

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱
میانگین جامعه برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + \dots + 8}{8} = 4,5$$

بنابراین اگر یک نمونه ۶ تایی میانگین را دقیق برآورد کند، باید میانگین نمونه برابر ۴٫۵ باشد، در این صورت مجموع اعضای این نمونه برابر است با:

$$6 \times 4,5 = 27$$

و با توجه به اینکه مجموع تمامی اعضای جامعه برابر با $1 + 2 + \dots + 8 = 36$ است، می توان نتیجه گرفت که مجموع دو عضوی که در نمونه نمی باشند برابر با ۹ است. بنابراین این دو عضو حالات زیر را دارند:

$$\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = 28$$

تعداد کل نمونه های ۶ تایی برابر است با:

بنابراین احتمال اینکه یک نمونه ۶ تایی میانگین جامعه را دقیق برآورد کند، برابر است با:

$$P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{انحراف معیار برآورد میانگین})$$

حد پایین فاصله اطمینان ۹۵ درصدی: a

حد بالای فاصله اطمینان ۹۵ درصدی: b

برآورد میانگین: $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 43 = \frac{a+51}{2} \Rightarrow a = 86 - 51 = 35$$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{b-a}{2} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{b-a}{4} = \frac{51-35}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

تعداد حالت هایی که می توان نمونه ای ۳ عضوی از یک جامعه ۶ عضوی انتخاب کرد، برابر است با:

$$\binom{6}{3} = 20$$

نمونه هایی ۳ عضوی که میانگین اعضای آن ها برابر ۴ باشد، عبارتند از:

$$\{3, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر $\frac{3}{20} = 0,15$ خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

ابتدا داده ها را مرتب می کنیم ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵ بیشترین و کمترین و بیشترین برآورد ۴ عضوی را انتخاب و میانگین می گیریم.

$$\text{کمترین برآورد نقطه ای میانگین} = \frac{1+1+2+2}{4} = 1,5$$

$$\text{بیشترین برآورد نقطه ای میانگین} = \frac{3+4+4+5}{4} = 4$$

بنابراین اختلاف بین کمترین و بیشترین مقدار برآورد نقطه ای میانگین در نمونه هایی با اندازه ۴ برابر $4 - 1,5 = 2,5$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$n = 81, \quad \bar{x} = 30, \quad \sigma = 4$$

$$|\mu - \bar{x}| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow |\mu - \bar{x}| \leq \frac{2 \times 4}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$$

۶ فرض کنید این جامعه ۴ عضوی به صورت $\{a, b, c, d\}$ باشد همه نمونه های سه عضوی به شکل زیر می باشند.

$$\left. \begin{aligned} a, b, c: \bar{x}_1 &= \frac{a+b+c}{3} = \frac{20}{3} \Rightarrow a+b+c=20 \\ a, b, d: \bar{x}_2 &= \frac{a+b+d}{3} = 8 \Rightarrow a+b+d=24 \\ a, c, d: \bar{x}_3 &= \frac{a+c+d}{3} = \frac{25}{3} \Rightarrow a+c+d=25 \\ b, c, d: \bar{x}_4 &= \frac{b+c+d}{3} = 9 \Rightarrow b+c+d=27 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} 3(a+b+c+d) = 96 \Rightarrow a+b+c+d=32$$

$$\Rightarrow \text{میانگین: } \mu = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

با توجه به اینکه برآورد بازه‌ای با اطمینان بیش از ۹۵٪ در بازه $(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ می‌باشد و برآورد نقطه‌ای برابر $\bar{x}$ است. با میانگین گرفتن از دو بازه می‌توان $\bar{x}$ را محاسبه کرد. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) + (\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})}{2} = \frac{1,73 + 2,31}{2} = \frac{4,04}{2} = 2,02$$

در مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ حداکثر مقدار میانگین یک نمونه دوعضوی ۸٫۵ است. اگر A پیشامدی باشد که میانگین یک نمونه دوعضوی

بزرگ‌تر از ۶ باشد باید همه نمونه‌های دوعضوی را چنان بباییم که میانگین آن‌ها برابر ۶٫۵، ۷، ۸، ۵، ۸ باشد. این نمونه‌های دوعضوی عبارت‌اند از:

$$A = \{(4, 9), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{\binom{9}{2}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

نکته: بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه به صورت $[\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$ است که $\bar{x}$ میانگین نمونه، σ انحراف معیار جامعه و n تعداد اعضای نمونه است.

بنابراین بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد به صورت زیر است:

$$[15,5 - \frac{2 \times 1,5}{\sqrt{144}}, 15,5 + \frac{2 \times 1,5}{\sqrt{144}}] = [15,5 - \frac{3}{12}, 15,5 + \frac{3}{12}] = [15,25, 15,75]$$

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\mu \text{ میانگین و } \sigma \text{ انحراف معیار جامعه است.})$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} &= 37 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} &= 43 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 6$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{4} = 1,5$$

اگر میانگین ۳ عدد برابر ۳ باشد یعنی مجموع این اعداد برابر ۹ است. پس برای یافتن احتمال مورد نظر باید تعداد نمونه‌هایی از اندازه ۳ را پیدا کنیم که مجموع تعداد عمل‌های آن‌ها مساوی ۹ شود و آن‌ها عبارت‌اند از $\{5, 3, 1\}$ و $\{5, 2, 2\}$ پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{2}{\binom{5}{3}} = 0,2$$

می‌دانیم:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\mu = \frac{0 + 1 + 2 + \dots + N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

میانگین اعداد صحیح از صفر تا N برابر است با:

از طرفی میانگین اعداد انتخاب شده برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 11 + 14 + 18 + 20}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

بنابراین برآورد نقطه‌ای N به کمک پارامتر میانگین به صورت زیر است:

$$\frac{N}{2} = 12 \Rightarrow N = 24$$

برای نصف کردن $\sigma_{\bar{x}}$ باید n را ۴ برابر کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{4n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 64 \times 4 = 256 \text{ حجم نمونه}$$

$$\sigma^2 = 225 \rightarrow \sigma = 15 \text{ و } \sigma_{\bar{x}} \leq 5$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{15}{\sqrt{n}} \leq 5 \rightarrow 5\sqrt{n} \geq 15 \rightarrow \sqrt{n} \geq 3 \rightarrow n \geq 9$$

بنابراین حداقل اندازه نمونه باید ۹ باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)