مارتین ایگنر . گونتر تسیگلر

کتاب اثبات

ترجمهٔ سیامک کاظمی

سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

قهرمانان (ریاضی) این کتاب، «اثباتهای عالی» هستند، اثباتهایی حاوی ایده های درخشان، ارتباطات هوشمندانه بین مفاهیم، و مشاهدات و نکات عالی که بصیرتها و دیدگاههای تازه و چشم اندازهای شگفت انگیزی از تعدادی مسألهٔ بنیادی و چالش برانگیز در نظریهٔ اعداد، هندسه، آنالیز، ترکیبیات، و نظریهٔ گراف در اختیار خواننده قرار می دهند. در اینجا سی نمونهٔ زیبا ازاین مسائل و برهانهای مربوط به‌آنها آورده شده است. این اثباتها شایستهٔ حضور در «کتاب»ی هستند که به نظر پال اردوشِ فقید (الهام بخش مؤلفان این کتاب) خداوند اثباتهای کامل را درآنجا ثبت کرده است. ماحصل کار، کتابی است جالب و خواندنی برای هرکس که علاقه ای به ریاضیات، و معلومات متوسطی درآن داشته باشد.

کتاب اثبات

مارتین اَیگنر، گونتر تسیگلر

ترجمهٔ سیامک کاظمی

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Aigner, Martin

آیگنر، مارتین، ۱۹۴۲ـ

کتاب اثبات/مارتین آیگنر، گونتر تسیگلر؛ ترجمه سیامک کاظمی. ــ تهران: پژوهشگاه دانشهای بنیادی (مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)، واحد انتشارات، ۱۳۷۹.

هشت، ۲۷۴ ص ــ : مصور (رنگی)، جدول.

ISBN 964-90010-8-5

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

عنوان اصلی Proofs from THE BOOK.

کتابنامه.

۱. ریاضیات. الف. تسیگلر، گونتر Günter M. Ziegler ب. کاظمی، سیامک، ۱۳۳۳ـ ، مترجم. ج. پژوهشگاه دانشهای بنیادی (مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)، واحد انتشارات. د. عنوان.

۲ک۹الف/QA۳۶ ۵۱۰

۱۳۷۹

کتابخانه ملی ایران ۱۹۴۹۵ـ۷۹م

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

تهران-ص.پ. ۱۹۳۹۵ـ۵۷۴۶

http://www.ipm.ac.ir

Proofs from THE BOOK

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

Springer, Berlin, 1998

کتاب اثبات

مؤلفان	مارتین آیگنر، گونتر تسیگلر
مترجم	سیامک کاظمی
حروفچین و صفحه‌آرا	آناهیتا سمیع (TEX-پارسی)
نسخه‌پرداز	مسعود رژدام
ناشر	واحد انتشارات پژوهشگاه دانشهای بنیادی
چاپ اول	۱۳۷۹
تیراژ	۲۰۰۰ نسخه
چاپ و صحافی	خواجه

بسم الله الرحمن الرحیم

یادداشت

در هنگام تدارک برنامه‌های سال جهانی ریاضیات (سال ۲۰۰۰) در ایران، پژوهشکدهٔ ریاضیات پژوهشگاه دانشهای بنیادی تصمیم گرفت علاوه بر سایر مشارکتها، سهمی ولو کوچک نیز در انتشار آثار مفید ریاضی به‌زبان فارسی ادا کند، و به‌این منظور ترجمه و چاپ کتاب حاضر را به ستاد ملی سال جهانی ریاضیات پیشنهاد کرد و آن ستاد، حمایت از انتشار این کتاب را به عهده گرفت. ویژگیهای این کتاب با مطالعهٔ پیشگفتار مؤلفان روشن می‌شود؛ امید است از نظر خوانندگان کتابی سودمند و خواندنی باشد.

پژوهشکدهٔ ریاضیات

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

آذرماه ۱۳۷۹

فهرست

پیشگفتار

پال اردوش دوست داشت از «کتاب» یا «لوح»ی صحبت کند که خداوند اثباتهای زیبا و کامل قضایای ریاضی را در آنجا محفوظ نگه می‌دارد، و در این مورد گوشهٔ چشمی داشت به‌نظر گ.ه. هاردی، که ریاضیات زشت جایگاه ابدی و پایداری ندارد. اردوش همچنین می‌گفت که اعتقادات شما دربارهٔ ماوراءالطبیعه هرچه باشد، به‌عنوان ریاضیدان باید وجود این کتاب را باور داشته باشید. چند سال قبل به او پیشنهاد کردیم متنی که به تقریب شبیه آن کتاب باشد (ولو تقریبی اولیه و خام) بنویسد. وی با اشتیاق از این فکر استقبال کرد و چنانکه خصلتش بود بلافاصله دست به‌کار شد و صفحات متعددی را با پیشنهادهایش پر کرد. کتاب ما قرار بود در مارس ۱۹۹۸ به‌عنوان هدیه‌ای به مناسبت هشتاد و پنجمین زادروز اردوش انتشار یابد. با درگذشت اسف‌بار پال در تابستان ۱۹۹۷، نام او نتوانست جزء مؤلفان این کتاب بیاید. در عوض این کتاب را با گرامیداشت یاد او منتشر می‌کنیم.[۱]

پال اردوش

ما هیچ تعریف یا توصیفی از خصوصیات اثبات «کتابی» نداریم. چیزی که در این کتاب عرضه کرده‌ایم، نمونه‌هایی است که از میان اثباتها برگزیده‌ایم به‌این امید که خوانندگانمان در علاقه و تحسین ما نسبت به ایده‌های درخشان، دیدگاههای هوشمندانه، و نکات عالی [موجود در این اثباتها] سهیم شوند. همچنین امیدواریم خوانندگان ما از این متن علی‌رغم نقائص شرح و بیان ما لذت ببرند. انتخاب این نمونه‌ها تا حد زیادی تحت تأثیر پال اردوش صورت گرفته است. بسیاری از مباحث را او پیشنهاد کرد، و سابقهٔ خیلی از اثباتها مستقیماً به او می‌رسد و یا از بصیرت عالی او در طرح پرسش صحیح یا حدس صحیح نشأت گرفته است. بنابراین، این کتاب تا حد زیادی نشان دهندهٔ نظرات پال اردوش دربارهٔ اثباتهایی است که باید متعلق به «کتاب» محسوب شوند.

«کتاب»

یک عامل محدودکننده در انتخاب مباحث این کتاب، آن بوده است که خواسته‌ایم

۱) عنوان کتاب در زبان انگلیسی این است:

Proofs from THE BOOK

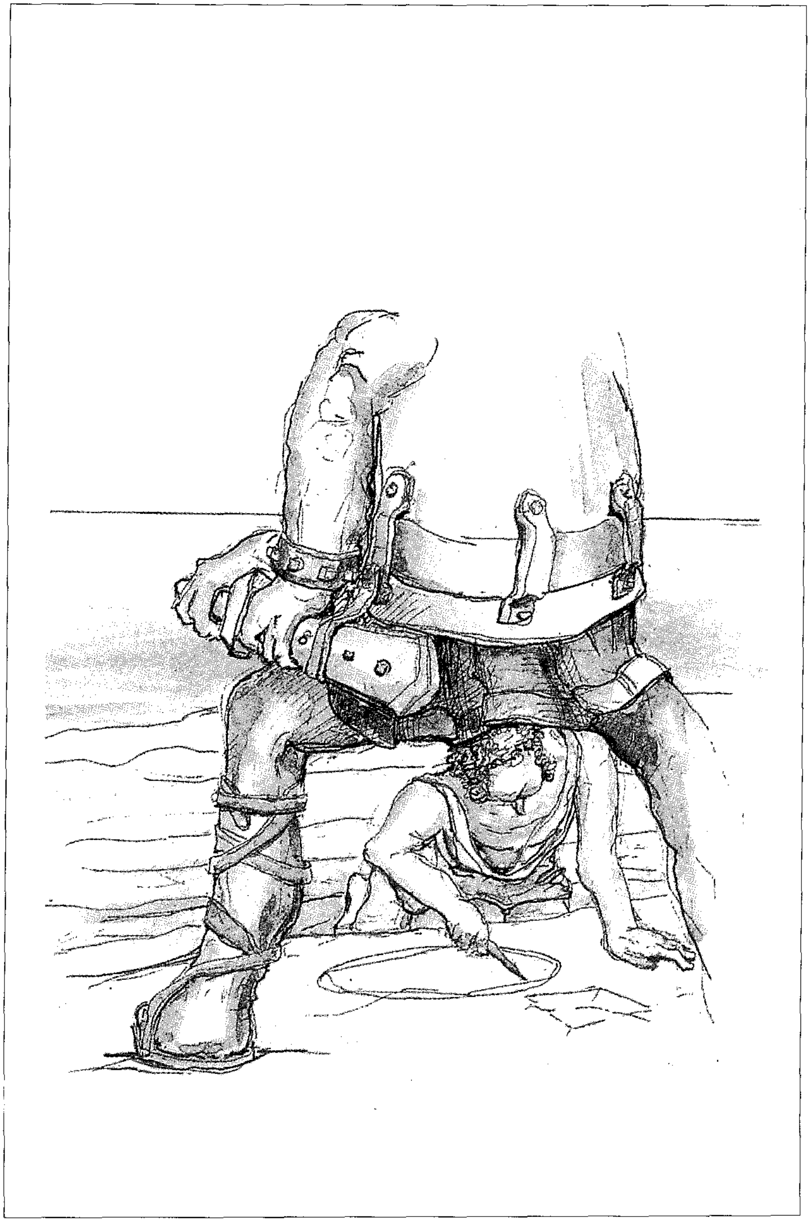
و منظور از *The Book* همان «کتاب» یا «لوح»ی است که در بالا از آن یاد شده است. اما چون ترجمهٔ مستقیم این عنوان مناسب به‌نظر نمی‌رسید، عنوان **کتاب اثبات** را برای ترجمهٔ فارسی برگزیدیم تا هم گویای محتوای کتاب ــ که مجموعه‌ای از اثباتهاست ــ باشد و هم متضمن اشاره‌ای به «کتاب» متعالی مورد نظر اردوش ــ مترجم.

همهٔ مطالبش برای خوانندگانی که فقط معلومات متوسطی از تکنیکهای ریاضیات دورهٔ کارشناسی دارند قابل استفاده باشد. دانستنِ اندکی جبر خطی، قدری آنالیز مقدماتی و نظریهٔ اعداد، و مقداری متناسب از مفاهیم و استدلالهای مقدماتیِ ریاضیات گسسته، برای فهمیدن و لذت بردن از همهٔ مطالب این کتاب کافی است.

از افراد بسیاری که ما را در این پروژه یاری و حمایت کرده‌اند، فوق‌العاده سپاسگزاریم ـــ از جمله، از دانشجویان سمیناری که متن اولیهٔ کتاب را در آنجا به بحث گذاشتیم [و از . . .]. اما بیش از همه مدیون خودِ پال اردوش کبیر هستیم.

برلین، مارس ۱۹۹۸
مارتین اَیگنر
گونتر تسیگلر

نظریهٔ اعداد



«گنگ بودن و π»

فصل ۱

شش اثبات برای نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول

خیلی طبیعی است که این یادداشتها را با اثباتی آغاز کنیم که احتمالاً قدیمیترین اثبات «کتابی» است و معمولاً آن را به اقلیدس نسبت می‌دهند. این برهان نشان می‌دهد که دنبالهٔ عددهای اول بی‌انتهاست.

■ **اثبات اقلیدس.** به‌ازای مجموعهٔ متناهی دلخواه $\{p_۱, \dots, p_r\}$ از عددهای اول، عدد $n = p_۱p_۲\dots p_r + ۱$ را در نظر بگیرید. این عدد n مقسوم‌علیه اولی چون p دارد ولی p یکی از p_iها نیست: چون اگر چنین باشد، p هم مقسوم‌علیه n و هم مقسوم‌علیه حاصلضرب $p_۱p_۲\dots p_r$ و بنابراین مقسوم‌علیه تفاضل $n - p_۱p_۲\dots p_r = ۱$ است که غیر ممکن است. پس هیچ مجموعهٔ متناهی $\{p_۱, \dots, p_r\}$ نمی‌تواند مجموعهٔ همهٔ عددهای اول باشد. □

پیش از اینکه اثباتهای دیگری بیاوریم، چند نماد را یادآوری می‌کنیم: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$ مجموعهٔ عددهای طبیعی، $\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$ مجموعهٔ عددهای صحیح، و $\mathbb{P} = \{۲, ۳, ۵, ۷, \dots\}$ مجموعهٔ عددهای اول است.

در آنچه در پی می‌آید، چند اثبات دیگر (از میان اثباتهای فراوان) می‌آوریم که امیدواریم خواننده هم مانند ما از آنها خوشش بیاید. هرچند این برهانها مبتنی بر دیدگاههای متفاوتی هستند، این ایدهٔ اصلی در همهٔ آنها مشترک است: عددهای طبیعی فراتر از هر کرانی رشد می‌کنند، و هر عدد طبیعی $n \geq ۲$ یک مقسوم‌علیه اول دارد. این دو واقعیت همراه با هم باعث می‌شوند $\mathbb{P}$ نامتناهی باشد. سه اثبات بعدی را همه می‌شناسند، اثبات پنجم را هری فورستنبرگ[1] عرضه کرد، و اثبات آخر از آن پال اردوش است.

در اثباتهای دوم و سوم از دنباله‌های عددی معروف خاصی استفاده می‌شود.

■ **اثبات دوم.** فرض کنید $\mathbb{P}$ متناهی و p بزرگترین عدد اول باشد. عدد $۲^p - ۱$ موسوم به عدد مرسن را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هر عامل اول q از $۲^p - ۱$،

قضیهٔ لاگرانژ
اگر G یک گروه متناهی (ضربی) و U یک زیرگروه باشد، آنگاه $|U|$، $|G|$ را می‌شمارد.

■ **اثبات.** رابطهٔ دوتایی

$$a \sim b :\Longleftrightarrow ba^{-۱} \in U$$

را در نظر می‌گیریم. از اصول موضوع گروه نتیجه می‌شود که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ردهٔ هم‌ارزی شامل یک عنصر a دقیقاً هم‌مجموعهٔ

$$Ua = \{xa : x \in U\}$$

است. چون به‌وضوح داریم $|Ua| = |U|$، می‌بینیم که G به رده‌های هم‌ارزی، همه با اندازهٔ $|U|$، تجزیه می‌شود، و بنابراین $|U|$، $|G|$ را می‌شمارد. □

در حالت خاصی که U یک زیرگروه دوری چون $\{a, a^۲, \dots, a^m\}$ است، نتیجه می‌گیریم که m (کوچکترین عدد صحیح مثبت به‌طوری که $a^m = ۱$، موسوم به مرتبهٔ a) اندازهٔ گروه یعنی $|G|$ را می‌شمارد.

1. Harry Fürstenberg

بزرگتر از p است و از اینجا نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید. فرض کنید q عدد اولی باشد که $۲^p - ۱$ را می‌شمارد، پس داریم (پیمانهٔ q) $۲^p \equiv ۱$. چون p اول است، این بدان معنی است که عنصر ۲ دارای مرتبهٔ p در گروه ضربی $\mathbb{Z}_q \backslash \{۰\}$ از هیأت $\mathbb{Z}_q$ است. این گروه، $q - ۱$ عنصر دارد. بنا به قضیهٔ لاگرانژ (تابلو صفحهٔ قبل را ببینید) می‌دانیم که مرتبهٔ هر عنصر اندازهٔ گروه را می‌شمارد، یعنی داریم $p|q-۱$ و از این رو $p < q$. □

■ **اثبات سوم.** در اینجا عددهای فرما ی $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ را به ازای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ در نظر می‌گیریم. نشان خواهیم داد که هر دو عدد فرما نسبت به هم اول‌اند؛ پس باید بینهایت عدد اول وجود داشته باشد. برای رسیدن به این نتیجه، رابطهٔ بازگشتی

$$\prod_{k=۰}^{n-۱} F_k = F_n - ۲ \qquad (n \geq ۱)$$

را ثابت می‌کنیم و ادعای ما بلافاصله از آن نتیجه می‌شود. در واقع اگر m مثلاً F_k و F_n $(k < n)$ را بشمارد، آنگاه m عدد ۲ را می‌شمارد و بنابراین $m = ۱$ یا $m = ۲$. ولی $m = ۲$ غیرممکن است زیرا همهٔ عددهای فرما فردند.

برای اثبات رابطهٔ بازگشتی از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. به ازای $n = ۱$ داریم $F_۰ = ۳$ و $F_۱ - ۲ = ۳$. با استقرا می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned}\prod_{k=۰}^{n} F_k &= \left(\prod_{k=۰}^{n-۱} F_k\right) F_n = (F_n - ۲)F_n = \\ &= (۲^{۲^n} - ۱)(۲^{۲^n} + ۱) = ۲^{۲^{n+۱}} - ۱ = F_{n+۱} - ۲\end{aligned}$$

□

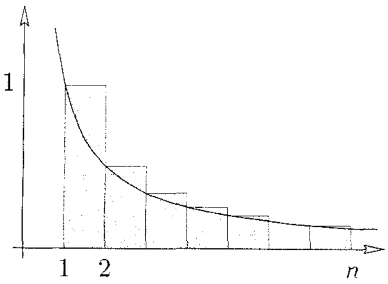
$$\begin{aligned}F_۰ &= ۳\\ F_۱ &= ۵\\ F_۲ &= ۱۷\\ F_۳ &= ۲۵۷\\ F_۴ &= ۶۵۵۳۷\\ F_۵ &= ۶۴۱ \cdot ۶۷۰۰۴۱۷\end{aligned}$$

چند عدد فرمای نخست

اکنون به اثباتی نگاه کنید که در آن از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی استفاده می‌شود.

■ **اثبات چهارم.** فرض کنید $\pi(x) := \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}$ تعداد عددهای اولِ نابیشتر از عدد حقیقی x باشد. عددهای اول $\mathbb{P} = \{p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\}$ را به‌ترتیب صعودی شماره‌گذاری می‌کنیم. لگاریتم طبیعی $\log x$ را که به‌صورت $\log x = \int_۱^x \frac{۱}{t} dt$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم.

اکنون مساحت زیر نمودار $f(t) = ۱/t$ را با یک تابع پله‌ای فوقانی مقایسه می‌کنیم. (همچنین پیوست را در صفحهٔ ۱۳ در مورد این روش ببینید.) برای $n \leq x < n+۱$ داریم



پله‌ها در بالای نمودار تابع $f(t) = ۱/t$

$$\begin{aligned}\log x &\le ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots + \frac{۱}{n-۱} + \frac{۱}{n} \\ &\le \sum \frac{۱}{m}\end{aligned}$$

(این مجموعیابی روی همهٔ mهای متعلق به $\mathbb{N}$ که فقط دارای عاملهای اول $p \le x$ هستند انجام می‌شود)

چون هر چنین mای را می‌توان به‌طوریکتا به‌صورت حاصلضربی چون $\prod_{p \le x} p^{k_p}$ نوشت، مجموع اخیر برابر است با

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \left(\sum_{k \ge ۰} \frac{۱}{p^k} \right)$$

مجموع داخلی یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{p}$ است؛ پس

$$\log x \le \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \le x}} \frac{p}{p-۱} = \prod_{k=۱}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k - ۱}$$

حال واضح است که $p_k \ge k + ۱$، و بنابراین

$$\frac{p_k}{p_k - ۱} = ۱ + \frac{۱}{p_k - ۱} \le ۱ + \frac{۱}{k} = \frac{k+۱}{k}$$

و از اینجا

$$\log x \le \prod_{k=۱}^{\pi(x)} \frac{k+۱}{k} = \pi(x) + ۱$$

همه می‌دانند که $\log x$ کراندارنیست، پس نتیجه می‌گیریم که $\pi(x)$ نیز بیکران است، و بنابراین بینهایت عدد اول وجود دارد. □

■ **اثبات پنجم.** پس از آنالیز اکنون نوبت به توپولوژی می‌رسد! توپولوژی غریب زیر را روی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ از عددهای صحیح در نظر بگیرید. به ازای $a, b \in \mathbb{Z}$، $b > ۰$ قرار می‌دهیم

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$$

هر مجموعهٔ $N_{a,b}$ یک تصاعد حسابیِ از دو طرف نامتناهی است. حال مجموعهٔ $O \subseteq \mathbb{Z}$ را باز می‌نامیم اگر یا O تهی باشد و یا به‌ازای هر $a \in O$، bی مثبتی وجود داشته باشد که $N_{a,b} \subseteq O$. واضح است که اجتماع مجموعه‌هایی باز، یک مجموعهٔ باز است. اگر $O_۱$ و $O_۲$ باز باشند، و $a \in O_۱ \cap O_۲$ به‌طوری‌که $N_{a,b_۱} \subseteq O_۱$ و

$N_{a,b_2} \subseteq O_2$، آنگاه $a \in N_{a,b_1b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. پس نتیجه می‌گیریم که هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، خودش باز است. پس، این خانوادهٔ مجموعه‌های باز یک توپولوژی واقعی روی $\mathbb{Z}$ القا می‌کند.

اکنون دو حکم را متذکر می‌شویم:

(الف) هر مجموعهٔ باز ناتهی، نامتناهی است.

(ب) هر مجموعهٔ $N_{a,b}$ بسته است.

در واقع، حکم اول از تعریف نتیجه می‌شود. در مورد حکم دوم ملاحظه می‌کنیم

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$$

و این ثابت می‌کند که $N_{a,b}$ متمم یک مجموعهٔ باز است و بنابراین بسته است.

تا اینجا عددهای اول هنوز وارد صحنه نشده‌اند، ولی در اینجا وارد می‌شوند. چون هر عدد $n \neq 1, -1$ یک عامل اول p دارد و بنابراین مشمول در $N_{0,p}$ است، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

حال اگر $\mathbb{P}$ متناهی می‌بود، آنگاه $\cup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ اجتماعی متناهی از مجموعه‌های بسته (بنابه (ب)) و از این رو بسته بود. در نتیجه $\{1, -1\}$ یک مجموعهٔ باز است، و این (الف) را نقض می‌کند.

پرتاب کردن سنگ صاف، بینهایت بار

■ **اثبات ششم.** آخرین اثبات ما گام بلندی فراتر می‌رود و نشان می‌دهد که نه تنها بینهایت عدد اول وجود دارد بلکه سری $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست. نخستین اثبات این حکم مهم را اویلر عرضه کرد (و به نوبهٔ خود جالب توجه است) ولی اثبات ما که از آنِ اردوش است، زیبایی مقاومت‌ناپذیری دارد.

فرض کنید p_1، p_2، p_3، ... دنباله‌ای از عددهای اول به‌ترتیب صعودی باشد، و $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ همگرا باشد. در این صورت عددی طبیعی چون k وجود دارد به‌قسمی‌که $\sum_{i\geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. عددهای p_1، ...، p_k را عددهای اول کوچک، و p_{k+1}،p_{k+2}، ... را عددهای اول بزرگ می‌نامیم. پس برای عدد طبیعی دلخواه N داریم

$$\sum_{i\geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2} \qquad (1)$$

فرض کنیم N_b تعداد عددهای صحیح مثبت nای، $n \leq N$، باشد که بر دست‌کم یک عدد اول بزرگ بخش‌پذیرند، و N_s **تعداد عددهای صحیح مثبت nای، $N \geq n$،**

باشد که فقط مقسوم‌علیه‌های اول کوچک دارند. می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای N مناسبی،

$$N_b + N_s < N$$

و این تناقض مطلوب ما خواهد بود زیرا بنا به تعریف، $N_b + N_s$ باید برابر با N باشد.

برای براورد کردن N_b، ملاحظه می‌کنیم که $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ تعداد عددهای صحیح مثبت nای، $n \leq N$، است که مضارب p_i هستند. پس بنا به (۱) به‌دست می‌آوریم

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2} \tag{۲}$$

حال به N_s می‌پردازیم. هر $n \leq N$ را که فقط مقسوم‌علیه‌های اول کوچک دارد به شکل $n = a_n b_n^2$ می‌نویسیم که در آن a_n قسمتِ خالی از مربع است. پس هر a_n حاصلضرب عددهای اول کوچکِ متفاوتی است، و نتیجه می‌گیریم که دقیقاً 2^k قسمت خالی از مربعِ متفاوت وجود دارد. به‌علاوه، وقتی $b_n \leq \sqrt{n} \leq N$، در می‌یابیم که حداکثر $\sqrt{N}$ قسمت مربعی متفاوت وجود دارد، و بنابراین

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}$$

چون (۲) به‌ازای هر N برقرار است، باقی می‌ماند که عدد Nای با ضابطهٔ $2^k\sqrt{N} \leq \frac{N}{2}$ یا $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$ پیدا کنیم و $N = 2^{2k+2}$ چنین عددی است. □

مراجع

[1] P. ERDŐS: *Über die Reihe* $\Sigma\frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B **7** (1938), 1-2.

[2] L. EULER: *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol.90.

[3] H. FÜRSTENBERG: *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), 353.

اصل برتران

فصل ۲

ژوزف برتران

دیده‌ایم که دنبالهٔ عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ... نامتناهی است. برای ملاحظهٔ اینکه اندازهٔ فاصله‌های بین اعداد اول متوالی کراندار نیست، فرض کنید $N := ۲ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot p$ نشان‌دهندهٔ حاصلضرب همهٔ عددهای اولی باشد که کوچکتر از $k + ۲$ هستند، و توجه کنید که هیچ‌یک از k عدد

$$N + ۲, N + ۳, N + ۴, \ldots, N + k, N + (k + ۱)$$

اول نیست، زیرا می‌دانیم به‌ازای $۲ \leq i \leq k + ۱$، i عامل اولی دارد که کوچکتر از $k + ۲$ است، و این عامل همچنین N، و در نتیجه $N + i$، را می‌شمارد. با این شیوه در می‌یابیم که مثلاً به‌ازای $k = ۱۰$ هیچ‌یک از ده عدد

$$۲۳۱۲, ۲۳۱۳, ۲۳۱۴, \ldots, ۲۳۲۱$$

اول نیست.

ولی کرانهای بالایی برای فاصله‌های اعداد متوالی در دنبالهٔ عددهای اول وجود دارد. یک کران معروف چنین است: «فاصله تا عدد اول بعدی نمی‌تواند بزرگتر از عددی باشد که جستجویمان را از آن شروع می‌کنیم.» این حکم به اصل برتران معروف است، زیرا ژوزف برتران[1] آن را حدس زد و درستیش را به‌طور تجربی به‌ازای $n < ۳۰۰۰۰۰۰$ تحقیق کرد. نخستین بار، پافنوتی چبیشف در ۱۸۵۰ آن را به‌ازای هر n ثابت کرد. اثبات بسیار ساده‌تری را نابغهٔ هندی رامانوجان عرضه کرد. اثبات «کتابی» ما از آنِ پال اردوش است که از نخستین مقالهٔ انتشار یافتهٔ اردوش، به‌تاریخ ۱۹۳۲، گرفته شده است. اردوش در زمان انتشار این مقاله ۱۹ ساله بود.

اصل برتران

به‌ازای هر $n \geq ۱$، عدد اولی چون p وجود دارد که $n < p \leq ۲n$.

■ **اثبات.** ما اندازهٔ ضریب دوجمله‌ای $\binom{۲n}{n}$ را با دقت کافی براورد می‌کنیم تا ملاحظه شود که اگر هیچ عامل اولی در محدودهٔ $n < p \leq ۲n$ نمی‌داشت، «زیاده از حد کوچک» می‌بود. استدلال ما در پنج گام انجام می‌شود.

1. Joseph Bertrand

(۱) نخست اصل برتران را به‌ازای $n < ۴۰۰۰$ ثابت می‌کنیم. برای این کار نیازی به‌امتحان کردن ۴۰۰۰ حالت نیست: بلکه کافی است (این «شگرد لانداو» است) تحقیق کنیم که

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۲۳, ۴۳, ۸۳, ۱۶۳, ۳۱۷, ۶۳۱, ۱۲۵۹, ۲۵۰۳, ۴۰۰۱$$

دنباله‌ای از عددهای اول است که هر یک از آنها کوچکتر از دو برابر عدد قبلی است. در این صورت هر بازهٔ $\{y : n < y \leq ۲n\}$ که $n \leq ۴۰۰۰$، شامل یکی از این ۱۴ عدد اول است.

(۲) سپس ثابت می‌کنیم

$$\prod_{p \leq x} p \leq ۴^{x-۱} \qquad \text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x \geq ۲ \qquad (۱)$$

که این نماد ـــ در اینجا و در زیر ـــ به این معنی است که حاصلضرب روی همهٔ عددهای اول $p \leq x$ در نظرگرفته می‌شود. اثباتی که برای این حکم می‌آوریم از مقالهٔ اولیهٔ اردوش گرفته نشده است اما این هم از آنِ اردوش است و یک اثبات «کتابی» واقعی است. نخست توجه کنید که اگر q بزرگترین عدد اولی باشد که $q \leq x$، آنگاه

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \qquad \text{و} \qquad ۴^{q-۱} \leq ۴^{x-۱}$$

پس کافی است (۱) را در حالتی که $x = q$ یک عدد اول است بررسی کنیم. به‌ازای $q = ۲$ داریم "$۲ \leq ۴$". پس کار را با بررسی عددهای اول فرد $q = ۲m + ۱$ ادامه می‌دهیم. به‌ازای اینها حاصلضرب را تجزیه می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\prod_{p \leq ۲m+۱} p = \prod_{p \leq m+۱} p \cdot \prod_{m+۱ < p \leq ۲m+۱} p \leq ۴^m \binom{۲m+۱}{m} \leq ۴^m ۲^{۲m} = ۴^{۲m}$$

همهٔ قسمتهای این «محاسبهٔ یک سطری» به‌آسانی قابل تحقیق است. در واقع

$$\prod_{p \leq m+۱} p \leq ۴^m$$

بنا به استقرا برقرار است. اتحاد

$$\prod_{m+۱ < p \leq ۲m+۱} p \leq \binom{۲m+۱}{m}$$

Beweis eines Satzes von Tschebyschef.

Von P. Erdős in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyschef bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von Ramanujan[1]) bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr Landau einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q-fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecken des Herrn Landau kommt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem Landauschen Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten Tschebyschefschen Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachkeit nicht hinter dem Ramanujanschen Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

1) Sr. Ramanujan, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919), S. 181—182 — *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Cambridge, 1927), S. 208—209.

از این موضوع نتیجه می‌شود که $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ عددی صحیح است؛ عددهای اول مورد نظر ما همگی عامل صورت، $(2m+1)!$، هستند ولی عامل مخرج، $m!(m+1)!$، نیستند. و بالاخره رابطهٔ

$$\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$$

به‌این دلیل برقرار است که

$$\binom{2m+1}{m} \quad \text{و} \quad \binom{2m+1}{m+1}$$

دو عامل (برابر!) از مجموع زیر هستند

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

(۳) از قضیهٔ لژاندر (تابلو را ببینید) نتیجه می‌گیریم که $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$، عامل اول p را دقیقاً

$$\sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

بار در بر دارد. در اینجا هر عامل جمع حداکثر ۱ است زیرا در

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2$$

صدق می‌کند و یک عدد صحیح است. به‌علاوه اگر $p^k > 2n$، عوامل جمع صفر می‌شوند. پس $\binom{2n}{n}$، عامل p را دقیقاً

$$\sum_{k\geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}$$

بار در بر دارد. پس بزرگترین توانی از p که $\binom{2n}{n}$ را می‌شمارد بزرگتر از $2n$ نیست. به‌خصوص عددهای اول pی بزرگتر از $\sqrt{2n}$ حداکثر یک‌بار در $\binom{2n}{n}$ ظاهر می‌شوند.

به‌علاوه ــــ و این، طبق نظر اردوش، نکتهٔ اساسی در این اثبات است ــــ عددهای اول pای که در $\frac{2}{3}n < p \leq n$ صدق می‌کنند، $\binom{2n}{n}$ را اصلاً نمی‌شمارند! در واقع از $3p > 2n$ (به‌ازای $n \geq 3$ و در نتیجه $p \geq 3$) نتیجه می‌شود p و $2p$ تنها مضربهایی از p هستند که به‌صورت عامل در صورت $\frac{(2n)!}{n!n!}$ ظاهر می‌شوند، درحالی که دو عامل p در مخرج به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ لژاندر

عدد $n!$، عامل اول p را دقیقاً

$$\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

بار در بر دارد.

■ **اثبات.** دقیقاً $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ تا از عاملهای $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ بر p بخش‌پذیرند و از اینجا $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ تا عامل اول p داریم. بعد $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ تا از عاملهای $n!$ بر p^2 بخش‌پذیرند و این دلیل وجود $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ عامل pی بعدی است، و به‌همین ترتیب. □

(۴) اکنون می‌توانیم $\binom{2n}{n}$ را براورد کنیم. به‌ازای $n \geq 3$، با استفاده از براوردی که در صفحهٔ ۱۵ برای کران پایین به‌دست آمده است، داریم

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

و بنابراین، چون بیشتر از $\sqrt{2n}$ عدد اول p که نابیشتر از $\sqrt{2n}$ باشند وجود ندارد، داریم

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \quad \text{، } n \geq 3 \text{ به‌ازای} \qquad (2)$$

(۵) حال فرض کنید هیچ عدد اول pای با ضابطهٔ $n < p \leq 2n$ وجود ندارد، پس حاصلضرب دوم در (۲) برابر ۱ است. با جانشانی (۱) در (۲) به‌دست می‌آوریم

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}$$

یا

$$4^{n/3} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

که به‌ازای nهای به‌قدر کافی بزرگ، غلط است! در واقع با استفاده از $a + 1 < 2^a$ (که بنا به استقرا به‌ازای هر $a \geq 2$ برقرار است) به‌دست می‌آوریم

$$2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor + 1)^6 < 2^{6\lfloor \sqrt[6]{2n} \rfloor} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}} \qquad (4)$$

پس با استفاده از (۳) و (۴) به‌ازای $n \geq 50$ (و بنابراین $18 < 2\sqrt{2n}$) به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt[6]{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$$

که دلالت دارد بر $(2n)^{1/3} < 20$ و بنابراین $n < 4000$. □

ازاین اثبات می‌توان حتی مطلب بیشتری استخراج کرد: از (۲) و با همان نوع براوردهایی که در بالا به کار بردیم، ثابت می‌شود که

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \geq 2^{\frac{1}{30}n} \qquad \text{، } n \geq 4000 \text{ به‌ازای}$$

و بنابراین دست‌کم تعداد

$$\log_{۲n}(۲^{\frac{۱}{۳۰}n}) = \frac{۱}{۳۰}\frac{n}{\log_۲ n + ۱} > \frac{۱}{۳۰}\frac{n}{\log_۲ n}$$

عدد اول در دامنهٔ بین n و $۲n$ وجود دارد.

این براورد بدی نیست: تعداد «واقعی» عددهای اول در این دامنه تقریباً $n/\log n$ است. این موضوع از «قضیهٔ عددهای اول» نتیجه گرفته می‌شود که حاکی است حد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{p \le n : \quad \text{عددی اول است } p\}}{n \log n}$$

وجود دارد و برابر ۱ است. این قضیه را نخست آدامار و دلاواله پوسن در ۱۸۹۶ ثابت کردند؛ سلبرگ و اردوش در ۱۹۴۸ اثباتی مقدماتی (بدون استفاده از آنالیز مختلط، ولی باز هم طولانی و پیچیده) برای آن یافتند.

دربارهٔ خود قضیهٔ عددهای اول ظاهراً هنوز حرف نهایی زده نشده است: مثلاً، در صورت اثبات حدس ریمان (صفحهٔ ۴۴)، که یکی از مسائل حل‌نشدهٔ مهم ریاضیات است، پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در مورد براوردهای مربوط به قضیهٔ عددهای اول به‌دست خواهد آمد. ولی در مورد اصل برتران هم می‌توان انتظار پیشرفتهای چشمگیری را داشت. در این زمینه، پرسش زیر هنوز یک مسألهٔ حل نشده است:

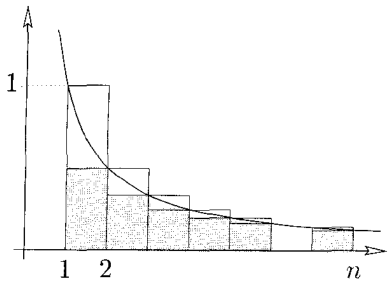
آیا همواره عدد اولی بین $n^۲$ و $(n+۱)^۲$ هست؟

پیوست: برخی براوردها

براورد کردن با استفاده از انتگرال

روش بسیار ساده ولی کارامدی برای براورد کردن مجموع به وسیلهٔ انتگرال (که نمونه‌اش را در صفحهٔ ۴ و ۵ دیدیم) وجود دارد. برای براورد کردن عددهای همساز

$$H_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}$$



شکل را در حاشیه رسم می‌کنیم و از مقایسهٔ مساحت ناحیهٔ زیر نمودار $f(t) = ۱/t$، $۱ \le t \le n$، با مساحت مستطیلهایی که هاشور پررنگ خورده‌اند به‌دست می‌آوریم

$$H_n - ۱ = \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k} < \int_۱^n \frac{۱}{t}dt = \log n$$

و نیز از مقایسه با مساحت مستطیلهای بزرگ (شامل قسمتهایِ با هاشور کمرنگ) داریم

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$$

از این دو، روی هم، به‌دست می‌آوریم

$$\log n + \frac{1}{n} < H_n < \log n + 1$$

به‌خصوص، $\lim_{n\to\infty} H_n \longrightarrow \infty$، و مرتبهٔ رشد H_n برابر است با $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$. ولی براوردهای بسیار بهتری شناخته شده‌اند ([۲] را ببینید) از قبیل

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

دراینجا $O(\frac{1}{n^6})$ نشان‌دهندهٔ تابعی چون $f(n)$ است به‌طوری‌که $f(n) \le c\frac{1}{n^6}$ به‌ازای مقدار ثابت cای برقرار است.

که در آن $\gamma \approx 0{,}5772$ «ثابت اویلر» است.

براورد کردن فاکتوریلها ــ فرمول استرلینگ

از کاربرد همین روش در مورد

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \sum_{k=2}^{n} \log k$$

به‌دست می‌آید

$$\log((n-1)!) < \int_1^n \log t \; dt < \log(n!)$$

که در آن انتگرال به‌سادگی محاسبه می‌شود:

$$\int_1^n \log t \; dt = [t \log t - t]_1^n = n \log n - n + 1$$

پس یک براورد نقصانی برای $n!$ به‌دست می‌آوریم:

$$n! > e^{n \log n - n + 1} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

و در همین حال یک براورد اضافی هم به‌دست می‌آید:

$$n! = n(n-1)! < ne^{n \log n - n + 1} = en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

در اینجا تحلیل دقیقتری برای به‌دست آوردن مجانبهای $n!$ چنانکه با فرمول استرلینگ

$$n! \sim \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

داده می‌شود لازم است، و باز صورتهای دقیقتری در دست است مانند

$$n! = \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(۱ + \frac{۱}{۱۲n} + \frac{۱}{۲۸۸n^۲} - \frac{۱۳۹}{۵۱۴۰n^۳} + O\left(\frac{۱}{n^۴}\right)\right)$$

در اینجا $f(n) \sim g(n)$ به این معنی است که $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = ۱$.

براورد کردن ضریبهای دوجمله‌ای

از تعریف ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ به‌عنوان تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه‌ای nعضوی، می‌دانیم که دنبالهٔ $\binom{n}{۰}$، $\binom{n}{۱}$، $\cdots$، $\binom{n}{n}$ از ضریبهای دوجمله‌ای دو خاصیت زیر را دارد:

- مجموع عضوهایش برابر $\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k} = ۲^n$ است.
- متقارن است: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

با توجه به رابطهٔ $\binom{n}{k} = \frac{n-k+۱}{k}\binom{n}{k-۱}$ به‌سادگی می‌توان دریافت که به‌ازای هر n، ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که متقارن و تکمدی[1] است: به‌سمت وسط صعود می‌کند و بنابراین ضریبهای دوجمله‌ای میانی بزرگترین ضریبها در دنباله‌اند:

$$۱ = \binom{n}{۰} < \binom{n}{۱} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/۲\rceil} > \cdots > \binom{n}{n-۱} > \binom{n}{n} = ۱$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

مثلث پاسکال [خیام]

در اینجا $\lfloor x\rfloor$ نشان‌دهندهٔ عدد x است که به نزدیکترین عدد صحیح پایینی گرد شده و $\lceil x\rceil$ نشان‌دهندهٔ عدد x است که به نزدیکترین عدد صحیح بالایی گرد شده است.

از فرمولهای مجانبی فاکتوریلها که در بالا ذکر شد، می‌توان براوردهای بسیار دقیقی از اندازهٔ ضریبهای دوجمله‌ای به‌دست آورد. اما در این کتاب فقط به براوردهای بسیار ضعیف و ساده‌ای نیاز داریم، از قبیل براورد زیر: به‌ازای هر k، $\binom{n}{k} \le ۲^n$ درحالی‌که برای $n \ge ۲$ داریم

$$\binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor} \ge \frac{۲^n}{n}$$

که برابری فقط به‌ازای $n = ۲$ برقرار است. به‌ازای $n \ge ۱$ رابطهٔ

$$\binom{۲n}{n} \ge \frac{۴^n}{۲n}$$

1. unimodal

برقرار است زیرا $\binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor}$، که یک ضریب دوجمله‌ای میانی است، بزرگترین درایه در دنبالهٔ $\binom{n}{n-۱}, \cdots, \binom{n}{۲}, \binom{n}{۱}, \binom{n}{n} + \binom{n}{۰}$ است که مجموع جمله‌هایش ۲^n و بنابراین میانگین آنها $\frac{۲^n}{n}$ است.

از طرف دیگر، کران بالا را برای ضریبهای دوجمله‌ای ذکر می‌کنیم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{۲^{k-۱}}$$

که براورد بسیار خوبی است برای ضریبهای دوجمله‌ای «کوچک» در دُمهای دنباله، وقتی n بزرگ است (در مقایسه با k).

مراجع

[1] P. ERDŐS: *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math. (Szeged) **5** (1930-32), 194-198.

[2] R.L. GRAHAM, D.E. KNUTH & O. PATASHNIK: *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading MA 1989.

[3] G.H. HARDY & E.M. WRIGHT: *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Oxford University Press 1979.

فصل ۳

ضریبهای دوجمله‌ای (تقریباً) هیچ‌گاه به‌صورت توان نیستند

اصل برتران پیامدی دارد که به‌حکم زیبایی دربارهٔ ضریبهای دوجمله‌ای می‌انجامد. در سال ۱۸۹۲، سیلوستر اصل برتران را به‌صورت زیر تقویت کرد:

> اگر $n \geq ۲k$، آنگاه دست‌کم یکی از عددهای n، $n-۱$، $\ldots$، $n-k+۱$ مقسوم‌علیه اول pای بزرگتر از k دارد.

توجه کنید که به‌ازای $n = ۲k$ دقیقاً اصل برتران به‌دست می‌آید. در سال ۱۹۳۴ اردوش یک اثبات «کتابی» کوتاه و مقدماتی از حکم سیلوستر به دست داد که در همان حال و هوای اثباتش از اصل برتران بود. قضیهٔ سیلوستر به‌صورت دیگری نیز قابل بیان است:

> ضریب دوجمله‌ای
> $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{k!} \qquad (n \geq ۲k)$$
> همیشه عامل اول pای بزرگتر از k دارد.

