر دیگر به ترتیب جمع کنیم دترمینان تغییر نمی کند. (۱ نمره)

د ۳) ثابت کنید اگر ترکیبی خطی از برخی سطرهای یک ماتریس را به یکی دیگر از سطرها اضافه کنیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی کند. (۱ نمره)

مسئله‌ی ۴) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.

a) برای آن که الکترون‌های رسانش از سطح یک فلز کنده شوند، باید انرژی جنبشی هر یک از آن‌ها برابر یا بزرگ‌تر از تابع کار فلز، $\varepsilon_0$، باشد. الکترون‌ها می‌توانند به راه‌های مختلف این انرژی را کسب کنند. یک راه بالا بردن دمای فلز است. گسیل الکترون‌ها به این روش گسیل گرمایونی نام دارد.

آ) فلزی در نظر بگیرید که تعداد الکترون‌های آزاد در واحد حجم آن $n_0$ است. همچنین فرض کنید الکترون‌ها مانند ذرات یک گاز ایده‌آل آزادند و از تابع توزیع سرعت ماکسول پیروی می‌کنند

$$n(v_z) = n_0\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

می‌دانیم در صورتی که سرعت سوق همه‌ی الکترون‌ها $\vec{v}$ باشد، رابطه‌ی بین چگالی جریان با سرعت الکترون‌ها $\vec{J} = n_0 e\vec{v}$ است که $e$ بار یک الکترون است. دمای فلز را $T$ در نظر بگیرید و رابطه‌ای برای چگالی جریان الکترون‌های کنده شده از سطح فلز به دست آورید. راستای عمود بر سطح را z بگیرید. معادله‌ای که به دست می‌آید معادله‌ی ریچاردسون نام دارد. (۲ نمره)

ب) برای فلز تنگستن $\varepsilon_0 = 4.5\ \mathrm{eV}$ و $n_0 = 10^{23}\ \mathrm{cm^{-3}}$. فلز تنگستن تا چه دمایی باید گرم شود تا چگالی جریان الکترون‌های کنده شده از سطح آن $1\ \mathrm{mA/cm^2}$ باشد. (۳ نمره)

---

b) فرض کنید در همجوشی هسته‌ای (ترکیب دو هسته‌ی دوتریوم و تشکیل یک هسته‌ی هلیوم) برای این که این واکنش به طور مداوم ادامه پیدا کند باید لااقل یک درصد از هسته‌های دوتریوم انرژی جنبشی شان بزرگ‌تر از $\varepsilon_0 = 10^4\ \mathrm{eV}$ باشد. دمای دوتریوم حداقل چقدر باشد تا این اتفاق بیفتد؟ فرض کنید ذرات دوتریوم از تابع توزیع تندی ماکسول پیروی می‌کنند و $kT \ll \varepsilon_0$.

(۵ نمره)

در صورت نیاز: ادامه در صفحه بعد

$$\mathrm{erf}\,(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp\,(-x^2)dx \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\,y}\exp\,(-y^2) \qquad \text{If} \qquad y \gg 1$$

$$\frac{d}{dy}(y\exp\,(-y^2)) = -2y^2\exp\,(-y^2) + \exp\,(-y^2)$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

همچنین برای به دست آوردن ریشه‌های معادله‌ای مانند $x = f(x)$ با توجه به شکل، با حدس مقدار اولیه‌ی مناسبی مانند $x_i$ با چند بار تکرار می‌توان به مقدار واقعی ریشه معادله که در واقع محل تقاطع خط $y = x$ با منحنی $y = f(x)$ یعنی $x_0$ است نزدیک شد.