با در نظر داشتن این حکم به یکی دیگر از دستاوردهای ارزشمند اردوش می‌پردازیم. چه وقتی $\binom{n}{k}$ برابر با توانی چون m^ℓ است؟ به‌آسانی می‌توان دید که بینهایت جواب به‌ازای $k = \ell = ۲$ وجود دارد که جوابهای معادلهٔ $\binom{n}{۲} = m^۲$ هستند. در واقع اگر $\binom{n}{۲}$ به‌صورت مربع باشد، $\binom{(۲n-۱)^۲}{۲}$ نیز چنین است. برای نشان دادن این مطلب قرار می‌دهیم $n(n-۱) = ۲m^۲$. نتیجه می‌شود

$$(۲n-۱)^۲((۲n-۱)^۲-۱) = (۲n-۱)^۲ ۴n(n-۱) = ۲(۲m(۲n-۱))^۲$$

و بنابراین

$$\binom{(۲n-۱)^۲}{۲} = (۲m(۲n-۱))^۲$$

به‌این ترتیب، با شروع از $\binom{۹}{۲} = ۶^۲$، بینهایت جواب به‌دست می‌آوریم ــ جواب بعدی $\binom{۲۸۹}{۲} = ۲۰۴^۲$ است. خاطرنشان می‌کنیم که همهٔ جوابها از این طریق به‌دست نمی‌آیند.

مثلاً $۳۵^۲ = \binom{۵۰}{۲}$ سرآغاز رشتهٔ دیگری از جوابهاست، و همین‌طور $۱۱۸۹^۲ = \binom{۱۶۸۲}{۲}$.
به‌ازای $k = ۳$ می‌دانیم که $\binom{n}{۳} = m^۲$ جواب یکتای $n = ۵۰$، $m = ۱۴۰$ را دارد. ولی در اینجا به‌آخر خط می‌رسیم. به‌ازای $k \geq ۴$ و هر $\ell \geq ۲$ جوابی وجود ندارد، و این چیزی است که اردوش با استدلال مبتکرانه‌ای ثابت کرد.

$۱۴۰^۲ = \binom{۵۰}{۳}$ تنها جواب به‌ازای $k = ۳$، $\ell = ۲$ است.

قضیه. معادلهٔ $\binom{n}{k} = m^\ell$ جواب صحیحی به‌ازای $\ell \geq ۲$ و $۴ \leq k \leq n-۴$ ندارد.

■ **اثبات.** نخست توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $n \geq ۲k$ زیرا $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. حال فرض می‌کنیم قضیه غلط است، و $\binom{n}{k} = m^\ell$. اثبات، به‌روش برهان خلف، در چهارگام به‌صورت زیر انجام می‌شود.

(۱) بنا به قضیهٔ سیلوستر، $\binom{n}{k}$ دارای عامل اول pای بزرگتر از k است، پس p^ℓ، $n(n-۱)\cdots(n-k+۱)$ را می‌شمارد. روشن است که فقط یکی از عاملهای $n-i$ می‌تواند مضرب p باشد (زیرا $p > k$)، و نتیجه می‌گیریم $p^\ell | n-i$، و بنابراین

$$n \geq p^\ell > k^\ell \geq k^۲$$

(۲) عامل دلخواه $n-j$ از صورت را در نظر بگیرید و آن را به شکل $n-j = a_j m_j^\ell$ بنویسید که در آن a_j بر هیچ توان ℓام غیر بدیهی تقسیم‌پذیر نیست. بنا به (۱) ملاحظه می‌کنیم که a_j فقط عوامل اولی نابیشتر از k دارد. حال می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای $i \neq j$، $a_i \neq a_j$. فرض کنید که برخلاف آن، به‌ازای iای کوچکتر از j، $a_i = a_j$. در این صورت $m_i \geq m_j + ۱$ و

$$\begin{aligned} k &> (n-i)-(n-j) = a_j(m_i^\ell - m_j^\ell) \geq a_j((m_j+۱)^\ell - m_j^\ell) \\ &> a_j \ell m_j^{\ell-۱} \geq \ell(a_j m_j^\ell)^{۱/۲} \geq \ell(n-k+۱)^{۱/۲} \\ &\geq \ell(\frac{n}{۲}+۱)^{۱/۲} \geq n^{۱/۲} \end{aligned}$$

که با $n > k^۲$ در بالا مغایر است.

(۳) اکنون ثابت می‌کنیم که a_iها عددهای صحیح ۱، ۲، $\cdots$، k، به‌ترتیبی، هستند. (به‌نظر اردوش، این لُب اثبات است.) چون از قبل می‌دانیم که آنها همه متمایزند، کافی است ثابت کنیم

$$a_۰ a_۱ \cdots a_{k-۱} \text{ عدد } k! \text{ را می‌شمارد}$$

با جانشانی $n-j=a_j m_j^\ell$ در رابطهٔ $\binom{n}{k}=m^\ell$ به‌دست می‌آوریم

$$a_۰ a_۱ \cdots a_{k-۱}(m_۰ m_۱ \cdots m_{k-۱})^\ell = k!m^\ell$$

با حذف عاملهای مشترک $m_۰ \cdots m_{k-۱}$ و m داریم

$$a_۰ a_۱ \cdots a_{k-۱} u^\ell = k! v^\ell$$

که در آن $\gcd(u,v)=۱$. حال کافی است نشان دهیم $v=۱$. اگر چنین نباشد، v شامل مقسوم‌علیه اولی مانند p است. چون $\gcd(u,v)=۱$، p باید مقسوم‌علیه اولی از $a_۰ a_۱ \cdots a_{k-۱}$ و بنابراین نابیشتر از k باشد. بنا به قضیهٔ لژاندر (صفحهٔ ۱۱ را ببینید) می‌دانیم که $k!$ شامل p به‌توان $\sum_{i\geq ۱}\lfloor \frac{k}{p^i}\rfloor$ است. اکنون نمای p را در $n(n-۱)\cdots(n-k+۱)$ براورد می‌کنیم. فرض کنید i عدد صحیح مثبتی است و $b_۱ < b_۲ < \cdots < b_s$ مضربهای p^i در میان n، $n-۱$، $\cdots$، $n-k+۱$ هستند. در این‌صورت $b_s \geq b_۱ + (s-۱)p^i$ و بنابراین

$$(s-۱)p^i \leq b_s - b_۱ \leq n-(n-k+۱) = k-۱$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$s \leq \left\lfloor \frac{k-۱}{p^i} \right\rfloor + ۱ \leq \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + ۱$$

بنابراین به‌ازای هر i، تعداد مضربهای p^i در میان n، $\cdots$، $n-k+۱$، و بنابراین در میان a_jها محدود به کران $\lfloor \frac{k}{p^i}\rfloor + ۱$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که نمای p در $a_۰ a_۱ \cdots a_{k-۱}$ حداکثر برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{\ell-۱}\left(\left\lfloor \frac{k}{p^i}\right\rfloor + ۱\right)$$

و استدلال همان است که در فصل ۲ برای قضیهٔ لژاندر به‌کار بردیم. تنها تفاوت این است که این بار، مجموعیابی در $i=\ell-۱$ متوقف می‌شود زیرا a_jها شامل هیچ توان ℓام نیستند.

می‌بینیم که تحلیل ما تاکنون با $\binom{۵۰}{۳} = ۱۴۰^۲$ توافق دارد زیرا
$۵۰ = ۲ \cdot ۵^۲$
$۴۹ = ۱ \cdot ۷^۲$
$۴۸ = ۳ \cdot ۴^۲$
و
$۵ \cdot ۷ \cdot ۴ = ۱۴۰$

پس با در نظر گرفتن حداکثر نمای p در این حاصلضرب و نیز نمای p در $k!$، نمای p در v^ℓ حداکثر برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{\ell-۱}\left(\left\lfloor \frac{k}{p^i}\right\rfloor + ۱\right) - \sum_{i\geq ۱}\left\lfloor \frac{k}{p^i}\right\rfloor \leq \ell - ۱$$

و به تناقض مطلوب رسیده‌ایم زیرا v^ℓ یک توان ℓام است.

همین برای اثبات حالت $\ell = ۲$ کفایت می‌کند. در واقع، چون $k \geq ۴$، یکی از a_iها باید برابر با ۴ باشد، ولی a_iها شامل هیچ عدد مربع کاملی نیستند. پس اکنون فرض می‌کنیم $\ell \geq ۳$.

(۴) چون $k \geq ۴$، به‌ازای $i_۱$، $i_۲$، $i_۳$ای داریم $a_{i_۱} = ۱$، $a_{i_۲} = ۲$، $a_{i_۳} = ۴$ یعنی

$$n - i_۱ = m_۱^\ell, \quad n - i_۲ = ۲m_۲^\ell, \quad n - i_۳ = ۴m_۳^\ell$$

ادعا می‌کنیم که $(n-i_۲)^۲ \neq (n-i_۱)(n-i_۳)$. اگر چنین نباشد، قرار می‌دهیم $b = n - i_۲$ و $n - i_۱ = b - x$، $n - i_۳ = b + y$ که در آن $۰ < |x|, |y| < k$.
پس

$$b^۲ = (b-x)(b+y) \quad \text{یا} \quad (y-x)b = xy$$

که در آن $x = y$ به‌وضوح غیر ممکن است. حال بنا به‌قسمت (۱) داریم

$$|xy| = b|y-x| \geq b > n - k > (k-۱)^۲ \geq |xy|$$

که مهمل است.

پس داریم $m_۲^۲ \neq m_۱m_۳$ که در آن فرض می‌کنیم $m_۲^۲ > m_۱m_۳$ (حالت دیگر هم مشابه این است)، و به آخرین زنجیره‌های نابرابریهایمان می‌رسیم. داریم

$$\begin{aligned}
۲(k-۱)n &> n^۲ - (n-k+۱)^۲ > (n-i_۲)^۲ - (n-i_۱)(n-i_۳) \\
&= ۴[m_۲^{۲\ell} - (m_۱m_۳)^\ell] \geq ۴[(m_۱m_۳+۱)^\ell - (m_۱m_۳)^\ell] \\
&\geq ۴\ell m_۱^{\ell-۱}m_۳^{\ell-۱}
\end{aligned}$$

چون $\ell \geq ۳$ و $n > k^\ell \geq k^۳ > ۶k$، از اینجا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
۲(k-۱)nm_۱m_۳ &> ۴\ell m_۱^\ell m_۳^\ell = \ell(n-i_۱)(n-i_۳) \\
&> \ell(n-k+۱)^۲ > ۳\left(n - \frac{n}{۶}\right)^۲ > ۲n^۲
\end{aligned}$$

حال چون $m_i \leq n^{۱/\ell} \leq n^{۱/۳}$، بالاخره به‌دست می‌آوریم

$$kn^{۲/۳} \geq km_۱m_۳ > (k-۱)m_۱m_۳ > n$$

یا $k^۳ > n$. با این تناقض، اثبات به انجام می‌رسد. □

مراجع

[1] P. Erdős: *A theorem of Sylvester and Schur*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 282-288.

[2] P. Erdős: *On a diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176-178.

[3] J.J. Sylvester: *On arithmetical series*, Messenger of Math. **21** (1892), 1-19, 87-120; Collected Mathematical Papers Vol. 4, 1912, 687-731.

فصل ۴

نمایش عددها به‌صورت مجموع دو مربع

چه اعدادی را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد نوشت؟

$۱ = ۱^۲ + ۰^۲$
$۲ = ۱^۲ + ۱^۲$
$۳ = ??$
$۴ = ۲^۲ + ۰^۲$
$۵ = ۲^۲ + ۱^۲$
$۶ = ??$
$۷ = ??$
$۸ = ۲^۲ + ۲^۲$
$۹ = ۳^۲ + ۰^۲$
$۱۰ = ۳^۲ + ۱^۲$
$۱۱ = ??$
$\vdots$


پیر فرما

این مسأله به‌اندازهٔ خود نظریهٔ اعداد قدمت دارد، و حل آن هم از دستاوردهای مهم این مبحث به‌شمار می‌رود. قسمت «دشوار» حل مسأله نشان دادن این موضوع است که هر عدد اولِ به‌صورت $۴m + ۱$، مجموع مربعات دو عدد است. هاردی می‌نویسد که این قضیهٔ دو مربع فرما «به حق یکی از زیباترین قضایای حساب به شمار می‌آید». ولی اثباتی «کتابی» که ما در اینجا می‌آوریم جدید و متعلق به سال ۱۹۹۰ است.

در آغاز به آماده‌سازی صحنه می‌پردازیم. ابتدا لازم است بین عدد اول ۲ $= p$، عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$، و عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۳$ تمایز قائل شویم. هر عدد اول دقیقاً به یکی از این سه رده تعلق دارد. در اینجا (با استفاده از روشی منسوب به اقلیدس) نشان می‌دهیم که بینهایت عدد اول به‌صورت $۴m + ۳$ وجود دارد. در واقع اگر فقط تعدادی متناهی از اینها وجود می‌داشت، می‌توانستیم p_k را بزرگترین عدد اولی که به این صورت است در نظر بگیریم. قرار می‌دهیم

$$N_k := ۲^۲ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots p_k - ۱$$

(که در آن $p_۱ = ۲$، $p_۲ = ۳$، $p_۳ = ۵$، $\cdots$ نشان‌دهندهٔ دنبالهٔ همهٔ عددهای اول است). می‌بینیم که N_k همنهشت با ۳ (به پیمانهٔ ۴) است، پس باید عامل اولی به‌شکل $۴m + ۳$ داشته باشد، و این عامل اول بزرگتر از p_k است — بنابراین به تناقض رسیده‌ایم. در انتهای این فصل نشان خواهیم داد که تعداد عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$ نیز نامتناهی است.

نخستین لم ما حالت خاصی از قانون معروف به «قانون تقابل» است و عددهای اولی را که به‌ازای آنها -۱ در هیأت $\mathbb{Z}_p$ مربع کامل است مشخص می‌کند (به تابلو صفحهٔ بعد نگاه کنید).

لم ۱. معادلهٔ $x^۲ \equiv -۱$ (به پیمانهٔ p) به‌ازای $p = ۲$ و به‌ازای عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$ جواب دارد، ولی به ازای عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۳$ جواب ندارد.

■ **اثبات.** به‌ازای $p=۲$، x را برابر ۱ می‌گیریم. به‌ازای pهای فرد، رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\{۱,۲,\cdots,p-۱\}$ به این طریق می‌سازیم که هر عضو این مجموعه را با وارون جمعی و ضربی آن در $\mathbb{Z}_p$ یکی می‌گیریم. پس رده‌های هم‌ارزی «در حالت کلی» شامل چهار عضو به‌صورت زیرند

$$\{x,-x,\overline{x},-\overline{x}\}$$

زیرا چنین مجموعهٔ ۴ عضوی هر دو وارونِ همهٔ اعضایش را در بر دارد. با این حال اگر بعضی از چهار عدد متمایز نباشند، ردهٔ هم‌ارزی کوچکتر خواهد بود:

- $x\equiv -x$ برای pهای فرد غیر ممکن است.
- $x\equiv\overline{x}$ هم‌ارز با $x^۲\equiv ۱$ است. این معادله دو جواب دارد، یعنی $x=۱$ و $x=p-۱$، که ردهٔ هم‌ارزی $\{۱,p-۱\}$ با اندازهٔ ۲ را به‌دست می‌دهد.
- $x\equiv-\overline{x}$ هم‌ارز با $x^۲\equiv -۱$ است. این معادله ممکن است جواب نداشته باشد یا دو جواب متمایز، $x_۰$، $p-x_۰$، داشته باشد؛ ردهٔ هم‌ارزی در این حالت، $\{x_۰,p-x_۰\}$ است.

مجموعهٔ $\{۱,۲,\cdots,p-۱\}$ دارای $p-۱$ عضو است، و ما آن را به‌چند چهارتایی (رده‌های هم‌ارزی با اندازهٔ ۴) به‌اضافهٔ یک یا دو دوتایی (رده‌های هم‌ارزی با اندازهٔ ۲) افراز کرده‌ایم. به‌ازای $p-۱=۴m+۲$ در می‌یابیم که فقط یک دوتایی $\{۱,p-۱\}$ وجود دارد و بقیه چهارتایی‌اند و بنابراین

$$x^۲\equiv -۱ \quad (\text{به پیمانهٔ } p)$$

جواب ندارد. برای $p-۱=۴m$ باید دوتایی دیگری وجود داشته باشد و این شامل دو جواب $x^۲\equiv -۱$ است که در جستجوی آن هستیم. □

افراز به‌ازای $p=۱۱$ چنین است: $\{۱,۱۰\}$، $\{۲,۹,۶,۵\}$، $\{۳,۸,۴,۷\}$؛ و به‌ازای $p=۱۳$ عبارت است از $\{۱,۱۲\}$، $\{۲,۱۱,۷,۶\}$، $\{۳,۱۰,۹,۴\}$، $\{۵,۸\}$؛ جفت $\{۵,۸\}$ دو جواب $x^۲\equiv -۱$ (به پیمانهٔ ۱۳) را به‌دست می‌دهد.

هیأتهای اول

اگر p عددی اول باشد، آنگاه مجموعهٔ $\mathbb{Z}_p = \{۰, ۱, \cdots, p-۱\}$ با جمع و ضربی که «به پیمانهٔ p» تعریف می‌شوند یک هیأت متناهی تشکیل می‌دهد. ما به‌ویژگیهای سادهٔ زیر نیاز خواهیم داشت.

- به‌ازای $x \in \mathbb{Z}_p$، $x \neq ۰$، وارون جمعی (که معمولاً آن را با $x-$نشان می‌دهیم) با $p-x \in \{۱, ۲, \cdots, p-۱\}$ داده می‌شود. اگر $p > ۲$، آنگاه x و $x-$ عضوهای متفاوتی از $\mathbb{Z}_p$ هستند.

- هر $x \in \mathbb{Z}_p \backslash \{۰\}$ وارون ضربی یکتایی چون $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p \backslash \{۰\}$ با ضابطهٔ $x\overline{x} \equiv ۱ \pmod{p}$ دارد.
  بنا به تعریف عددهای اول، نگاشت $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$، $z \mapsto xz$ به‌ازای هر $x \neq ۰$ یک به یک است. بنابراین روی مجموعهٔ متناهی $\mathbb{Z}_p \backslash \{۰\}$ باید پوشا نیز باشد، و در نتیجه به‌ازای هر x، عنصر یکتای $\overline{x} \neq ۰$ با ضابطهٔ $x\overline{x} \equiv ۱ \pmod{p}$ وجود دارد.

- مربعهای $۰^۲$، $۱^۲$، $۲^۲$، $\cdots$، $h^۲$ عضوهای متفاوتی از $\mathbb{Z}_p$ را به‌ازای $h = \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor$ مشخص می‌کنند.
  دلیلش این است که از $x^۲ \equiv y^۲$ یا $(x+y)(x-y) \equiv ۰$ نتیجه می‌شود $x \equiv y$ یا $x \equiv -y$. عناصر $۰^۲$، $۱^۲$، $\cdots$، $h^۲$ که تعدادشان $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱$ تاست مربعها یا عددهای مربعی در $\mathbb{Z}_p$ نامیده می‌شوند.

+	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

·	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

جمع و ضرب در $\mathbb{Z}_۵$

در اینجا به‌اجمال اشاره می‌کنیم که به‌ازای همهٔ عددهای اول، جوابهایی برای $x^۲ + y^۲ \equiv -۱ \pmod{p}$ وجود دارد. در واقع، تعداد $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱$ عدد مربعی متمایز $x^۲$ در $\mathbb{Z}_p$ وجود دارد و نیز $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱$ عدد متمایز به‌صورت $-(۱ + y^۲)$. این دو مجموعه از اعداد بزرگتر از آن‌اند که مجزا باشند چون $\mathbb{Z}_p$ فقط p عضو دارد، و بنابراین باید x و yای وجود داشته باشند که $x^۲ \equiv -(۱ + y^۲) \pmod{p}$.

لم ۲. هیچ عددی که به‌صورت $n = ۴m + ۳$ باشد مجموع دو مربع نیست.

■ **اثبات.** مربع هر عدد زوج به‌صورت $(۲k)^۲ = ۴k^۲ \equiv ۰ \pmod{۴}$ است در حالی‌که مربعات عددهای فرد به‌صورت

$$(۲k+۱)^۲ = ۴(k^۲+k) - ۱ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

هستند. پس مجموع هر دو مربع، همنهشت با ۰، ۱، یا ۲ (به پیمانهٔ ۴) است. □

این لم کفایت می‌کند تا عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۳$ در نظر ما «بد» باشند. پس به ویژگیهای «خوب» عددهای اولی که به‌صورت $p = ۴m + ۱$ هستند می‌پردازیم. گام اساسی در راه رسیدن به قضیهٔ اصلی، گزارهٔ زیر است که اثبات آن را تساگیر[1] عرضه کرده است.

گزاره. هر عدد اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$ مجموع دو مربع است، یعنی می‌توان آن را به‌ازای عددهایی طبیعی چون $x, y \in \mathbb{N}$ به‌صورت $p = x^۲ + y^۲$ نوشت.

■ **اثبات.** مجموعهٔ

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^۳ : x^۲ + ۴yz = p\}$$

را بررسی می‌کنیم. مجموعهٔ S متناهی است زیرا مسلماً همهٔ سه‌تاییهای آن در $x, y, z \in \{۱, ۲, \cdots, p\}$ صدق می‌کنند. این مجموعهٔ S را می‌توان مجموعه‌ای متناهی از نقاط واقع در $\mathbb{R}^۳$ دانست. اثبات تساگیر مبتنی بر این کشف شگفت‌انگیز است که صفحاتی که با $x = y - z$ و با $x = ۲y$ مشخص می‌شوند با مجموعهٔ S برخورد نمی‌کنند ولی آن را به سه بخش $S_۱$، $S_۲$، و $S_۳$ تقسیم می‌کنند که $S_۱$ و $S_۳$ تحت یک نگاشت آفین هم‌ارزند (و بنابراین کاردینال آنها یکی است)، و سومی، $S_۲$، دارای تقارنی با دقیقاً یک نقطهٔ ثابت است (و بنابراین $|S_۲|$ فرد است). افراز $S = S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳$ را از

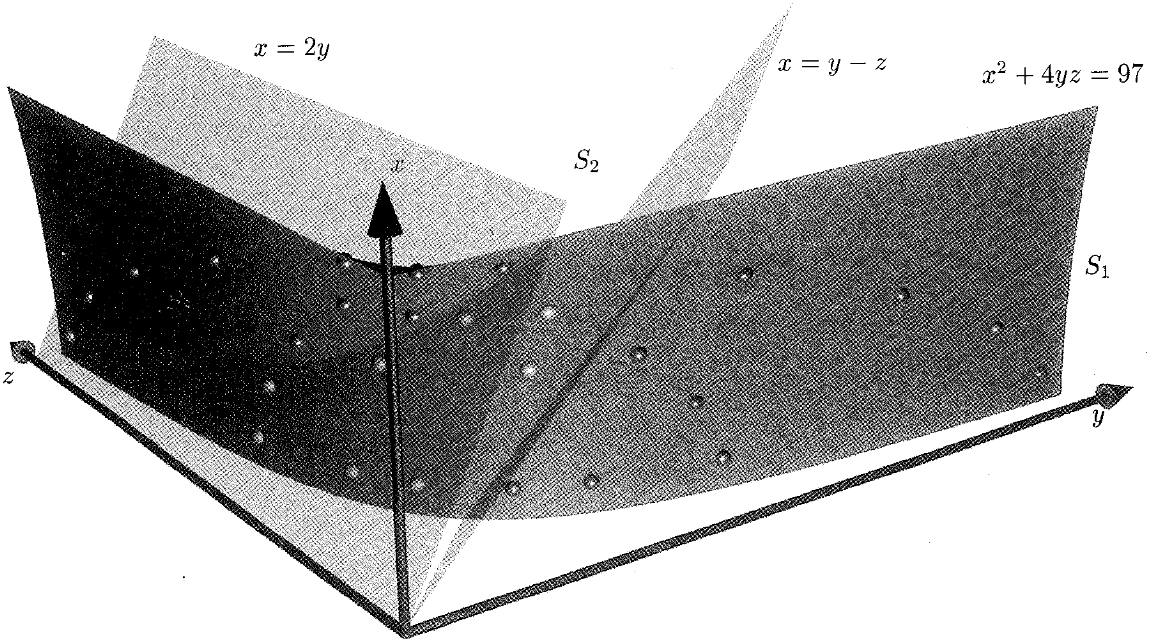
$$\begin{aligned} S_۱ &:= \{(x, y, z) \in S : x < y - z\} \\ S_۲ &:= \{(x, y, z) \in S : y - z < x < ۲y\} \\ S_۳ &:= \{(x, y, z) \in S : ۲y < x\} \end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم. این افراز درست است زیرا از حالت مرزی $x = y - z$ نتیجه می‌شود $p = (y+z)^۲$، در حالی‌که از $x = ۲y$ نتیجه می‌شود $p = ۴y(y+z)$، و هیچ‌یک از آنها نمی‌تواند برقرار باشد زیرا p اول است.

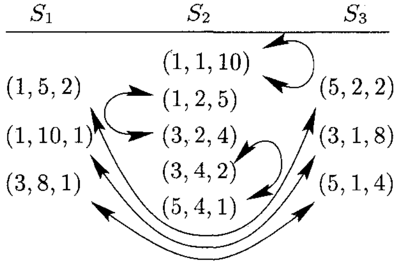
$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$
	(۱, ۱, ۱۰)	
(۱, ۵, ۲)	(۱, ۲, ۵)	(۵, ۲, ۲)
(۱, ۱۰, ۱)	(۳, ۲, ۴)	(۳, ۱, ۸)
(۳, ۸, ۱)	(۳, ۴, ۲)	(۵, ۱, ۴)
	(۵, ۴, ۱)	

افراز به‌ازای $p = ۴۱$

1. Don Zagier



وضعیت هندسی به‌ازای $p = ۹۷$، نقطه‌های واقع در $S_۱$ و $S_۳$ قرمزند و نقطه‌های واقع در $S_۲$، آبی.



نگاشت f به‌ازای $p = ۴۱$

با این تقسیم‌بندی، نگاشتی به‌صورت

$$f : \begin{cases} S_۱ \longrightarrow S_۳ : \ (x,y,z) \mapsto (x + ۲z, z, y - x - z) \\ S_۲ \longrightarrow S_۲ : \ (x,y,z) \mapsto (۲y - x, y, x - y + z) \\ S_۳ \longrightarrow S_۱ : \ (x,y,z) \mapsto (x - ۲y, x - y + z, y) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تحقیق در اینکه f خوش‌تعریف و وارون خود است، آسان (و جالب!) است. به‌خصوص f دوسویی است.

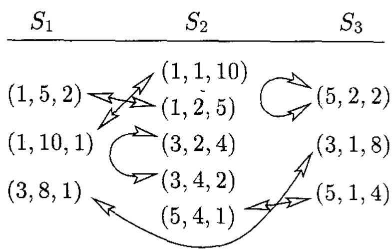
چون f مجموعه‌های $S_۱$ و $S_۳$ را با هم تعویض می‌کند، همهٔ نقطه‌های ثابت f باید در $S_۲$ باشند و از اینجا داریم

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \iff x = y$$

چون p عددی اول است، تنها جواب صحیح مثبت $f(x,y,z) = (x,y,z)$ جواب $x(x + ۴z) = p$ است، یعنی $x = ۱$، $z = \frac{p-۱}{۴}$. پس f دقیقاً یک نقطهٔ ثابت $(۱, ۱, \frac{p-۱}{۴})$ را دارد، و تمام نقاط دیگر S را با تصویرهایشان تعویض می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود $|S_۱| = |S_۳|$، و $|S_۲|$ فرد است. به‌خصوص $|S|$ فرد است.

اکنون نگاشت بسیار ساده‌تر

$$g : S \longrightarrow S, \quad (x,y,z) \mapsto (x,z,y)$$



نگاشت g به‌ازای $p = ۴۱$: (تنها) نقطهٔ ثابت $(۵, ۲, ۲)$، جواب

$$۴۱ = ۵^۲ + ۴ \times ۲^۲ = ۵^۲ + ۴^۲$$

را به‌دست می‌دهد.

را در نظر می‌گیریم که باز وارون خودش است. چون $|S|$ فرد است، g نمی‌تواند فقط نقطه‌های متمایز S را با هم تعویض کند و باید دست‌کم یک نقطهٔ ثابت برای g وجود داشته باشد. پس یک $(x, y, z) \in S$ وجود دارد یعنی جوابی برای

$$p = x^۲ + ۴y^۲ = x^۲ + (۲y)^۲ \qquad (x, y \in \mathbb{N}) \qquad \square$$

توجه کنید که این اثبات چیز بیشتری به‌دست می‌دهد ــ برای همهٔ عددهای اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$، تعداد نمایشهای p به‌شکل $p = x^۲ + (۲y)^۲$ فرد است. (این نمایش در واقع یکتاست، [۱] را ببینید.) همچنین توجه کنید این اثبات سازنده نیست؛ راههای کارامدی برای یافتن چنین نمایشهایِ عدد به‌صورت دو مربع در [۳] مورد بحث قرارگرفته است. قضیهٔ زیر به‌پرسشی که در آغاز این فصل آمد، پاسخ کامل می‌دهد.

قضیه. عدد طبیعی n به‌صورت مجموع دو مربع قابل نمایش است اگر و تنها اگر در تجزیهٔ n به‌عوامل اول، هر عامل اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۳$ با نمای زوج ظاهر شود.

■ **اثبات.** عدد n را نمایش‌پذیر گوییم اگر مجموع دو مربع باشد یعنی اگر به‌ازای x و yای متعلق به $\mathbb{N}$، $n = x^۲ + y^۲$. این قضیه پیامد پنج حقیقت است:

(۱) $۱^۲ + ۱^۲ = ۲$ نمایش‌پذیر است. هر عدد اولِ به‌صورت $p = ۴m + ۱$ نمایش‌پذیر است.

(۲) حاصلضرب هر دو عدد نمایش‌پذیر $n_۱ = x_۱^۲ + y_۱^۲$ و $n_۲ = x_۲^۲ + y_۲^۲$ نمایش‌پذیر است:

$$n_۱n_۲ = (x_۱x_۲ + y_۱y_۲)^۲ + (x_۱y_۲ - x_۲y_۱)^۲$$

(۳) اگر n نمایش‌پذیر باشد، $n = x^۲ + y^۲$، آنگاه $nz^۲$ نیز به‌صورت $nz^۲ = (xz)^۲ + (yz)^۲$ نمایش‌پذیر است.

حقایق (۱)، (۲)، و (۳)، همراه با هم، قسمت «اگر» قضیه را به‌دست می‌دهند.

(۴) اگر $p = ۴m + ۳$ عدد اولی باشد که یک عدد نمایش‌پذیر $n = x^۲ + y^۲$ را بشمارد، آنگاه p هم x و هم y را می‌شمارد، و بنابراین $p^۲$، n را می‌شمارد. در واقع اگر داشتیم $x \not\equiv ۰ \pmod{p}$ (به پیمانهٔ p)، آنگاه می‌توانستیم $\overline{x}$ را پیدا کنیم چنانکه $x\overline{x} \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ p). معادلهٔ $x^۲ + y^۲ \equiv ۰$ را در $\overline{x}^۲$ ضرب می‌کنیم و به‌دست

می‌آوریم (به‌پیمانهٔ p) $\circ \equiv {}^{۲}(\overline{x}y) + ۱ = {}^{۲}\overline{x}{}^{۲}y + ۱$ که بنا به لم ۱ برای $p = ۴m + ۳$ غیرممکن است.

(۵) اگر n نمایش‌پذیر باشد و $p = ۴m + ۳$ عدد n را بشمارد، آنگاه عدد $p^{۲}$ n را می‌شمارد و $n/p^{۲}$ نمایش‌پذیر است. این از (۴) نتیجه می‌شود و اثبات را به‌انجام می‌رساند. □

به‌عنوان فرع این قضیه، نتیجه می‌گیریم که بینهایت عدد اول به‌صورت $p = ۴m+۱$ وجود دارد. برای ملاحظهٔ این مطلب، عدد

$$M_k = (۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdots p_k)^{۲} + ۲^{۲}$$

را که همنهشت با ۱ (به‌پیمانهٔ ۴) است در نظر می‌گیریم. همهٔ عوامل اول آن بزرگتر از p_k هستند، و بنابه‌حقیقت (۴) در اثبات پیشین، عامل اولی به‌صورت $۴m + ۳$ ندارد. پس M_k عامل اولی به‌شکل $۴m + ۱$ دارد که بزرگتر از p_k است.

این بحث را با ذکر دو نکته به‌پایان می‌آوریم:

- اگر a و b دو عدد طبیعی متباین باشند، آنگاه بینهایت عدد اول به‌صورت $am+b$، ($m \in \mathbb{N}$)، وجود دارند ــ این قضیهٔ معروف (و دشوار)ی از دیریکله است.

- ولی چنین نیست که به‌ازای aی ثابت و bهای مختلف، عددهای اول به یک میزان ظاهر شوند حتی به‌ازای $a = ۴$؛ درواقع، عددهای اول به‌صورت $۴m+۳$ «بسیار بیشتر» از اعداد اولِ به‌صورت $۴m + ۱$ هستند. این نتیجه به اریبی چبیشف معروف است ــ مرجع [۲] را ببینید.

مراجع

[1] I. Niven & H.S. Zuckerman: *An Introduction to the Theory of Numbers*, third edition, Wiley 1972.

[2] M. Rubinstein & P.Sarnak: *Chebyshev's bias*, Experimental Mathematics **3** (1994), 173-197.

[3] S. Wagon: *Editor's corner: The Euclidean algorithm strikes again*, Amer. Math. Monthly **77** (1990), 125-129.

[4] D. Zagier: *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 \pmod 4$ *is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly **77** (1990), 144.

هر حلقهٔ تقسیم متناهی یک هیأت است
فصل ۵


ارنست ویت

حلقه ساختار مهمی در جبر نوین است. اگر حلقهٔ R یک عضو یکهٔ ضربی چون ۱ و هر عضو ناصفر آن یک وارون ضربی داشته باشد، آنگاه R را حلقهٔ تقسیم می‌نامند. پس آنچه R برای هیأت بودن کم دارد، تعویض‌پذیری ضرب است. مشهورترین نمونهٔ حلقهٔ تقسیمِ تعویض‌ناپذیر، حلقهٔ کواترنیونهاست که همیلتن آن را کشف کرد. ولی همان‌طور که از عنوان این فصل بر می‌آید، چنین حلقهٔ تقسیمی لزوماً باید نامتناهی باشد. اگر R متناهی باشد، آنگاه بنا به اصول موضوع، ضرب باید تعویض‌پذیر باشد.

این حکم که امروز از احکام مشهور و قدیمی به‌شمار می‌آید، توجه و علاقه بسیاری از ریاضیدانان را برانگیخته بوده است زیرا چنانکه هرستاین می‌نویسد: «این قضیه به‌طرز بسیار نامنتظره‌ای دو چیزِ ظاهراً نامرتبط، تعداد اعضای یک دستگاه جبری معین و ضرب در آن دستگاه، را به‌هم مربوط می‌سازد.»

این قضیهٔ زیبا که معمولاً به مک‌لاگان ودربرن[1] نسبت داده می‌شود (و این انتساب قابل تردید است) به‌وسیلهٔ افراد زیادی با استفاده از ایده‌های متنوعی به اثبات رسیده است. خود ودربرن سه اثبات در ۱۹۰۵ عرضه کرد و لئونور دیکسن هم در همان سال اثبات دیگری به‌دست داد. بعدها امیل آرتین، هانس تساسنهاوس[2]، نیکولاس بورباکی، و بسیاری ریاضیدانان دیگر اثباتهایی عرضه کردند. اثبات ما از لحاظ سادگی و زیبایی برتر از سایر اثباتهاست. این برهان را ارنست ویت[3] در ۱۹۳۱ ارائه کرد و با ترکیب دو ایدهٔ مقدماتی به‌سرانجامی زیبا می‌رسد.

قضیه. هر حلقهٔ تقسیم متناهی R تعویض‌پذیر است.

■ **اثبات.** اولین جزء اثبات ما به جبر خطی مربوط می‌شود. فرض کنید به‌ازای عضو دلخواه $s \in R$، مجموعهٔ C_s مجموعهٔ $\{x \in R : xs = sx\}$ مرکب از اعضایی باشد که با s تعویض می‌شوند؛ C_s مرکزساز s نامیده می‌شود. روشن است که C_s شامل ۰ و ۱ است و یک زیرحلقهٔ تقسیم R است. مرکز، Z، مجموعهٔ اعضایی است که با همهٔ اعضای R تعویض می‌شوند، پس $Z = \bigcap_{s\in R} C_s$. به‌خصوص همهٔ عضوهای

1. MacLagan Wedderburn 2. Hans Zassenhaus 3. Witt

Z تعویض می‌شوند، ۰ و ۱ در Zاند، و بنابراین Z یک هیأت [میدان] متناهی است. فرض می‌کنیم $|Z| = q$.

می‌توانیم R و C_s را فضاهایی برداری روی هیأت Z بپنداریم و نتیجه بگیریم $|R| = q^n$ که در آن n، بعد فضای برداری R روی Z است و همین‌طور به‌ازای عددهای صحیح مناسب $n_s \geq 1$ داریم $|C_s| = q^{n_s}$.

حال فرض کنیم R هیأت نیست. این بدان معنی است که به‌ازای sای متعلق به R، مرکزساز C_s همهٔ R نیست و یا به‌عبارت دیگر، $n_s < n$.

رابطهٔ زیر را روی مجموعهٔ $R^* := R\backslash\{0\}$ در نظر می‌گیریم

$$r' \sim r :\Longleftrightarrow r' = x^{-1}rx \qquad \text{به‌ازای } x \text{ای متعلق به } R^*،$$

به‌آسانی می‌توان دید که $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی است. فرض کنیم

$$A_s := \{x^{-1}sx : x \in R^*\}$$

ردهٔ هم‌ارزیِ شامل s باشد. ملاحظه می‌کنیم که دقیقاً وقتی s در مرکز (Z) است، $|A_s| = 1$. پس بنا به فرض ما، رده‌های A_sای با ضابطهٔ $|A_s| \geq 2$ وجود دارند. حال برای $s \in R^*$ نگاشت $f_s : x \mapsto x^{-1}sx$ از R^* به‌روی A_s را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} x^{-1}sx = y^{-1}sy &\Longleftrightarrow (yx^{-1})s = s(yx^{-1}) \\ &\Longleftrightarrow yx^{-1} \in C_s^* \Longleftrightarrow y \in C_s^* x \end{aligned}$$

که در آن $C_s^*x = \{zx : z \in C_s^*\}$ دارای اندازهٔ $|C_s^*|$ است. پس هر عضو $x^{-1}sx$ تصویر دقیقاً $|C_s^*| = q^{n_s} - 1$ عضو R^* تحت نگاشت f_s است، و نتیجه می‌گیریم $|R^*| = |A_s||C_s^*|$. به‌خصوص خاطرنشان می‌کنیم که $|A_s| = \dfrac{q^n - 1}{q^{n_s} - 1} = \dfrac{|R^*|}{|C_s^*|}$ عددی صحیح به‌ازای هر s است.

می‌دانیم که رده‌های هم‌ارزی، R^* را افراز می‌کنند. حال عضوهای مرکزی Z^* را در یک دسته قرار می‌دهیم و رده‌های هم‌ارزیِ شامل بیش از یک عضو را با A_1، $\cdots$، A_t نشان می‌دهیم. بنا به فرض، می‌دانیم که $t \geq 1$. چون $|R^*| = |Z^*| + \sum_{i=1}^{t}|A_i|$، فرمول موسوم به فرمول رده‌ای:

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{t} \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1} \qquad (1)$$

را ثابت کرده‌ایم. در این فرمول به‌ازای هر i داریم $\frac{q^n-۱}{q^{n_i}-۱} \in \mathbb{N}$ > ۱.

با رابطهٔ (۱)، جبر مجرد را ترک گفته‌ایم و به عددهای طبیعی برگشته‌ایم. اکنون ادعا می‌کنیم از $q^{n_i} - ۱|q^n - ۱$ نتیجه می‌شود $n_i|n$. می‌نویسیم $n = an_i + r$ که $۰ \leq r < n_i$، و از $q^{n_i} - ۱|q^{an_i+r} - ۱$ نتیجه می‌گیریم

$$q^{n_i} - ۱|(q^{an_i+r} - ۱) - (q^{n_i} - ۱) = q^{n_i}(q^{(a-۱)n_i+r} - ۱)$$

و بنابراین $q^{n_i} - ۱|q^{(a-۱)n_i+r} - ۱$، چون q^{n_i} و $q^{n_i} - ۱$ نسبت به هم اول‌اند. اگر به‌همین نحو ادامه دهیم به‌دست می‌آوریم $q^{n_i} - ۱|q^r - ۱$، $۰ \leq r < n_i$، که فقط به‌ازای $r = ۰$ ممکن است، یعنی $n_i|n$. به‌طور خلاصه

$$\text{به‌ازای هر } i،\quad n_i|n \tag{۲}$$

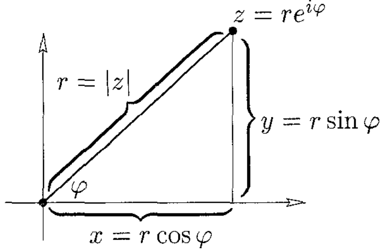
حال به‌جزء دوم اثبات می‌رسیم که با عددهای مختلط $\mathbb{C}$ سروکار دارد. چندجمله‌ای $x^n - ۱$ را در نظر بگیرید. ریشه‌های آن در $\mathbb{C}$، ریشه‌های nام واحد نامیده می‌شوند. چون $\lambda^n = ۱$، برای همهٔ این ریشه‌های λ داریم $|\lambda| = ۱$ و این ریشه‌ها همگی روی دایرهٔ یکهٔ صفحهٔ مختلط‌اند. در واقع، این ریشه‌ها دقیقاً عددهای $\lambda_k = e^{۲k\pi i/n} = \cos(۲k\pi/n) + i\sin(۲k\pi/n)$، $۰ \leq k \leq n-۱$ هستند (تابلو صفحهٔ بعد را ببینید). بعضی از ریشه‌های λ به‌ازای $d < n$ در $\lambda^d = ۱$ صدق می‌کنند. مثلاً ریشهٔ $\lambda = -۱$ در $\lambda^۲ = ۱$ صدق می‌کند. به‌ازای ریشهٔ λ فرض کنید d کوچکترین نمای مثبت باشد که $\lambda^d = ۱$، یعنی d مرتبهٔ λ درگروه ریشه‌های واحد است. پس بنا به قضیهٔ لاگرانژ («مرتبهٔ هر عضو یک گروه، مرتبهٔ آن گروه را می‌شمارد» ــ تابلو فصل ۱ را ببینید) داریم $d|n$. توجه کنید که ریشه‌هایی با مرتبهٔ n وجود دارند از قبیل $\lambda = e^{۲\pi i/n}$.

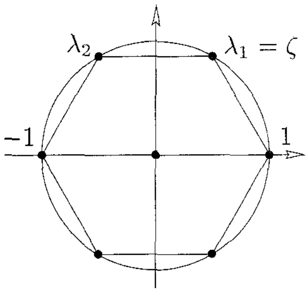
اکنون همهٔ ریشه‌های با مرتبهٔ d را در یک دسته قرار داده می‌نویسیم

$$\phi_d(x) := \prod_{\lambda \text{ با مرتبهٔ } d} (x - \lambda)$$

توجه کنید که تعریف $\phi_d(x)$ مستقل از n است. چون هر ریشه مرتبهٔ dای دارد، نتیجه می‌گیریم که

$$x^n - ۱ = \prod_{d|n} \phi_d(x) \tag{۳}$$





ریشه‌های واحد به‌ازای $n = ۶$.

ریشه‌های واحد

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به صورت «قطبی»

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

نوشت که در آن $r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصلهٔ z تا مبدأ و φ زاویه‌ای است که از قسمت مثبت محور x اندازه‌گیری می‌شود. پس ریشه‌های nام واحد به‌صورت

$$\lambda_k = e^{۲k\pi i/n} = \cos(۲k\pi/n) + i\sin(۲k\pi/n), ۰ \leq k \leq n - ۱$$

هستند زیرا به‌ازای هر k

$$\lambda_k^n = e^{۲k\pi i} = \cos(۲k\pi) + i\sin(۲k\pi) = ۱$$

با محاط کردن یک n ضلعی منتظم در دایرهٔ یکه، این ریشه‌ها را از راه هندسی به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که به‌ازای هر k، داریم $\lambda_k = \zeta^k$ که در آن $\zeta = e^{\frac{۲\pi i}{n}}$. پس ریشه‌های nام واحد یک گروه دوری $\{\zeta, \zeta^۲, \cdots, \zeta^{n-۱}, \zeta^n = ۱\}$ با مرتبهٔ n تشکیل می‌دهند.

در اینجا به‌نکتهٔ اساسی می‌رسیم: ضریبهای چندجمله‌ایهای $\phi_n(x)$ عددهایی صحیح‌اند (یعنی به‌ازای هر n، $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$) و به‌علاوه، ضریب ثابت یا ۱ و یا ۱− است.

بیایید این ادعا را به دقت تحقیق کنیم. به‌ازای $n = ۱$، تنها ریشه ۱ است و بنابراین $\phi_۱(x) = x - ۱$. حال به استقرا عمل کرده فرض می‌کنیم به‌ازای هر $d < n$، $\phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$، و اینکه ضریب ثابت $\phi_d(x)$ برابر ۱ یا ۱− است. بنا به (۳)

$$x^n - ۱ = p(x)\phi_n(x) \qquad (۴)$$

که در آن $p(x) = \sum_{i=۰}^{\ell} p_i x^i$، $\phi_n(x) = \sum_{j=۰}^{n-\ell} a_j x^j$، $p_۰ = ۱$ یا $p_۰ = -۱$. چون $p_۰ a_۰ = -۱$، می‌بینیم $a_۰ \in \{۱, -۱\}$. فرض کنید از قبل می‌دانیم که $a_۰, a_۱, \cdots, a_{k-۱} \in \mathbb{Z}$. با محاسبهٔ ضریب x^k در دو طرف (۴) به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۰}^{k} p_i a_{k-i} = \sum_{i=۱}^{k} p_i a_{k-i} + p_۰ a_k \in \mathbb{Z}$$

چون، بنا به فرض، همهٔ $a_\circ$، $\cdots$، $a_{k-۱}$ (و همهٔ p_iها) در $\mathbb{Z}$ هستند، $p_\circ a_k$ و در نتیجه a_k نیز باید در $\mathbb{Z}$ باشند زیرا $p_\circ$ برابر ۱ یا ۱− است.

اکنون آماده‌ایم که قدم نهایی را برداریم. فرض کنید $n_i|n$ یکی از عددهایی باشد که در (۱) ظاهر می‌شوند. بنابراین

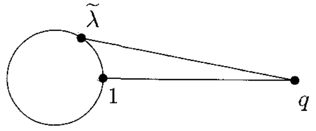
$$x^n - ۱ = \prod_{d|n} \phi_d(x) = (x^{n_i} - ۱)\phi_n(x) \prod_{d|n, d\nmid n_i, d\neq n} \phi_d(x)$$

نتیجه می‌گیریم که روابط تقسیم‌پذیری

$$\phi_n(q) | \frac{q^n - ۱}{q^{n_i} - ۱} \quad \text{و} \quad \phi_n(q)|q^n - ۱ \qquad (۵)$$

در $\mathbb{Z}$ برقرارند، چون (۵) به‌ازای هر i برقرار است، از فرمول رده‌ای (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\phi_n(q)|q - ۱$$



$|q - \bar{\lambda}| > |q - 1|$

ولی این نمی‌تواند برقرار باشد. چرا؟ داریم $\phi_n(x) = \Pi(x - \lambda)$ که در آن λ روی همهٔ ریشه‌های $x^n - ۱$ با مرتبهٔ n تغییر می‌کند. فرض کنید $\bar{\lambda} = a + ib$ یکی از آن ریشه‌ها باشد. چون $n > ۱$ (زیرا $R \neq Z$) داریم $\bar{\lambda} \neq ۱$ که بدین معنی است که قسمت حقیقی a کوچکتر از ۱ است. حال داریم $|\bar{\lambda}|^۲ = a^۲ + b^۲ = ۱$، و بنابراین

$$\begin{aligned} |q - \bar{\lambda}|^۲ &= |q - a - ib|^۲ = (q-a)^۲ + b^۲ \\ &= q^۲ - ۲aq + a^۲ + b^۲ = q^۲ - ۲aq + ۱ \\ &> q^۲ - ۲q + ۱ \qquad (\text{به دلیل اینکه } a < ۱) \\ &= (q - ۱)^۲ \end{aligned}$$

و لذا $|q - \bar{\lambda}| > q - ۱$ به‌ازای همهٔ ریشه‌های با مرتبهٔ n برقرار است. از اینجا نتیجه می‌شود

$$|\phi_n(q)| = \prod_{\lambda} |q - \lambda| > q - ۱$$

که به این معنی است که $\phi_n(q)$ نمی‌تواند مقسوم‌علیه $q - ۱$ باشد؛ پس به تناقض رسیده‌ایم و اثبات تمام است. □

مراجع

[1] L.E. DICKSON: *On finite algebras*, Nachrichten der Akad. Wissenschaften

Göttingen Math.-Phys. Klasse (1905), 1-36; Collected Mathematical Papers Vol.III, Chelsea Publ. Comp. The Bronx, NY 1975, 539-574.

[2] J.H.M. WEDDERBURN: *A theorem on finite algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 349-352.

[3] E. WITT: *Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8** (1931), 413.

برخی عددهای گنگ

فصل ۶

«π گنگ است»

شارل ارمیت

این موضوع را ارسطو، هنگامی که ادعا کرد قطر و محیط یک دایره متوافق نیستند، حدس زد. اولین اثباتِ این حکم بنیادی را یوهان هاینریش لامبرت در سال ۱۷۶۶ عرضه کرد. اثبات «کتابی» ما از آنِ ایوان نیون[1] (۱۹۴۷) است: برهان یک صفحه‌ایِ فوق‌العاده زیبایی که فقط به حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نیاز دارد. ایدهٔ آن پربار است و مطالب بیشتری هم می‌توان از آن استخراج کرد، از جمله چنانکه ایواموتو[2] و کوکسما[3]، به‌ترتیب، نشان دادند:

- $\pi^{۲}$ گنگ است (این نتیجهٔ قویتری است!) و
- e^r به‌ازای rهای گویای مخالف صفر، گنگ است.

ولی اثبات نیون نیز ریشه‌ها و زمینه‌هایی دارد: با ردیابی پیشینهٔ آن می‌توان به‌مقالهٔ برجستهٔ شارل ارمیت به تاریخ ۱۸۷۳ رسید که برای نخستین بار در آن ثابت شد e متعالی است، یعنی ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست. به‌آسانی می‌توان دید که $e = \sum_{k\geq ۰} \frac{۱}{k!}$. در واقع، از $e = \frac{b}{a}$ (برای عددهای صحیح $a, b > ۰$) به این نتیجه می‌رسیم که

$$N := n!\left(e - \sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k!}\right)$$

به‌ازای $b \leq n$ عددی صحیح است زیرا دراین‌صورت $n!e$ و $\frac{n!}{k!}$ (به‌ازای $۰ \leq k \leq n$) عددهایی صحیح‌اند. اما با براورد این عدد صحیح به‌دست می‌آوریم

$$N = \sum_{k\geq n+۱}\frac{n!}{k!} = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)} + \cdots$$

و بنابراین N را می‌توان با یک سری هندسی مقایسه کرد و در نتیجه به‌دست می‌آید

$$۰ < N < \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^{۲}} + \cdots = \frac{۱}{n}$$

1. Niven 2. Iwamoto 3. Koksma

که مهمل است زیرا N عددی صحیح است.

ولی این شگرد برای اثبات گنگ بودن $e^{۲}$ (که حکم قویتری است) کارساز نیست. برای این منظور از روش متفاوتی استفاده می‌کنیم که اساساً از آنِ شارل ارمیت، و کلید آن لم سادهٔ زیر است.

لم. فرض کنید به‌ازای nای ثابت و ناکمتر از ۱ داریم

$$f(x) = \frac{x^n(۱-x)^n}{n!}$$

(i) تابع $f(x)$ چندجمله‌ایی به‌صورت $f(x) = \frac{۱}{n!}\sum_{i=n}^{۲n} c_i x^i$ است که در آن ضریبهای c_i عددهایی صحیح‌اند.

(ii) به‌ازای $۰ < x < ۱$ داریم $۰ < f(x) < \frac{۱}{n!}$

(iii) مشتقهای $f^{(k)}(۰)$ و $f^{(k)}(۱)$ به‌ازای هر $k \geq ۰$، عددهایی صحیح‌اند.

■ **اثبات.** قسمتهای (i) و (ii) واضح‌اند.

در مورد (iii) توجه کنید که بنا به (i)، مشتق kام $f^{(k)}$ در $x = ۰$، به‌ازای $k < n$ و $k > ۲n$ صفر است و در این محدوده، $n \leq k \leq ۲n$ $f^{(k)}(۰) = \frac{k!}{n!}c_k$ عددی صحیح است. از $f(x) = f(۱-x)$ به‌ازای هر x به‌دست می‌آید $f^{(k)}(x) = (-۱)^k f^{(k)}(۱-x)$، و بنابراین، به‌ازای هر k، $f^{(k)}(۱) = (-۱)^k f^{(k)}(۰)$. □

قضیهٔ ۱. e^r به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}\backslash\{۰\}$ گنگ است.

■ **اثبات.** کافی است نشان دهیم که e^p نمی‌تواند به‌ازای عدد صحیح مثبت pای گویا باشد (اگر $e^{\frac{p}{q}}$ گویا می‌بود، آنگاه $(e^{\frac{p}{q}})^q = e^p$ نیز گویا بود). فرض می‌کنیم به‌ازای عددهای صحیح $a, b > ۰$، $e^p = \frac{a}{b}$، و n را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $n! > ap^{۲n+۱}$. قرار می‌دهیم

برآورد $n! > e(\frac{n}{e})^n$، nای صریح به دست می‌دهد که «به‌قدرکافی بزرگ» است.

$$F(x) := p^{۲n}f(x) - p^{۲n-۱}f'(x) + p^{۲n-۲}f''(x) \mp \cdots + f^{(۲n)}(x)$$

که در آن $f(x)$ همان تابع مذکور در لم است. $F(x)$ را همچنین می‌توان به‌صورت

$$F(x) = p^{۲n}f(x) - p^{۲n-۱}f'(x) + p^{۲n-۲}f''(x) \mp \cdots$$

نوشت زیرا مشتقات بالاتر $f^{(k)}(x)$، به‌ازای $k > ۲n$، صفر است. از اینجا می‌بینیم که چندجمله‌ای $F(x)$ در اتحاد

$$F'(x) = -pF(x) + p^{۲n+۱} f(x)$$

صدق می‌کند. پس با مشتقگیری به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}[e^{px}F(x)] = pe^{px}F(x) + e^{px}F'(x) = p^{۲n+۱}e^{px}f(x)$$

و بنابراین

$$N := b\int_{۰}^{۱} p^{۲n+۱}e^{px}f(x)dx = b[e^{px}F(x)]_{۰}^{۱} = aF(۱) - bF(۰)$$

که عددی صحیح است، زیرا از قسمت (iii) لم نتیجه می‌شود که $F(۰)$ و $F(۱)$ عددهایی صحیح‌اند. اما قسمت (ii) لم، براوردهایی برای حدود بالایی و پایینی N به‌دست می‌دهد:

$$۰ < N = b\int_{۰}^{۱} p^{۲n+۱}e^{px}f(x)dx < bp^{۲n+۱}e^{p}\frac{۱}{n!} = \frac{ap^{۲n+۱}}{n!} < ۱$$

که نشان می‌دهد N نمی‌تواند عددی صحیح باشد، و این تناقض است. □

حال که این شگرد بسیار ثمربخش از آب در آمد، یک بار دیگر آن را به‌کار می‌بریم.

قضیهٔ ۲. $\pi^۲$ گنگ است.

■ **اثبات.** فرض کنیم به‌ازای عددهای صحیح $a, b > ۰$، $\pi^۲ = \frac{a}{b}$. حال از چندجمله‌ای

$$F(x) := b^n(\pi^{۲n}f(x) - \pi^{۲n-۲}f^{(۲)}(x) + \pi^{۲n-۴}f^{(۴)}(x) \mp \cdots$$
$$+(-۱)^n f^{(۲n)}(x))$$

استفاده می‌کنیم. بنا به قسمت (iii) لم بالا، $F(۰)$ و $F(۱)$ عدد صحیح‌اند. با مشتقگیری مقدماتی به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)] &= (F''(x) + \pi^۲F(x))\sin(\pi x)\\ &= b^n\pi^{۲n+۲}f(x)\sin(\pi x)\\ &= \pi^۲a^n f(x)\sin(\pi x)\end{aligned}$$

عدد π گویا نیست ولی مسلماً تقریبهای گویای خوبی دارد که بعضی از آنها از روزگار باستان شناخته شده بوده‌اند:

$$\begin{aligned}\tfrac{۲۲}{۷} &= ۳٫۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots\\ \tfrac{۳۵۵}{۱۱۳} &= ۳٫۱۴۱۵۹۲۹۲۰۳۵۳\cdots\\ \tfrac{۱۰۴۳۴۸}{۳۳۲۱۵} &= ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۹۲۱\cdots\\ \pi &= ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹\cdots\end{aligned}$$

و بنابراین

$$N := \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin(\pi x)dx = \left[\frac{1}{\pi}F'(x)\sin(\pi x) - F(x)\cos(\pi x)\right]_0^1 = F(0) + F(1)$$

که عددی صحیح است. به‌علاوه N مثبت است زیرا به‌عنوان انتگرال تابعی تعریف می‌شود که مثبت است (مگر روی مرز). ولی اگر n را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$، آنگاه از قسمت (ii) لم به‌دست می‌آوریم

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

که تناقض است. □

با این قضیه، همراه با قضیهٔ مشهور زیر از اویلر، ثابت می‌شود که مقدار

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

از تابع زتای ریمان، گنگ است (پیوست را در صفحهٔ ۴۴ ببینید).

قضیهٔ ۳. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

■ **اثبات.** اثبات ما ــ که از آنِ تام آپوستل است ــ مرکب از دو محاسبهٔ متفاوت انتگرال دوگانهٔ

$$I := \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}dx\,dy$$

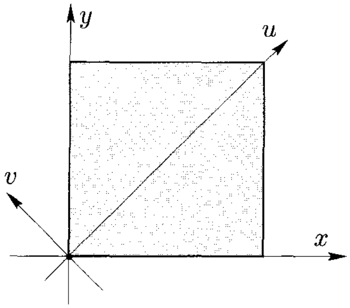
است. در اولین محاسبه، $\frac{1}{1-xy}$ را به‌صورت یک سری هندسی بسط می‌دهیم، عوامل جمع را به‌حاصلضرب دو عامل تجزیه می‌کنیم و به‌آسانی انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^1 \sum_{n\geq 0}(xy)^n dx\,dy = \sum_{n\geq 0}\int_0^1\int_0^1 x^n y^n dx\,dy \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 x^n dx\right)\left(\int_0^1 y^n dy\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$

این محاسبه همچنین نشان می‌دهد که انتگرال دوگانه (روی یک تابع مثبت با قطبی در $x = y = ۱$) متناهی است. و نیز توجه کنید که محاسبه ساده و سر راست است اگر آن را از آخر به اول در نظر بگیریم. به‌این ترتیب، محاسبهٔ $\zeta(۲)$ ما را به‌انتگرال دوگانهٔ I می‌رساند.

در دومین محاسبهٔ I به تعویض مختصات دست می‌زنیم: با یک دوران ‎°۴۵، مختصات

$$u = \frac{y+x}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad v = \frac{y-x}{\sqrt{۲}}$$
$$x = \frac{u-v}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad y = \frac{u+v}{\sqrt{۲}}$$

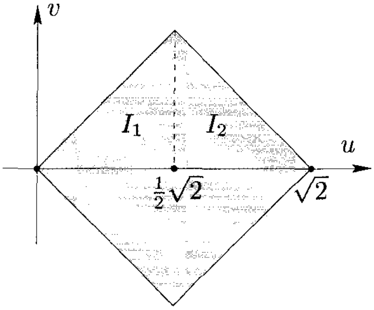


به‌دست می‌آیند. با جانشانی مختصات جدید خواهیم داشت

$$۱ - xy = ۱ - \frac{u^۲ - v^۲}{۲}$$

و بنابراین

$$\frac{۱}{۱ - xy} = \frac{۲}{۲ - u^۲ + v^۲}$$



دامنهٔ جدید انتگرالگیری و تابعی که باید از آن انتگرال گرفت، نسبت به محور u متقارن هستند، وکافی است انتگرال را روی نیمهٔ بالایی دامنه محاسبه کنیم،که آن را به‌طبیعی‌ترین شکل به دو بخش تجزیه می‌کنیم:

$$I = ۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}} \left(\int_{۰}^{u} \frac{dv}{۲ - u^۲ + v^۲}\right) du + ۴\int_{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}} \left(\int_{۰}^{\sqrt{۲}-\mu} \frac{dv}{۲ - u^۲ + v^۲}\right) du$$

که با استفاده از $\int \frac{dx}{a^۲+x^۲} = \frac{۱}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ به‌این صورت در می‌آید

$$I = ۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲ - u^۲}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{۲ - u^۲}}\right) du$$
$$+ ۴\int_{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲ - u^۲}} \arctan\left(\frac{\sqrt{۲} - u}{\sqrt{۲ - u^۲}}\right) du$$

اکنون کار را با دو جانشانی سادهٔ مثلثاتی کامل می‌کنیم. برای نخستین انتگرال، قرار می‌دهیم $u = \sqrt{۲}\sin\theta$. بازهٔ $۰ \le u \le \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ متناظر است با $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۶}$. می‌نویسیم

$du = \sqrt{۲}\cos\theta\ d\theta$ و $\sqrt{۲ - u^۲} = \sqrt{۲}\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \sqrt{۲}\cos\theta$، و لذا

$$
\begin{aligned}
&۴\int_۰^{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲ - u^۲}}\arctan\frac{u}{\sqrt{۲ - u^۲}}du = \\
&۴\int_۰^{\frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{\sqrt{۲}\cos\theta}\arctan\left(\frac{\sqrt{۲}\sin\theta}{\sqrt{۲}\cos\theta}\right)\sqrt{۲}\cos\theta\ d\theta = \\
&۴\int_۰^{\frac{\pi}{۶}} \theta\ d\theta = ۴\cdot\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۶}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}\frac{\pi^۲}{۶}
\end{aligned}
$$

برای انتگرال دوم از $u = \sqrt{۲}\cos ۲\theta$ استفاده می‌کنیم. در اینجا $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲} \le u \le \sqrt{۲}$ متناظر با $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۶}$ است. به‌دست می‌آوریم $du = -۲\sqrt{۲}\sin ۲\theta\ d\theta$؛ داریم

$$
\begin{aligned}
\sqrt{۲ - u^۲} &= \sqrt{۲}\sqrt{۱ - \cos^۲ ۲\theta} = \sqrt{۲}\sin ۲\theta = ۲\sqrt{۲}\cos\theta\sin\theta \\
\sqrt{۲} - u &= \sqrt{۲}(۱ - \cos ۲\theta) = ۲\sqrt{۲}\sin^۲\theta
\end{aligned}
$$

و بنابراین

$$
\begin{aligned}
&۴\int_{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}}^{\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲ - u^۲}}\arctan\frac{\sqrt{۲} - u}{\sqrt{۲ - u^۲}}du = \\
&۴\int_{\frac{\pi}{۶}}^{۰} \frac{۱}{\sqrt{۲}\sin ۲\theta}\arctan\left(\frac{۲\sqrt{۲}\sin^۲\theta}{۲\sqrt{۲}\cos\theta\sin\theta}\right)(-۲\sqrt{۲})\sin ۲\theta\ d\theta = \\
&۴\int_۰^{\frac{\pi}{۶}} ۲\theta\ d\theta = ۴\left(\frac{\pi}{۶}\right)^۲ = \frac{۲}{۳}\frac{\pi^۲}{۶}
\end{aligned}
$$

با جمع کردن دو انتگرال به‌دست می‌آوریم

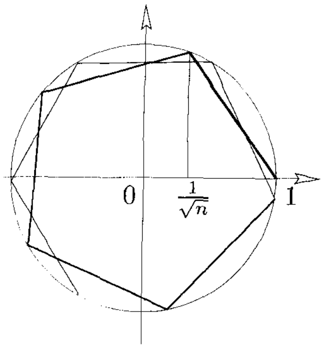
$$
I = \frac{۱}{۳}\frac{\pi^۲}{۶} + \frac{۲}{۳}\frac{\pi^۲}{۶} = \frac{\pi^۲}{۶} \qquad \square
$$

حالا به آخرین قضیهٔ خود دربارهٔ اعداد گنگ می‌رسیم.

قضیهٔ ۴. به‌ازای هر عدد صحیح فرد $n \ge ۳$، عدد

$$
A(n) := \frac{۱}{\pi}\arccos\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)
$$

گنگ است.



به این قضیه در مسألهٔ سوم هیلبرت (فصل ۷ را ببینید) در حالتهای $n = ۳$ و $n = ۹$ نیاز خواهیم داشت. به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۴$ داریم $A(۲) = ۱/۴$ و $A(۴) = ۱/۳$. پس محدود کردن قضیه به عددهای صحیح فرد ضروری است. این مقادیر با توسل به نمودار حاشیه به آسانی به‌دست می‌آیند؛ در این نمودار گزارهٔ «$\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ گنگ است» معادل است با اینکه بگوییم کمان چندضلعی ساخته‌شده از $\frac{۱}{\sqrt{n}}$، که همهٔ وترهایش یک طول دارند، هیچ‌گاه بسته نمی‌شود.

به‌عنوان تمرین نشان دهید که $A(n)$ فقط وقتی گویاست که $n \in \{۱, ۲, ۴\}$. به این منظور بین حالاتی که $n = ۲^r$ و حالاتی که n توانی از ۲ نیست تمایز بگذارید.

■ **اثبات.** قضیهٔ جمع

$$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

را که در مثلثات مقدماتی دیده‌اید به‌کار می‌گیریم، و از آن به‌ازای $\alpha = (k+۱)\varphi$ و $\beta = (k-۱)\varphi$ به‌دست می‌آوریم

$$\cos(k+۱)\varphi = ۲\cos\varphi\cos k\varphi - \cos(k-۱)\varphi \qquad (۱)$$

برای زاویهٔ $\varphi_n = \arccos(\frac{۱}{\sqrt{n}})$ که با $\cos\varphi_n = \frac{۱}{\sqrt{n}}$ و $۰ \leq \varphi_n \leq \pi$ تعریف می‌شود، از اینجا نمایشهایی به‌صورت

$$\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$$

حاصل می‌شود که A_k عددی صحیح است که به‌ازای هیچ $k \geq ۰$ بر n تقسیم‌پذیر نیست. در واقع، به‌ازای $k = ۰, ۱$ با $A_۰ = A_۱ = ۱$ چنین نمایشی را داریم و به استقرا بر k با استفاده از (۱) به‌ازای هر $k \geq ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\cos(k+۱)\varphi_n = ۲\frac{۱}{\sqrt{n}}\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-۱}}{\sqrt{n}^{k-۱}} = \frac{۲A_k - nA_{k-۱}}{\sqrt{n}^{k+۱}}$$

پس داریم $A_{k+۱} = ۲A_k - nA_{k-۱}$. اگر $n \geq ۳$ فرد باشد، و A_k بر n تقسیم‌پذیر نباشد، آنگاه در می‌یابیم که $A_{k+۱}$ نیز نمی‌تواند بر n تقسیم‌پذیر باشد.

حال فرض کنید

$$A(n) = \frac{۱}{\pi}\varphi_n = \frac{k}{\ell}$$

گویاست (با عددهای صحیح $k, \ell > \circ$). در این‌صورت از $\ell\varphi_n = k\pi$ نتیجه می‌شود

$$\pm ۱ = \cos k\pi = \frac{A_\ell}{\sqrt{n}^\ell}$$

پس $\sqrt{n}^\ell = \pm A_\ell$ عددی صحیح است (با $\ell \geq ۲$) و بنابراین $n|\sqrt{n}^\ell$. با توجه به $\sqrt{n}^\ell|A_\ell$ می‌بینیم n، A_ℓ را می‌شمارد و این تناقض است. □

پیوست: تابع زتای ریمان

تابع زتای ریمان $\zeta(s)$ به‌ازای هر $s > ۱$ به‌صورت

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq ۱} \frac{۱}{n^s}$$

تعریف می‌شود. براوردهای ما از H_n (صفحهٔ ۱۳ و ۱۴ را ببینید) دلالت به این دارند که سری مربوط به $\zeta(۱)$ واگراست ولی به‌ازای هر s حقیقی بزرگتر از ۱ قطعاً همگراست. تابع زتا ادامه‌ای متعارف درکل صفحهٔ مختلط دارد (با یک قطب ساده در $s = ۱$) که می‌توان آن را با استفاده از بسط به سری توانی ساخت. تابع مختلطِ حاصل نهایت اهمیت را در نظریهٔ اعداد اول دارد. در اینجا سه مورد مختلف را که نشانگر این اهمیت‌اند ذکر می‌کنیم:

(۱) اتحاد جالب توجه

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{۱}{۱ - p^{-s}}$$

که اویلر آن را مطرح کرده است، پیامد ساده‌ای از سری هندسی زیر است

$$\frac{۱}{۱ - p^{-s}} = ۱ + \frac{۱}{p^s} + \frac{۱}{p^{۲s}} + \frac{۱}{p^{۳s}} + \cdots$$

(۲) مکان ریشه‌های مختلط تابع زتا موضوع «حدس ریمان» است که یکی از مشهورترین و مهمترین مسأله‌های حل‌نشدهٔ ریاضیات به‌شمار می‌رود. در این حدس ادعا می‌شود که همهٔ ریشه‌های غیر بدیهی $s \in \mathbb{C}$ از تابع زتا در

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{۱}{۲}$$

صدق می‌کنند (تابع زتا به‌ازای همهٔ عددهای صحیح زوج منفی، که آنها را «ریشه‌های بدیهی» می‌خوانیم، صفر است).

(۳) مدتهاست که معلوم شده است $\zeta(s)$ مضرب گویایی از π^s است، و بنابراین گنگ است اگر $s \geq ۲$ عددی صحیح و زوج باشد. در اینجا ما یک اثبات از $\zeta(۲) = \frac{\pi^۲}{۶}$ آوردیم که اتحاد مشهوری که اویلر در ۱۷۳۴ عرضه کرده است. در جهت مقابل، گنگ بودن $\zeta(۳)$ را روژه آپری[1] در ۱۹۷۹ ثابت کرد (نقد عالی [۶] را در این مورد ببینید). معلوم نیست که $\zeta(s)$ به‌ازای سایر عددهای فرد s، $s \geq ۳$، گنگ است یا نه.

مراجع

[1] T.M. Apostol: *A proof that Euler missed: Evaluating ζ (2) the easy way*, Math. Intelligencer **5** (1983), 59-60.

[2] C. Hermite: *Sur la fonction exponentielle*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **77** (1873), 18-24; Œuvres de Charles Hermite, Vol. III, Gauthier-Villars, Paris 1912, pp.150-181.

[3] Y. Iwamoto: *A proof that π^2 is irrational*, J. Osaka Institute of Science and Technology **1** (1949), 147-148.

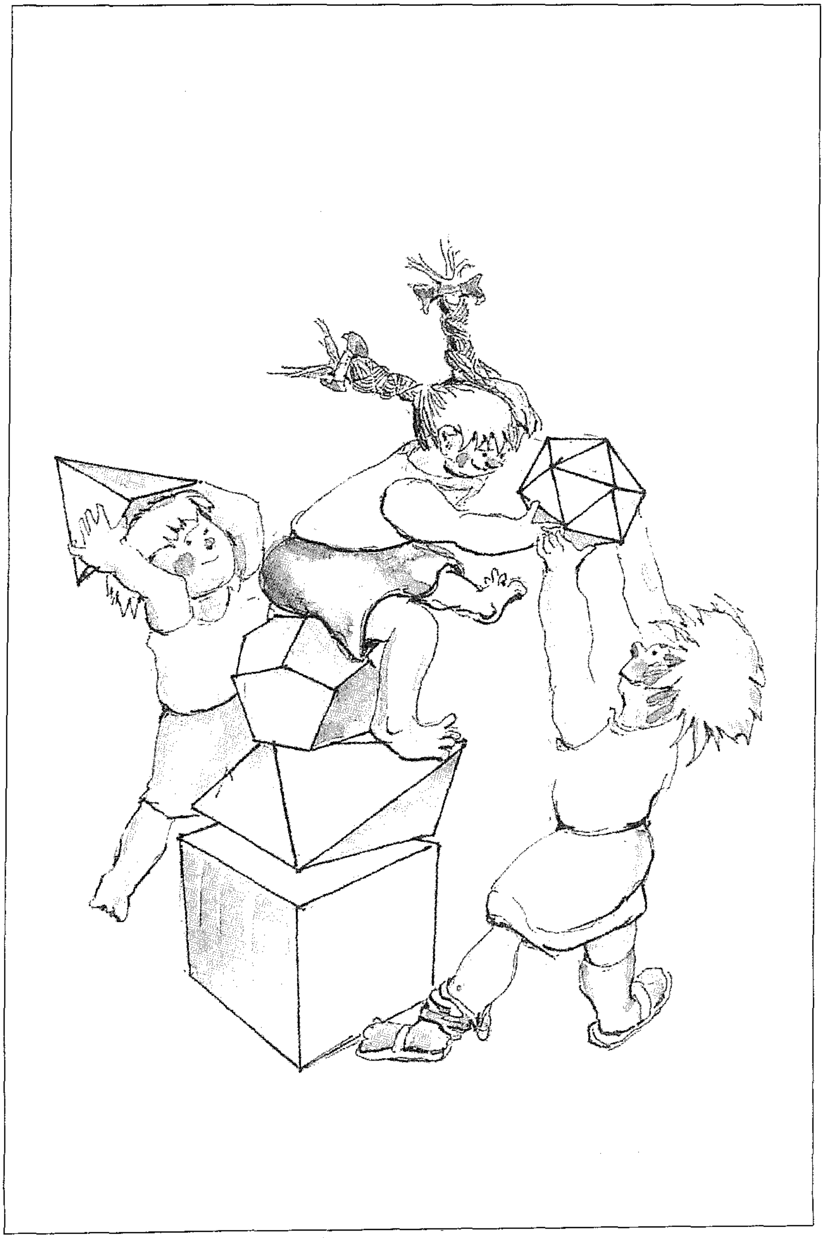
[4] J. F. Koksma: *On Niven's proof that π is irrational*, Nieuw Archiv Wiskunde (2) **23** (1949), 39.

[5] I. Niven: *A simple proof that π is irrational.* Bulletin Amer. Math. Soc. **53** (1947), 509.

[6] A. van der Porten: *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1979), 195-203.

1. Roger Apéry

هندسه



«اجسام افلاطونی ــ بازی کودکان»

مسألهٔ سوم هیلبرت: تجزیهٔ چندوجهیها

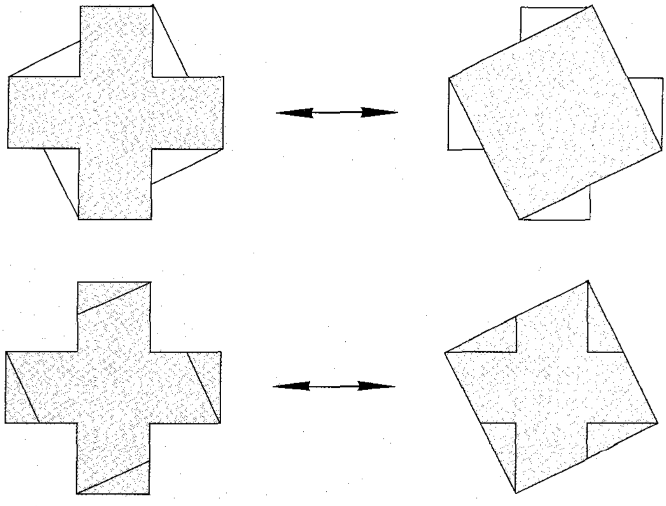
فصل ۷

داوید هیلبرت

در سال ۱۹۰۰، داوید هیلبرت در سخنرانی تاریخی خود خطاب به کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس ــ به‌عنوان سومین مسأله از مسائل بیست‌وسه‌گانه‌اش ــ خواستار تعیین چنین چیزی شد:

> «دو چهار وجهی با قاعده‌های برابر و ارتفاعهای برابر که به‌هیچ طریق قابل تجزیه به چهار وجهیهای قابل انطباق [همنهشت] نباشند و نتوان از ترکیب آنها با چهاروجهیهای قابل انطباق، دو چندوجهی به‌دست آورد که خودشان قابل تجزیه به چهاروجهیهای قابل انطباق باشند».

سابقهٔ این مسأله به دو نامه از کارل فریدریش گاوس به تاریخ ۱۸۴۴ می‌رسد (که در مجموعهٔ آثار گاوس در ۱۹۰۰ به چاپ رسیده است). اگر چهار وجهیهایِ با حجم برابر قابل تجزیه به‌قطعات قابل انطباق می‌بودند، این امر اثباتی «مقدماتی» از قضیهٔ XII.5 اقلیدس فراهم می‌ساخت که حاکی است هرمهایی که ارتفاع و قاعدهٔ برابر دارند، حجمشان هم برابر است. (چنین اثباتی مبتنی بر آنالیز، و بنابراین استدلالهای مربوط به پیوستگی، نمی‌بود). حکم مشابهی در هندسهٔ مسطحه برقرار است: قضیهٔ بویویی ــ گروین[1] [۱، بخش ۷.۲] می‌گوید که چندضلعیهای مسطحه هم یکسان



شکل صلیب و مربعی با همان مساحت، یکسان‌تکمیل‌پذیرند.

درواقع، این دو شکل حتی یکسان تجزیه‌پذیرند.

1. Bolyai-Gerwien

تجزیه‌پذیر هستند (قابل تجزیه به مثلثهای قابل انطباق‌اند) و هم یکسان‌تکمیل‌پذیر (می‌توان با افزودن مثلثهایی قابل انطباق، آنها را قابل انطباق ساخت) اگر و تنها اگر مساحت آنها برابر باشد.

هیلبرت ــ چنانکه از عبارت‌بندی مسأله پیداست ــ گمان می‌کرد قضیهٔ مشابهی در حالت سه‌بعدی وجود ندارد، و حق با او بود. در واقع، این مسأله را ماکس دن[1] شاگرد هیلبرت در دو مقاله کاملاً حل کرد: مقالهٔ اول، چهاروجهیهایی که یکسان‌تجزیه‌پذیر نیستند ولی قاعده و ارتفاع آنها برابر است، عرضه می‌کرد و قبلاً در سال ۱۹۰۰ منتشر شده بود، و مقالهٔ دوم که موضوع یکسان‌تکمیل‌پذیری را هم در برداشت در سال ۱۹۰۲ انتشار یافت. ولی فهم مقاله‌های دن آسان نیست، و بررسی اینکه دِن در دام ظریفی که دیگران را گرفتار کرد نیفتاده باشد به تلاش نیاز دارد: بریکار[2] (در ۱۸۹۶!) اثباتی بسیار زیبا ــ اما متأسفانه غلط ــ عرضه کرد؛ مشکوفسکی[3] (در ۱۹۶۰)، و احتمالاً دیگران نیز مرتکب اشتباه مشابهی شدند. خوشبختانه اثبات دن ترمیم و اصلاح شد و با تلفیق کارهای کاگان[4] (۱۹۰۳/۱۹۳۰)، هوگو هادویگر[5] (۱۹۴۹/۵۴) و ولادیمیر بولتیانسکی[6]، اکنون یک اثبات «کتابی» ــ به‌شرح زیر ــ داریم (در پیوست این فصل، مقدماتی دربارهٔ چندوجهیها آمده است.)

(۱) کمی جبر خطی

به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی از عددهای حقیقی $M = \{m_1, \cdots, m_k\} \subseteq \mathbb{R}$ مجموعهٔ $V(M)$ را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی عددهای در M با ضریبهای گویا تعریف می‌کنیم، یعنی

$$V(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

نخستین نکتهٔ (بدیهی اما مهم) این است که $V(M)$ یک فضای برداری متناهی‌بعد روی هیأت $\mathbb{Q}$ از عددهای گویاست. در واقع $V(M)$ تحت مجموعیابی و تحت ضرب در عددهای گویا به‌وضوح بسته است و برقراری اصول موضوع هیأت برای $\mathbb{R}$ کفایت می‌کند تا $V(M)$ یک فضای برداری باشد. بعد $V(M)$ اندازهٔ هر مجموعهٔ مولد

1. Max Dehn 2. Bricard 3. Meschkowski 4. V.F. Kagan
5. Hugo Hadwiger 6. Boltianskii

مینیمال است. چون M بنا به تعریف، $V(M)$ را تولید می‌کند، می‌بینیم که شامل یک مجموعهٔ مولد مینیمال است و بنابراین

$$\dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq k = |M|$$

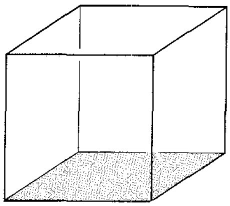
در ادامهٔ بحث به تابعهای $\mathbb{Q}$ـخطی

$$f : V(M) \to \mathbb{Q}$$

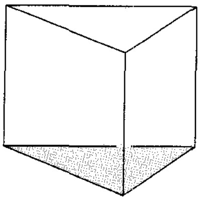
نیاز داریم که آنها را به‌صورت نگاشتهایی خطی از فضاهای $\mathbb{Q}$ـبرداری تعبیر می‌کنیم. ویژگی اصلی این است که به‌ازای هر وابستگی خطی گویای $\sum_{i=1}^{k} q_i m_i = 0$ با ضابطهٔ $q_i \in \mathbb{Q}$، لازم است داشته باشیم $\sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i) = f(0) = 0$. در اینجا لم ساده‌ای می‌آوریم که کار را راه می‌اندازد.

لم. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی $M \subseteq M'$ از $\mathbb{R}$، فضای $\mathbb{Q}$ـبرداری $V(M)$ زیرفضایی از فضای $\mathbb{Q}$ـبرداری $V(M')$ است. پس اگر $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ یک تابع $\mathbb{Q}$ـخطی باشد، آنگاه f را می‌توان به تابع $\mathbb{Q}$ـخطی f' توسیع داد: $V(M') \to \mathbb{Q}$ بنابراین به‌ازای هر $m \in M$، $f'(m) = f(m)$.

■ **اثبات.** هر تابع $\mathbb{Q}$ـخطی $V(M) \to \mathbb{Q}$ به‌محض اینکه مقادیرش روی یک $\mathbb{Q}$ـپایهٔ $V(M)$ مشخص شوند، معین می‌گردد. چون هر پایهٔ $V(M)$ را می‌توان به پایه‌ای از $V(M')$ توسیع داد، بقیهٔ مطلب حاصل است. □



$M_C = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$



$M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

(۲) ناورداهای دن

برای یک چندوجهی ۳ بعدی P، فرض کنید M_P نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ همهٔ زاویه‌های بین وجوه مجاور (زاویه‌های دووجهی) همراه با عدد π است. پس برای مکعب C به‌دست می‌آوریم $M_C = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$، در حالی که برای منشور قائم Q که قاعده‌اش یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد داریم $M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی مفروض $M \subseteq \mathbb{R}$ که شامل M_P باشد، و هر تابع $\mathbb{Q}$ـخطی

$$f : V(M) \to \mathbb{Q}$$

که در $f(\pi) = 0$ صدق کند، ناوردای دن P (نسبت به f) را عدد حقیقی

$$D_f(P) := \sum_{e \in p} \ell(e).f(\alpha(e))$$

تعریف می‌کنیم که در آن مجموعیابی روی همهٔ یالهای (e) چندوجهی انجام می‌شود، $\ell(e)$ نشان‌دهندهٔ طول e است، و $\alpha(e)$ زاویهٔ بین دو وجهی است که در e تلاقی می‌کنند.

بعداً ناورداهای مختلف دن را محاسبه می‌کنیم. فعلاً فقط متذکر می‌شویم که $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}f(\pi) = 0$ باید به‌ازای هر تابع $\mathbb{Q}$ ـ خطیِ این چنینیِ f برقرار باشد، و بنابراین

$$D_f(C) = 0$$

ناوردای دنِ یک مکعب نسبت به هر f صفر است.

(۳) قضیهٔ دن‌ـهادویگر

مانند بالا دو چندوجهی P، Q را یکسان‌تجزیه‌پذیر می‌نامیم، اگر قابل تجزیه به مجموعه‌هایی متناهی از چندوجهیهای $P_1, \cdots, P_n$ و $Q_1, \cdots, Q_n$ باشند به‌نحوی که به‌ازای هر $i(1 \leq i \leq n)$، P_i و Q_i قابل انطباق باشند. دو چندوجهی را یکسان‌تکمیل‌پذیر می‌نامیم اگر چندوجهیهای $P_1, \cdots, P_m$ و $Q_1, \cdots, Q_m$ وجود داشته باشند به‌طوری که نواحی درونی P_iها از یکدیگر و از P مجزا باشند و همین‌طور در مورد Q_iها و Q، و به‌ازای هر i، P_i قابل انطباق با Q_i باشد، و نیز $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_m$ و $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_m$ یکسان‌تجزیه‌پذیر باشند. از قضیه‌ای که گرلینگ[1] در ۱۸۴۴ عرضه کرد نتیجه می‌شود که در بررسی قابلیت انطباق، مهم نیست تقارنها را بپذیریم یا نپذیریم. روشن است که چندوجهیهای یکسان‌تجزیه‌پذیر، یکسان‌تکمیل‌پذیرند، ولی عکس موضوع معلوم نیست. قضیهٔ زیر از هادویگر (به روایت بولتیانسکی) ابزار لازم را در اختیار ما می‌گذارد تا ــ چنانکه هیلبرت پیشنهاد کرد ــ چهاروجهیهایی با حجم برابر بیابیم که یکسان‌تکمیل‌پذیر نیستند و در نتیجه یکسان‌تجزیه‌پذیر نمی‌باشند.

قضیه. فرض کنید چندوجهیهای P و Q به‌ترتیب دارای زاویه‌های دووجهی $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ و $\beta_1, \cdots, \beta_q$ باشند، و M مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی باشد که

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \pi\} \subseteq M$$

1. Gerling

اگر $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ تابعی $\mathbb{Q}$ـخطی با ضابطهٔ $f(\pi) = 0$ باشد. به‌نحوی که

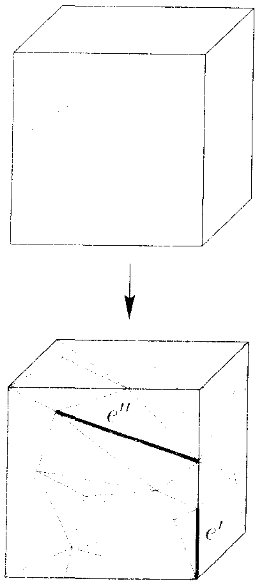
$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

آنگاه P و Q یکسان‌تکمیل‌پذیر نیستند.

■ **اثبات.** استدلال در دو بخش انجام می‌شود.

(۱) اگر چندوجهی P تجزیه‌ای به‌تعداد متناهی قطعهٔ چندوجهی چون P_1، $\cdots$ ، P_n داشته باشد، و اگر همهٔ زاویه‌های دووجهیِ قطعات P_1، $\cdots$، P_n در مجموعهٔ M باشند، آنگاه برای هر تابع $\mathbb{Q}$ـخطی $f : V(M) \to \mathbb{Q}$، ناورداهای دن با هم جمع می‌شوند:

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \cdots + D_f(P_n)$$



به هر بخش از یال یک چندوجهی، یک جرم نسبت می‌دهیم: اگر $e' \subseteq e$ بخشی از یال e از چندوجهی P باشد، جرم آن برابر خواهد بود با

$$m_f(e') := \ell(e')f(\alpha(e'))$$

یعنی طول آن ضربدر مقدار f زاویهٔ دووجهی‌اش.

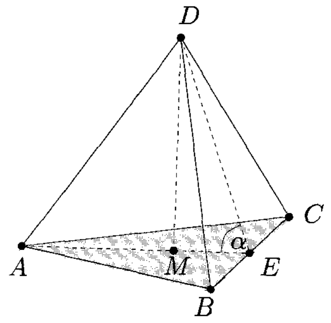
حال اگر P به P_1، $\cdots$ ، P_n تجزیه شود، اجتماع همهٔ یالهای قطعات P_i را در نظر می‌گیریم. روی یالهای e' که بر یالهای P واقع‌اند، می‌بینیم که مجموع زاویه‌های دووجهیِ قطعات، زاویهٔ دووجهی P در e' است، و بنابراین جرمها با هم جمع می‌شوند.

در هر یال دیگر e'' از یکی از P_iها که در درون وجهی از P یا در درون P است، مجموع زاویه‌ها π یا 2π است، پس مقادیر f زاویه‌ها در قطعات، مجموعشان، متناظراً، $f(\pi) = 0$ یا $f(2\pi) = 0$ است. پس برای مجموع جرمها همان مقداری را به‌دست می‌آوریم که به این یالهای P در وهلهٔ اول نسبت داده بودیم، یعنی 0.

(۲) با فرض اینکه P و Q یکسان‌تکمیل‌پذیرند، می‌توانیم M را گسترش دهیم و فوق مجموعه‌ای از آن چون M' در نظر بگیریم که شامل همهٔ زاویه‌های دووجهی در هر یک از قطعات نیز باشد. M' متناهی است زیرا ما فقط تجزیه‌های متناهی را در نظر داریم. در این صورت طبق لمی که قبلاً آوردیم می‌توانیم f را به $f : V(M') \to \mathbb{Q}$ توسیع دهیم و از اینجا بنا به‌بخش (۱) رابطه‌ای از نوع

$$D_f(P)+D_f(P_1)+\cdots+D_f(P_m) = D_f(Q)+D_f(Q_1)+\cdots+D_f(Q_m)$$

به‌دست می‌آید که در آن $D_f(P_i) = D_f(Q_i)$ زیرا P_i و Q_i قابل انطباق‌اند. پس نتیجه می‌گیریم $D_f(D) = D_f(Q)$، که تناقض است.



مثال ۱. برای چهار وجهی منتظم $T_۰$ که طول یالهای آن ℓ است، زاویهٔ دووجهی را از روی شکل محاسبه می‌کنیم. M، نقطهٔ وسط مثلث قاعده، ارتفاع AEی این مثلث را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند و چون $|AE| = |DE|$، به‌دست می‌آوریم $\cos\alpha = ۱/۳$، و بنابراین

$$\alpha = \arccos\frac{۱}{۳}$$

قرار می‌دهیم $M := \{\alpha, \pi\}$، و ملاحظه می‌کنیم که نسبت

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{۱}{\pi}\arccos\frac{۱}{۳}$$

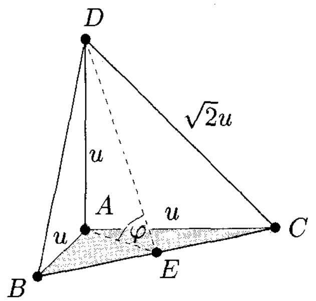
طبق قضیهٔ ۴ در فصل عددهای گنگ (به‌ازای $n = ۹$)، عددی گنگ است. پس فضای $\mathbb{Q}$-برداری $V(M)$ دوبعدی با پایهٔ M است، و تابعی $\mathbb{Q}$-خطی چون $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ با ضابطهٔ

$$f(\alpha) := ۱, f(\pi) := ۰$$

وجود دارد. برای این f داریم

$$D_f(T_۰) = ۶\ell f(\alpha) = ۶\ell \neq ۰$$

و بنابراین یک چهاروجهی منتظم نمی‌تواند یکسان‌تجزیه‌پذیر یا یکسان‌تکمیل‌پذیر با یک مکعب باشد، زیرا ناوردای دن یک مکعب به‌ازای هر f صفر می‌شود.



مثال ۲. فرض کنید $T_۱$ یک چهاروجهی است که به‌وسیلهٔ سه یالِ متعامد AB، AC، و AD به‌طول u ایجاد شده است. این چهاروجهی سه زاویهٔ دووجهی دارد که قائم‌الزاویه‌اند، و سه زاویهٔ دووجهی دیگر با اندازهٔ φ، که آن را از روی نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$\cos\varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}u}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\sqrt{۲}u} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi = \arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

برای $M := \{\frac{\pi}{۲}, \arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pi\}$، فضای $\mathbb{Q}$ـبرداری $V(M)$ دارای بعد ۲ است. در واقع، π و $\frac{\pi}{۲}$ وابستهٔ خطی‌اند، پس $V(M) = V(\{\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \pi\})$، اما هیچ رابطهٔ گویایی بین $\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و π وجود ندارد ــ به‌عبارت دیگر $\frac{۱}{\pi}\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ گنگ است، که این را در فصل ۶ ثابت کردیم (در قضیهٔ ۴، n را ۳ بگیرید). پس می‌توانیم با قراردادنِ

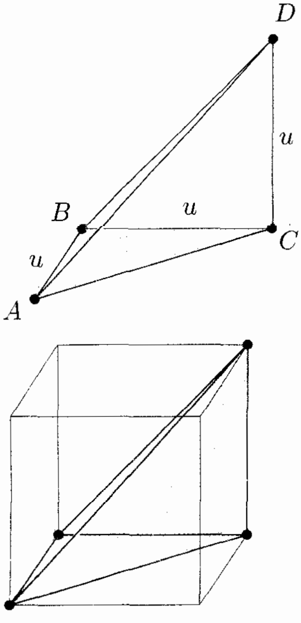
$$f\left(\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) := ۱ \quad \text{و} \quad f(\pi) := ۰$$

یک نگاشت $\mathbb{Q}$ـخطی بسازیم که از آن به‌دست می‌آید $f(\frac{\pi}{۲}) = ۰$ و لذا

$$D_f(T_۱) = ۳uf\left(\frac{\pi}{۲}\right) + ۳(\sqrt{۲}u)f\left(\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = ۳\sqrt{۲}u \neq ۰$$

به‌این ترتیب ثابت می‌شود که $T_۱$ یکسان‌تجزیه‌پذیر یا یکسان‌تکمیل‌پذیر با مکعب Cای که همان حجم را داشته باشد نیست زیرا $D_f(C) = ۰$ به‌ازای هر f برقرار است.

مثال ۳. و بالاخره فرض می‌کنیم $T_۲$ یک چهاروجهی باشد با سه یالِ متوالی AB، BC، و CD که دوبه‌دو متعامدند و طول هر سه u است.



ما زاویه‌های یک چنین چهاروجهی را محاسبه نمی‌کنیم (اندازهٔ آنها $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۳}$، و $\frac{\pi}{۴}$ است)، ولی در عوض استدلال می‌کنیم که ــ با استفاده از نقطه‌های وسط یالها و وجه‌ها، و مرکز ــ مکعبی با یالهای به‌طول u قابل تجزیه به ۶ چهاروجهی از این نوع است (۳ نسخهٔ قابل انطباق، ۳ تصویر آینه‌ای).

همهٔ این نسخه‌های قابل انطباق و تصویرهای آینه‌ای دارای یک ناوردای دن هستند و بنابراین به‌ازای هر تابعک مناسب f به‌دست می‌آوریم

$$D_f(T_۲) = \frac{۱}{۶}D_f(C) = ۰$$

پس همهٔ ناورداهای دنِ چنین چهاروجهی صفرند! و به این ترتیب مسألهٔ سوم هیلبرت حل می‌شود زیرا ما قبلاً چهاروجهی متفاوت $T_۱$ را با قاعده‌ای قابل انطباق و ارتفاعی برابر با این، و با $D_f(T_۱) \neq ۰$ ساخته‌ایم. بنا به قضیهٔ دن‌ـهادویگر، $T_۱$ و $T_۲$ یکسان‌تجزیه‌پذیر نیستند، و حتی یکسان‌تکمیل‌پذیر هم نیستند.

پیوست: بس‌وجهی و چندوجهی

بس‌وجهی[1] محدب در $\mathbb{R}^d$ عبارت است از غلاف محدب یک مجموعهٔ متناهی

1. polytope

$s = \{s_1, \cdots, s_n\}$ یعنی مجموعه‌ای است به‌صورت

$$P = \operatorname{conv}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{s}_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

بس‌وجهیها مسلماً اشیای آشنایی هستند: نمونه‌های اصلی آنها چندضلعی محدب (بس‌وجهی محدب دوبعدی) و چندوجهی محدب (بس‌وجهی محدب سه‌بعدی) هستند.

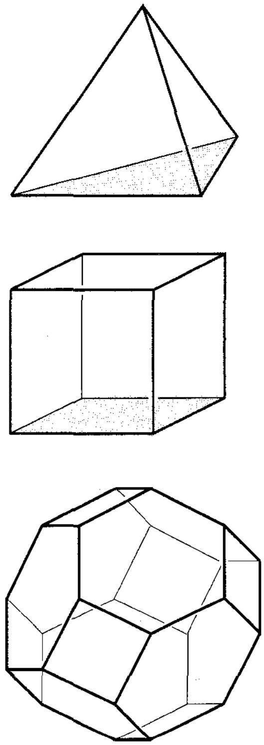
انواع متعددی از چندوجهیها هستند که به‌طور طبیعی به‌ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابند. مثلاً اگر مجموعهٔ S به‌طور آفین مستقل از کاردینال $d+1$ باشد، آنگاه $\operatorname{conv}(S)$ یک سادک dـبعدی (یا dـسادک) است. به‌ازای $d = 2$ یک مثلث داریم، به‌ازای $d = 3$ یک چهاروجهی به‌دست می‌آوریم. به‌همین نحو، مربعها و مکعبها حالتهای خاصی از مکعبهای dـبعدی‌اند، از قبیل مکعب dـبعدی یکه که به‌صورت $C_d = [0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$ مشخص می‌شود.

بس‌وجهی تعمیم‌یافته به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی از بس‌وجهیهای محدب تعریف می‌شود. در این کتاب، چندوجهیهای نامحدب در ارتباط با قضیهٔ صلبیت کوشی در فصل ۱۱ مطرح خواهند شد، و با چندضلعیهای نامحدب در ارتباط با قضیهٔ پیک در فصل ۱۰، و دوباره هنگامی که قضیهٔ گالری هنری را در فصل ۲۶ مورد بحث قرار می‌دهیم، سروکار خواهیم داشت.

بس‌وجهیهای محدب را می‌توان، به‌طور معادل، به‌صورت مجموعهٔ کراندار جوابهای دستگاهی متناهی از نامعادله‌های خطی تعریف کرد. بنابراین هر بس‌وجهی محدب $P \subseteq \mathbb{R}^d$ نمایشی به‌صورت

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

به‌ازای ماتریسی چون $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ و برداری چون $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ دارد. به‌عبارت دیگر، P مجموعه جواب دستگاهی از m نامعادلهٔ خطی $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i$ است که در آن $\boldsymbol{a}_i^T$ سطر iام A است. به‌عکس، هرچنین مجموعهٔ کرانداری از جوابها یک بس‌وجهی محدب است، و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت غلاف محدب مجموعه‌ای متناهی از نقاط نمایش داد.



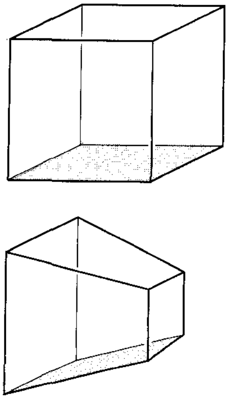
برخی بس‌وجهیهای آشنا: چهاروجهی، مکعب، هشت‌وجهی بریده

در مورد چندضلعیها و چندوجهیها، مفاهیم آشنای رأسها، یالها، و وجه‌های دوبعدی را داریم. برای بس‌وجهیهای محدب از ابعاد بالاتر، می‌توانیم وجوه را به‌این صورت تعریف کنیم: یک وجه P زیرمجموعه‌ای چون $F \subseteq P$ است به‌صورت

$P \cap \{x \in P : a^T x = b\}$ که در آن $a^T x \leq b$ نامعادله‌ای خطی است که به‌ازای همهٔ نقطه‌های $x \in P$ برقرار است.

همهٔ وجوه بس‌وجهی خودشان بس‌وجهی‌اند. مجموعهٔ V مرکب از رأسها (وجوه ۰ بعدی) یک بس‌وجهی، مجموعه‌ای مینیمال است به‌قسمی که $P = \operatorname{conv}(V)$. با فرض اینکه $P \subseteq \mathbb{R}^d$ یک بس‌وجهی dـبعدی باشد، وجوه $(d-1)$ بعدی آن مجموعهٔ مینیمالی از ابرصفحه‌ها، و لذا از نیمفضا[1]ها، را معین می‌کنند که شامل P است، و اشتراک آنها P است. به‌خصوص از اینجا نتیجه‌ای به‌دست می‌آید که بعداً به آن نیاز خواهیم داشت: فرض می‌کنیم F یک وجه $d-1$ بعدی از بس‌وجهی d بعدی P باشد، ابرصفحه‌ای را که F معین می‌کند با H_F نشان می‌دهیم، و دو نیمضای بستهٔ محدود به H_F را با H_F^+ و H_F^- می‌نمایانیم. در این‌صورت یکی از این دو نیمضا شامل P است (و دیگری نیست).

$G(P)$، گراف بس‌وجهی P، با مجموعهٔ رأسها، V، و مجموعهٔ یالها یا وجوه یک‌بعدی، E، مشخص می‌شود. اگر P دارای سه بعد باشد، آنگاه این گراف هامنی است و به‌دستور مشهور به «فرمول چندوجهی اویلر» می‌انجامد (فصل ۱۰ را ببینید).



بس‌وجهیهای هم‌ارز از لحاظ ترکیبیاتی

دو بس‌وجهی $P, P' \subseteq \mathbb{R}^d$ همنهشت [قابل انطباق]اند اگر نگاشت آفین حافظ طولی وجود داشته باشد که P را به P' ببرد. چنین نگاشتی می‌تواند جهت فضا را برعکس کند، همان‌طور که با قرینه‌یابی P نسبت به یک ابرصفحه، که P را به یک تصویر آینه‌ای P می‌برد، این کار انجام می‌شود. آنها از لحاظ ترکیبیاتی هم‌ارز، [هم‌ارز ترکیبیاتی] هستند اگر نگاشتی دوسویی از وجوه P به وجوه P' وجود داشته باشد که بعد و رابطه‌های شمول بین وجوه را حفظ کند. مفهوم هم‌ارزی ترکیبیاتی خیلی ضعیفتر از قابلیت انطباق است: مثلا شکلی که در اینجا آمده یک مکعب یکه و یک مکعب «چاوله» را نشان می‌دهد که از لحاظ ترکیبیاتی هم‌ارزند (و بنابراین هر یک از آنها را می‌توان «مکعب» نامید) ولی مسلماً قابل انطباق نیستند.

گفته می‌شود یک بس‌وجهی (یا زیرمجموعهٔ کلیتری از $\mathbb{R}^d$) تقارن مرکزی دارد اگر نقطه‌ای چون $x_0 \in \mathbb{R}^d$ وجود داشته باشد که

$$x_0 + x \in P \Longleftrightarrow x_0 - x \in P$$

در چنین حالتی، x_0 را مرکز P می‌نامیم.

1. halfspace

مراجع

[1] V.G. BOLTIANSKII: *Hilbert's Third Problem*, V.H. Winston & Sons (Halsted Press, John Wiley & Sons), Washington DC 1978.

[2] M. DEHN: *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 345-354.

[3] M. DEHN: *Ueber den Rauminhalt*, Mathematische Annalen **55** (1902), 465-478.

[4] C.F. GAUSS: *"Congruenz und Symmetrie": Briefwechsel mit Gerling*, pp.240-249 in: Werke, Band VIII, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; B.G. Teubner, Leipzig 1900.

[5] D. HILBERT: *Mathematical Problems*, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.

[6] G.M. ZIEGLER: *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag New York 1995.

فصل۸ آرایش خطها در صفحه و تجزیهٔ گرافها

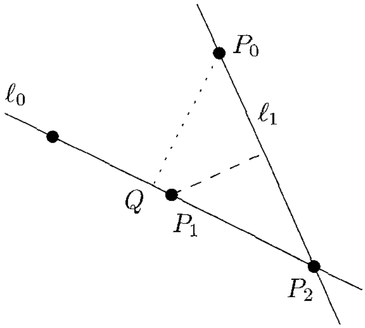
جیمز جوزف سیلوستر

شاید معروفترین مسأله دربارهٔ آرایشهای خطوط در صفحه مسألهای باشد که سیلوستر در ۱۸۹۳ در یک ستون مسائل ریاضی مطرح کرد.

مسأله برای حل

۱۱۸۵۱. (پروفسور سیلوستر)ـــثابت کنید که امکان ندارد تعدادی متناهی نقطهٔ حقیقی را طوری قرار دهیم که هر خط راستی که از دو تا از آنها می‌گذرد، از نقطهٔ سومی هم بگذرد مگر اینکه نقطه‌ها همگی بر یک خط راست واقع باشند.

اینکه خود سیلوستر اثباتی برای این حکم داشته بوده باشد، محل تردید است ولی حدود ۴۰ سال بعد، تیبورگالای[1] [گرونوالد[2]] اثبات درستی از آن عرضه کرد. بنابراین، قضیهٔ زیر معمولاً به سیلوستر وگالای نسبت داده می‌شود. پس از اثبات گالای، اثباتهای متعدد دیگری عرضه شد، ولی استدلال زیرکه از آن کلی[3] است، ممکن است «بهترین اثبات» به‌معنی واقعی کلمه باشد.



قضیهٔ ۱. در هر آرایشی از n نقطهٔ واقع در صفحه، که همه روی یک خط نباشند، خطی وجود دارد که دقیقاً شامل دو تا از آن نقطه‌هاست.

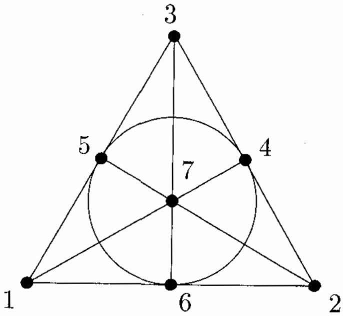
■ **اثبات.** فرض می‌کنیم $\mathcal{P}$ مجموعهٔ مفروض نقاط باشد و مجموعهٔ $\mathcal{L}$ مرکب از همهٔ خطهایی را که دست‌کم از دو نقطهٔ $\mathcal{P}$ می‌گذرند در نظر می‌گیریم. در میان همهٔ جفتهای (P,ℓ) که P روی ℓ نیست، جفتی چون (P_0,ℓ_0) انتخاب می‌کنیم که P_0 کوچکترین فاصله را تا ℓ_0 داشته باشد، و Q را نزدیکترین نقطهٔ روی ℓ_0 تا P_0 می‌گیریم (پای عمودی که از P_0 بر ℓ_0 وارد شود).

ادعا. این خطِ ℓ_0 خط مورد نظر است!

اگر چنین نباشد، آنگاه ℓ_0 شاملِ دست‌کم سه نقطه از $\mathcal{P}$ است، و دست‌کم دوتا از آنها، مثلاً P_1 و P_2، در یک طرف Q واقع‌اند. فرض می‌کنیم P_1 بین Q و P_2

1. Tibor Gallai 2. Grünwald 3. L.M. Kelly

باشد که P_1 ممکن است بر Q منطبق باشد. شکل حاشیه این آرایش را نشان می‌دهد. نتیجه می‌گیریم که فاصلهٔ P_1 تا خط ℓ_1، که این خط به‌وسیلهٔ P_0 و P_2 معین می‌شود، کوتاهتر از فاصلهٔ P_0 تا ℓ_0 است، و این متناقض با نحوهٔ انتخاب ℓ_0 و P_0 است. $\square$



در این اثبات، از اصول موضوع متری (کوتاهترین فاصله) و ترتیب (اینکه P_1 بین Q و P_2 واقع است) در صفحهٔ حقیقی استفاده کرده‌ایم. آیا واقعاً به این ویژگیها، علاوه بر اصول موضوع معمولی ملازمت[1] [وقوع] نقطه و خط، نیاز داریم؟ خوب، همان‌طور که صفحهٔ مشهور فانو[2] که در حاشیه آمده است نشان می‌دهد، شرطی اضافی لازم است. در اینجا $\mathcal{P} = \{۱, ۲, \cdots, ۷\}$ و $\mathcal{L}$، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود مرکب از ۷ خطِ سه‌نقطه‌ای است از جمله «خطِ» $\{۴, ۵, ۶\}$. هر دو نقطه یک خط یکتا را معین می‌کنند، بنابراین اصلهای موضوع ملازمت برقرارند ولی هیچ خطِ ۲ نقطه‌ای وجود ندارد. پس قضیهٔ سیلوستر-گالای نشان می‌دهد که آرایش فانو را نمی‌توان در صفحهٔ واقعی تشکیل داد به‌نحوی که هفت سه‌تایی همخط روی خطهای واقعی باشند: همیشه باید یک خط «خمیده» وجود داشته باشد.

با این حال، کاکستر[3] نشان داد که اصول موضوع ترتیب برای اثبات قضیهٔ سیلوستر-گالای کفایت می‌کنند. پس می‌توان اثباتی طرح کرد که در آن از ویژگیهای متری استفاده نشود ــ اثباتی را نیز که در فصل ۱۰ با استفاده از فرمول اویلر می‌آوریم، ببینید.

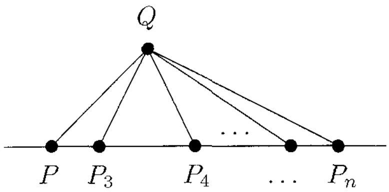
از قضیهٔ سیلوستر-گالای مستقیماً حکم معروف دیگری دربارهٔ نقطه‌ها و خطهای صفحه، که از آنِ پال اردوش و نیکولاس دو بروین[4] است، به‌دست می‌آید. ولی این حکم، همان‌طور که اردوش و دو بروین دریافته بودند، در حالت کلیتری برای دستگاههای دلخواه نقطه-خط برقرار است. این حکمِ کلیتر را کمی بعد مورد بحث قرار خواهیم داد.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعهٔ $n \geq ۳$ نقطه در صفحه است، که همگی روی یک خط نیستند. در این صورت، مجموعهٔ $\mathcal{L}$ مرکب از خطهای گذرنده از دست‌کم دو نقطه، شامل دست‌کم n خط است.

■ **اثبات.** به‌ازای $n = ۳$، حکم واضح است. اکنون به‌استقرا بر n پیش می‌رویم.

۱. incidence. منظور از ملازمت یک نقطه و یک خط این است که یا آن نقطه بر آن خط واقع است یا آن خط از آن نقطه می‌گذرد.ـم.

2. Fano 3. Coxeter 4. G. de Bruijn



فرض کنیم $|\mathcal{P}| = n + ۱$. بنا به قضیهٔ قبل، خطی چون $\ell_۰ \in \mathcal{L}$ وجود دارد که شامل دقیقاً دو نقطهٔ P و Q از $\mathcal{P}$ است. مجموعهٔ $\mathcal{P}' = \mathcal{P}\backslash\mathbb{Q}$ و مجموعهٔ $\mathcal{L}'$ را که مرکب از خطهایی است که با $\mathcal{P}'$ معین می‌شوند در نظر می‌گیریم. اگر نقطه‌های $\mathcal{P}'$ روی یک خط واقع نباشند، آنگاه به استقرا، $|\mathcal{L}'| \geq n$ و از اینجا، به‌علت خط اضافی $\ell_۰$ در $\mathcal{L}$، $|\mathcal{L}| \geq n + ۱$. ولی اگر نقطه‌های متعلق به $\mathcal{P}'$ همگی روی یک خط باشند، آنگاه «دسته خط»ی داریم که دقیقاً $n + ۱$ خط را به‌دست می‌دهد.□

اینک، همان‌طور که وعده دادیم، حکم کلی را می‌آوریم که در مورد «هندسه‌های ملازمت» بسیار کلیتری صادق است.

قضیهٔ ۳. فرض کنید X مجموعه‌ای از $n \geq ۳$ عضو باشد، و $A_۱$، ...، A_m زیرمجموعه‌های سرهٔ X باشند به‌قسمی که هر جفت از عضوهای X دقیقاً به یک مجموعهٔ A_i تعلق داشته باشد. در این‌صورت، $m \geq n$ برقرار است.

■ **اثبات.** اثبات زیر، که بعضیها آن را به موتسکین[1] نسبت داده‌اند و بعضیها به کانوی[2]، بسیار کوتاه و واقعاً الهامبخش است. به‌ازای $x \in X$، فرض کنید r_x تعداد مجموعه‌های A_i باشد که شامل xاند. (توجه کنید که $۲ \leq r_x$، و $r_x < m$ چون $n \geq ۳$.) حال اگر $x \notin A_i$، آنگاه $r_x \geq |A_i|$ زیرا مجموعه‌های $|A_i|$ شامل xاند و عضوی از A_i باید متمایز باشد. فرض کنیم $m < n$، در این‌صورت $m|A_i| < nr_x$ و بنابراین به‌ازای $x \notin A_i$ داریم $m(n - |A_i| > n(m - r_x)$، و به‌دست می‌آوریم

$$۱ = \sum_{x\in X} \frac{۱}{n} = \sum_{x\in X} \sum_{A_i : x\notin A_i} \frac{۱}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x : x\notin A_i} \frac{۱}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{۱}{m} = ۱$$

که مهمل است. □

اثبات بسیار کوتاه دیگری برای این قضیه هست که در آن از جبر خطی استفاده می‌شود. فرض کنیم B ماتریس ملازمت $\{X; A_۱, \cdots, A_m\}$ باشد یعنی سطرهای B به‌وسیلهٔ عضوهای X اندیسگذاری می‌شوند و ستونهای آن به‌وسیلهٔ $A_۱$، ...، A_m که در آن

$$B_{xA} := \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

1. Motzkin 2. Conway

حاصلضرب BB^T را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $x \neq x'$ داریم $(BB^T)_{xx'} = 1$ چون x و x' دقیقاً به یک مجموعهٔ A تعلق دارند، پس

$$BB^T = \begin{pmatrix} r_{x_1}-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{x_2}-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{x_n}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن r_x به‌صورت بالا تعریف می‌شود. چون ماتریس اول معین مثبت است (فقط ویژه‌مقدارهای مثبت دارد) و ماتریس دوم نیمه معین مثبت است (دارای ویژه‌مقدارهای n و ۰ است)، نتیجه می‌گیریم که BB^T معین مثبت است و بنابراین، به‌خصوص، وارون‌پذیر است، و لذا رتبهٔ BB^T برابر است با n. پس رتبهٔ ماتریس B که $n \times m$ است، دست‌کم n است، و به‌این نتیجه می‌رسیم که واقعاً $n \leq m$، زیرا رتبه نمی‌تواند از تعداد ستونها بیشتر باشد.

کمی فراتر می‌رویم و به‌نظریهٔ گراف می‌پردازیم (در پیوست این فصل، مفاهیم بنیادی گراف مرور شده است.) با اندکی تأمل در می‌یابیم که گزارهٔ زیر واقعاً با قضیهٔ ۳ یکی است:

> اگر گراف کامل K_n را به m خوشهٔ متفاوت با K_n تجزیه کنیم به‌نحوی که هر یال در فقط یک خوشه باشد، آنگاه $m \geq n$.

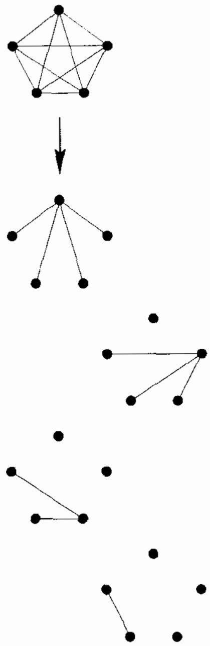
در واقع اگر X را متناظر با مجموعهٔ رأسهای K_n و مجموعه‌های A_i را متناظر با مجموعه‌های رأسهای خوشه‌ها بگیریم، آنگاه صورت دو قضیه یکی می‌شود.

کار بعدی ما تجزیهٔ K_n به گرافهای دو بخشی کامل است به‌نحوی که هر یال، باز دقیقاً در یکی از این گرافها باشد. راه ساده‌ای برای این کار هست. رأسها را به‌صورت $\{1, 2, \cdots, n\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. نخست گراف دو بخشی کاملی را در نظر می‌گیریم که ۱ را به همهٔ رأسهای دیگر پیوند می‌دهد. به‌این ترتیب، گراف $K_{1,n-1}$ به‌دست می‌آید که ستاره نامیده می‌شود. سپس ۲ را به ۳، $\cdots$، n، وصل می‌کنیم و ستارهٔ $K_{1,n-2}$ را به‌دست می‌آوریم. با ادامهٔ این کار، K_n به‌ستاره‌های $K_{1,n-1}$، $K_{1,n-2}$، $\cdots$، $K_{1,1}$ تجزیه می‌شود. در این تجزیه، $n-1$ گراف دو بخشی کامل به‌کار می‌رود. آیا می‌توانیم بهتر عمل کنیم، یعنی گرافهای کمتری به‌کار بریم؟ قضیهٔ زیر

که از آنِ ران گراهام[1] و هنری اُ.پولاک[2] است، پاسخ منفی به‌این پرسش می‌دهد:

قضیهٔ ۴. اگر K_n، $n \geq 2$، به‌زیرگرافهای دوبخشی کامل H_1، $\cdots$، H_m تجزیه شود، آنگاه $m \geq n-1$.

نکتهٔ جالب توجه این است که برخلاف قضیهٔ اردوش ـ دو بروین، هیچ اثبات ترکیبیاتی برای این حکم به‌دست نیامده است! در همهٔ اثباتها از جبر خطی به این یا آن صورت استفاده می‌شود. از میان این اثباتهایِ کم و بیش معادل، نگاهی می‌افکنیم به اثباتی که متعلق به توربرگ[3] است و شاید روشنتر از همه باشد.



تجزیهٔ K_5 به ۴ زیرگراف دو بخشی کامل

■ **اثبات.** فرض می‌کنیم مجموعهٔ رأسهای K_n، $\{1, \cdots, n\}$ باشد، و L_j، R_j مجموعه‌های رأسهای معرف گراف دو بخشی کامل H_j، $j = 1, \cdots, m$، باشند. به هر رأس i متغیری چون x_i نسبت می‌دهیم. چون H_1، $\cdots$، H_m، گراف K_n را تجزیه می‌کنند، داریم

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \right) \qquad (1)$$

حال فرض کنید قضیه غلط است یعنی $m < n-1$. در این‌صورت، در دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= 0 \\ \sum_{a \in L_k} x_a &= 0 \quad (k = 1, \cdots, m) \end{aligned}$$

تعداد معادله‌ها کمتر از متغیرهاست، پس جوابی غیر بدیهی چون c_1، $\cdots$، c_n وجود دارد. از (۱) نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0$$

ولی از اینجا به‌دست می‌آید

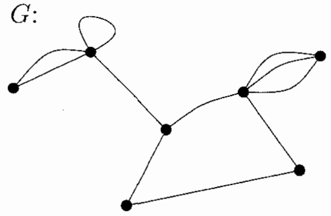
$$0 = (c_1 + \cdots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$$

که تناقض است، و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

1. Ron Graham 2. Henry O. Pollak 3. Tverberg

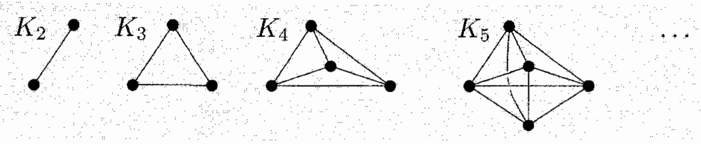
پیوست: مفاهیم بنیادی گراف

گراف از جملهٔ بنیادیترین ساختارهای ریاضی است. بنابراین گرافها انواع، نمایشها، و تجسمهای متفاوت متعددی دارند. به‌زبان انتزاعی، گراف جفتی چون $G = (V, E)$ است که V مجموعهٔ رأسها و E مجموعهٔ یالهاست، و هر یال $e \in E$ دو رأس $v, w \in V$ را «به‌هم وصل می‌کند». ما فقط گرافهای متناهی را در نظر می‌گیریم که در آنها V و E متناهی‌اند. معمولاً با گرافهای ساده سروکار داریم: در این گرافها، طوقه[1] یعنی یالی که دو انتهایش بر هم منطبق باشند، و یال چندگانه یعنی چند یال که مجموعهٔ رأسهای آنها یکی باشد، وجود ندارد. دو رأس از یک گراف را مجاور می‌نامند اگر رأسهای دو سرِ یک یال باشند. یک رأس و یک یال ملازم هم[2] نامیده می‌شوند اگر آن رأس، رأسِ یک سرِ آن یال باشد.

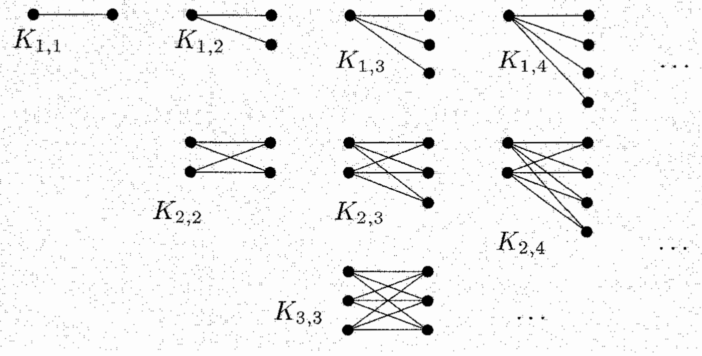


یک گراف G با ۷ رأس و ۱۱ یال، که یک طوقه، یک یال دوگانه و یک یال سه‌گانه دارد.

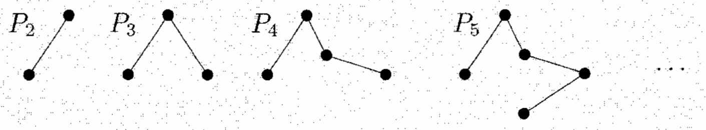
در اینجا چند گراف مهم (ساده) را می‌بینید:



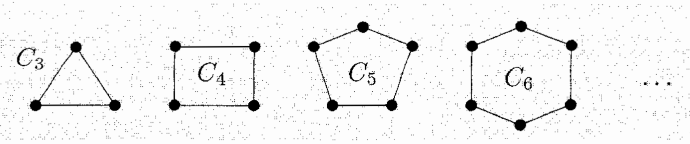
گرافهای کامل K_n با n رأس و $\binom{n}{2}$ یال



گرافهای دوبخشی کامل K_{m+n} با $m+n$ رأس و mn یال



مسیرهای P_n با n رأس

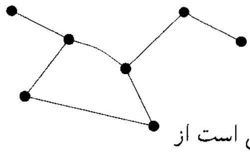


دورهای C_n با n رأس

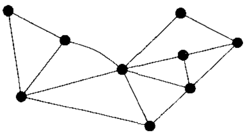
1. loop 2. incident

دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ یکریخت قلمداد می‌شوند اگر تناظرهای دوسویی $V \to V'$ و $E \to E'$ وجود داشته باشند که رابطهٔ ملازمت را بین یالها و رأسهای آنها حفظ کنند. (مسألهٔ وجود آزمون کارامدی برای تعیین یکریخت بودن دو گراف مفروض، مسألهٔ حل‌نشدهٔ مهمی است.) این مفهوم یکریختی به ما امکان می‌دهد از گراف کامل یکتای K_5 با ۵ رأس، و نظایر آن، صحبت کنیم.

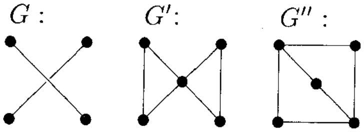
$G' = (V', E')$ یک زیرگراف $G = (V, E)$ است اگر $V' \subseteq V$، $E' \subseteq E$، و هر یال $e \in E'$ همان رأسهایی را در G' داشته باشد که در G دارد. G' یک زیرگراف القایی[1] است اگر علاوه بر آن، همهٔ یالهایی از G که رأسهای G' را به هم وصل می‌کنند، یالهایی از G' نیز باشند.



این زیرگرافی است از



بسیاری از مفاهیم مربوط به گراف کاملاً جنبهٔ شهودی دارند: مثلاً گراف G همبند است اگر هر دو رأس متمایز آن با مسیری در G به هم وصل شوند یا به‌عبارت دیگر، اگر نتوان G را به دو زیرگراف ناتهی تجزیه کرد که مجموعه‌های رأسهایشان مجزا باشند. گراف G دوگانه‌ـهمبند است اگر هر دو رأس متمایز با دو مسیر در G به هم وصل شوند که از هم مجزا باشند و فقط انتهاهای آنها برهم منطبق باشد (و تشکیل یک چرخه یا دور[2] در G بدهند) یا معادل آن، اگر G را نتوان به دو زیرگراف دست‌کم با دو رأس تجزیه کرد که مجزا باشند یا در حداکثر یک رأس تلاقی کنند (که آن را رأس برشی[3] G می‌نامند).



G همبند نیست
G' همبند است ولی دوگانه‌ـهمبند نیست
G'' دوگانه همبند است.

مرور مفاهیم بنیادی گراف را با شرح چند اصطلاح دیگر به پایان می‌آوریم: هر خوشه[4] در G یک زیرگراف کامل است. هر مجموعهٔ مستقل در G، زیرگرافی القایی بدون یال است، یعنی زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رأسها به‌گونه‌ای که هیچ دو رأسی به‌وسیلهٔ یک یال G به هم وصل نشوند. گراف را جنگل می‌نامند اگر شامل هیچ دوری نباشد. درخت، جنگلی همبند است. گراف $G = (V, E)$ دوبخشی است اگر یکریخت با زیرگرافی از یک گراف دوبخشی کامل باشد، یعنی اگر مجموعهٔ رأسهایش را بتوان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ مستقل همچون $V = V_1 \cup V_2$ نوشت.

مراجع

[1] N.G. de Bruijn & P. Erdős: *On a combinatorial problem*, Proc.

1. induced subgraph 2. cycle 3. cut vertex 4. cliqu

Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51** (1948), 1277-1279.

[2] H.S.M. COXETER: *A problem of collinear points*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 26-28 (contains Kelly's proof).

[3] P.ERDŐS: *Problem 4065-Three point collinearity*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), 169-171 (contains Gallai's proof).

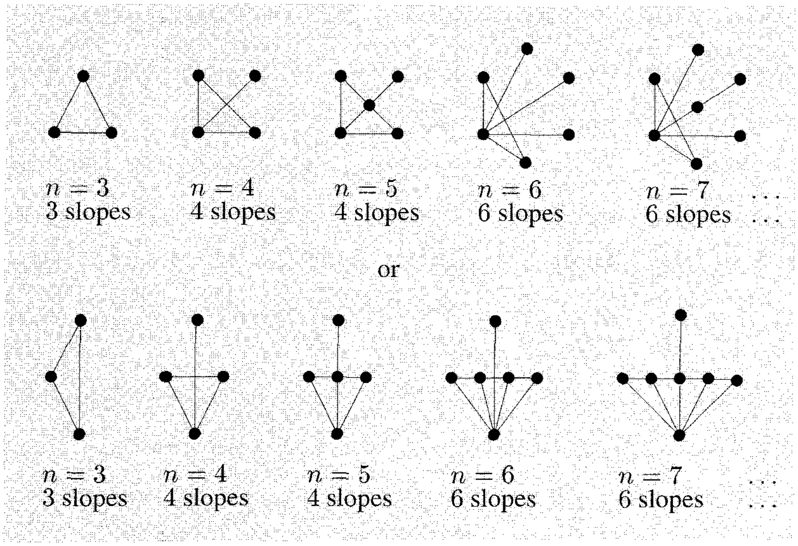
[4] R.L. GRAHAM & H.O. POLLAK: *On the addressing problem for loop switching*, Bell System Tech. J. **50** (1971), 2495-2519.

[5] J.J. SYLVESTER: *Mathematical Question 11851*, The Educational Times **46** (1893), 156.

[6] H. TVERBERG: *On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs*, J. Graph Theory **6** (1982), 493-494.

مسألهٔ شیب فصل ۹

پیش از خواندن این مطلب سعی کنید آرایشهایی از نقطه‌ها در صفحه ترتیب دهید که تعداد «نسبتاً کمی» شیب را معین کنند. به‌این منظور البته فرض می‌کنیم همهٔ $n \geq ۳$ نقطه روی یک خط واقع نیستند. قضیهٔ اردوش دو بروین در فصل ۸، «آرایش خطها در صفحه»، حاکی از این بود که n نقطه دست‌کم n خط متفاوت را معین می‌کنند. ولی البته بسیاری از این خطها ممکن است موازی باشند و شیب یکسانی را مشخص کنند.



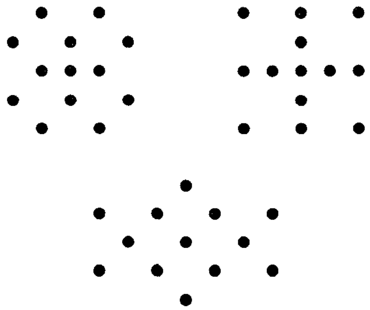
با کمی آزمایش به‌ازای مقدارهای کوچک n احتمالاً به‌دنباله‌ای از شکلها، نظیر دو دنباله‌ای که در اینجا دیده می‌شود، دست می‌یابید.

پس از قدری تلاش برای یافتن آرایشهایی با شیبهای کمتر، ممکن است قضیهٔ زیر را حدس بزنید ـــ همان طور که اسکات در سال ۱۹۷۰ حدس زد:

> **قضیه.** اگر $n \geq ۳$ نقطه در صفحه بر یک خط واقع نباشند، آنگاه دست‌کم $n - ۱$ شیب متفاوت معین می‌کنند، و در صورتی ممکن است دقیقاً همین تعداد شیب را معین کنند که n فرد باشد و $n \geq ۵$.

نمونه‌های بالا ـــ که چند آرایش اولیه در دو دنبالهٔ نامتناهی از نمونه‌ها هستند ـــ

نشان می‌دهند که قضیهٔ بالا به‌صورتی که بیان شده است، حاکی از بهترین امکان است زیرا به‌ازای هر n فرد که $n \geq ۵$، آرایشی با n نقطه وجود دارد که دقیقاً $n - ۱$ شیب متفاوت را معین می‌کند، و به‌ازای هر n دیگر که $n \geq ۳$، آرایشی با دقیقاً n شیب داریم.

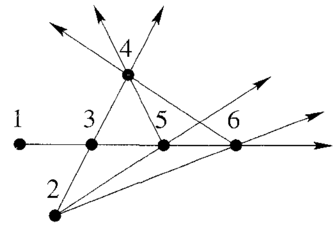


سه نمونهٔ پراکنده از کاتالوگ جمیسن‌ـهیل

ولی آرایشهایی که در بالا نشان دادیم تنها آرایشهای ممکن نیستند. مثلاً جمیسن[1] و هیل[2] چهار خانوادهٔ نامتناهی از آرایشها را معرفی کردند که هر یک مرکب از آرایشهایی با تعدادی فرد از نقاط است که فقط $n - ۱$ شیب را معین می‌کنند (آرایشهای شیب‌ـبحرانی). به‌علاوه، آنها ۱۰۲ نمونهٔ «پراکنده» عرضه کردند که به‌نظر نمی‌رسد متعلق به‌خانواده‌ای نامتناهی باشند، و بیشتر آنها با جستجوی گستردهٔ کامپیوتری به‌دست آمدند.

فهم متعارف حکم می‌کند که اگر آرایشهای فرین (اکسترمال) این قدر پراکنده و نامنظم‌اند، حل دقیق مسأله‌های فرین باید بسیار دشوار باشد. در واقع، مطالب زیادی دربارهٔ ساختار آرایشهای شیب‌ـبحرانی می‌توان گفت ([۲] را ببینید) ولی طبقه‌بندی آنها کاملاً خارج از دسترس به‌نظر می‌رسد. با این حال، قضیهٔ بالا اثبات ساده‌ای دارد که دارای دو جزء اصلی است: تحویل به یک مدل ترکیبیاتی کارامد که کار الی گودمن[3] و ریکی پولاک[4] است، و استدلال زیبایی در این مدل که پیتر اُنگار[5] اثبات را به کمک آن در ۱۹۸۲ به‌انجام رساند.

■ **اثبات.** (۱) نخست توجه می‌کنیم که کافی است نشان دهیم هر مجموعهٔ «زوج» مرکب از $n = ۲m$ نقطه در صفحه ($m \geq ۲$) دست‌کم n شیب را معین می‌کند. حالت $n = ۳$ بدیهی است، و برای هر مجموعهٔ مرکب از $n = ۲m + ۱ \geq ۵$ نقطه (که همگی بر یک خط نیستند) می‌توانیم زیرمجموعه‌ای مرکب از $n - ۱ = ۲m$ نقطه، که همگی بر یک خط نیستند، پیدا کنیم که $n - ۱$ شیب را معین می‌کند.



این آرایش که مرکب از $n = ۶$ نقطه است، $t = ۶$ شیب متفاوت را معین می‌کند.

پس در زیر، آرایشی مرکب از $n = ۲m$ نقطه در صفحه در نظر می‌گیریم که $t \geq ۲$ شیب متفاوت را مشخص می‌کند.

(۲) مدل ترکیبیاتی با ساختن دنباله‌ای تناوبی از جایگشتها به‌دست می‌آید. این کار را با جهتی در صفحه که متناظر یکی از شیبهای آرایش نیست آغاز می‌کنیم، و نقطه‌ها را به‌ترتیبی که در تصویر یک‌بعدی در این جهت ظاهر می‌شوند شماره‌گذاری

1. Jamison 2. Hill 3. Eli Goodman 4. Ricky Pollack 5. Peter Ungar

می‌کنیم: ۱، ...، n. پس جایگشت $\pi_0 = 123\ldots n$ نشان‌دهندهٔ ترتیب نقطه‌ها برای جهتِ آغازین ماست.

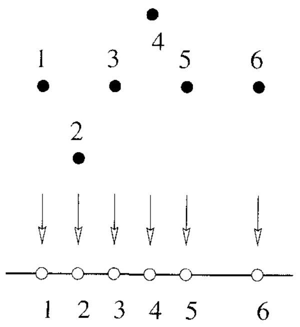
حال فرض می‌کنیم بردار جهت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به‌حرکت در آید و تغییرات تصویر و جایگشت آن را نظاره می‌کنیم. تغییرات در ترتیب نقاط تصویر شده دقیقاً وقتی رخ می‌دهند که بردار جهت از یکی از شیبهای آرایش می‌گذرد.

اما تغییرات به‌هیچ وجه تصادفی یا دلخواه نیستند: اگر بردار جهت به‌اندازهٔ 180° دوران کند، دنباله‌ای از جایگشتها:

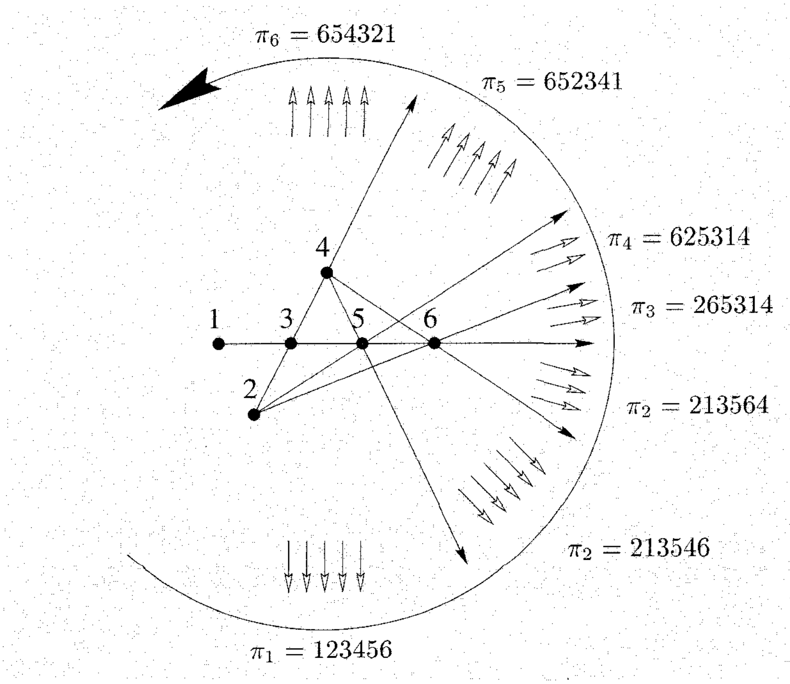
$$\pi_0 \to \pi_1 \to \pi_2 \to \cdots \to \pi_{t-1} \to \pi_t$$

به‌دست می‌آوریم که ویژگیهای خاص زیر را دارد:

- دنباله با $\pi_0 = 123\ldots n$ آغاز می‌شود و با $\pi_t = n\ldots 321$ پایان می‌یابد.
- طول دنباله، t، تعداد شیبهای آرایش نقاط است.
- در این دنباله، هر جفت $i < j$ دقیقاً یک‌بار تغییر می‌کند. این بدان معنی است که در مسیر از $\pi_0 = 123\cdots n$ تا $\pi_t = n\cdots 321$ فقط زیررشته‌های



در اینجا با انتخاب یک جهت آغازین قائم، $\pi_0 = 123456$ به‌دست می‌آید.



دنبالهٔ جایگشتها را برای مثال کوچک خود به‌دست می‌آوریم.

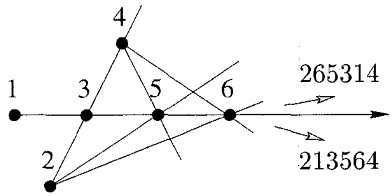
- هر حرکت متضمن معکوس‌شدن یک یا چند زیررشتهٔ صعودی مجزاست (متناظر با یک چندخطی که دارای جهتی هستند که در این نقطه از آن می‌گذریم).

با ادامهٔ حرکت دایره‌ای به دور آرایش نقاط، می‌توان دید که این دنباله بخشی از دنبالهٔ تناوبیِ نامتناهی دوطرفه‌ای از جایگشتهاست:

$$\to \pi_{-۱} \to \pi_۰ \to \cdots \to \pi_t \to \pi_{t+۱} \to \cdots \to \pi_{۲t} \to \cdots$$

که در آن π_{i+t} معکوس π_i به‌ازای هر i است، و بنابراین به‌ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، $\pi_{i+۲t} = \pi_i$. نشان خواهیم داد که هر دنباله با ویژگیهای بالا (و $t \geq ۲$) باید به‌طول $t \geq n$ باشد.

(۳) کلید اثباتْ تقسیم‌کردن هر جایگشت به یک «نیمهٔ چپ» و یک «نیمهٔ راست» با اندازهٔ برابر $m = \frac{n}{۲}$، و شمردن حروفی است که از مانع فرضی بین نیمه‌های چپ و راست می‌گذرند [بین دو طرف مانع جابه‌جا می‌شوند].



یک حرکت گذری

حرکت $\pi_i \to \pi_{i+۱}$ یک حرکت‌گذری نامیده می‌شود اگر یکی از زیررشته‌هایی که معکوس می‌کند شامل حروفی در دو طرف مانع باشد. حرکت گذری دارای مرتبهٔ d است اگر $۲d$ حرف را از مانع بگذراند یعنی اگر رشتهٔ گذرنده دقیقاً d حرف در یک طرف و دست‌کم d حرف در طرف دیگر داشته باشد. مثلاً در مثال ما

$$\pi_۲ = ۲\underline{۱۳ : ۵۶}۴ \longrightarrow ۲\overline{۶۵ : ۳۱}۴ = \pi_۳$$

یک حرکت گذری با مرتبهٔ $d = ۲$ است (۱، ۳، ۵، ۶ را از این سو به آن سوی مانع می‌برد؛ مانع را با ":" نشان داده‌ایم) و

$$۶۵\underline{۲ : ۳۴}۱ \longrightarrow ۶۵\overline{۴ : ۳۲}۱$$

حرکتی گذری با مرتبهٔ $d_۲ = ۱$ است، حال آنکه

$$۶\underline{۲۵} : ۳\underline{۱۴} \longrightarrow ۶\overline{۵۲} : ۳\overline{۴۱}$$

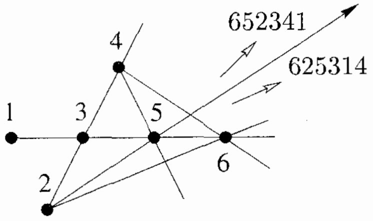
حرکت گذری نیست.

در دنبالهٔ جایگشتهای $\pi_t \to \cdots \to \pi_۱ \to \pi_۰$، هر یک از حرفهای ۱، ۲، ...، n باید دست‌کم یک بار از مانع بگذرد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر $d_۱$، ...، d_c نشان‌دهندهٔ مرتبه‌های c حرکت گذری باشند، داریم

$$\sum_{i=۱}^{c} ۲d_i = \#\{\text{حروفی که از مانع می‌گذرند}\} \geq n$$

این نیز دلالت می‌کند که دست‌کم دو حرکت گذری داریم، زیرا یک حرکت گذری با $2d_i = n$ فقط وقتی روی می‌دهد که همهٔ نقطه‌ها روی یک خط باشند، یعنی به‌ازای $t = 1$. از لحاظ هندسی، حرکت گذری متناظر با جهت خطی از آرایش است که کمتر از m نقطه در هر طرف داشته باشد.

(۴) حرکت مماسی حرکتی است که رشته‌ای را که مجاور مانع مرکزی است معکوس می‌کند ولی آن را از مانع عبور نمی‌دهد، مثلاً



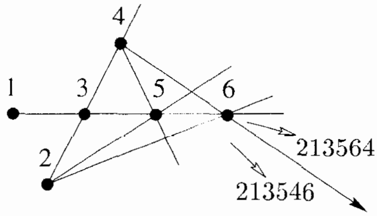
یک حرکت مماسی

$$\pi_4 = 6\underline{25} \ : \ 3\underline{14} \longrightarrow 6\overline{52} \ : \ 3\overline{41} = \pi_5$$

حرکتی مماسی است. از لحاظ هندسی، حرکت مماسی متناظر با شیبِ خطی از آرایش است که دقیقاً m نقطه در یک طرف دارد، و بنابراین، حداکثر $m - 2$ نقطه در طرف دیگر.

حرکتهایی که نه مماسی‌اند و نه گذری، حرکتهای معمولی نامیده می‌شوند، مانند

$$\pi_1 = 213 \ : \ 5\underline{46} \longrightarrow 213 \ : \ 5\overline{64} = \pi_2$$



یک حرکت معمولی

پس در مثال ما، هر حرکت یا مماسی است یا گذری و یا معمولی، و می‌توانیم به‌ترتیب از حروف C، T و O برای نشان دادن این سه نوع حرکت استفاده کنیم.[1] مثلاً $C(d)$ نشان‌دهندهٔ حرکتی گذری با مرتبهٔ d خواهد بود. پس برای مثال کوچکمان داریم

$$\pi_0 \xrightarrow{T} \pi_1 \xrightarrow{O} \pi_2 \xrightarrow{C(2)} \pi_3 \xrightarrow{O} \pi_4 \xrightarrow{T} \pi_5 \xrightarrow{C(1)} \pi_6$$

و این دنباله را می‌توانیم حتی به‌شکل خلاصه‌تر T، O، $C(2)$، O، T، $C(1)$ نشان دهیم.

(۵) برای تکمیل اثبات، لازم است دو حکم را ثابت کنیم:

بین هر دو حرکت گذری، دست‌کم یک حرکت مماسی هست.

بین هر حرکت گذری با مرتبهٔ d و حرکت مماسی بعدی، دست‌کم $d - 1$ حرکت معمولی هست.

در واقع پس از حرکتی گذری با مرتبهٔ d، مانع در زیررشته‌ای نزولی و متقارن به‌طول $2d$ قرار دارد که d حرف در هر طرف مانع واقع است. برای حرکت گذری بعدی، مانع مرکزی را باید به درونِ زیررشته‌ای صعودی با طولِ دست‌کم ۲ آورد. ولی فقط

۱. C، T، و O، به‌ترتیب حروف اول کلمات انگلیسی touching [مماسی]، crossing [گذری]، و ordinary [معمولی] است.ـم.

حرکتهای مماسی می‌توانند در اینکه مانع در درون زیررشته‌ای صعودی قرار گیرد مؤثر باشند. از اینجا حکم اول به‌دست می‌آید. در مورد حکم دوم، توجه کنید که با هر حرکت معمولی (معکوس کردن زیررشته‌هایی صعودی)، رشتهٔ نزولی به‌طول $۲d$ را می‌توان فقط به‌اندازهٔ یک حرف در هر طرف کوتاه کرد و مادام که رشتهٔ نزولی دستکم ۴ حرف دارد، حصول رشتهٔ مماسی غیر ممکن است. پس حکم دوم ثابت می‌شود.

اگر دنباله‌ای از جایگشتها با شروع از همین تصویر اولیه ولی با دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بسازیم، دنبالهٔ معکوس جایگشتها را به‌دست می‌آوریم. پس دنبالهٔ حاصل نیز باید در حکمی مقابل با حکم دوم ما صدق کند یعنی

بین حرکتی مماسی و حرکت گذری بعدی با مرتبهٔ d، دستکم $d - ۱$ حرکت معمولی وجود دارد.

(۶) الگوی T_O_C برای دنبالهٔ نامتناهی جایگشتها، که در (۲) برای دنبالهٔ متناهی $\pi_{۰} \to \cdots \to \pi_t$ به دست آمد، با بارها تکرار الگوی T_O_C به‌طول t برای دنبالهٔ حاصل می‌شود. پس با توجه به حکمهای (۵) می‌بینیم که در دنبالهٔ نامتناهی حرکتها، هر حرکت گذری با مرتبهٔ d در یک الگوی T_O_C از نوع

$$T, \underbrace{O, O, \ldots, O}_{\geq d-۱},\ C(d),\ \underbrace{O, O, \cdots, O}_{\geq d-۱} \qquad (*)$$

به‌طول $۲d = (d - ۱) + ۱ + (d - ۱) + ۱$ قرار می‌گیرد.

در دنبالهٔ نامتناهی، می‌توانیم قطعه‌ای متناهی به‌طول t در نظر بگیریم که با یک حرکت مماسی آغاز شود. این قطعه مرکب از زیررشته‌هایی از نوع $(*)$ است، به‌اضافهٔ احتمالاً Tهای اضافی که به آن وارد شده باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که طول t در

$$t \geq \sum_{i=۱}^{c} ۲d_i \geq n$$

صدق می‌کند و اثبات به انجام می‌رسد. □

مراجع

[1] J. E. Goodman & R. Pollack: *A combinatorial perspective on some problems in geometry*, Congressus Numerantium **32** (1981), 383-394.

[2] R.E. Jamison & D. Hill: *A catalogue of slope-critical configurations*, Congressus Numerantium **40** (1983), 101-125.

[3] P. R. Scoot: *On the sets of directions determined by n points*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 502-505.

[4] P. Ungar: *2N noncollinear points determine at least 2N directions*, J. Combinatorial Theory Ser. A **33** (1982), 343-347.

سه کاربرد از فرمول اویلر فصل ۱۰

گراف را هامنی [یامسطح‌شدنی] گوییم اگر بتوان آن را بدون آنکه یالهای متقاطعی داشته باشد در صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ (یا به‌طور معادل، روی کرهٔ دوبعدی S^2) رسم کرد. همچنین گراف را مسطح می‌گوییم اگر چنین ترسیمی از قبل داده شده و مشخص باشد. چنین ترسیمی صفحه یا کره را به‌تعدادی متناهی ناحیهٔ همبند، از جمله ناحیهٔ (بیکران) خارجی، تجزیه می‌کند که وجوه نامیده می‌شوند. فرمول اویلر نشان‌دهندهٔ رابطهٔ زیبایی بین تعداد رأسها، یالها، و وجوه است که برای هر گراف مسطحی برقرار است. اویلر این حکم را اول بار در نامه‌ای به دوستش گولدباخ در سال ۱۷۵۰ ذکر کرد ولی در آن زمان برهان کاملی برای آن نداشت. در میان اثباتهای متعدد فرمول اویلر، اثباتی زیبا و «خود دوگان» را می‌آوریم که بدون استقرا انجام می‌شود.

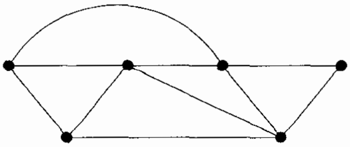
لئونهارت اویلر

فرمول اویلر. اگر G یک گراف مسطح همبند با n رأس، e یال، و f وجه باشد، آنگاه

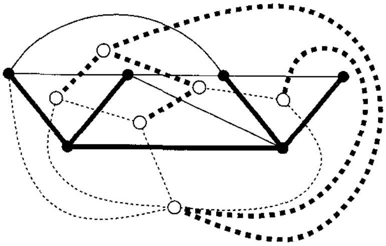
$$n - e + f = ۲$$

■ **اثبات.** فرض کنیم $T \subseteq E$ مجموعهٔ یالهای یک درخت فراگیر برای G باشد یعنی مجموعهٔ یالهای زیرگراف مینیمالی که همهٔ رأسهای G را به‌هم وصل کند. این گراف، با توجه به‌فرض مینیمال بودن، شامل دور نیست.

اکنون به گراف دوگان G، که آن را G^* می‌نامیم، نیاز داریم: برای ساختن آن، رأسی در درون هر وجه G قرار می‌دهیم و دو تا از این‌گونه رأسهای G^* را به‌وسیلهٔ یالهایی متناظر با یالهای مرزی مشترک بین وجوه متناظر به‌هم وصل می‌کنیم. اگر چندین یال مرزی مشترک وجود داشته باشند، آنگاه چند یالِ وصل‌کننده در گراف دوگان رسم می‌کنیم. (پس G^* ممکن است یالهای دوگانه داشته باشد حتی اگر گراف اصلی G ساده باشد.)


یک گراف مسطح G:
$n = ۶, e = ۱۰, f = ۶$

حال مجموعهٔ $T^* \subseteq E^*$ را در نظر می‌گیریم که مرکب از یالهایی در گراف دوگان است که با یالهایی در $E \backslash T$ متناظرند. یالهای T^* همهٔ وجوه را به‌هم وصل می‌کنند زیرا T شامل دور نیست؛ ولی T^* نیز شامل دور نیست زیرا اگر باشد، رئوسی از G در درون دور را از رئوسی در بیرون آن جدا می‌کند (و این ممکن نیست چون T یک

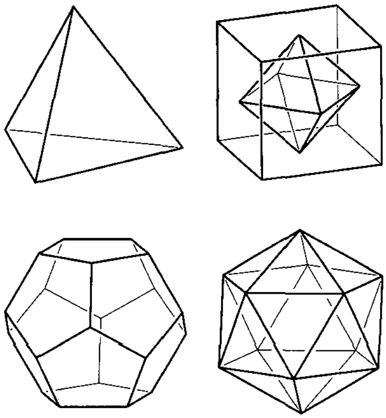


درختهای فراگیر دوگان G و G^*

زیرگراف فراگیر است و یالهای T و T^* متقاطع نیستند). پس T^* یک درخت فراگیر برای G^* است.

اکنون برای هر درخت، تعداد رأسها یکی بیشتر از تعداد یالهاست. برای نشان دادن این موضوع، یک رأس را به‌عنوان ریشه انتخاب می‌کنیم، و برای همهٔ یالها جهتی از ریشه به سمت رأس دیگر انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب، اگر هر یال را با رأسی که جهت آن یال به‌طرف آن است جفت کنیم، تناظری دوسویی بین رأسهای غیر ریشه و یالها برقرار می‌شود. اگر این را در مورد درخت T به‌کار ببریم، به‌دست می‌آید $n = e_T + ۱$ درحالی‌که در مورد درخت T^* خواهیم داشت $f = e_{T^*} + ۱$. با جمع کردن دو معادله داریم: $n + f = (e_T + ۱) + (e_{T^*} + ۱) = e + ۲$. □

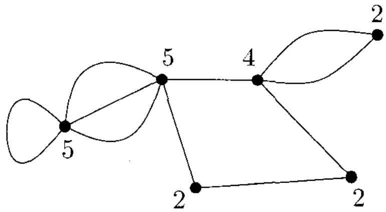
پس با استفاده از فرمول اویلر، یک حکم عددی قوی از یک وضعیت هندسی-توپولوژیک به‌دست می‌آید: تعداد رأسها، یالها، و وجوه گراف متناهی G در رابطهٔ $n - e + f = ۲$ صدق می‌کنند هرگاه این گراف، رسم شده یا قابل ترسیم در صفحه یا روی یک کره باشد.



پنج جسم افلاطونی

از فرمول اویلر، بسیاری از نتایج معروف و کلاسیک را می‌توان به‌دست آورد که از جمله، اینها هستند: رده‌بندی چندوجهیهای محدب منتظم (اجسام افلاطونی)، این واقعیت که $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ هامنی نیستند (در ادامهٔ این بحث خواهیم دید)، و قضیهٔ پنج رنگ مبنی بر اینکه هر نقشهٔ هامنی را می‌توان حداکثر با پنج رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌نحوی که هیچ دو کشور مجاور، رنگ یکسانی نداشته باشند. ولی برای این حکم اثبات بسیار بهتری داریم که حتی به‌فرمول اویلر هم نیازی ندارد ــ فصل ۲۵ را ببینید.

در این فصل سه اثبات زیبای دیگر می‌آوریم که فرمول اویلر هستهٔ آنها را تشکیل می‌دهد. در دو اثبات اول ــ اثباتی از قضیهٔ سیلوستر ــ گالای و قضیه‌ای مربوط به آرایش دو رنگی نقاط ــ تلفیق هوشمندانه‌ای از فرمول اویلر با روابط حسابی دیگر بین پارامترهای بنیادی گراف به‌کار می‌رود. نخست نگاهی به این پارامترها می‌اندازیم.



در اینجا درجه در کنار هر رأس نوشته شده است. با شمارش رأسهایِ از درجهٔ مفروض به‌دست می‌آید $n_۲ = ۳$، $n_۳ = ۰$، $n_۴ = ۱$، $n_۵ = ۲$.

درجهٔ یک رأس، تعداد یالهایی است که به آن رأس ختم می‌شوند (طوقه دوبار به‌حساب می‌آید). فرض کنید n_i نشان‌دهندهٔ تعداد رأسهای با درجهٔ i در G باشد. پس شمارش رأسها برحسب درجه‌هایشان چنین است

$$n = n_۰ + n_۱ + n_۲ + n_۳ + \dots \qquad (۱)$$

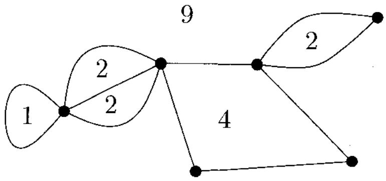
از سوی دیگر، هر یال دو انتها دارد و بنابراین ۲ واحد در مجموع همهٔ درجه‌ها سهم

دارد، و لذا

$$۲e = n_۱ + ۲n_۲ + ۳n_۳ + ۴n_۴ + \dots \qquad (۲)$$

این رابطه را می‌توانید به‌عنوان شمارش رأسهای متصل به‌یالها (یعنی ملازمتهای یال‌ـرأس) به دو روش مختلف، تعبیر کنید. پس درجهٔ میانگین رأسها، $\overline{d}$، برابر است با

$$\overline{d} = \frac{۲e}{n}$$



تعداد ضلعها در درون هر ناحیه نوشته شده است. اگر هر دسته از وجوهی را که تعداد مفروضی ضلع دارند بشمریم، به‌دست می‌آید $f_۱ = ۱$، $f_۲ = ۳$، $f_۴ = ۱$، $f_۹ = ۱$، و در غیر این موارد، $f_i = ۰$.

حال وجوه یک گراف مسطح را برحسب تعداد ضلعهایشان می‌شماریم. kـوجه، وجهی است که k یال آن را احاطه کرده‌اند (یالی که در هر دو طرف مجاور یک ناحیهٔ واحد باشد دوبار به‌حساب می‌آید!) فرض کنید f_k تعداد kـوجه‌ها باشد. با شمارش همهٔ وجوه به‌دست می‌آوریم

$$f = f_۱ + f_۲ + f_۳ + f_۴ + \dots \qquad (۳)$$

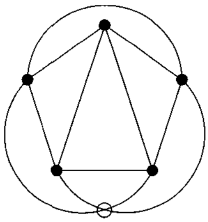
اگر یالها را برحسب وجوهی بشمریم که آن یالها اضلاعشان هستند، خواهیم داشت

$$۲e = f_۱ + ۲f_۲ + ۳f_۳ + ۴f_۴ + \dots \qquad (۴)$$

مانند قبل، می‌توان این را به‌صورت شمارش دوگانهٔ ملازمتهای یال‌ـرأس تعبیر کرد.

با توجه به اینکه تعداد میانگین ضلعهای وجوه برابر

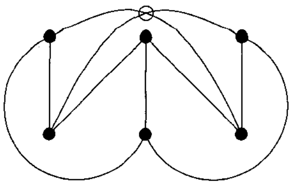
$$\overline{f} = \frac{۲e}{f}$$



$K_۵$ با یک تقاطع رسم شده است.

است می‌توانیم از اینجا ـــ همراه با فرمول اویلر ـــ به‌سرعت نتیجه بگیریم که گراف کامل $K_۵$ و گراف دوبخشی کامل $K_{۳,۳}$ هامنی نیستند. برای یک ترسیم مسطح فرضی $K_۵$ داریم $n = ۵$، $e = \binom{۵}{۲} = ۱۰$. پس $f = e + ۲ - n = ۷$ و $\overline{f} = \frac{۲e}{f} = \frac{۲۰}{۷} < ۳$. ولی اگر تعداد میانگین ضلعها کوچکتر از ۳ باشد، آنگاه وجهی با حداکثر دو ضلع در ترسیم فرضی خواهیم داشت که غیر ممکن است.

همین‌طور برای $K_{۳,۳}$ به‌دست می‌آوریم $n = ۶$، $e = ۹$، و $f = e + ۲ - n = ۵$، و بنابراین $\overline{f} = \frac{۲e}{f} = \frac{۱۸}{۵} < ۴$، که ممکن نیست زیرا $K_{۳,۳}$ ساده و دوبخشی است و از این رو همهٔ دورهایش دست‌کم طولی برابر ۴ دارند.



$K_{۳,۳}$ با یک تقاطع رسم شده است.

البته تصادفی نیست که رابطه‌های (۳) و (۴) برای f_iها این قدر شبیه روابط (۱) و (۲) برای n_iها به‌نظر می‌رسند. آنها با ساختار گراف دوگان $G \to G^*$ که در بالا تشریح شد، به‌هم تبدیل می‌شوند.

نتایج «موضعی» مهم زیر از فرمول اویلر را از رابطه‌های شمارش دوگانه به‌دست می‌آوریم.

گزاره. فرض کنید G گراف مسطح سادهٔ ناتهی دلخواهی باشد. در این‌صورت

(الف) G رأسی با درجهٔ حداکثر ۵ دارد.

(ب) G حداکثر $۳n - ۶$ یال دارد.

(پ) اگر یالهای G دورنگی باشند [تعدادی از یک رنگ و دیگران از رنگ دیگر باشند.]، آنگاه رأسی از G وجود دارد که یالهای مربوط به آن، در ترتیب دوری، حداکثر دوبار تغییر رنگ می‌دهند.

■ **اثبات.** برای هر یک از این سه گزاره می‌توانیم فرض کنیم که G همبند است.

(الف) هر وجه G دست‌کم ۳ ضلع دارد (زیرا G ساده است)؛ پس، از (۳) و (۴) به‌دست می‌آوریم

$$f = f_۳ + f_۴ + f_۵ + \dots$$
$$۲e = ۳f_۳ + ۴f_۴ + ۵f_۵ + \dots$$

و بنابراین $۲e - ۳f \geq ۰$.

حال اگر هر رأس، درجه‌ای حداقل برابر با ۶ داشته باشد، آنگاه از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$n = n_۶ + n_۷ + n_۸ + \dots$$
$$۲e = ۶n_۶ + ۷n_۷ + ۸n_۸ + \dots$$

و بنابراین $۲e - ۶n \geq ۰$.

اگر هر دو نابرابری را با هم در نظر بگیریم، به‌دست می‌آوریم

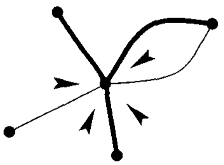
$$۶(e - n - f) = (۲e - ۶n) + ۲(۲e - ۳f) \geq ۰$$

و بنابراین $e \geq n + f$، که با فرمول اویلر مغایرت دارد.

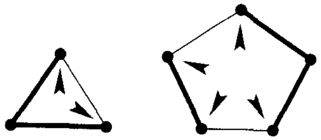
(ب) همانند گام اول قسمت (الف) به‌دست می‌آوریم $۲e - ۳f \geq ۰$، و بنابراین، با استفاده از فرمول اویلر داریم

$$۳n - ۶ = ۳e - ۳f \geq e$$

(پ) فرض کنید c تعداد گوشه‌هایی باشد که در آنها تغییر رنگ رخ می‌دهد. تصور کنید حکم غلط باشد. در این‌صورت، $c \geq 4n$ تغییر رنگ داریم زیرا در هر رأس، تعداد زوجی تغییر رخ می‌دهد. حال هر وجه با $2k$ یا $2k+1$ ضلع حداکثر $2k$ تا از این‌گونه گوشه‌ها دارد، بنابراین نتیجه می‌گیریم که



پیکانها به‌گوشه‌هایی اشاره دارند که در آنجا تغییر رنگ رخ می‌دهد.

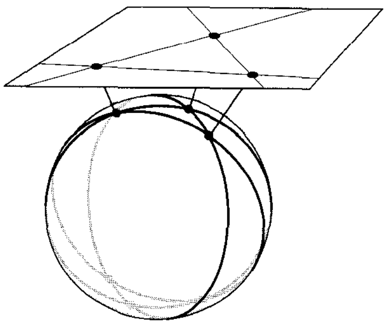


$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \dots \\ &\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \dots \\ &= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \dots) \\ &\quad -4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \dots) \\ &= 4e - 4f \end{aligned}$$

در اینجا باز از (۳) و (۴) استفاده کرده‌ایم. پس داریم $e \geq n+f$ که باز با فرمول اویلر مغایر است.

۱. بازنگری در قضیهٔ سیلوستر_گالای

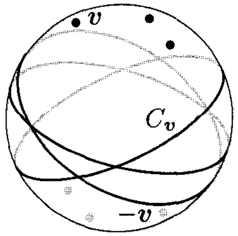
ظاهراً نورمن استینراد[1] بود که برای نخستین بار خاطرنشان کرد که قسمت (الف) گزارهٔ بالا، اثبات فوق‌العاده ساده‌ای از قضیهٔ سیلوستر_گالای به‌دست می‌دهد (فصل ۸ را ببینید).



قضیهٔ سیلوستر_گالای اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ نقطه در صفحه داده شده باشد که همگی بر یک خط واقع نباشند، همواره خطی وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از این نقطه‌هاست.

■ **اثبات.** (سیلوستر_گالای از طریق اویلر)

اگر مطابق شکل، صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ را در $\mathbb{R}^3$ در نزدیکی کرهٔ واحد S^2 بنشانیم، آنگاه هر نقطه در $\mathbb{R}^2$ متناظر با یک جفت نقطهٔ متقاطر روی S^2 است، و خطهای $\mathbb{R}^2$ متناظر با دایره‌های عظیمه روی S^2 هستند. پس قضیهٔ سیلوستر_گالای به‌صورت زیر در می‌آید:



اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ جفت نقطهٔ متقاطر روی کره داده شده باشند که همگی روی یک دایرهٔ عظیمه نباشند، همواره دایرهٔ عظیمه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از جفتهای متقاطر است.

حال دوگان این‌صورت از قضیه را می‌نویسیم. به‌این‌منظور به‌جای هر جفت نقطهٔ متقاطر، دایرهٔ عظیمهٔ متناظر روی کره را قرار می‌دهیم، یعنی به‌جای نقطه‌های $\pm v \in S^2$

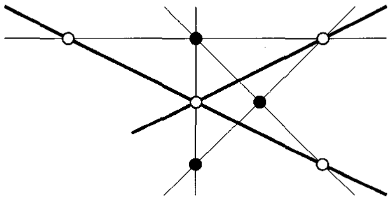
1. Norman Steenrod

دایره‌های متعامد $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v\rangle = 0\}$ را در نظر می‌گیریم (این C_v خط استواست اگر v را قطب شمال کره بگیریم.) در این‌صورت قضیهٔ سیلوستر_گالای از ما می‌خواهد که ثابت کنیم:

> اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ دایرهٔ عظیمه روی S^2 داده شده باشد که همهٔ آنها از یک نقطه نگذرند، همواره نقطه‌ای وجود دارد که رویِ دقیقاً دو تا از دایره‌های عظیمه است.

اما آرایش دایره‌های عظیمه، گراف مسطح ساده‌ای روی S^2 به‌دست می‌دهد که رأسهایش نقاط تقاطع دو تا از دایره‌های عظیمه‌اند که دایره‌های عظیمه را به یالهایی تجزیه می‌کنند. همهٔ درجه‌های رأسها زوج‌اند و بنا به‌طرز ساخت گراف، دست‌کم ۴ تا هستند. پس قسمت (الف) گزاره، وجود رأسی از درجهٔ ۴ را نتیجه می‌دهد. □

۲. خط تکرنگ



قضیهٔ زیر که خویشاوند «رنگی» قضیهٔ سیلوستر_گالای است، از آنِ دان چاکرین[1] است.

قضیه. اگر آرایشی متناهی از نقطه‌های «سیاه» و «سفید» در صفحه مفروض باشد که همگی روی یک خط نباشند، همواره یک خط «تکرنگ»[2] وجود دارد، یعنی خطی که شامل دست‌کم دو نقطه از یک رنگ و هیچ نقطه از رنگ دیگر است.

■ **اثبات.** همان‌طور که در مورد مسألهٔ سیلوستر_گالای عمل کردیم، مسأله را به کرهٔ واحد منتقل می‌سازیم و در آنجا آن را به‌صورت دوگان در می‌آوریم. پس باید ثابت کنیم:

> اگر مجموعه‌ای متناهی از دایره‌های عظیمهٔ «سیاه» و «سفید» روی کرهٔ واحد مفروض باشند که همگی از یک نقطه نگذرند، همواره نقطهٔ تقاطعی وجود دارد که یا فقط روی دایرهٔ عظیمهٔ سفید است یا فقط روی دایرهٔ عظیمهٔ سیاه.

حال اثبات این مطلب با توجه به قسمت (پ) گزاره روشن است زیرا در هر رأس که در آنجا دوایر عظیمه‌ای با رنگهای متفاوت یکدیگر را قطع می‌کنند، همواره دست کم ۴ گوشه با تغییر رنگ وجود دارد. □

1. Don Chakerian 2. monochromatic

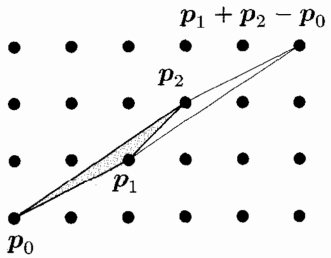
۳. قضیهٔ پیک

قضیهٔ پیک که در سال ۱۸۹۹ عرضه شد، به‌خودی خود قضیهٔ زیبا و شگفت‌انگیزی است ولی پیامدی «کلاسیک» از فرمول اویلر نیز هست. در آنچه در پی می‌آید، چندضلعی مشبکه‌ای محدب $P \subseteq \mathbb{R}^۲$ را مقدماتی گوییم اگر رأسهایش صحیح باشند ولی چندضلعی شامل نقطهٔ مشبکه‌ای دیگری نباشد.

لم. هر مثلث مقدماتی $\Delta = \operatorname{conv}\{p_۰, p_۱, p_۲\} \subseteq \mathbb{R}^۲$ دارای مساحت $A(\Delta) = \frac{۱}{۲}$ است.

■ **اثبات.** هم متوازی‌الاضلاع P با گوشه‌های $p_۰$، $p_۱$، $p_۲$، $p_۱ + p_۲ - p_۰$ و هم شبکهٔ $\mathbb{Z}^۲$ طبق نگاشت

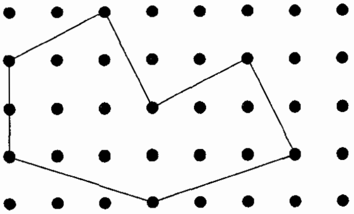
$$\sigma : x \mapsto p_۱ + p_۲ - x$$



که قرینهٔ نقاط نسبت به مرکز پاره‌خطِ از $p_۱$ تا $p_۲$ را می‌دهد، متقارن هستند. پس متوازی‌الاضلاع $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$ هم مقدماتی است، و انتقالهای صحیح آن، صفحه را فرش می‌کنند. از این رو $\{p_۱ - p_۰, p_۲ - p_۰\}$ پایه‌ای برای مشبکهٔ $\mathbb{Z}^2$ است، دترمینان آن ۱ است، P دارای مساحت ۱ است، و مساحت Δ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. (توضیح این اصطلاحات در تابلو صفحهٔ بعد آمده است.) □

قضیه. مساحت هر چندضلعی $Q \subseteq \mathbb{R}^۲$ (که لزوماً محدب نیست) با رأسهای صحیح، برابر است با

$$A(Q) = n_{int} + \frac{۱}{۲} n_{bd} - ۱$$



$n_{int} = ۱۱, n_{bd} = ۸, A = ۱۴$

که در آن n_{int} و n_{bd} به‌ترتیب تعداد نقطه‌های صحیح در درون و روی مرز Q هستند.

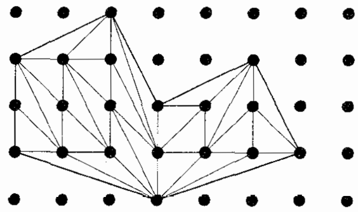
■ **اثبات.** هر چنین چند ضلعی را می‌توان با استفاده از همهٔ n_{int} نقطهٔ مشبکه‌ای در درون و همهٔ n_{bd} نقطهٔ شبکه‌ای در روی مرز Q مثلث‌بندی کرد. (این موضوع کاملاً بدیهی نیست، به‌خصوص اگر Q لزوماً محدب نباشد، ولی با استدلالی که در فصل ۲۶ در مورد مسألهٔ گالری هنری عرضه می‌شود، به‌اثبات می‌رسد.)

پایه‌های مشبکه

پایه‌ای از $\mathbb{Z}^۲$، یک جفت بردار مستقل خطی $e_۱$، $e_۲$ است به‌نحوی‌که

$$\mathbb{Z}^۲ = \{\lambda_۱ e_۱ + \lambda_۲ e_۲ : \lambda_۱, \lambda_۲ \in \mathbb{Z}\}$$

فرض کنیم $e_۱ = \binom{a}{b}$ و $e_۲ = \binom{c}{d}$؛ در این‌صورت مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده به‌وسیلهٔ $e_۱$ و $e_۲$ برابر است با $A(e_۱, e_۲) = |\det(e_۱, e_۲)| = |\det\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)|$. اگر $f_۱ = \binom{r}{s}$ و $f_۲ = \binom{t}{u}$ پایهٔ دیگری باشد، آنگاه یک $\mathbb{Z}$ـماتریس وارون‌پذیر Q با ضابطهٔ $\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ s & u \end{smallmatrix}\right) = Q\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ وجود دارد. چون $QQ^{-۱} = \left(\begin{smallmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{smallmatrix}\right)$، و دترمینانها عددهای صحیحی هستند، نتیجه می‌گیریم $|\det Q| = ۱$، و بنابراین $|\det(f_۱, f_۲)| = |\det(e_۱, e_۲)|$. پس مساحت همهٔ متوازی‌الاضلاعهای پایه برابر یک است زیرا $A\left(\binom{۱}{۰}, \binom{۰}{۱}\right) = ۱$.



اکنون مثلث‌بندی را به‌عنوان یک گراف مسطح تعبیر می‌کنیم که صفحه را به یک وجه بیکران به‌اضافهٔ $f - ۱$ مثلث با مساحت $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند، پس

$$A(Q) = \frac{۱}{۲}(f - ۱)$$

هر مثلث سه ضلع دارد، هر یک از e_{int} یال درونی در دو مثلث مشترک است حال آنکه هر یک از e_{bd} یال مرزی فقط در یک مثلث ظاهر می‌شود. بنابراین $۳(f - ۱) = ۲e_{int} + e_{bd}$ و لذا $f = ۲(e - f) - e_{bd} + ۳$. همچنین تعداد یالهای مرزی و رأسهای روی مرز یکی است: $e_{bd} = n_{bd}$. از این دو واقعیت همراه با فرمول اویلر نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} f &= ۲(e - f) - e_{bd} + ۳ \\ &= ۲(n - ۲) - n_{bd} + ۳ = ۲n_{int} + n_{bd} - ۱ \end{aligned}$$

و بنابراین

$$A(Q) = \frac{۱}{۲}(f - ۱) = n_{int} + \frac{۱}{۲}n_{bd} - ۱ \qquad \square$$

مراجع

[1] G. D. CHAKERIAN: *Sylvester's problem on collinear points and a*

relative, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 164-167.

[2] G. PICK: *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen **19**, 311-319.

[3] N.E. STEENROD: *Solution 4065/Editorial Note*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), 170-171.

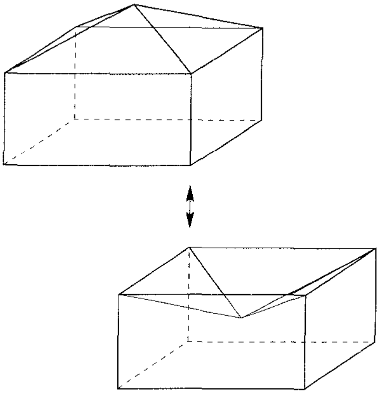
فصل ۱۱ قضیهٔ صلبیت کوشی

آگوستین کوشی

قضیهٔ معروفی که مبتنی بر فرمول اویلر (به‌خصوص، بر قسمت (پ) از گزارهٔ فصل قبل) است، قضیهٔ صلبیت[1] کوشی برای چندوجهیهای سه‌بعدی است.

برای ملاحظهٔ تعریف قابلیت انطباق [همنهشتی] و هم‌ارزی ترکیبیاتی که در زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند، خواننده را به‌پیوستِ راجع به بس‌وجهی و چندوجهی در فصل ۷، «مسألهٔ سوم هیلبرت»، ارجاع می‌دهیم.

قضیه. اگر دو چندوجهی محدب ۳بعدی P و P' از لحاظ ترکیبیاتی هم‌ارز، و وجوه متناظرشان قابل انطباق باشند، آنگاه زاویه‌های بین جفتهای متناظر از وجوه مجاور نیز برابرند (و در نتیجه P با P' قابل انطباق است).



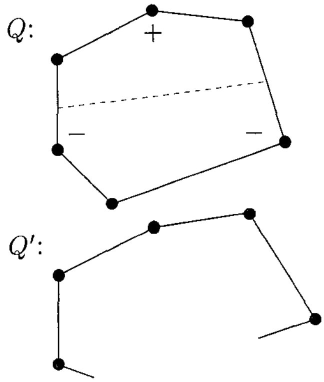
تصویر حاشیهٔ صفحه، دو چندوجهی ۳بعدی را نشان می‌دهد که از لحاظ ترکیبیاتی هم‌ارز، و وجوه متناظرشان قابل انطباق‌اند. ولی چندوجهیها قابل انطباق نیستند، و تنها یکی از آنها محدب است. پس فرض محدب‌بودن برای قضیهٔ کوشی ضرورت دارد!

■ **اثبات.** برهانی که در اینجا می‌آید، در اساس، اثبات اصلی کوشی است. فرض کنید دو چندوجهی P و P' با وجوه متناظر مفروض باشند. یالهای P را به‌صورت زیر رنگ می‌زنیم: یالْ سیاه (یا «مثبت») است اگر زاویهٔ درونی متناظر بین دو وجه مجاور، در P' بزرگتر باشد تا در P، و سفید (یا «منفی») است اگر زاویهٔ متناظر در P' کوچکتر باشد تا در P.

یالهای سیاه و سفید P همراه با هم یک گراف مسطح ۲ رنگی روی رویهٔ P تشکیل می‌دهند که از طریق تصویر شعاعی، با این فرض که ۰ در درون P است، می‌توانیم آن را به‌رویهٔ S^2 منتقل سازیم. اگر زاویه‌های بین‌الوجوهی متناظر P و P' نابرابر باشند، گراف ناتهی است. با استفاده از بخش (پ)ی گزارهٔ فصل قبل، در می‌یابیم که یک رأس p وجود دارد که مجاور دست‌کم یک یال سیاه یا سفید است، به‌نحوی که حداکثر دو تغییر بین یالهای سیاه و سفید (در ترتیب دوری) در آنجا رخ می‌دهد.

اکنون P را با کرهٔ کوچکی چون S_ε (به‌شعاع ε) به‌مرکز رأس p، و P' را با کرهٔ کوچکی مثل S'_ε با همان شعاع ε و به‌مرکز رأس متناظر p' قطع می‌کنیم. در S و S'،

1. rigidity



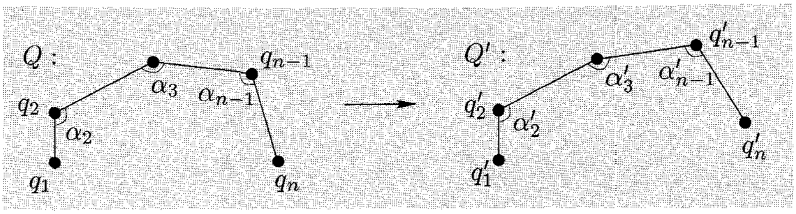
چندضلعیهای کروی محدب Q و Q' را می‌یابیم که کمانهای متناظرشان دارای طولهای برابرند زیرا وجوه P و P' قابل انطباق‌اند، و نیز ما شعاع یکسان ε را انتخاب کرده‌ایم.

اکنون زاویه‌هایی از Q را که به‌ازای آنها زاویهٔ متناظر در Q' بزرگتر است با علامت $+$ و زاویه‌هایی را که زاویهٔ متناظرشان در Q' کوچکتر است با علامت $-$ نشان می‌دهیم. یعنی وقتی از Q به Q' می‌رویم زاویه‌های $+$ «باز می‌شوند» و زاویه‌های $-$ بسته، درحالی‌که همهٔ طولهای ضلعها و زاویه‌های بی‌علامت، ثابت می‌مانند.

بنابه‌نحوهٔ انتخاب p می‌دانیم که علامت به‌اضافه یا منهایی ظاهر خواهد شد و در ترتیب دوری، حداکثر دو تغییر علامت رخ می‌دهد. اگر فقط یک نوع علامت ظاهر شود، لم زیر مستقیماً مثال ناقضی به‌دست می‌دهد حاکی از اینکه طول یک یال باید تغییر کند. اگر هر دو نوع علامت ظاهر شوند، آنگاه (چون فقط دو تغییر علامت رخ می‌دهد) یک «خط جدایی» وجود دارد که نقطه‌های وسط دو یال را به‌هم وصل می‌کند و همهٔ علامتهای $+$ را از همهٔ علامتهای $-$ جدا می‌سازد. و باز تناقضی از لم زیر به‌دست می‌آوریم زیرا خط جدایی در Q' نمی‌تواند نسبت به خط جدایی در Q هم بلندتر و هم کوتاهتر باشد.

لم دست کوشی

اگر Q و Q'، دو n ضلعی محدب (مسطح یا کروی) باشند که طبق شکل زیر



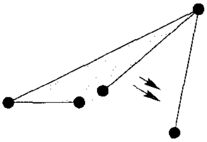
نشانه‌گذاری شده باشند به‌نحوی که رابطهٔ $\overline{q_iq_{i+1}} = \overline{q'_iq'_{i+1}}$ بین طولهای یالهای متناظر به‌ازای $1 \leq i \leq n-1$، و رابطهٔ $\alpha_i \leq \alpha'_i$ بین اندازه‌های زاویه‌های متناظر به‌ازای $2 \leq i \leq n-1$ برقرار باشند، آنگاه طول ضلع «مفقود» در رابطهٔ

$$\overline{q_1q_n} \leq \overline{q'_1q'_n}$$

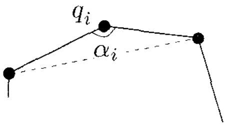
صدق می‌کند که علامت برابری وقتی و تنها وقتی برقرار است که $\alpha_i = \alpha'_i$ به‌ازای هر i برقرار باشد.

جالب این است که اثبات اصلی کوشی از این لم غلط بود: حرکتی پیوسته که

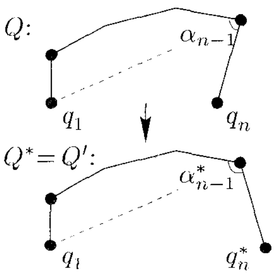
زاویه‌ها را باز کند و طول ضلعها را ثابت نگه دارد، ممکن است تحدب را از میان ببرد ــ به‌شکل نگاه کنید! از سوی دیگر، هم لم و هم اثباتی که در اینجا برای آن می‌آید، و از نامه‌ای از شوئنبرگ[1] به زارمبا[2] گرفته شده است، هر دو هم برای چندضلعیهای کروی و هم برای چندضلعیهای مسطح برقرارند.



■ **اثبات.** به‌استقرا بر n عمل می‌کنیم. حالت $n = 3$ بدیهی است (مثلثات مربوط به‌حالت کروی در فصل آینده مرور خواهد شد). همچنین اگر به‌ازای هر $i \in \{2, \cdots, n-1\}$ داشته باشیم $\alpha_i = \alpha'_i$، آنگاه رأس متناظر را با وارد کارکردن قطر از q_{i-1} تا q_{i+1}، متناظراً قطر از q'_{i-1} تا q'_{n+1}، با ضابطهٔ $\overline{q_{i-1}q_{i+1}} = \overline{q'_{i-1}q'_{i+1}}$، می‌توان کنار گذاشت؛ و حکم به استقرا ثابت می‌شود. پس فرض می‌کنیم به‌ازای $2 \leq i \leq n-1$، $\alpha_i < \alpha'_i$.



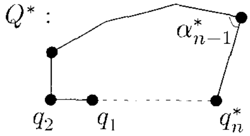
حال چندضلعی جدید Q^* را از Q به‌دست می‌آوریم به‌این طریق که به‌جای α_{n-1}، بزرگترین زاویهٔ ممکن $\alpha^*_{n-1} \leq \alpha'_{n-1}$ را که Q^* را محدب نگه دارد قرار می‌دهیم. به‌این منظور q^*_n را به‌جای q_n قرار می‌دهیم، و همهٔ q_iهای دیگر، طولهای ضلعها، و زاویه‌های Q را بی‌تغییر می‌گذاریم. اگر واقعاً بتوانیم α^*_{n-1}ای برابر α'_{n-1} انتخاب کنیم که Q^* را محدب نگه دارد، آنگاه با استفاده از حالت $n = 3$ برای گام نخست و استقرا مانند فوق برای گام دوم، خواهیم داشت $\overline{q_1q_n} < \overline{q_1q^*_n} \leq \overline{q'_1q'_n}$.



در غیر این‌صورت، پس از حرکتی نابدیهی که رابطهٔ زیر را نتیجه می‌دهد

$$\overline{q_1q^*_n} > \overline{q_1q_n} \tag{1}$$

در وضعیتی «گیر می‌افتیم» که q_2، q_1 و q^*_n همخط‌اند و



$$\overline{q_2q_1} + \overline{q_1q^*_n} = \overline{q_2q^*_n} \tag{2}$$

حال این Q^* را با Q' مقایسه می‌کنیم و به استقرا بر n (با نادیده گرفتن رأس q_1 و متناظراً q'_1) به‌دست می‌آوریم

$$\overline{q_2q^*_n} \leq \overline{q'_2q'_n} \tag{3}$$

پس

$$\overline{q'_1q'_n} \overset{(*)}{\geq} \overline{q'_2q'_n} - \overline{q'_1q'_2} \overset{(3)}{\geq} \overline{q_2q^*_n} - \overline{q_1q_2} \overset{(2)}{=} \overline{q_1q^*_n} \overset{(1)}{>} \overline{q_1q_n}$$

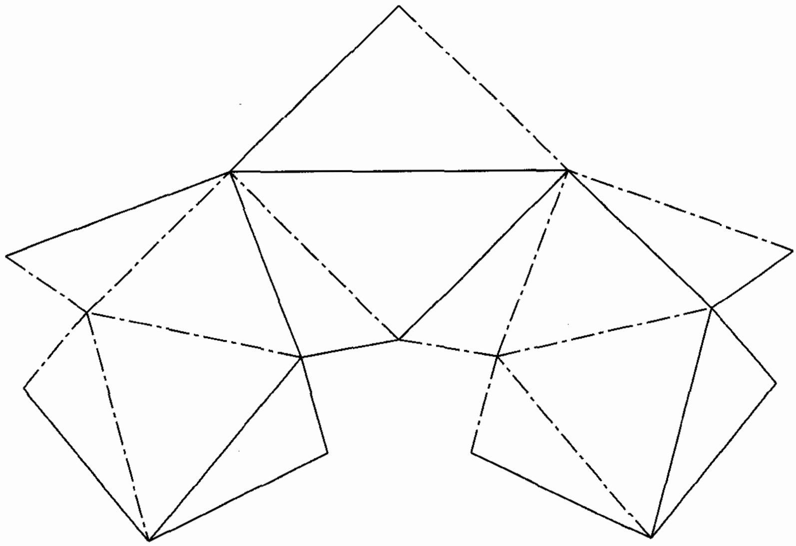
1. I.J. Schoenberg 2. S.K. Zaremba

که در آن، (*) نابرابری مثلثی است، و همهٔ رابطه‌های دیگر قبلاً استنتاج شده‌اند. □

ما مثالی دیده‌ایم که نشان می‌دهد قضیهٔ کوشی برای چندوجهی نامحدب صادق نیست. ویژگی خاص این مثال، البته، این است که با یک «ضربه» ناپیوسته، یک چندوجهی به‌چندوجهی دیگر تبدیل می‌شود به‌طوری‌که وجوه، قابل انطباق باقی می‌مانند درحالی‌که زاویه‌های دووجهی «پرش می‌کنند.» می‌توان پرسشی فراتر از این را مطرح کرد:

> آیا ممکن است، برای چندوجهی نامحدبی، تغییر شکلی پیوسته وجود داشته باشد که وجه‌ها را تخت و قابل انطباق نگه دارد؟

حدس زده می‌شد که هیچ رویهٔ مثلث‌بندی‌شده‌ای، محدب یا نامحدب، چنین حرکتی را نمی‌پذیرد. بنابراین، مایهٔ شگفتی فراوان شد که در سال ۱۹۷۷ ــ بیش از ۱۶۰ سال پس از کار کوشی ــ رابرت کانلی[1] مثالهای ناقضی عرضه کرد: کره‌هایی مثلث‌بندی شدهٔ بسته و نشانده شده در $\mathbb{R}^3$ (بدون تقاطع با خود) که انعطاف‌پذیرند، با حرکتی پیوسته که همهٔ طولهای یالها را ثابت، و وجوه مثلثی را قابل انطباق نگه می‌دارد.



نمونهٔ زیبایی از یک رویهٔ انعطاف‌پذیر که کلاوس اشتفن آن را ساخته است: خط‌چینها نشان‌دهندهٔ یالهای نامحدب در این مدل کاغذی هستند که با بریدن و سرهم‌کردن ساخته می‌شود. خطهای معمولی را به‌صورت «کوه» و خط‌چینها را به‌صورت «دره» تا کنید. طولهای یالها در این مدل، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، و ۱۷ واحد هستند.

قضیهٔ صلبیت رویه‌ها شگفتیهای بیشتری در انبان دارد: در همین اواخر، کانلی، سابیتوف[2]، و والتس[3] ثابت کردند که وقتی چنین رویهٔ انعطاف‌پذیری حرکت می‌کند، حجمی که احاطه می‌کند باید ثابت باشد. اثبات آنها از لحاظ نحوهٔ استفاده از ابزارهای

1. Connelly 2. Sabitov 3. Walz

جبری نیز زیباست (ولی در خارج از محدودهٔ بحث این کتاب است).

مراجع

[1] A. CAUCHY: *Sur les polygones et les polyédres, seconde mémoire.* J. École Polytechnique XVIe Cahier, Tome IX (1813), 87; Œuvres Complétes, IIe Série, Vol. 1, Paris 1905, 26-38.

[2] R. CONNELLY: *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Inst. Haut. Etud. Sci., Publ. Math. **47** (1978), 333-338.

[3] R. CONNELLY: *The rigidity of polyhedral surfaces*, Mathematics Magazine **52** (1979), 275-283.

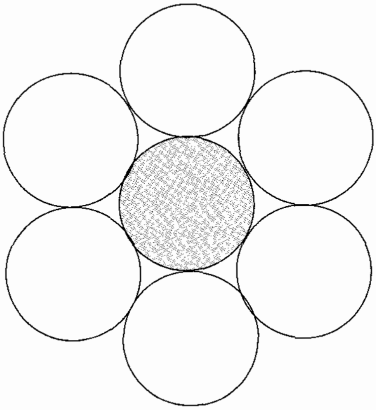
[4] R. CONNELLY, I. SABITOV & A. WALZ: *The bellows conjecture*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry **38** (1997), 1-10.

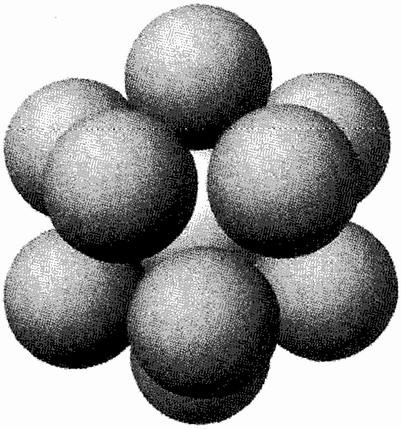
[5] J. SCHOENBERG & S.K. ZAREMBA: *On Cauchy's lemma concerning convex polygons*, Canadian J. Math. **19** (1967), 1062-1071.

فصل ۱۲

مسألهٔ سیزده کره

منازعهٔ معروف دیوید گرگوری[1] و آیزک نیوتن در سال ۱۶۹۴ بر سرِ پرسش زیر بود:





> چند کره [به‌شعاع] واحد می‌توانند همزمان بر کره‌ای با همین اندازه مماس باشند؟

به‌آسانی می‌توان ملاحظه کرد که در مسألهٔ متناظر در حالت ۲ بعدی [دایره‌های مماس بر یک دایره] تعداد ماکسیمم شش تاست و این تعداد با توجه به تنها آرایش ممکن دایره‌های مماس که در این شکل دیده می‌شود به‌دست می‌آید. در فضای ۳بعدی، آرایشی مرکب از دوازده کرهٔ مماس، ممکن است: کره‌های مماس می‌توانند، مثلاً، به‌صورت بخشی از بسته‌بندی مشبکه‌ای «معمولی» قرار گیرند. در واقع، حدسی مشهور، و هنوز اثبات نشده، منسوب به کپلر حاکی است که این، چگالترین بسته‌بندی کره‌های برابر در فضای ۳بعدی است [۲]. همچنین می‌توان کره‌های مماس را در رأسهای یک بیست وجهی منتظم قرار داد. در آرایش حاصل، مقدار زیادی فضای خالی بین کره‌ها وجود دارد و این را می‌توان در شکل دوم دید.

در هر یک از دو حالت، آزمایشها و محاسبات تقریبی مساحت در مورد سطح کره نشان می‌دهند که در این آرایشها «مقدار زیادی فضای» خالی باقی می‌ماند و مسلماً نامعقول نیست که (مانند گرگوری) فکر کنیم با جایگذاری دوازده کرهٔ احاطه‌کننده به‌طرزی هوشمندانه، جای کافی برای کرهٔ سیزدهم باقی می‌ماند.

ولی واقعیت این است که آرایشی از سیزده کرهٔ مماس غیرممکن است. «راه‌حلهای» مختلفی برای این مسأله در سالهای ۱۸۷۴ـ۱۸۷۵ در متون فیزیک ارائه شد ([۱]، [۴])، ولی حل و فصل قطعی مسأله در سال ۱۹۵۳ به‌دست کورت شوته[2] و بارتل ون در وردن[3] انجام گرفت.

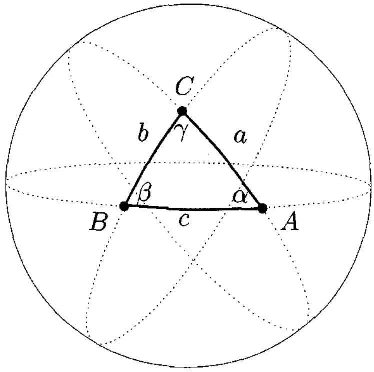
اثبات «کتابی» ما از آنِ جان‌لیچ[4] است که سه‌سال بعد عرضه شد. این برهان، تنها اثباتی در این کتاب است که شامل قدری محاسبات صریح با اعداد است. ولی توجه

1. David Gregory 2. Kurt Schütte 3. Bartel L. van der Waerden
4. John Leech

کنید که هیچ یک از ثابتهای عددی که در این اثبات ظاهر می‌شوند دلبخواه نیستند و «درست آن‌طور که باید» انتخاب شده‌اند.

قضیه. بیش از ۱۲ نقطه نمی‌توانند طوری روی سطح کره‌ای به شعاع ۱ قرار گیرند که همهٔ فاصله‌های کرویِ دو به‌دو بین آنها دست‌کم $\pi/۳$ باشد.

اگر این قضیه در مورد نقاط تماس کره‌های مماس به‌کار رود مسأله حل می‌شود. پیش از شروع اثبات بعضی حکمهای مفید از هندسهٔ کروی را ذکر می‌کنیم. در آنچه در پی می‌آید، همهٔ زاویه‌های α، β، γ و همهٔ فاصله‌های a، b، c روی رویهٔ کره‌ای به‌شعاع ۱ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شوند، و بنابراین مقادیری در بازهٔ $[\circ, \pi]$ دارند.



لم ۱. (حکمهایی از هندسهٔ کروی)

(i) مساحت مثلث برحسب زاویه‌هایش برابر است با $A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

(ii) زاویه‌های یک مثلث کرویِ بدون زاویهٔ قائمه، با استفاده از روابط زیر از طول ضلعهایش به‌دست می‌آید

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

(iii) مساحت مثلث نسبت به‌طول ضلعهایش یکنواخت (یعنی اگر طول دو ضلع ثابت بماند و طول ضلع سوم افزایش یابد، مساحت هم افزایش می‌یابد.)

(iv) سه مثال:

$$a = b = c = \tfrac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \arccos(\tfrac{۱}{۲})$$
$$a = b = \tfrac{\pi}{۳}, c = \arccos(\tfrac{۱}{۷}) \Rightarrow \alpha = \beta = \tfrac{\pi}{۳}, \gamma = \arccos(-\tfrac{۱}{۷})$$
$$a = \tfrac{\pi}{۳}, b = c = \arccos(\tfrac{۱}{۷}) \Rightarrow \alpha = \arccos(\tfrac{۴۷}{۹۶}), \beta = \gamma = \arccos(\tfrac{۱}{۱۲})$$

(v) اگر در مثلثی کروی، طولهای ضلعها به‌صورت $\frac{\pi}{۳} \leq a, b < \arccos(\frac{۱}{۷})$ و $c \geq \frac{\pi}{۳}$ باشد، آنگاه $\gamma > \frac{\pi}{۳}$.

■ **اثبات.** (i) دایره‌های عظیمه‌ای که به‌وسیلهٔ مثلث معین می‌شوند کره را به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند. اگر کره را با شش ۲ضلعی [کروی] که به‌وسیلهٔ زاویه‌های درونی و بیرونی مثلث معین می‌شوند بپوشانیم، مثلث و نسخهٔ متقاطر آن سه بار پوشانده می‌شوند ولی هر ناحیهٔ دیگر کره دقیقاً یک بار پوشانده می‌شود. پس با توجه به اینکه مساحت رویهٔ کره ۴π است و مساحت دوضلعی به‌زاویهٔ α برابر ۲α است، در می‌یابیم

که

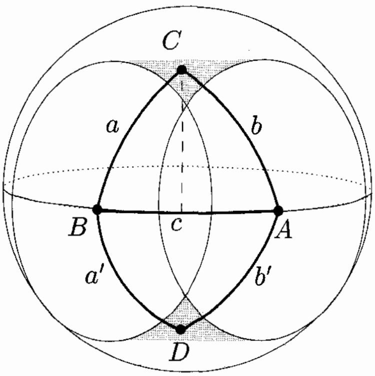
$$۴A + ۴\pi = ۴\alpha + ۴\beta + ۴\gamma$$

(ii) این فرمول را در اینجا ثابت نمی‌کنیم: فقط خاطرنشان می‌کنیم که خیلی ساده می‌توان آن را به چارچوب هندسهٔ اقلیدسی آورد؛ به‌این منظورکافی است چهار وجهی تشکیل‌شده از رأسهای مثلث و مرکز کره را در نظر بگیریم.

(iii) این حکم پیامد مستقیم (i) و (ii) است زیرا در دامنهٔ $[۰, \pi]$، تابع $\sin x$ نامنفی است، درحالی‌که $\cos x$ اکیداً نزولی است.

(iv) و (v): اینها با محاسبات ساده‌ای با استفاده از (ii) به‌دست می‌آیند. □

لم ۲. هر چهار ضلعی کروی که طول ضلعهایش ناکمتر از $\pi/۳$ باشد و قطرهایش متقاطع باشند (یعنی زاویه‌های درونیش حداکثر π باشند) قطری به‌طول ناکمتر از $\pi/۲$ دارد.



■ **اثبات.** فرض کنیم طولهای اضلاع یک چهارضلعی، a، b، a'، b'، ناکمتر از $\pi/۳$ باشند و طول یک قطر آن، c، نابیشتر از $\pi/۲$ باشد. این قطرْ چهارضلعی را به دو مثلث ACB و BDA به ضلعهای، به‌ترتیب، a، b، c و a'، b'، c تقسیم می‌کند. نشان خواهیم داد که در این مثلثها، فاصلهٔ بین ضلع c و رأس مقابل C ناکمتر از $\pi/۴$ و در نتیجه طول قطر دوم دست‌کم $\pi/۴ + \pi/۴$ است. در شکل ما ضلع AB به‌طول $c \leq \pi/۲$ روی خط استوای کره است. دو ناحیهٔ سایه‌دار همهٔ مکانهای ممکن را برای رأس مقابل C که فاصلهٔ آن از A و B ناکمتر از $\pi/۳$، و فاصله‌اش از ضلع AB نابیشتر از $\pi/۳$ باشد، نشان می‌دهند. می‌بینیم که این فاصله کمترین مقدارش را وقتی به‌دست می‌آورد که c بیشترین مقدار را داشته باشد، $c = \pi/۲$، و در این صورت با محاسبهٔ ساده‌ای معلوم می‌شود که کمترین مقدار فاصلهٔ C از AB برابر $\pi/۴$ است.□

■ **اثبات قضیه.** با در دست بودن هر آرایش دلخواهی از نقاط $V \subseteq S^۲$ با فاصلهٔ مینیمم ناکمتر از $\pi/۳$، گرافی معین می‌کنیم به‌این ترتیب که رأسهای $u, w \in V$ را به‌وسیلهٔ یالی چون $e \in E$ به‌هم وصل می‌کنیم اگر فاصلهٔ (کروی) آنها کوچکتر از $\arccos(۱/۷)$ باشد. گراف حاصل $G = (V, E)$ به‌وسیلهٔ نقطه‌ها و کمانهایی کروی روی کرهٔ دوبعدی نمایش داده می‌شود و ویژگیهای جالب توجه زیادی دارد که آنها را در دوازده گام توصیف می‌کنیم.

(۱) یالها متقاطع نیستند: اگر چنین بودند، چهارضلعیی می‌داشتیم که طولهای

اضلاعش دست‌کم $\pi/۳$ بودند و در آن هر دو قطر (متقاطع) طولهایی کوچکتر از $\arccos(۱/۷) < \pi/۲$ می‌داشتند که این مغایر با لم ۲ است.

(۲) گراف G ساده است: بنا به طرز ساخت گراف، طوقه یا یالهای موازی وجود ندارد.

(۳) درجهٔ ماکسیمم حداکثر ۵ است. در واقع بنا به لم ۱، قسمت (v)، زاویهٔ بین کمانهای مجاور بزرگتر از $\pi/۳$ است.

(۴) با حرکت دادن و دوران دادن بخشی از آرایش روی کره، در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که گراف G همبند و حتی دوگانه‌ـهمبند است (یعنی هیچ رأس برشی ندارد).

(۵) پس گراف G کره را به چندضلعیهایی، مثلاً به $f_۳$ مثلث، $f_۴$ چهارضلعی، $f_۵$ پنج‌ضلعی، و غیره تقسیم می‌کند. طول اضلاع همهٔ اینها ناکمتر از $\pi/۳$ است. چهارضلعیها، پنج ضلعیها، و غیره را می‌توان با استفاده از بعضی از قطرهایشان، با طولهایی دست‌کم برابر با $\arccos(۱/۷)$، به مثلثهایی تجزیه کرد.

(۶) از اینجا و از قسمتهای (i)، (iii) و (iv) از لم ۱ نتیجه می‌گیریم که این مثلثها دست‌کم دارای مساحت

$$۳\arccos\left(\frac{۱}{۳}\right) - \pi > ۰٫۵۵۱۲$$

هستند. مساحت چهارضلعیها دست‌کم برابر است با $۲(۲\frac{\pi}{۳} + \arccos(-\frac{۱}{۷}) - \pi > ۱٫۳۳۳۸$ مساحت هر پنج‌ضلعی دست‌کم برابر مساحت پنج‌ضلعیی است که طول همهٔ ضلعهایش $\pi/۳$ است و دو قطر نامتقاطع با طولهایی برابر $\arccos(۱/۷)$ دارد و این مساحت بزرگتر از

$$۱٫۳۳۳۸ + \left(۲\arccos\left(\frac{۱}{۱۲}\right) + \arccos\left(\frac{۴۷}{۹۶}\right) - \pi\right) > ۲٫۲۲۶۱$$

است.

(۷) به‌عبارت دیگر، هر مثلث در این تقسیم‌بندی مساحتی بزرگتر از $t := ۰٫۵۵۱۲$ دارد، هر چهارضلعی دارای مساحتی بزرگتر از $۱٫۳۳۳۸ = ۲t + ۰٫۲۳۱۴$ است، و به‌ازای $k \geq ۵$ هر kضلعی مساحتی بزرگتر از $۲٫۲۲۶۱ + (n-۵)t = (n-۲)t + ۰٫۵۷۲۵$ دارد.

(۸) با استفاده از قضیهٔ اویلر، $n + f = e + ۲$، همراه با شمارش دوگانه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۲n - ۴ = ۲e - ۲f &= (۳f_۳ + ۴f_۴ + ۵f_۵ + \cdots) - ۲(f_۳ + f_۴ + f_۵ + \cdots) \\ &= f_۳ + ۲f_۴ + ۳f_۵ + \cdots \end{aligned}$$

چون وجوه حاصل از تقسیم‌بندی کره به‌وسیلهٔ G، مجموع مساحتهایشان برابر سطح کره، ۴π، است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۴\pi &> ۰٫۵۵۱۲ f_۳ + ۱٫۳۳۳۸ f_۴ + ۲٫۲۲۶۱ f_۵ + \ldots \\ &\geq ۰٫۵۵۱۲(f_۳ + ۲f_۴ + ۳f_۵ + \ldots) + ۰٫۲۳۱۴ f_۴ \\ &\quad + ۰٫۵۷۲۵(f_۵ + f_۶ + \ldots) \\ &= ۰٫۵۵۱۲(۲n - ۴) + ۰٫۲۳۱۴ f_۴ + ۰٫۵۷۲۵(f_۵ + f_۶ + \cdots) \end{aligned}$$

(۹) از اینجا به‌دست می‌آید $۲n - ۴ \leq \frac{۴\pi}{۰٫۵۵۱۲} < ۲۲٫۷۹$، پس $۲n - ۴ \leq ۲۲$ و $n \leq ۱۳$. در حالت تساوی $n = ۱۳$ به‌علاوه به‌دست می‌آوریم

$$۰٫۲۳۱۴ f_۴ + ۰٫۵۷۲۵(f_۵ + f_۶ + \ldots) < ۴\pi - ۰٫۵۵۱۲ \times ۲۲ < ۰٫۴۴$$

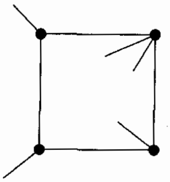
که از آن نتیجه می‌شود

$$f_۵ = f_۶ = \ldots = ۰ \qquad \text{و} \qquad f_۴ \leq ۱$$

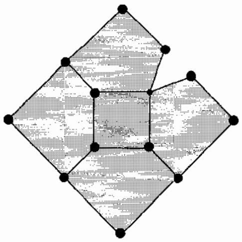
(۱۰) به‌ازای $f_۴ = ۰$، گراف G کره را مثلث‌بندی می‌کند. ولی در این‌صورت از $۳f_۳ = ۲e$ همراه با فرمول اویلر، $۱۳ + \frac{۲}{۳}e = e + ۲$، نتیجه می‌شود $e = ۳۳$، و بنابراین میانگین درجهٔ رأسها، $\frac{۱}{n}\sum_{i \geq ۲} n_i = \frac{۲e}{n} = \frac{۶۶}{۱۳} > ۵$ است که با (۳) مغایرت دارد.

(۱۱) پس باید داشته باشیم $f_۴ = ۱$. حال از فرمول اویلر به‌دست می‌آید $e = ۳۲$ و از شمارش درجهٔ رأسها معلوم می‌شود که باید دقیقاً یک رأس از درجهٔ ۴ وجود داشته باشد، در حالی‌که همهٔ ۱۲ رأس دیگر درجهٔ ۵ دارند.

(۱۲) از این‌رو به‌یک گراف دوگانه ـ همبند G رسیده‌ایم که یالهای متوازی ندارد و کره را به یک چهارضلعی و تعدادی مثلث تجزیه می‌کند و در آن همهٔ رأسها درجهٔ ۵ دارند به‌جز یکی که از درجهٔ ۴ است. اگر لم زیر در مورد گراف دوگان G به‌کار رود، معلوم می‌شود که این امر غیر ممکن است و لذا اثبات به انجام می‌رسد.



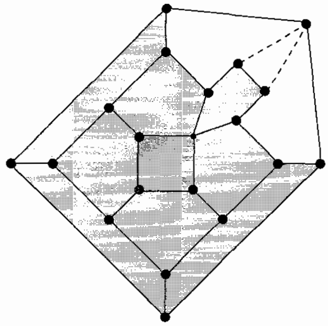
لم ۳. هیچ گراف هامنی دوگانه‌ـهمبند Hای وجود ندارد که کره را به پنج‌ضلعیها و یک مربع ($f_۴ = ۱$، $f_i = ۰$ به‌ازای $i \notin \{۴, ۵\}$) تجزیه کند و رأسهایش از درجهٔ سه باشند به‌استثنای حداکثر یک رأس درجهٔ چهار ($n_۴ \leq ۱$، $n_j = ۰$ به‌ازای $j \notin \{۳, ۴\}$)، و گراف دوگان آن $G = H^*$ ساده و دوگانه ـ همبند باشد.



■ **اثبات.** نخست توجه کنید که ــ بجز در مورد چهارضلعی ــ هر دور از H دست کم

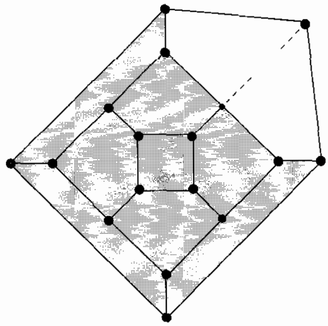
دارای طول ۵ است. در واقع چون همهٔ درجه‌های رأسها ۳ هستند (به استثنای احتمالاً یک رأس درجهٔ ۴)، در می‌یابیم که در یک kـدورِ C تعداد یالهایی که از دور به‌طرف خارج می‌روند، $\delta^+(C)$، و تعداد یالهایی که از دور به‌طرف داخل می‌روند، $(\delta^-(C))$، در رابطهٔ $\delta^+(C)+\delta^-(C)\leq k+1$ صدق می‌کنند. پس به‌ازای $k \leq 4$ می‌توانیم، بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض کنیم که حداکثر ۲ یال وجود دارند که به «درون» می‌روند. بنابراین $G = H^*$ طوقه‌ای دارد (اگر تعداد این یالها یکی باشد)، یا دو یال موازی یا یک رأس برشی دارد (اگر دو یال از دور خارج شوند).

اکنون گراف H را با ارائهٔ طرحی در صفحه، که از چهار ضلعی و چهار پنج‌ضلعی مجاور آن آغاز می‌شود، می‌سازیم.


حالت ۱

حالت ۱: اگر رأس درجهٔ ۴ روی چهار ضلعی باشد، آنگاه آرایشی از شکلها را که در حاشیه می‌بینید، داریم.

به‌علاوه، هیچ‌گونه یکسان‌گیری [رأسها] روی مرز نمی‌تواند انجام شود زیرا گراف شکل دارای قطر ۴ است، و با این کار دورهای کوتاه غیر مجازی ایجاد می‌شود. پس، با افزودن پنج‌ضلعیهای بعدی و ملاحظهٔ محدودیتهای درجه، شکل حاشیه، و بنابراین آرایشی که نمی‌توان آن را کامل کرد، به‌دست می‌آید (کامل کردنهایِ سر راست، با توجه به‌محدودیتها، به‌یک مثلث می‌انجامد).


حالت ۲

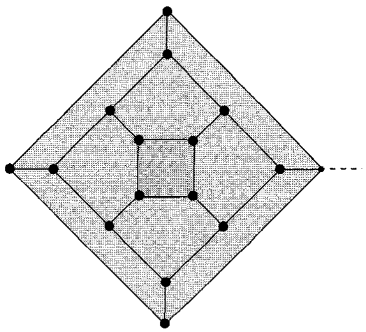
حالت ۲: فرض کنید رأس درجهٔ ۴ به‌فاصلهٔ ۱ از چهارضلعی قرار دارد. در این صورت، چهار پنج‌ضلعی که مجاور چهارضلعی هستند به‌صورت حلقهٔ بسته‌ای از پنج‌ضلعیها در می‌آیند. هر یکسان‌گیری دیگری در روی مرز به دورهای کوتاه خواهد انجامید، و تنها راه برای ادامهٔ کار به وضعیتی می‌انجامد که در شکل دوم حاشیه نموده شده است و گراف دوگانی با یالهای متوازی به‌دست می‌دهد.

حالت ۳: اگر رأس درجهٔ ۴ فاصله‌ای ناکمتر از ۲ از چهارضلعی داشته باشد، یا اگر هیچ رأسی از درجهٔ ۴ وجود نداشته باشد، آنگاه لزوماً شکل حاشیه را خواهیم داشت، پس خود به‌خود، ۴ـدور دیگری حاصل می‌شود. □

نکتهٔ آخر: مسألهٔ متناظر در حالت کلی d بعدی به «مسألهٔ تعداد بوسندگان[1] [مماس شوندگان]» موسوم است. این مسأله در بعدهای پایین فقط به‌ازای

1. kissing number problem

$d \leq ۳$ حل شده است که همان‌طور که دیدیم، $\kappa(۱) = ۲$، $\kappa(۲) = ۶$، $\kappa(۳) = ۱۲$. ولی همچنین، در نهایت تعجب، در بعدهای ۸ و ۲۴ نیز مقادیر $\kappa(۸) = ۲۴۰$ و $\kappa(۲۴) = ۱۹۶۵۶۰$ به‌دست آمده است. صرف‌نظر از این ابعاد بسیار بالا، مسألهٔ تعداد مماس‌شوندگان حتی در بعد ۴ نیز حل نشده است، که در این حالت می‌دانیم $۲۴ \leq \kappa(۴) \leq ۲۵$. مراجعه کنید به [۳، بخش ۲.۱]. این را به‌عنوان «مسألهٔ ۲۵ کره» در نظر بگیرید.



حالت ۳

مراجع

[1] C.Bender: *Bestimmung der grössten Anzahl gleicher Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen*, Archiv Math. Physik (Grunert) **56** (1874), 302-306; R. Hoppe: *Bemerkung der Redaction*, loc. cit. 307-312.

[2] K. Bezdek: *Kepler's conjecture and the dodecahedral conjecture*, Mitteilungen der DMV **4/1996**, 52-54.

[3] J.H.Conway & N.J. A. Sloane: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 290, Springer-Verlag New York, Second ed. 1993.

[4] S. Günther: *Ein stereometrisches Problem*, Archiv Math. Physik (Grunert) **57** (1875), 209-215.

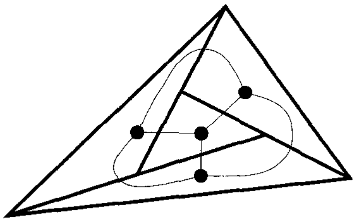
[5] J. Leech: *The problem of the thirteen spheres*, The Mathematical Gazette **40** (1956), 22-23.

[6] K. Schütte & B.L. van der Waerden: *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Math. Annalen **53** (1953), 325-334.

سادکهای مماس

فصل ۱۳

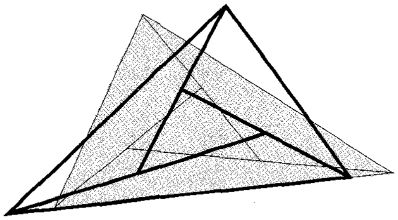
> «چند سادک d بعدی را می‌توان در $\mathbb{R}^d$ قرار داد به‌طوری‌که دوبه‌دو مماس باشند یعنی همهٔ تلاقیهای دوبه‌دوی آنها $(d - ۱)$ بعدی باشند؟»



$f(۲) \geq ۴$

این پرسشی قدیمی و بسیار طبیعی است. جواب این مسأله را $f(d)$ می‌نامیم و می‌نویسیم $f(۱) = ۲$، که بدیهی است. به‌ازای $d = ۲$، آرایش چهار مثلث در حاشیهٔ این صفحه، نشان می‌دهد که $f(۲) \geq ۴$. هیچ آرایش مشابهی با پنج مثلث وجود ندارد زیرا در این‌صورت ساختن گراف دوگان، که در مثال چهار مثلثی ما ترسیمی هامنی از $K_۴$ به‌دست می‌دهد، ترسیمی هامنی از $K_۵$ به‌دست خواهد داد که غیر ممکن است (صفحهٔ ۷۷ را ببینید). پس داریم

$$f(۲) = ۴$$

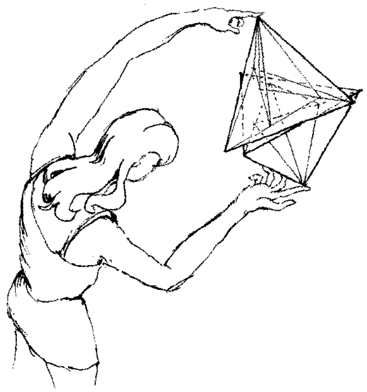


$f(۳) \geq ۸$

در حالت سه‌بعدی، به‌راحتی می‌توان دید که $f(۳) \geq ۸$. به‌این منظور، از آرایش هشت مثلث که تصویرش در حاشیه دیده می‌شود استفاده می‌کنیم. چهار مثلث هاشورخورده به‌نقطهٔ xای در زیر «صفحهٔ ترسیم» وصل می‌شوند و چهار چهاروجهی به‌دست می‌آید که از زیر با صفحه تماس دارند. همین‌طور، چهار مثلث سفید به‌نقطهٔ yای در بالای صفحهٔ ترسیم وصل می‌شوند. پس آرایشی از هشت چهاروجهی مماس در $\mathbb{R}^۳$ به‌دست می‌آوریم، یعنی $f(۳) \geq ۸$.

باستن[1] در ۱۹۶۵ کتابی در اثبات $f(۳) \leq ۹$ نوشت، و زاکس[2] هم در ۱۹۹۱ کتاب دیگری نوشت تا ثابت کند

$$f(۳) = ۸$$



«سادکهای مماس»

با توجه به $f(۱) = ۲$، $f(۲) = ۴$ و $f(۳) = ۸$، تخیل زیادی نمی‌خواهد که حدس زیر را بزنیم. این حدس را اول‌بار باگه‌میل[3] در سال ۱۹۶۵ مطرح کرد.

حدس. تعداد ماکسیمال سادکهای d بعدی دوبه‌دو مماس در آرایشی در $\mathbb{R}^d$ برابر است با

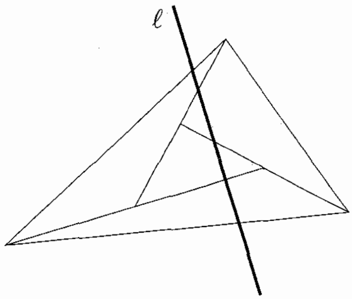
$$f(d) = ۲^d$$

---

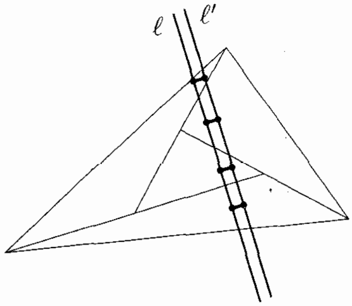
1. Baston 2. Zaks 3. Bagemihl

اثبات کران پایین، $f(d) \geq ۲^d$، آسان است «اگر این کار را از راه درستش انجام دهیم.» و این مستلزم استفادهٔ زیاد از تبدیلات آفینِ مختصات، و استقرا بر بعد است که نتیجهٔ قویتر زیر، متعلق به زاکس [۴]، را به‌اثبات می‌رساند.

قضیهٔ ۱. به‌ازای هر $d \geq ۲$، خانواده‌ای مرکب از ۲^d سادک dبعدیِ دوبه‌دو مماس در $\mathbb{R}^d$ همراه با یک خط قاطع وجود دارد که ناحیهٔ درونی هر یک از آنها را قطع می‌کند.



■ **اثبات.** به‌ازای $d = ۲$ خانوادهٔ چهار مثلثی که در نظر گرفته بودیم مسلماً چنین خط قاطعی دارد. حال آرایش dبعدی دلخواهی از سادکهای مماس را در نظر بگیرید که دارای خط قاطع ℓ است. در این‌صورت هر خط ℓ' که موازی و نزدیک آن باشد نیز قاطع خواهد بود. اگر ℓ' و ℓ را موازی و به‌قدرکافی نزدیک به‌هم بگیریم، آنگاه هر یک از سادکها شامل یک (کوتاهترین) پاره‌خط عمودی واصل بین دو خط است. تنها بخشی محدود از خطهای ℓ و ℓ' در سادکهای آرایش قرار دارد، و می‌توانیم دو پاره‌خط واصل در خارج از آرایش اضافه کنیم به‌طوری که مستطیل ایجادشده به‌وسیلهٔ خطهای واصل خارجی (یعنی غلاف محدب آنها) همهٔ پاره‌خطهای واصل دیگر را در بر داشته باشد. پس یک «نردبان» گذاشته‌ایم به‌طوری که هر یک از سادکهای آرایش یکی از پله‌های نردبان را در درونش داشته باشد درحالی‌که چهار انتهای نردبان در بیرون آرایش باشند.



حال گام اصلی این است که یک تبدیل (آفینِ) مختصات انجام دهیم که $\mathbb{R}^d$ را به $\mathbb{R}^d$ بنگارد، و مستطیل ایجادشده به‌وسیلهٔ نردبان را به‌صورتی که در شکل زیر دیده می‌شود به مستطیلِ (نیم‌مربع) زیر ببرد

$$R^۱ = \{(x_۱, x_۲, ۰, \cdots, ۰)^T : -۱ \leq x_۱ \leq ۰; -۱ \leq x_۲ \leq ۱\}$$

پس در مورد آرایشی از سادکهای مماس $\sum^۱$ در $\mathbb{R}^d$ که به‌دست می‌آوریم، محور $x_۱$ یک خط قاطع است و طوری قرار می‌گیرد که هر یک از سادکها شامل یک پاره‌خط

$$S^۱(\alpha) = \{(\alpha, x_۲, ۰, \cdots, ۰)^T : -۱ \leq x_۲ \leq ۱\}$$

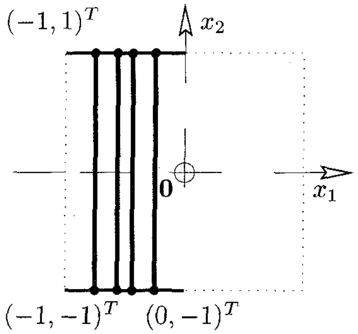
در درون خود است (به‌ازای αای با ضابطهٔ $۰ > \alpha > ۱-$) درحالی‌که مبدأ ۰ در بیرون همهٔ سادکهاست.

حال نسخهٔ دیگری از این آرایش را با به‌دست آوردن قرینهٔ آن نسبت به ابرصفحهٔ $x_۱ = x_۲$ ایجاد می‌کنیم. محور $x_۲$ یک خط قاطعِ این آرایش دوم است، و هر سادک

شامل پاره‌خط

$$S^{۲}(\beta) = \{(x_۱, \beta, ۰, \cdots, ۰)^T : -۱ \leq x_۱ \leq ۱\}$$

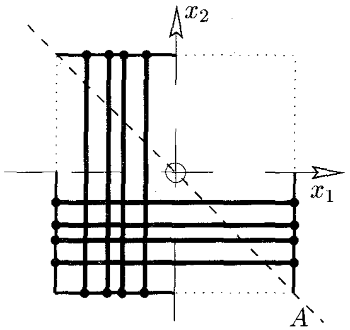
در درونش است (با ضابطهٔ $۰ > \beta > ۱-$). ولی هر پاره‌خط $S^{۱}(a)$ هر پاره‌خط $S^{۲}(\beta)$ را قطع می‌کند، و بنابراین ناحیهٔ درونی هر سادک $\sum^{۱}$، هر سادک $\sum^{۲}$ را در درونش قطع می‌کند. پس اگر یک مختص جدید $(d+۱)$ام، $x_{d+۱}$، را اضافه کنیم و $\sum$ را



$$\{\text{conv}(P_i \cup \{-e_{d+۱}\}) : P_i \in \Sigma^{۱}\} \cup \{\text{conv}(P_j \cup \{e_{d+۱}\}) : P_j \in \Sigma^{۲}\}$$

بگیریم، آنگاه آرایشی از سادکهای $(d+۱)$ بعدی مماس در $\mathbb{R}^{d+۱}$ به‌دست می‌آوریم. به‌علاوه، «پاد قطر»

$$A = \{(x, -x, ۰, \ldots, ۰)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$$



همهٔ پاره‌خطهای $S^{۱}(\alpha)$ و $S^{۲}(\beta)$ را قطع می‌کند. می‌توانیم آن را کمی «کج کنیم»، و خطی چون

$$L_\varepsilon = \{(x, -x, ۰, \cdots, ۰, \varepsilon x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+۱}$$

به‌دست آوریم که به‌ازای همهٔ εهای مثبتِ به‌قدر کافی کوچک، همهٔ سادکهای $\sum$ را قطع می‌کند. به‌این ترتیب، مرحلهٔ استقرای ما به‌انجام می‌رسد. $\square$

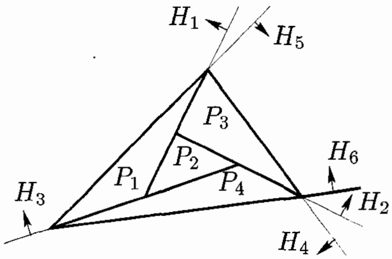
برخلاف این کران پایین نمایی، به‌دست آوردن کرانهای بالای دقیق، دشوار است. با یک استدلال استقرایی خام و ساده (در نظرگرفتن همهٔ ابرصفحه‌های مربوط به وجوه $(d-۱)$ بعدی) دریک آرایش مماس به‌طور جداگانه) به‌دست می‌آید

$$f(d) \leq \frac{۲}{۳}(d+۱)!$$

و این خیلی ازکران پایین قضیهٔ ۱ دور است. ولی میشا پرلس[1] اثبات «سحرآمیز» زیر را برای کران بسیار بهتری به‌دست آورد.

قضیهٔ ۲. به‌ازای هر $d \geq ۱$، داریم $f(d) \leq ۲^{d+۱}$.

1. Micha Perles



■ **اثبات.** با مفروض بودن آرایشی از r سادک dبعدی مماس P_1، P_2، . . .، P_r در $\mathbb{R}^d$، نخست ابرصفحه‌های متفاوت H_1، H_2، . . .، H_s را که به‌وسیلهٔ وجوه $((d-1)$ بعدی) P_i تولید می‌شوند می‌شمریم، و برای هر یک از آنها یک طرف مثبت H_i^+ را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم و طرف دیگر را H_i^- می‌نامیم.

مثلاً برای آرایش ۲بعدی مرکب از $r = 4$ مثلث که تصویرش در حاشیه آمده است، $s = 6$ ابرصفحه می‌یابیم (که به‌ازای $d = 2$، خطهایی هستند).

از روی این داده‌ها، Bـماتریس را می‌سازیم که ماتریسی است $(r \times s)$ و درایه‌هایش، به‌شرح زیر، در $\{+1, -1, 0\}$ هستند: قرار می‌دهیم

$$B_{ij} := \begin{cases} +1 & P_i \subseteq H_j^+ \text{ و } \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ داشته باشد} \\ -1 & P_i \subseteq H_j^- \text{ و } \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ داشته باشد} \\ 0 & \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ نداشته باشد} \end{cases}$$

مثلاً، آرایش ۲ بعدی در حاشیه به ماتریس زیر می‌انجامد

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دو ویژگی Bـماتریس شایان ذکرند. نخست اینکه، چون هر سادک dبعدیْ $d+1$ وجه $((d-1)$ بعدی) دارد، در می‌یابیم که هر سطر B دقیقاً $d+1$ درایهٔ ناصفر و بنابراین دقیقاً $s-(d+1)$ درایهٔ صفر دارد. دوم اینکه با آرایشی از سادکهای دوبه‌دو مماس سروکار داریم و از این رو برای هر جفت از سطرها یک ستون می‌یابیم که در آن یک سطر دارای درایهٔ $+1$ و دومی دارای درایهٔ -1 است. یعنی سطرها متفاوت‌اند حتی اگر درایه‌های صفر آنها را نادیده بگیریم.

حال از B ماتریس جدید Cای به‌دست می‌آوریم به این ترتیب که به‌جای هر سطر B، همهٔ بردارهای سطری را که بتوان از آن سطر، با قرار دادن $+1$ یا -1 به‌جای صفرها، به‌دست آورد می‌گذاریم. چون هر سطر B دارای $s-d-1$ صفر است، و B تعداد r سطر دارد، ماتریس C دارای $2^{s-d-1}r$ سطر است.

در مثال ما این ماتریس C ماتریسی 32×6 خواهد بود که چنین شروع می‌شود

$$C = \left(\begin{array}{cccccc} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ \hline -۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

که در آن ۸ سطر اول C از سطر نخست B به‌دست می‌آیند، ۸ سطر دوم از سطر دوم B، و الی آخر.

اکنون موضوع این است که همهٔ سطرهای C متفاوت‌اند: اگر دو سطر از یک سطر B به‌دست آمده باشند، متفاوت هستند زیرا به‌جای صفرهای آنها عددهای متفاوتی گذاشته شده است؛ و اگر از سطرهای متفاوتی از B به‌دست آمده باشند، متفاوت‌اند صرفنظر از اینکه به‌جای صفرهایشان چه چیزی گذاشته شده باشد.

ولی سطرهای C بردارهای شامل (± ۱) به‌طول sاند، و فقط ۲^s بردار متفاوت از این‌گونه وجود دارد. پس، چون سطرهای C متمایزند، C حداکثر می‌تواند ۲^s سطر داشته باشد یعنی

$$۲^{s-d-۱} r \leq ۲^s$$

که $r \leq ۲^{d+۱}$ را به‌دست می‌دهد: آرایش شامل بیش از $۲^{d+۱}$ سادک نیست. □

مراجع

[1] F. BAGEMIHL: *A conjecture concerning neighboring tetrahedra*, Amer. Math. Monthly **63** (1956) 328-329.

[2] V.J.D. BASTON: *Some Properties of Polyhedra in Euclidean Space*, Pergamon Press, Oxford 1965.

[3] M.A. PERLES: *At most 2^{d+1} neighborly simplices in E^d*, Annals of Discrete Math. **20** (1984), 253-254.

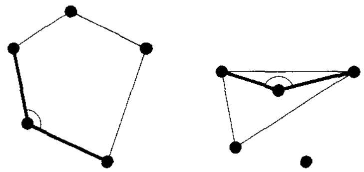
[4] J. ZAKS: *Neighborly families of 2^d d-simplices in E^d*, Geometriae Dedicata **11** (1981), 279-296.

[5] J. ZAKS: *No nine neighborly tetrahedra exist*, Memoirs Amer. Math. Soc. **447** (1991).

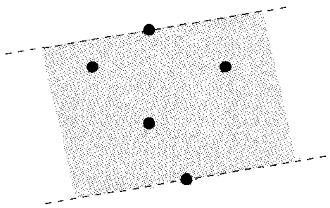
فصل ۱۴

هر مجموعهٔ بزرگی از نقطه‌ها زاویه‌ای منفرجه دارد

پال اردوش در حوالی ۱۹۵۰ حدس زد هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها که بیش از ۲^d نقطه در $\mathbb{R}^d$ داشته باشد، دست‌کم یک زاویهٔ منفرجه، یعنی زاویه‌ای که اکیداً بزرگتر از $\frac{\pi}{۲}$ است، معین می‌کند. به‌عبارت دیگر، هر مجموعه‌ای از نقاط در $\mathbb{R}^d$ که فقط زاویه‌های حاده (به‌انضمام قائمه) دارد، تعداد عضوهایش حداکثر ۲^d است. انجمن ریاضی هلند برای حل این مسأله جایزه مقرر کرد ولی فقط راه‌حلهایی به‌ازای $d = ۲$ و $d = ۳$ دریافت داشت.



به‌ازای $d = ۲$ مسأله آسان است: پنج نقطه ممکن است یک پنج‌ضلعی محدب را مشخص کنند که همیشه زاویه‌ای منفرجه دارد (در واقع، دست‌کم یک زاویه‌اش حداقل ۱۰۸° است.) در غیر این حالت، یک نقطه در غلاف محدب سه‌نقطهٔ دیگر که مثلثی تشکیل می‌دهند قرار دارد. ولی این نقطه سه ضلع مثلث را تحت سه زاویه که مجموعشان ۳۶۰° است «می‌بیند»، پس یکی از زاویه‌ها دست‌کم ۱۲۰° است. (حالت دوم همچنین در برگیرندهٔ حالاتی است که سه نقطهٔ روی یک خط، و بنابراین یک زاویهٔ ۱۸۰°، داریم.)



بی‌ارتباط با این موضوع، ویکتور کلی[1] این پرسش را چند سال بعد مطرح کرد ــ و اردوش آن را انتشار داد ــ که مجموعه‌ای از نقطه‌ها در $\mathbb{R}^d$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد و در عین حال دارای «ویژگی تقاطر[2]» زیر باشد: به‌ازای هر دو نقطه در این مجموعه یک نوار (محدود به دو ابرصفحهٔ موازی) وجود دارد که شامل این مجموعهٔ نقطه‌هاست، و دو نقطهٔ انتخاب شده در دو طرف مرزند.

بعداً در ۱۹۶۲، لودویگ دانتسر[3] و برانکو گرونباوم[4] هر دو مسأله را یکباره حل کردند: آنها ماکسیمم هر دو اندازه را در زنجیره‌ای از نابرابریها محصور کردند که با ۲^d آغاز و به آن ختم می‌شوند. پس پاسخ هم برای مسألهٔ اردوش و برای مسألهٔ کلی، ۲^dاست.

در آنچه در پی می‌آید، مجموعه‌های (متناهی) $S \subseteq \mathbb{R}^d$ از نقطه‌ها، غلافهای محدب آنها $P(S)$، و بس‌وجهیهای محدب کلی $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ را در نظر می‌گیریم. (مطلب مربوط به بس‌وجهیها را در صفحهٔ ۵۴ و ۵۵ ببینید و مفاهیم بنیادی را در

---

1. Victor Klee 2. antipodality 3. Ludwig Danzer
4. Branko Grünbaum

این زمینه ملاحظه کنید.) فرض می‌کنیم که این مجموعه‌ها دارای بعد کامل d هستند، یعنی در یک ابرصفحه قرار ندارند. این‌گونه مجموعه‌ها مماس‌اند اگر دست‌کم یک نقطهٔ مرزی مشترک داشته باشند ولی درونهای آنها با هم تقاطع نداشته باشند. به‌ازای هر مجموعهٔ $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر بردار $s \in \mathbb{R}^d$، تصویر Q را تحت انتقالی که ۰ را به s می‌برد با $Q+s$ نشان می‌دهیم [و آن را نگارهٔ انتقالی می‌نامیم]. همین‌طور، $Q-s$ نشان‌دهندهٔ نگارهٔ انتقالیِ حاصل از نگاشتی است که s را به مبدأ می‌برد.

نترسید: این فصلْ گشت و گذاری است در هندسهٔ dبعدی، ولی استدلالهایی که در زیر می‌آید نیازمند هیچ نوع «شهود در مورد ابعاد بالا» نیست، زیرا همهٔ آنها را می‌توان، در فضای سه‌بعدی یا حتی در صفحه تعقیب و تجسم کرد (و بنابراین فهمید). بنابراین شکلهای ما اثبات را به‌ازای $d=۲$ (که در این بعد «ابرصفحه» فقط یک خط است) نشان می‌دهند و شما می‌توانید تصاویر مربوط به $d=۳$ را (که «ابرصفحه» یک صفحه است) تجسم و درک کنید.

قضیهٔ ۱. به‌ازای هر d، زنجیرهٔ نابرابریهای زیر را داریم:

$$۲^d \overset{(۱)}{\leq} \max\#\{S \subseteq \mathbb{R}^d : \sphericalangle(s_i,s_j,s_k) \leq \tfrac{\pi}{۲}، \{s_i,s_j,s_k\} \subseteq S \text{ به‌ازای هر } \}$$

$$\overset{(۲)}{\leq} \max\#\left\{ S \subseteq \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{به‌ازای هر دو نقطهٔ } \{s_i,s_j\} \subseteq S \text{ نواری چون} \\ S(i,j) \text{ وجود دارد که شامل } S \text{ است به‌طوری} \\ \text{که } s_i \text{ و } s_j \text{ در ابرصفحه‌های مرزی} S(i,j) \\ \text{قرار دارند.} \end{array} \right\}$$

$$\overset{(۳)}{\leq} \max\#\left\{ S \subseteq \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } P-s_i \text{ از} P \coloneqq \mathrm{conv}(S) \\ \text{در یک نقطهٔ مشترک هم را تلاقی می‌کنند ولی} \\ \text{فقط با هم تماس دارند.} \end{array} \right\}$$

$$\overset{(۴)}{\leq} \max\#\left\{ S \subseteq \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } Q+s_i \text{ یک بس‌وجهی} \\ \text{محدب } d\text{بعدی } Q \subseteq \mathbb{R}^d \text{ دوبه‌دو با هم تماس} \\ \text{دارند.} \end{array} \right\}$$

$$\overset{(۵)}{=} \max\#\left\{ S \subseteq \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } Q^*+s_i \text{ یک بس‌وجهی} \\ \text{محدب } d \text{ بعدی } Q^* \subseteq \mathbb{R}^d \text{ که تقارن مرکزی} \\ \text{دارد، دوبه‌دو با هم تماس دارند.} \end{array} \right\}$$

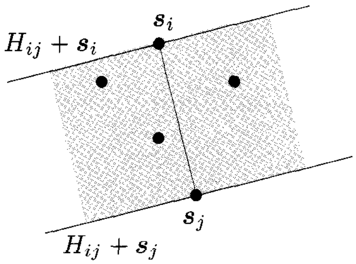
$$\overset{(۶)}{\leq} ۲^d$$

■ **اثبات.** شش ادعا (شامل برابری و نابرابری) را باید ثابت کنیم.

(۱) $S := \{0, 1\}^d$ را مجموعهٔ رأسهای مکعب واحد استاندارد در $\mathbb{R}^d$ می‌گیریم و $s_i, s_j, s_k \in S$ را انتخاب می‌کنیم. بنابه تقارن می‌توانیم فرض کنیم که $s_j = 0$ یک بردار صفر است. پس زاویه را می‌توان از

$$\cos \sphericalangle(s_i, s_j, s_k) = \frac{\langle s_i, s_k \rangle}{|s_i||s_k|}$$

محاسبه کرد که به‌وضوح نامنفی است. پس S مجموعه‌ای با ضابطهٔ $|S| = 2^d$ است که زاویهٔ منفرجه‌ای ندارد.



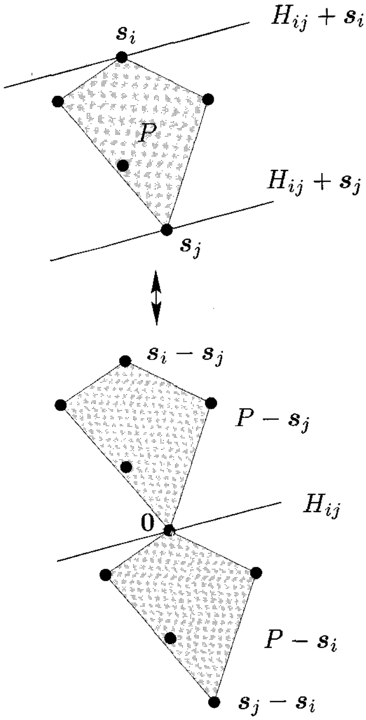
(۲) اگر S شامل هیچ زاویهٔ منفرجه نباشد، آنگاه به‌ازای $s_i, s_j \in S$ می‌توانیم $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$ را ابرصفحه‌های موازیِ گذرنده از، به‌ترتیب، s_i و s_j، که عمود بر یال $\{s_i, s_j\}$اند تعریف کنیم. در اینجا $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle\, x, s_i - s_j \,\rangle = 0\}$ ابرصفحهٔ گذرنده از مبدأ است که عمود بر خط گذرنده از s_i و s_j است، و $H + s_j = \{x + s_j : x \in H\}$ نگاره‌ای انتقالی از H است که از s_j می‌گذرد، و غیره. پس نوار بین $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$، علاوه بر s_i و s_j، دقیقاً همهٔ نقاط $x \in \mathbb{R}$ را که به‌ازای آنها زاویه‌های $\sphericalangle(s_i, s_j, x)$ و $\sphericalangle(s_j, s_i, x)$ نامنفرجه‌اند دربردارد. لذا این نوار شامل همهٔ S است.

(۳) P در نیمفضایی از $H_{ij} + s_j$ که شامل s_i است قرار دارد اگر و تنها اگر $P - s_j$ در نیمفضایی از H_{ij} که شامل $s_i - s_j$ است قرار داشته باشد: خاصیتِ «بودن یک شیء در یک نیمفضا»، اگر هم شیء و هم نیمفضا را به یک اندازه (یعنی به‌اندازهٔ $-s_j$) انتقال دهیم، از بین نمی‌رود. همین‌طور، P در نیمفضایی از $H_{ij} + s_i$ که شامل s_j است قرار دارد اگر و فقط اگر $P - s_i$ در نیمفضایی از H_{ij} باشد که شامل $s_j - s_i$ است.

اگر دو حکم را با هم تلفیق کنیم، در می‌یابیم که بس‌وجهی P در نوار بین $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$ قرار دارد اگر و تنها اگر $P - s_i$ و $P - s_j$ در نیمفضاهای متفاوتی نسبت به ابرصفحهٔ H_{ij} باشند.

این موضوع در شکل حاشیهٔ صفحهٔ ۱۰۸ نشان داده شده است.

به‌علاوه، از $s_i \in P = \mathrm{conv}(S)$ نتیجه می‌گیریم که مبدأ 0 در همهٔ نگاره‌های انتقالی $P - s_i$ $(s_i \in S)$ قرار دارد، بنابراین می‌بینیم که مجموعه‌های $P - s_i$ همه در 0 تلاقی می‌کنند، ولی فقط با هم تماس دارند: درونهای آنها دوبه‌دو مجزا هستند زیرا نسبت به ابرصفحه‌های متناظر H_{ij}، در دو طرف مقابل هستند.



(۴) می‌بینیم که: «نگاره‌های انتقالی باید دوبه‌دو مماس باشند» شرط ضعیفتری از «آنها در نقطهٔ مشترکی تلاقی می‌کنند ولی فقط تماس دارند» می‌باشد. همین‌طور می‌توان با فرض اینکه P یک بس‌وجهی dبعدی دلخواه در $\mathbb{R}^d$ باشد، شرایط را ملایمتر کرد. به‌علاوه می‌توان به‌جای S، $-S$ را در نظر گرفت.

(۵) در اینجا «$\geq$» بدیهی است ولی برای ما جالب نیست. ما باید از آرایشی مانند $S\subseteq\mathbb{R}^d$ و بس‌وجهی dبعدی دلخواهی چون $Q\subseteq\mathbb{R}^d$ شروع کنیم به‌طوری‌که نگاره‌های انتقالی $Q+s_i$ (که $s_i\in S$) دوبه‌دو مماس باشند. ادعا این است که در این وضعیت می‌توانیم از

$$Q^* := \left\{\frac{۱}{۲}(x-y)\in\mathbb{R}^d : x,y\in Q\right\}$$

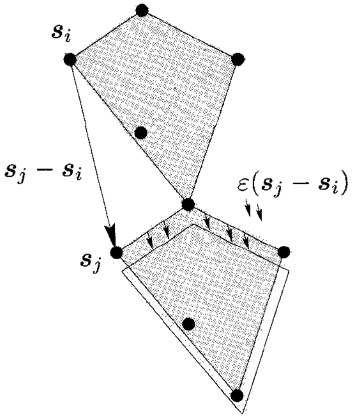
به‌جای Q استفاده کنیم. ملاحظه این مطلب مشکل نیست. نخست، Q^* محدب و dبعدی است و تقارن مرکزی دارد. می‌توان بررسی کرد که Q^* یک بس‌وجهی است (رأسهای آن به‌صورت $\frac{۱}{۲}(q_i-q_j)$، به‌ازای رأسهای q_i، q_j از Q، هستند)، ولی این برای ما مهم نیست.

اکنون نشان خواهیم داد که $Q+s_i$ و $Q+s_j$ با یکدیگر تماس دارند اگر و تنها اگر Q^*+s_i و Q^*+s_j با هم تماس داشته باشند. به‌این منظور، همچون مینکوفسکی، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
&(Q^*+s_i)\cap(Q^*+s_j)\neq\emptyset\\
&\iff \exists q_i',q_i'',q_j',q_j''\in Q : \frac{۱}{۲}(q_i'-q_i'')+s_i=\frac{۱}{۲}(q_j'-q_j'')+s_j\\
&\iff \exists q_i',q_i'',q_j',q_j''\in Q : \frac{۱}{۲}(q_i'+q_j'')+s_i=\frac{۱}{۲}(q_j'+q_i'')+s_j\\
&\iff \exists q_i,q_j\in Q : q_i+s_i=q_j+s_j\\
&\iff (Q+s_i)\cap(Q+s_j)\neq\emptyset
\end{aligned}$$

در هم‌ارزی سوم «$\Longleftrightarrow$» (که اهمیت حیاتی دارد)، با استفاده از این موضوع که هر $q\in Q$ را می‌توان به‌صورت $q=\frac{۱}{۲}(q+q)$ نوشت، به «$\Longleftarrow$» رسیدیم و با توجه به اینکه Q محدب است و بنابراین $\frac{۱}{۲}(q_i'+q_j''),\frac{۱}{۲}(q_j'+q_i'')\in Q$، «$\Longrightarrow$» را به‌دست آوردیم.

پس گذار از Q به Q^* (موسوم به متقارن‌سازی مینکوفسکی) ویژگی متلاقی بودن دو نگارهٔ انتقالی $Q+s_i$ و $Q+s_j$ را حفظ می‌کند. یعنی نشان داده‌ایم که به‌ازای هر مجموعهٔ محدب Q، دو نگارهٔ انتقالی $Q+s_i$ و $Q+s_j$ متلاقی‌اند اگر و تنها اگر نگاره‌های انتقالی Q^*+s_i و Q^*+s_j متلاقی باشند.



توصیف زیر نشان می‌دهد که متقارن‌سازی مینکوفسکی، خاصیت مماس بودن نگاره‌های انتقالی را هم حفظ می‌کند:

$Q+s_i$ و $Q+s_j$ مماس‌اند اگر و تنها اگر متلاقی باشند، در حالی‌که $Q+s_i$ و $Q+s_j+\epsilon(s_j-s_i)$ به‌ازای هیچ $\epsilon > ۰$ با یکدیگر تلاقی نمی‌کنند.

(۶) فرض کنیم $Q^* + s_i$ و $Q^* + s_j$ با هم تماس داشته باشند. به‌ازای هر نقطهٔ تلاقی

$$x \in (Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j)$$

داریم

$$x - s_j \in Q^* \quad \text{و} \quad x - s_i \in Q^*$$

پس، چون Q^* دارای تقارن مرکزی است، داریم

$$s_i - x = -(x - s_i) \in Q^*$$

و از اینجا، چون Q^* محدب است،

$$\frac{۱}{۲}(s_i - s_j) = \frac{۱}{۲}((x - s_j) + (s_i - x)) \in Q^*$$

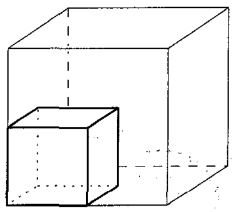
نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، $\frac{۱}{۲}(s_i + s_j)$ در $Q^* + s_j$ قرار دارد. پس به‌ازای $P := \mathrm{conv}(S)$ به‌دست می‌آوریم

$$P_j := \frac{۱}{۲}(P + s_j) = \mathrm{conv}\{\frac{۱}{۲}(s_i + s_j) : s_i \in S\} \subseteq Q^* + s_j$$

که از این نتیجه می‌شود مجموعه‌های $P_j = \frac{۱}{۲}(P + s_j)$ فقط می‌توانند مماس باشند.

و بالاخره مجموعه‌های P_j در P هستند، زیرا همهٔ نقطه‌های s_i، s_j و $\frac{۱}{۲}(s_i+s_j)$ در Pاند، چون P محدب است. اما P_jها فقط نگاره‌های انتقالی تجدید مقیاس‌شده و کوچکتر P هستند که در P قرار دارند. ضریب مقیاس $\frac{۱}{۲}$ است و بنابراین

$$\mathrm{vol}(P_j) = \frac{۱}{۲^d}\mathrm{vol}(P)$$



ضریب مقیاس $\frac{۱}{۲}$، $\mathrm{vol}(P_j) = \frac{۱}{۸}\mathrm{vol}(P)$

چون با مجموعه‌های dبعدی سروکار داریم. این بدان معنی است که حداکثر ۲^d مجموعهٔ P_j در P جا می‌گیرند، و از این رو $|S| \leq ۲^d$.

در اینجا اثبات به انجام می‌رسد: زنجیرهٔ نابرابریها بسته می‌شود. □

. . . اما این پایان قضیه نیست. دانتسر و گرونباوم پرسش طبیعی زیر را مطرح کردند:

اگر شرط کنیم تمام زاویه‌ها به‌جای اینکه فقط نامنفرجه باشند، حاده باشند، یعنی اگر زاویه‌های قائمه را کنار بگذاریم، چه می‌شود؟

آنها آرایشهایی مرکب از $۲d - ۱$ نقطه در $\mathbb{R}^d$ با فقط زاویه‌های حاده، ساختند و حدس زدند که این شاید بهترین امکان باشد. گرونباوم ثابت کرد که به‌ازای $d \leq ۳$ واقعاً چنین است. ولی بیست و یک‌سال بعد، در ۱۹۸۳، پال اردوش و زولتان فوردی[1] نشان دادند که این حدس ــ اگر بُعد بالا باشد به‌طرز چشمگیری! ــ غلط است. این اثبات نمونهٔ بسیار خوبی است از قدرت استدلالهای احتمالاتی؛ برای آشنایی با «روش احتمالاتی» به فصل ۳۰ مراجعه کنید.

قضیهٔ ۲. به ازای هر $d \geq ۱$، مجموعه‌ای چون $S \subseteq \{۰, ۱\}^d$ مرکب از $\lfloor \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^d \rfloor$ نقطه در $\mathbb{R}^d$ وجود دارد (رأسهای مکعب d بعدی واحد) که فقط زاویه‌های حاده معین می‌کنند. در حالت خاص $d = ۳۵$، مجموعه‌ای مرکب از $۲ \times ۳۵ - ۱ > ۷۶$ نقطه وجود دارد که فقط زاویه‌های حاده معین می‌کنند.

■ **اثبات.** قرار می‌دهیم $m := \lfloor \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^d \rfloor$، و $۲m$ بردار

$$\boldsymbol{x}(۱), \boldsymbol{x}(۲), \ldots, \boldsymbol{x}(۲m) \in \{۰, ۱\}^d$$

را چنان بر می‌گزینیم که همهٔ مختصاتشان مستقلاً و به تصادف مساوی ۰ یا ۱ انتخاب شوند، با احتمال $\frac{۱}{۲}$ برای هر حالت. (می‌توانید سکهٔ سالمی را $۲md$ بار پرتاب کنید؛ اما اگر d بزرگ باشد ممکن است از این‌کار به‌زودی خسته شوید.) حال سه‌بردار $\boldsymbol{x}(i)$، $\boldsymbol{x}(j)$، $\boldsymbol{x}(k)$ زاویهٔ قائمه‌ای به‌رأس $\boldsymbol{x}(j)$ معین می‌کنند اگر و تنها اگر حاصلضرب اسکالر

$$\langle \boldsymbol{x}(i) - \boldsymbol{x}(j), \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}(j) \rangle$$

صفر شود، یعنی اگر به‌ازای هر مختص ℓ داشته باشیم

$$x(k)_\ell - x(j)_\ell = ۰ \quad \text{یا} \quad x(i)_\ell - x(j)_\ell = ۰$$

سه‌تایی (i, j, k) را سه‌تایی بد می‌نامیم اگر این اتفاق بیفتد. (اگر $\boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{x}(j)$ یا $\boldsymbol{x}(j) = \boldsymbol{x}(k)$، آنگاه زاویه معین نمی‌شود، اما در آن حالت هم سه‌تایی (i, j, k) مسلماً بد است.)

1. Zoltan Füredi

احتمال اینکه یک سه‌تایی خاص بد باشد دقیقاً $(\frac{۳}{۴})^d$ است: در واقع، سه‌تایی خوب خواهد بود اگر و تنها اگر به‌ازای یکی از d مختص ℓ به‌دست آوریم

$$\text{یا}\quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = ۰ ،\quad x(j)_\ell = ۱$$
$$\text{یا}\quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = ۱ ،\quad x(j)_\ell = ۰$$

به‌این ترتیب، شش امکان بد از میان هشت امکان هم‌احتمال باقی می‌ماند، و یک سه‌تایی بد خواهد بود اگر و تنها اگر یکی از امکانهای بد (با احتمال $\frac{۳}{۴}$) برای هر یک از d مختص رخ بدهد.

تعداد سه‌تاییهایی که باید در نظر بگیریم، $۳\binom{۲m}{۳}$ است، زیرا $\binom{۲m}{۳}$ مجموعهٔ مرکب از سه بردار وجود دارد، و به‌ازای هر یک از آنها سه انتخاب برای رأس ممکن است. البته احتمالهای اینکه سه‌تاییهای گوناگون بد باشند، مستقل نیستند: ولی با توجه به خطی بودن امید ریاضی (که با میانگین‌گیری روی تمام انتخابهای ممکن به‌دست می‌آید؛ پیوست را ببینید) تعداد مورد انتظار سه‌تاییهای بد دقیقاً $۳\binom{۲m}{۳}(\frac{۳}{۴})^d$ است. این بدان معناست که ــ و در همین جاست که روش احتمالاتی قدرت خودش را نشان می‌دهد ــ انتخابی از $۲m$ بردار وجود دارد به‌نحوی که حداکثر $۳\binom{۲m}{۳}(\frac{۳}{۴})^d$ سه‌تایی بد موجود خواهد بود که بنابه نحوهٔ انتخاب m داریم

$$۳\binom{۲m}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^d < ۳\frac{(۲m)^۳}{۶}\left(\frac{۳}{۴}\right)^d = m(۲m)^۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^d \le m$$

اما اگر بیش از m انتخاب بد وجود نداشته باشد، می‌توانیم m تا از $۲m$ بردار $x(i)$ را برداریم به‌نحوی که m بردار باقیمانده شامل سه‌تایی بد نباشند، یعنی فقط زاویه‌های حاده تعیین کنند. $\square$

پیوست: سه ابزارِ احتمالاتی

در اینجا سه مفهوم اساسی را که متعلق به‌نظریهٔ احتمال گسسته است و بارها به آن بر خواهیم خورد تشریح می‌کنیم: متغیر تصادفی، خطی بودن امید ریاضی، و نابرابری مارکوف.

فرض کنیم (Ω, p) یک فضای احتمال متناهی باشد یعنی Ω مجموعه‌ای متناهی باشد و $p = \text{Prob}$ نگاشتی از Ω به بازهٔ $[۰,۱]$ با ضابطهٔ $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = ۱$ باشد. متغیر تصادفی X روی Ω نگاشتی چون $X : \Omega \to \mathbb{R}$ است. با قرار دادن

$p(X = x) : \sum_{X(\omega)=x} p(\omega)$ یک فضای احتمال روی مجموعهٔ تصویر $X(\Omega)$ تعریف می‌کنیم. مثالی ساده در این زمینه، تاسی سالم است (که همواره $p(\omega) = \frac{1}{6}$) با این ضابطه: X مساوی است با «عددی که پس از پرتاب تاس روی وجه بالایی آن دیده می‌شود.»

EX، امید ریاضی X، میانگین مورد انتظار X است یعنی $EX = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$. حال فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی روی Ω باشند. در این‌صورت $X + Y$ باز متغیری تصادفی است، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega} p(\omega)(X(\omega)+Y(\omega)) \\ &= \sum_{\omega} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega} p(\omega)Y(\omega) = EX + EY \end{aligned}$$

روشن است که این را می‌توان به هر ترکیب خطی متناهی از متغیرهای تصادفی تعمیم داد ــ و این تعمیم است که خطی بودن امید ریاضی نامیده می‌شود. توجه کنید که در اینجا لازم نیست متغیر تصادفی به‌هیچ معنایی «مستقل» باشد.

سومین ابزار ما به متغیرهای تصادفی Xای مربوط می‌شود که فقط مقدارهای نامنفی را اختیار می‌کنند و به‌اختصار، $X \geq 0$. فرض کنیم $\text{Prob}(X \geq a) = \sum_{\omega:X(\omega)\geq a} p(\omega)$ احتمال این رویداد باشد که X دست‌کم برابر با aی مثبتی باشد. در این‌صورت

$$EX = \sum_{\omega:X(\omega)\geq a} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega:X(\omega)<a} p(\omega)X(\omega) \geq a \sum_{\omega:X(\omega)\geq a} p(\omega)$$

و ما نابرابری مارکوف

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

را ثابت کرده‌ایم.

مراجع

[1] L. Danzer & B. Grünbaum: *Über zwei Probleme bezüglich konvexer körper von P. Erdös und von V.L. Klee*, Math. Zeitschrift **79** (1962), 95-99.

[2] P. Erdős & Z. Füredi: *The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space*, Annals of Discrete Mathematics **17** (1983), 275-283.

[3] H. Minkowski: *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper*, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1904, 311-355.

حدس بورسوک فصل۱۵


کارول بورسوک

مقالهٔ کارول بورسوک[1] با عنوان «سه قضیه دربارهٔ فضای اقلیدسی nبعدی» به‌تاریخ ۱۹۳۳ به‌خاطر اشتمال بر حکم مهمی شهرت دارد که قبلاً استانیسلاو اولام[2] آن را حدس زده بود و امروز به قضیهٔ بورسوک‌ـاولام موسوم است:

> هر نگاشت پیوستهٔ $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ دو نقطهٔ متقاطر [واقع بر دو انتهای یک قطر] از کرهٔ S^d را به‌نقطهٔ واحدی در $\mathbb{R}^d$ می‌نگارد.

این مقاله همچنین به‌خاطر مسأله‌ای که در انتهای آن مطرح شد و به‌حدس بورسوک معروف گشت، شهرت دارد:

> «آیا هر مجموعهٔ $S \subseteq \mathbb{R}^d$ با قطر کراندار $diam(S) > ۰$ را می‌توان به‌حداکثر $d + ۱$ مجموعه با قطر کوچکتر افراز کرد؟»

کران $d + ۱$ بهترین امکان است: اگر S یک سادک dبعدی منتظم یا فقط مجموعهٔ $d + ۱$ رأس آن باشد، آنگاه هیچ بخشی از یک افراز کاهش‌دهندهٔ قطر شامل بیش از یکی از رأسهای سادک نمی‌تواند باشد. اگر $f(d)$ نشان‌دهندهٔ کوچکترین عددی باشد که هر مجموعهٔ کراندار $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را بتوان با یک افراز کاهندهٔ قطر به $f(d)$ بخش تقسیم کرد، آنگاه مثال سادک منتظم، رابطهٔ $f(d) \geq d + ۱$ را ثابت می‌کند.

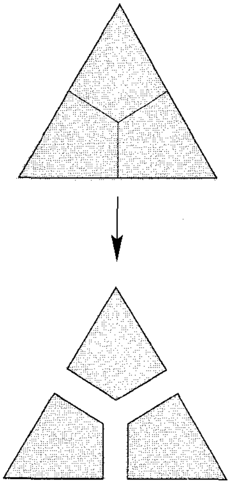
حدس بورسوک در حالتی که S کره است (به‌وسیلهٔ خود بورسوک)، برای اجسام هموار S (با استفاده از قضیهٔ بورسوک‌ـاولام)، به‌ازای $d \leq ۳$، ... ثابت شد اما حدس کلی حل‌نشده باقی ماند. بهترین کران بالای قابل دسترس برای $f(d)$ را شرام[3] به‌دست آورد که اساساً نشان داد به‌ازای هر dای که به‌قدر کافی بزرگ باشد داریم

$$f(d) \leq (۱٫۲۵)^d$$

این کران در مقایسه با حدس «$f(d) = d + ۱$» خیلی ضعیف به‌نظر می‌رسد، ولی وقتی جف کان[4] و گیل کالای[5] در ۱۹۹۳ حدس بورسوک را به‌طرز چشمگیری ابطال

---

1. Karol Borsuk 2. Stanislaw Ulam 3. Schramm 4. Jeff Kahn
5. Gil Kalai



هر سادک dبعدی را می‌توان به $d+۱$ قطعه، هر یک با قطر کوچکتر، تجزیه کرد.

کردند، ناگهان معقول به‌نظر آمد. شصت سال پس از انتشار مقالهٔ بورسوک، کان و کالای ثابت کردند که به‌ازای dی به‌قدر کافی بزرگ، $f(d) \geq (۱٫۱)^{\sqrt{d}}$ برقرار است.

روایت «کتابی» اثبات کان‌ـکالای را نیلی[1] به‌دست داد: اثباتی کوتاه و خودکفا که حتی کرانی قویتر یعنی $f(d) \geq (۱٫۲)^{\sqrt{d}}$ را عرضه می‌دارد و مثال ناقض صریحی برای حدس بورسوک در بعد $d = ۹۴۶$ ارائه می‌کند. جرح و تعدیلی که به‌دست آندری رایگورودسکی[2] و برنولف وایسباخ[3] در این اثبات صورت گرفته آن را بهتر کرده است و بعد را به $d = ۸۶۱$ و حتی به $d = ۵۶۱$ کاهش داده است که «رکورد» فعلی محسوب می‌شود. ما این‌صورت تعدیل‌یافته را در اینجا می‌آوریم.

قضیه. فرض کنیم $p \geq ۳$ عددی اول باشد، $n := ۴p - ۲$، و $d := \binom{n}{۲} = (۲p-۱)(۴p-۳)$. در این‌صورت، مجموعه‌ای چون $S \subseteq \{+۱, -۱\}^d$ مرکب از $۲^{n-۲}$ نقطه در $\mathbb{R}^d$ وجود دارد به‌نحوی که هر افراز S، که اجزای آن قطری کوچکتر از S دارند، بیش از

$$\frac{۲^{n-۲}}{\sum_{i=۰}^{p-۳}\binom{n}{i}}$$

جزء دارد. به‌ازای $p = ۱۱$، این بدان معنی است که حدس بورسوک در بعد $d = ۸۶۱$ غلط است. به‌علاوه، به‌ازای همهٔ dهای به‌قدر کافی بزرگ، $f(d) > (۱٫۲)^{\sqrt{d}}$ برقرار است.

نیلی

■ **اثبات.** ساختن مجموعهٔ S در چهار گام انجام می‌شود.

(۱) فرض می‌کنیم p عدد اول فردی باشد، قرار می‌دهیم $n = ۴p - ۲$، و فرض می‌کنیم

$$Q := \left\{x \in \{+۱, -۱\}^n : x_۱ = ۱,\ \text{زوج است}\ \{i : x_i = -۱\}\ \text{تعداد}\right\}$$

این Q مجموعه‌ای است مرکب از $۲^{n-۲}$ بردار در $\mathbb{R}^n$. خواهیم دید که به‌ازای همهٔ بردارهای $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q$، $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv ۲$ (پیمانهٔ ۴) برقرار است. $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ را تقریباً متعامد گوییم اگر $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = ۲$. ثابت خواهیم کرد که هر زیرمجموعهٔ $Q' \subseteq Q$ که شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد، باید «کوچک» باشد: $|Q'| \leq \sum_{i=۰}^{p-۲}\binom{n}{i}$.

1. A. Nilli 2. Andrei M. Raigorodskii 3. Bernulf Weiβbach

(۲) با استفاده از Q، مجموعهٔ

$$R := \{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T : \boldsymbol{x} \in Q\}$$

مرکب از $۲^{n-۲}$ ماتریس متقارن $n \times n$ از رتبهٔ ۱ را می‌سازیم؛ آنها را به‌عنوان بردارهایی با $n^۲$ مؤلفه، $R \subseteq \mathbb{R}^{n^۲}$ تعبیر می‌کنیم. نشان خواهیم داد که فقط زاویه‌های حاده بین این بردارها وجود دارد: آنها تقریباً متعامدند با حاصلضرب اسکالر ۲+ «در بدترین حالت». پس اگر $R' \subseteq R$ اصلاً شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد، آنگاه $|R'|$ «کوچک» است: $|R'| \le \sum_{i=۰}^{p-۲}\binom{n}{i}$.

بردارها، ماتریسها، و حاصلضربهای اسکالر

در سیستم نمادگذاری ما همهٔ بردارهای $\boldsymbol{x}$، $\boldsymbol{y}$، ... بردارهای ستونی‌اند؛ بنابراین بردارهای ترانهادهٔ $\boldsymbol{x}^T$، $\boldsymbol{y}^T$، ... بردارهای سطری‌اند. حاصلضرب ماتریسی $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ ماتریسی از رتبهٔ ۱ است با ضابطهٔ $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)_{ij} = x_i x_j$.

اگر $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ بردارهایی ستونی باشند، آنگاه حاصلضرب اسکالر آنها چنین است:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_i x_i y_i = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$$

ما همچنین به‌حاصلضرب اسکالر ماتریسهای $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نیاز خواهیم داشت که آنها را به‌صورت بردارهایی به‌طول $n^۲$ تعبیر می‌کنیم و بنابراین حاصلضرب اسکالر آنها چنین است:

$$\langle X, Y\rangle := \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ -۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

(۳) از R، مجموعهٔ نقاطی در $\mathbb{R}^{\binom{n}{۲}}$ را به‌دست می‌آوریم که مختصاتشان درایه‌های زیرقطری ماتریسهای متناظرند:

$$S := \{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)_{i>j} : \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \in R\}$$

باز S مرکب از $۲^{n-۲}$ نقطه است. حداکثر فاصلهٔ بین این نقاط دقیقاً به‌ازای بردارهای تقریباً متعامد $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q$ به‌دست می‌آید. نتیجه می‌گیریم که زیرمجموعه‌ای چون $S' \subseteq S$ با قطر کوچکتر از S باید «کوچک» باشد: $|S'| \le \sum_{i=۰}^{p-۲}\binom{n}{i}$.

(۴) براوردها: با توجه به (۳) می‌بینیم که هر افراز کاهندهٔ قطر S دست‌کم باید

$$g(p) := \frac{۲^{۴p-۴}}{\sum_{i=۰}^{p-۲} \binom{۴p-۲}{i}}$$

بخش داشته باشد. پس

$$\text{به‌ازای}\quad d = (۲p-۱)(۴p-۳)\text{ ،}\quad f(d) \ge \max\{g(p), d+۱\}$$

بنابراین، هرگاه داشته باشیم $g(p) > (۲p-۱)(۴p-۳)+۱$، آنگاه مثال ناقضی برای حدس بورسوک در بعد $d = (۲p-۱)(۴p-۳)$ در دست داریم. در زیر با محاسبه خواهیم دید $g(۱۱) > ۸۶۲$ که مثال ناقض در بعد $d = ۸۶۱$ را به‌دست می‌دهد، و نیز

$$g(p) > \frac{e}{۴۶p^۲}\left(\frac{۲۷}{۱۶}\right)^p$$

که کران مجانبی $f(d) > (۱/۲)^{\sqrt{d}}$ را برای dهایی که به‌قدر کافی بزرگ باشند به‌دست می‌دهد.

جزئیات مربوط به (۱): فرض کنیم $Q' \subseteq Q$ اصلاً شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد.

ادعای ۱. اگر $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q'$ در $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \equiv +۲$ (به‌پیمانهٔ p) صدق کند، آنگاه $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

با توجه به‌اینکه $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \{+۱, -۱\}^{۴p-۲}$، داریم

$$-(۴p-۲) \le \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \le ۴p-۲$$

در مورد کران پایین، علامت برابری هیچ‌گاه برقرار نیست زیرا $\boldsymbol{x} \neq -\boldsymbol{y}$ از $x_۱ = y_۱ = ۱$ نتیجه می‌شود. کران بالا فقط در صورتی برقرار است که $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. پس برای هر دو بردار متمایز چون $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q$ داریم

$$-۴p+۲ < \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle < ۴p-۲ \qquad (۱)$$

هم $\boldsymbol{x}$ و هم $\boldsymbol{y}$ تعداد زوجی مؤلفهٔ (-۱) دارند، پس تعداد مؤلفه‌هایی که $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ در آنها اختلاف دارند نیز زوج است. از این‌رو به‌ازای هر $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q$،

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = (۴p-۲) - ۲\#\{i : x_i \neq y_i\} \equiv ۲ \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

حال اگر $\langle x, y\rangle \equiv ۲ \pmod{p}$ (به‌پیمانهٔ p)، آنگاه $\langle x, y\rangle = -۲$ هم بر ۴ و هم بر p بخش‌پذیر است، پس مضربی از $۴p$ است زیرا p فرد است. با توجه به (۱) از اینجا نتیجه می‌شود $\langle x, y\rangle = ۲$. پس x، y نمی‌توانند بردارهای متمایزی از Q' باشند.

بنابه‌تقارن، اگر $\langle x, y\rangle \equiv -۲$ آنگاه $\langle x, y\rangle + ۲$ مضربی از $۴p$ است؛ بنابراین از

(۱) نتیجه می‌شود $\langle x, y\rangle = -۲$. لذا باز x، y نمی‌توانند بردارهای متمایزی از Q' باشند.

ادعای ۲. به‌ازای هر $y \in Q'$، چندجمله‌ای درجهٔ $p - ۲$ برحسب n متغیر $x_۱$، . . . ، x_n که با ضابطهٔ

$$F_y(x) := \prod_{\substack{i\in\{۰,۱,\ldots,p-۱\} \\ i\neq ۲,p-۲}} (\langle y, x\rangle - i)$$

مشخص می‌شود به‌ازای هر $x \in Q'\backslash\{y\}$ بر p بخش‌پذیر است ولی به‌ازای $x = y$ چنین نیست.

به‌ازای $y = x$ داریم $\langle y, x\rangle = n \equiv -۲$ (به‌پیمانهٔ p)، پس $\langle y, x\rangle - i$ بر p بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر $i \equiv -۲$ (به‌پیمانهٔ p)، و بنابراین هیچ یک از عاملها در تعریف $F_y(y)$ بر p بخش‌پذیر نیست.

به‌ازای $y \neq x$، براساس ادعای ۱ برای $x, y \in Q'$ داریم $\langle y, x\rangle \not\equiv \pm ۲$، و بنابراین به‌ازای iای متعلق به $\{۰, ۱, ۳, ۴, \ldots, p-۳, p-۱\}$ داریم $\langle y, x\rangle \equiv ۰$ که از آن نتیجه می‌شود عاملی از $F_y(x)$ بر p بخش‌پذیر است.

ادعای ۳. همین موضوع در مورد چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند صادق است: $F_y(x)$ را به تک‌جمله‌ایها بسط می‌دهیم و همهٔ مربعات متغیرها را با جانشانی $x_i^۲ = ۱$ حذف می‌کنیم. درجهٔ چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ حداکثر $p - ۲$ است.

بردارهای x در $\{+۱, -۱\}^n$ قرار دارند، پس در $x_i^۲ = ۱$ صدق می‌کنند. بنابراین، جانشانیها مقدارهای چندجمله‌ایها را تغییر نمی‌دهند. همچنین درجه را افزایش نمی‌دهند و از این‌رو درجهٔ $\overline{F}_y(x)$ حداکثر $p - ۲$ است.

ادعای ۴. هیچ رابطهٔ خطی (با ضرایب گویا) بین چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ وجود ندارد یعنی مجموعهٔ $\{\overline{F}_y(x) : y \in Q'\}$ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی است.

فرض کنید رابطه‌ای به‌شکل $\sum_{y\in Q'} \alpha_y \overline{F}_y(x) = ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که همهٔ ضریبهای α_y صفر نیستند. پس از ضرب کردن در اسکالری مناسب می‌توانیم فرض کنیم همهٔ ضریبها عددهای صحیحی هستند، ولی همهٔ آنها بر p بخش‌پذیر نیستند. ولی در این‌صورت، به‌ازای هر $y \in Q$، محاسبه در $x := y$ نشان می‌دهد که $\alpha_y \overline{F}_y(y)$ بر p بخش‌پذیر است و از این رو α_y نیز چنین است زیرا $\overline{F}_y(y)$ بر p بخش‌پذیر نیست.

ادعای ۵. کران $|Q'|$ تعداد تک‌جمله‌ایهای خالی از مربع با درجهٔ حداکثر $p-۲$ برحسب n متغیر است که این تعداد برابر با $\sum_{i=۰}^{p-۲}\binom{n}{i}$ است.

چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y$ بنابه‌نحوهٔ ساختنشان خالی از مربع‌اند: هیچ‌یک از تک‌جمله‌ایهای آنها شامل متغیری با درجهٔ بزرگتر از ۱ نیست. پس هر $\overline{F}_y(x)$ ترکیبی خطی از تک‌جمله‌ایهای خالی از مربع از درجهٔ حداکثر $p-۲$ است. چون چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ مستقل خطی‌اند، تعداد آنها (که $|Q'|$ است) نمی‌تواند بیشتر از تعداد تک‌جمله‌ایهای مورد نظر باشد.

جزئیات مربوط به (۲): نخستین ستون xx^T، x است. پس برای xهای متمایز متعلق به Q، ماتریسهای متمایز $M(x) := xx^T$ را به‌دست می‌آوریم. این ماتریسها را به‌صورت بردارهایی به‌طول $n^۲$ با مؤلفه‌های x_ix_j تعبیر می‌کنیم. محاسبه‌ای ساده:

$$\begin{aligned}\langle M(x), M(y)\rangle &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(x_ix_j)(y_iy_j)\\ &= \left(\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{j=۱}^{m}x_jy_j\right) = \langle x, y\rangle^۲ \geq ۲\end{aligned}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب اسکالر $M(x)$ و $M(y)$ مینیمم می‌شود، و لذا زاویهٔ بین $M(x)$ و $M(y)$ ماکسیمم می‌گردد اگر و تنها اگر $x, y \in Q$ تقریباً متعامد باشند.

جزئیات مربوط به (۳): فرض کنیم $U(x) \in \{+۱, -۱\}^d$ نشان‌دهندهٔ بردار مرکب

از همهٔ درایه‌های زیر قطری $M(x)$ باشد. چون $M(x) = xx^T$ نسبت به مقادیر قطری $+۱$ متقارن است، می‌بینیم که $M(x) \neq M(y)$ دلالت بر $U(x) \neq U(y)$ دارد. به‌علاوه

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & U(x) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ U(x) & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$۲ \leq \langle M(x), M(y) \rangle = ۲\langle U(x), U(y) \rangle + n$$

یعنی

$$\langle U(x), U(y) \rangle \geq -\frac{n}{۲} + ۱$$

علامت برابری برقرار است اگر و تنها اگر x و y تقریباً متعامد باشند. چون همهٔ بردارهای $U(x) \in R$ طولشان $\sqrt{\langle U(x), U(x) \rangle} = \sqrt{\binom{n}{۲}}$ است، این بدان معنی است که حداکثر فاصله بین نقطه‌های $U(x), U(y) \in R$ دقیقاً وقتی به‌دست می‌آید که x و y تقریباً متعامد باشند.

جزئیات مربوط به (۴): به‌ازای $p = ۱۱$ داریم $g(۱۱) \approx ۱۸۴۱٫۳۵$، که بزرگتر از $d + ۱ = \binom{۴۲}{۲} + ۱ = ۸۶۲$ است.

به‌منظور به‌دست آوردن کرانی کلی برای dهای بزرگ، از تکمدی بودن ضرایب دوجمله‌ای و براوردهای $n! > e(\frac{n}{e})^n$ و $n! < en(\frac{n}{e})^n$ (پیوست فصل ۲ را ببینید) استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۰}^{p-۲} \binom{n}{i} < p\binom{۴p}{p} = p\frac{(۴p)!}{p!(۳p)!} < p\frac{e۴p(\frac{۴p}{e})^{۴p}}{e(\frac{p}{e})^p e(\frac{۳p}{e})^{۳p}} = \frac{۴p^۲}{e}\left(\frac{۲۵۶}{۲۷}\right)^p$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$f(d) \geq g(p) = \frac{۲^{۴p-۴}}{\sum_{i=۰}^{p-۲}\binom{n}{i}} > \frac{e}{۶۴p^۲}\left(\frac{۲۷}{۱۶}\right)^p$$

از اینجا، با توجه به

$$d = (۲p-۱)(۴p-۳) = ۵p^۲ + (p-۳)(۳p-۱) \geq ۵p^۲ \quad p \geq ۳$$

$$p = \frac{۵}{۸} + \sqrt{\frac{d}{۸} + \frac{۱}{۶۴}} > \sqrt{\frac{d}{۸}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{۲۷}{۱۶}\right)^{\sqrt{\frac{۱}{۸}}} > ۱٫۲۰۳۲$$

به‌ازای dهای به‌قدر کافی بزرگ به‌دست می‌آوریم

$$f(d) > \frac{e}{۱۳d}(۱٫۲۰۳۲)^{\sqrt{d}} > (۱٫۲)^{\sqrt{d}} \qquad \square$$

از همین نوع اثبات با فرض $p = ۹$ مثال ناقضی در بعد $d = ۵۶۱$ به‌دست می‌آید. در اینجا چندجمله‌ایهای

$$F_y(x) := \frac{۱}{۹} \prod_{i \in \{۰,۱,۳,۴,۵,۶,۸\}} (\langle y, x \rangle - i)$$

به‌کار می‌روند که متناسب با این واقعیت است که ۹، عدد اول نیست. سپس همهٔ استدلالها را می‌توان مانند بالا، با استفاده از بخش‌پذیری بر ۳، انجام داد.

تاکنون فقط می‌دانیم که حدس بورسوک به‌ازای $d \leq ۳$، و به‌ازای $d \leq ۸$ در حالت خاصِ زیرمجموعه‌های $S \subseteq \{۱, -۱\}^d$ به‌صورتی‌که در اینجا مورد نظر بودند، درست است. پس به‌هیچ وجه روشن نیست که کوچکترین بعد برای مثالهای ناقض واقعاً بزرگ باشد.

مراجع

[1] K. Borsuk: *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. **20** (1933), 177-190.

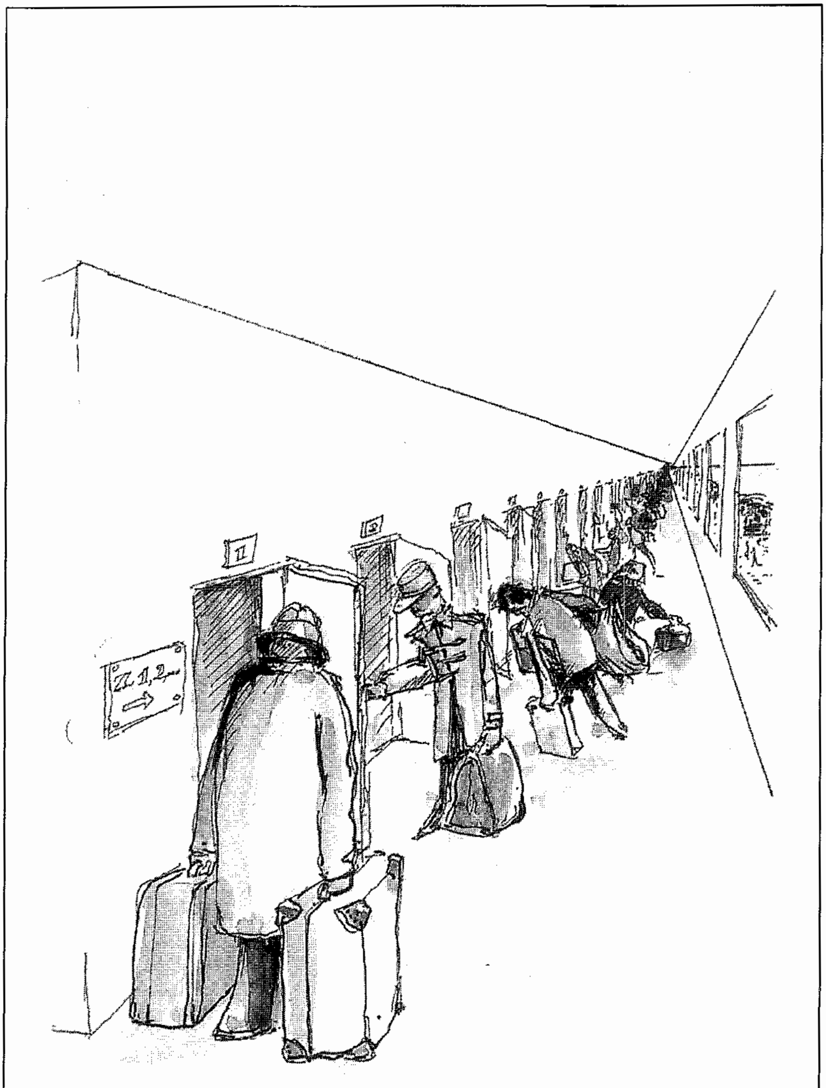
[2] J. Kahn & G. Kalai: *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin Amer. Math. Soc. **29** (1993), 60-62.

[3] A. Nilli: *On Borsuk's problem*, in: "Jerusalem Combinatorics "93" (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), Contemporary Mathematics **178**, Amer. Math. Soc. 1994, 209-210.

[4] A.M. Raigorodskii: *O razmernostiv probleme Borsuka (A counterexample for Borsuk's problem; in Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk (6) **52** (1997), 181-182.

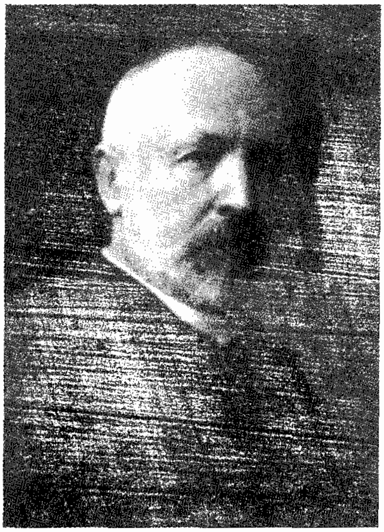
[5] O. Schramm: *Illuminating sets of constant width*, Mathematika **35** (1988), 180-199.

آنالیز



«هتل ساحلی هیلبرت»

مجموعه، تابع، و فرض پیوستار فصل ۱۶



گئورک کانتور

نظریهٔ مجموعه‌ها، که در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم به‌دست گئورگ کانتور پایه‌گذاری شد، ریاضیات را عمیقاً دگرگون ساخته است. ریاضیات امروزی بدون مفهوم مجموعه قابل تصور نیست و، چنانکه هیلبرت گفته است: «هیچ کس ما را از بهشتی که کانتور برایمان آفریده (نظریهٔ مجموعه‌ها) بیرون نخواهد راند.»

یکی از مفهومهای بنیادی کانتور، مفهوم اندازه یا کاردینال [تعداد اعضای] مجموعه‌ای چون M است که به $|M|$ نشان داده می‌شود. این مفهوم در مورد مجموعه‌های متناهی با اشکالی مواجه نمی‌شود: تعداد عضوها را می‌شمریم و می‌گوییم M یک مجموعهٔ nعضوی است یا اندازه‌اش n است اگر M شامل دقیقاً n عضو باشد. پس دو مجموعهٔ متناهی M و N اندازهٔ برابر دارند، $|M| = |N|$، اگر تعداد اعضایشان یکی باشد.

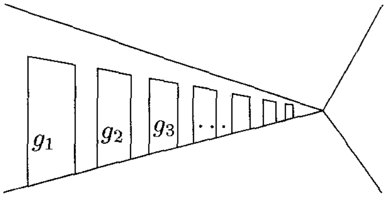
برای تعمیم مفهوم برابری اندازه‌ها به مجموعه‌های نامتناهی، آزمایش ذهنیِ الهامبخش زیر را در مورد مجموعه‌های متناهی انجام می‌دهیم. فرض کنید عده‌ای سوار یک اتوبوس می‌شوند. چه وقتی می‌گوییم که تعداد مسافران با تعداد صندلیهای اتوبوس یکی است؟ پاسخ ساده است: می‌گذاریم همهٔ مسافران بنشینند. اگر هرکسی صندلیی برای نشستن یافت، و هیچ صندلیی خالی نماند، در آن صورت و فقط در آن صورت، تعداد اعضای این دو مجموعه (مسافران و صندلیها) برابر است. به‌عبارت دیگر، این دو اندازه یکی هستند اگر یک نگاشت دوسویی از یک مجموعه به روی دیگری وجود داشته باشد.

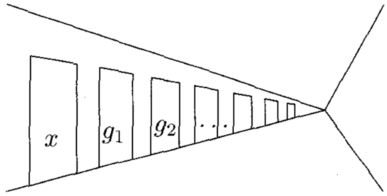
پس تعریف ما چنین است: گوییم دو مجموعهٔ دلخواه M و N (متناهی یا نامتناهی) دارای اندازه یا کاردینال برابرند اگر و تنها اگر نگاشتی دوسویی از M به‌روی N وجود داشته باشد. روشن است که این مفهوم برابری اندازه یک رابطهٔ هم‌ارزی است، و بنابراین می‌توانیم به هر رده از مجموعه‌های هم‌اندازه یک عدد کاردینال نسبت دهیم. مثلاً برای مجموعه‌های متناهی، عددهای کاردینال ۰، ۱، ۲، ...، n، ... را به‌دست می‌آوریم که n نمایندهٔ ردهٔ مجموعه‌های n عضوی است و به‌خصوص، ۰ نمایندهٔ مجموعهٔ تهی $\varnothing$ است. به‌علاوه، این حقیقت آشکار را ملاحظه می‌کنیم که زیرمجموعه‌ای سره از یک مجموعهٔ متناهی M همواره اندازه‌ای کوچکتر از M دارد.

وقتی به‌سراغ مجموعه‌های نامتناهی می‌رویم، نظریه خیلی جالب (و بسیار دور

از ادراک شهودی) می‌شود. مجموعهٔ $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$ از عددهای طبیعی را در نظر بگیرید. مجموعه‌ای چون M را شمارا می‌نامیم، اگر بتوان آن را در تناظر یک به یک با $\mathbb{N}$ قرار داد. به‌عبارت دیگر، M شماراست اگر بتوان عضوهای M را در فهرستی به‌صورت $m_۱$، $m_۲$، $m_۳$، ... قرار داد. ولی حال پدیدهٔ غریبی رخ می‌دهد. فرض کنید عضو جدید x را به $\mathbb{N}$ بیفزاییم. در این صورت $\mathbb{N}\cup\{x\}$ باز هم شماراست، و بنابراین اندازه‌ای برابر با $\mathbb{N}$ دارد!

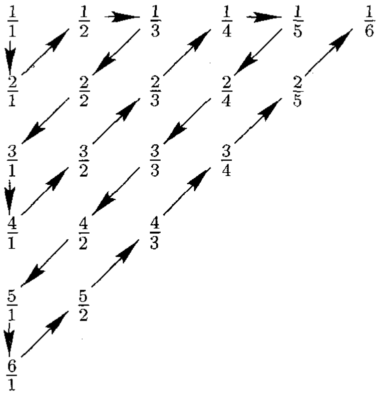
«هتل هیلبرت» تمثیل دلچسبی از این وضعیت است. فرض کنید هتلی تعدادی شمارا اتاق دارد که شماره‌های آنها ۱،۲،۳، ... است و مهمان g_i در اتاق i اقامت دارد؛ بنابراین، هتل کاملاً پر است. حال مسافر جدیدی از راه می‌رسد و تقاضای اتاق می‌کند. مدیر هتل می‌گوید: متأسفم، همهٔ اتاقها پر است. تازه‌وارد می‌گوید مسأله‌ای نیست، مهمان $g_۱$ را به اتاق ۲ انتقال دهید، مهمان $g_۲$ را به اتاق ۳، $g_۳$ را به اتاق ۴، و به‌همین ترتیب. در این‌صورت من اتاق ۱ را می‌گیرم. در میان شگفتی مدیر هتل (هرچه باشد او ریاضیدان نیست) این تدبیر کارساز است؛ او باز هم می‌تواند به همهٔ مهمانها به‌اضافهٔ تازه‌وارد x جا بدهد!





اکنون روشن است که او می‌تواند همین‌طور به‌مهمان دیگری چون y و مهمان دیگری مثل z، و ... اتاق بدهد. به‌خصوص، ملاحظه می‌کنیم که، برخلاف مجموعه‌های متناهی، کاملاً ممکن است زیرمجموعه‌ای از یک مجموعهٔ نامتناهی M، هم‌اندازه با M باشد. در واقع، همان‌طور که خواهیم دید، مجموعهٔ نامتناهی را می‌توان به این طریق توصیف کرد: یک مجموعه نامتناهی است اگر و تنها اگر هم‌اندازه با زیرمجموعه‌ای سره باشد.

بیایید از هتل هیلبرت بیرون بیاییم و نظری به مجموعه‌های عددی آشنای خود بیندازیم. مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ از عددهای صحیح نیز شماراست زیرا می‌توان $\mathbb{Z}$ را به‌صورت $\mathbb{Z}=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,۳,-۳,\dots\}$ مرتب کرد. شاید عجیبتر این باشد که مجموعهٔ عددهای گویا، $\mathbb{Q}$، نیز شماراست. با فهرست‌بندی مجموعهٔ عددهای گویای مثبت، $\mathbb{Q}^+$، به‌صورتی که در شکل دیده می‌شود، می‌بینیم که $\mathbb{Q}^+$ شماراست، پس اگر ۰ را در آغاز فهرست قرار دهیم و $-\frac{p}{q}$ را درست بعد از $\frac{p}{q}$، می‌بینیم $\mathbb{Q}$ هم شماراست:



$$\mathbb{Q}=\{۰,۱,-۱,۲,-۲,\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳},۳,-۳,۴,-۴,\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲}\dots\}$$

گزارهٔ زیر، راه دیگری است برای تعبیر این شکل:

اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های شمارای M_n، شماراست.

در واقع، قرار می‌دهیم $M_n = \{a_{n۱}, a_{n۲}, a_{n۳}, \ldots\}$، و فهرست زیر را دقیقاً مانند قبل تشکیل می‌دهیم

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} M_n = \{a_{۱۱}, a_{۲۱}, a_{۱۲}, a_{۱۳}, a_{۲۲}, a_{۳۱}, a_{۴۱}, a_{۳۲}, a_{۲۳}, a_{۱۴}, \ldots\}$$

دربارهٔ عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ چه می‌توان گفت؟ آیا آنها هم شمارا هستند؟ نه، نیستند، و ابزاری که این موضوع را به‌وسیلهٔ آن نشان می‌دهند ــ روش قطری‌سازی کانتور ــ نه‌تنها اهمیت اساسی برای تمام نظریهٔ مجموعه‌ها دارد بلکه مسلماً به‌عنوان جرقهٔ نادر و بی‌نظیری از نبوغ به «کتاب» تعلق دارد.

قضیهٔ ۱. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ از اعداد حقیقی شمارا نیست.

■ **اثبات.** هر زیرمجموعه‌ای چون N از مجموعهٔ شمارای $M = \{m_۱, m_۲, m_۳, \ldots\}$ حداکثر شماراست (یعنی، متناهی یا شماراست). در واقع کافی است عضوهای N را به‌ترتیبی که در M ظاهر می‌شوند مرتب کنیم. بر این اساس، اگر بتوانیم زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ پیدا کنیم که شمارا نباشد، $\mathbb{R}$ هم به‌طریق اولی شمارا نیست. زیرمجموعهٔ M از $\mathbb{R}$ که در جستجوی آنیم، بازهٔ $(۰, ۱]$ از همهٔ عددهای حقیقی مثبت r با ضابطهٔ $۰ < r \leq ۱$ است. فرض کنید M شمارا باشد و $M = \{r_۱, r_۲, r_۳, \ldots\}$ فهرستی از اعضای M باشد. r_n را به‌صورت بسط اعشاری نامتناهی یکتای آن بدون دنبالهٔ نامتناهی صفرها در انتها، می‌نویسیم:

$$r_n = ۰/a_{n۱}a_{n۲}a_{n۳}\ldots$$

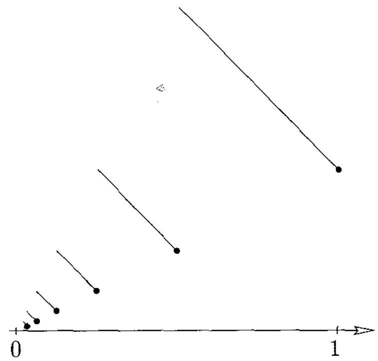
که در آن $a_{ni} \in \{۰, ۱, \ldots, ۹\}$ به‌ازای هر n و i. مثلاً $۰/۷ = ۰/۶۹۹۹\ldots$

اکنون آرایهٔ از دو سو نامتناهی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{array}{lcl}
r_۱ & = & ۰/a_{۱۱}\, a_{۱۲}\, a_{۱۳}\ldots \\
r_۲ & = & ۰/a_{۲۱}\, a_{۲۲}\, a_{۲۳}\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
r_n & = & ۰/a_{n۱}\, a_{n۲}\, a_{n۳}\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

به‌ازای هر n، $b_n \in \{۱, \ldots, ۸\}$ را متفاوت با a_{nn} انتخاب می‌کنیم؛ روشن است که این کار انجام‌شدنی است. حال $b = ۰/b_۱b_۲b_۳\ldots b_n\ldots$ عددی حقیقی در

مجموعهٔ M مورد نظر است و بنابراین باید اندیسی داشته باشد مانند $b = r_k$. اما این امکان ندارد زیرا b_k متفاوت با a_{kk} است. و این تمامِ اثبات است! □

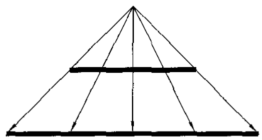


$f : (۰\,,۱] \longrightarrow (۰\,,۱)$

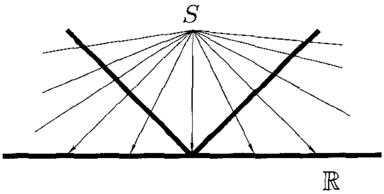
بیایید کمی به‌بحث عددهای حقیقی ادامه دهیم. خاطرنشان می‌کنیم که هر چهار نوع بازهٔ $(۰\,,۱)$، $[۰\,,۱)$، $(۰\,,۱]$ و $[۰\,,۱]$ اندازهٔ برابر دارند. به‌عنوان مثال، نشان می‌دهیم که $(۰\,,۱]$ و $(۰\,,۱)$ کاردینال برابر دارند، نگاشت $f : (۰\,,۱] \to (۰\,,۱)$، $x \mapsto y$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$y := \begin{cases} \frac{۳}{۲} - x & \text{به‌ازای } \frac{۱}{۲} < x \le ۱ \\ \frac{۳}{۴} - x & \text{به‌ازای } \frac{۱}{۴} < x \le \frac{۱}{۲} \\ \frac{۳}{۸} - x & \text{به‌ازای } \frac{۱}{۸} < x \le \frac{۱}{۴} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

این کار را انجام می‌دهد. در واقع این نگاشت دوسویی است زیرا حوزهٔ y در سطر اول، $\frac{۱}{۲} \le y < ۱$ است، در سطر دوم $\frac{۱}{۴} \le y < \frac{۱}{۲}$، در سطر سوم $\frac{۱}{۸} \le y < \frac{۱}{۴}$، و به همین ترتیب.



سپس با در نظر گرفتن تصویر مرکزی مانند شکل حاشیه، در می‌یابیم که هر دو بازهٔ (با طول متناهیِ مثبت) اندازهٔ برابر دارند. حتی حکمی فراتر از این هم صادق است: هر بازهٔ (به‌طول مثبت) هم‌اندازه با تمام خط حقیقی $\mathbb{R}$ است. برای ملاحظهٔ این مطلب، بازهٔ باز $(۰\,,۱)$ را که در نقطه‌ای خم شده در نظر بگیرید و آن را از مرکز S به روی $\mathbb{R}$ تصویر کنید.



در نتیجه، هر بازهٔ باز، نیمباز، بسته (متناهی یا نامتناهی) به‌طول مثبت، اندازهٔ یکسانی دارد و ما این اندازه را به c نشان می‌دهیم که c حرف اول *continuum* [پیوستار] است (نامی که گاه برای بازهٔ $[۰\,,۱]$ به کار می‌رود).

اینکه بازه‌های متناهی و نامتناهی اندازهٔ برابر دارند می‌تواند با قدری تأمل قابل قبول باشد اما واقعیتی وجود دارد که با احساس شهودی ما کاملاً مغایر است.

قضیهٔ ۲. مجموعهٔ $\mathbb{R}^۲$ مرکب از همهٔ جفتهای مرتب عددهای حقیقی (یعنی صفحهٔ واقعی) هم‌اندازه با $\mathbb{R}$ است.

■ **اثبات.** کافی است ثابت کنیم که مجموعهٔ همهٔ جفتهای (x, y)، $۰ < x, y \le ۱$، را می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی $(۰\,,۱]$ نگاشت. این اثبات نیز «کتابی» است. جفت

(x, y) را در نظر بگیرید و x، y را، همان‌طور که در مثال زیر می‌بینید، به‌صورت بسط اعشاریشان بنویسید:

$$x = \quad ٠٫٣ \quad ٠١ \quad ٢ \quad ٠٠٧ \quad ٠٨ \ \ldots$$
$$y = ٠٫٠٠٩ \quad ٢ \quad ٠٥ \quad ١ \quad ٠٠٠٨ \ \ldots$$

توجه کنید که رقمهای x و y را به‌دسته‌های جداگانه تفکیک کرده‌ایم به این نحو که هر دسته از ارقام شامل یک رقم ناصفر و صفرهای قبل از آن است. حال به (x, y) عدد $z \in [٠, ١)$ را نسبت می‌دهیم، به‌این طریق که اولین دسته از ارقام x و سپس اولین دسته از ارقام y، آنگاه دومین دسته از ارقام x و ... را می‌نویسیم. پس در مثال بالا داریم

$$z = ٠٫٣ \ ٠٠٩ \ ٠١ \ ٢ \ ٢ \ ٠٥ \ ٠٠٧ \ ١ \ ٠٨ \ ٠٠٠٨ \ldots$$

چون نه ارقام x و نه ارقام y به‌رشته‌ای از رقمهای صفر ختم نمی‌شوند، در می‌یابیم که بسط z نیز یک بسط اعشاری بی‌پایان است. به‌عکس، از روی بسط z می‌توانیم فوراً پیش‌تصویر آن (x, y) را بیابیم، و نگاشت دوسویی است ــ اثبات به‌پایان می‌رسد.$\square$

چون $(x, y) \mapsto x + iy$ نگاشتی دوسویی از $\mathbb{R}^٢$ به‌روی عددهای مختلط $\mathbb{C}$ است، نتیجه می‌گیریم که $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}| = c$. چرا حکم $|\mathbb{R}^٢| = |\mathbb{R}|$ این‌قدر غیر منتظره است؟ زیرا برخلاف ادراک شهودی ما از بعد است. این حکم حاکی است که صفحهٔ دوبعدی $\mathbb{R}^٢$ (و به‌طور کلی، به‌استقرا، فضای nبعدی $\mathbb{R}^n$) را می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی خط یک‌بعدی $\mathbb{R}$ نگاشت. پس بعد در حالت کلی به‌وسیلهٔ نگاشتهای دوسویی حفظ نمی‌شود. ولی اگر بخواهیم نگاشت و وارونش پیوسته باشند، آنگاه چنانکه براوئر برای نخستین بار نشان داد، بُعد حفظ می‌شود.

حال کمی جلوتر می‌رویم. تا اینجا فقط از مفهوم برابریِ اندازه‌ها صحبت کرده‌ایم. چه وقتی می‌گوییم اندازهٔ M کوچکتر از اندازهٔ N است؟ باز هم استفاده از نگاشت رهگشاست. می‌گوییم عدد کاردینال $\mathbf{m}$ کوچکتر از $\mathbf{n}$ است اگر برای مجموعه‌های M و N با ضوابط $|M| = \mathbf{m}$، $|N| = \mathbf{n}$، نگاشتی دوسویی از M به‌روی زیرمجموعه‌ای از N وجود داشته باشد ولی هیچ نگاشت دوسویی از N به‌روی زیرمجموعه‌ای از M وجود نداشته باشد. واضح است که رابطهٔ $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ مستقل از مجموعه‌های M و Nای است که انتخاب شده‌اند. و این باز در مورد مجموعه‌های متناهی با ادراک شهودی ما همخوان است. مجموعه‌ای mعضوی کوچکتر از مجموعه‌ای nعضوی

است اگر و تنها اگر $m < n$. از دستگاه اصل موضوعی متعارف تسرملو-فرانکل در مورد مجموعه‌ها نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ $<$ برای کاردینالهای نامتناهی نیز معنی دارد. به‌ازای دو کاردینال دلخواه $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{n}$ دقیقاً یکی از سه حالت زیر ممکن است:

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{n}\text{،}\quad \mathfrak{m} = \mathfrak{n}\text{،}\quad \text{یا}\quad \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$$

به‌علاوه، بنا به‌تعریف از طریق نگاشتها، رابطهٔ $<$ متعدی است یعنی از $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ و $\mathfrak{n} < \mathfrak{p}$ نتیجه می‌شود $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$. پس کاردینالها به‌ترتیب خطی و با شروع از کاردینالهای متناهی ۰، ۱، ۲، ۳، ... مرتب می‌شوند. با استفادهٔ مجدد از اصول موضوع (به‌خصوص، اصل موضوع انتخاب) به‌آسانی در می‌یابیم که هر مجموعهٔ نامتناهی M شامل زیرمجموعه‌ای شماراست. در واقع M شامل عضوی، مثلاً m_1، است. مجموعهٔ $M\backslash\{m_1\}$ تهی نیست (زیرا نامتناهی است) و بنابراین شامل عنصری مانند m_2 است. با در نظر گرفتن $M\backslash\{m_1, m_2\}$، وجود m_3 را نتیجه می‌گیریم، و به‌همین ترتیب. پس، اندازهٔ مجموعه‌ای شمارا، کوچکترین کاردینال نامتناهی است که معمولاً به $\aleph_0$ نشان داده می‌شود (و به‌صورت «الف صفر» تلفظ می‌شود).

به‌عنوان پیامدی از رابطهٔ $\aleph_0 \le \mathfrak{m}$ به‌ازای هر کاردینال نامتناهی $\mathfrak{m}$، می‌توانیم مستقیماً حکم مربوط به «هتل هیلبرت» را برای هر عدد کاردینال نامتناهی $\mathfrak{m}$ ثابت کنیم یعنی این حکم راکه به‌ازای هر مجموعهٔ نامتناهی M داریم $|M| = |M \cup \{x\}|$. در واقع M شامل زیرمجموعه‌ای چون $N = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ است. حال x را روی m_1، m_1 را روی m_2، و به همین ترتیب، می‌نگاریم و در این جریان اعضای $M\backslash N$ را ثابت نگه می‌داریم. این نگاشتِ دوسویی مطلوب است.

«کوچکترین کاردینال نامتناهی»

به این ترتیب، حکمی را نیز که قبلاً بیان کردیم، ثابت کرده‌ایم:

هر مجموعهٔ نامتناهی هم‌اندازه با زیرمجموعه‌ای سره است.

تا اینجا عددهای کاردینال ۰، ۱، ۲، ...، $\aleph_0$ را می‌شناسیم و نیز می‌دانیم که c، کاردینال $\mathbb{R}$، بزرگتر از $\aleph_0$ است. گذار از $\mathbb{Q}$ با ضابطهٔ $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ به $\mathbb{R}$ با $|\mathbb{R}| = c$، پرسش زیر را فوراً به‌ذهن الهام می‌کند:

آیا $|\mathbb{R}| = c$ عدد کاردینال نامتناهیِ بلافاصله پس از $\aleph_0$ است؟

حالا البته با این مسأله روبه‌روییم که آیا عدد کاردینالِ بزرگتری که بلافاصله بعد از $\aleph_0$ باشد وجود دارد یعنی آیا $\aleph_1$ اصلاً معنی دارد یا نه. پاسخ مثبت است ــ رئوس اثبات آن در پیوست این فصل می‌آید.

گزارهٔ $c = \aleph_1$ به فرض پیوستار معروف شده است. مسألهٔ درستی یا نادرستی این فرض موضوع بزرگترین چالشها در تمامیِ ریاضیات در طول چند دهه بوده است.

پاسخ آن که سرانجام به‌وسیلهٔ کورت گودل و پال کوهن عرضه شد، دستاورد نهایی تفکر منطقی در این زمینه است. آنها نشان دادند که گزارهٔ $c = \aleph_1$ مستقل از دستگاه اصول موضوع تسرملو-فرانکل است، همان‌طور که اصل موضوع توازی مستقل از دیگر اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی است. مدلهایی از نظریهٔ مجموعه‌ها هستند که در آنها $c = \aleph_1$ برقرار است، و مدلهای دیگری هم هستند که در آنها $c \neq \aleph_1$ درست است.

در پرتو این واقعیت، پرسش بسیار جالبی مطرح می‌شود و آن این است که آیا نامزدهای دیگری (مثلاً از آنالیز) وجود دارند که معادل با فرض پیوستار باشند؟ در زیر می‌خواهیم چنین موردی را همراه با راه‌حل فوق‌العاده زیبا و سادهٔ پال اردوش برای آن، ارائه کنیم. در سال ۱۹۶۲، وتسل[1] پرسش زیر را مطرح کرد:

> فرض کنید $\{f_\alpha\}$ خانواده‌ای از تابعهای تحلیلی دوبه‌دو متمایز روی عددهای مختلط باشد به‌طوری که به‌ازای هر $z \in \mathbb{C}$، مجموعهٔ مقادیر $\{f_\alpha(z)\}$ شمارا باشد؛ این ویژگی را (P_0) می‌نامیم.
> در این‌صورت آیا نتیجه می‌شود که خود خانواده شماراست؟

مدت کوتاهی بعد، پال اردوش نشان داد که پاسخ، در نهایت تعجب، به‌فرض پیوستار وابسته است.

قضیهٔ ۳. اگر $c > \aleph_1$، آنگاه هر خانوادهٔ $\{f_\alpha\}$ که در (P_0) صدق کند شماراست. اگر، از سوی دیگر $c = \aleph_1$، خانواده‌ای چون $\{f_\alpha\}$ با ویژگی (P_0) وجود دارد که اندازه‌اش c است.

برای اثبات قضیه به بعضی حکمهای بنیادی دربارهٔ عددهای کاردینال و اُردینال نیاز داریم. برای خوانندگانی که با این مفهومها آشنا نیستند، پیوستی در انتهای فصل آمده است که تمام حکمهای ضروری در آن آورده شده‌اند.

■ **اثبات قضیهٔ ۳.** نخست فرض می‌کنیم $c > \aleph_1$. نشان خواهیم داد که برای هر خانوادهٔ $\{f_\alpha\}$ با اندازهٔ $\aleph_1$ از تابعهای تحلیلی، یک عدد مختلط z_0 وجود دارد به‌نحوی که همهٔ $\aleph_1$ مقدار $f_\alpha(z_0)$ متمایزند. در نتیجه، اگر خانواده‌ای از تابعها در (P_0) صدق کند، آن خانواده شماراست.

برای ملاحظهٔ این مطلب، از اطلاعات خود در مورد عددهای اُردینال استفاده می‌کنیم. نخست خانوادهٔ $\{f_\alpha\}$ را برحسب عدد اُردینال آغازی ω_1 از $\aleph_1$ خوش ترتیب

1. Wetzel

می‌کنیم. در نتیجه بنا به گزارهٔ ۱ در پیوست، مجموعهٔ اندیسها همهٔ عددهای اُردینال α را که کوچکتر از $\omega_۱$ هستند در بر می‌گیرد. سپس نشان می‌دهیم که مجموعهٔ جفتهای (α,β)، $\alpha < \beta < \omega_۱$ دارای اندازهٔ $\aleph_۱$ است. چون هر $\beta < \omega_۱$ یک اُردینال شماراست، مجموعهٔ جفتهای (α,β)، $\alpha < \beta$ به‌ازای هر βی ثابت شماراست. با در نظر گرفتن اجتماع روی همهٔ $\aleph_۱$ تا β، از گزارهٔ ۶ پیوست نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ همهٔ جفتهای (α,β)، $\alpha < \beta$، دارای اندازهٔ $\aleph_۱$ است. اکنون برای هر جفت $\alpha < \beta$، مجموعهٔ

$$S(\alpha,\beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هر مجموعهٔ $S(\alpha,\beta)$ شماراست. برای نشان دادن این موضوع، دایره‌های C_k به‌شعاع $k = ۱,۲,۳,\ldots$ به‌مرکز مبدأ را در صفحهٔ مختلط در نظر می‌گیریم. اگر f_α و f_β روی تعدادی نامتناهی نقطه در یک دایرهٔ C_k برابر باشند، آنگاه f_α و f_β بنا به قضیهٔ معروفی در مورد توابع تحلیلی، یکسان هستند. پس f_α و f_β تنها در تعداد محدودی نقطه در هر C_k، و بنابراین روی‌هم‌رفته در حداکثر تعداد شمارایی نقطه، تطابق دارند. حال قرار می‌دهیم $S = \cup_{\alpha<\beta} S(\alpha,\beta)$. باز بنا به گزارهٔ ۶، می‌بینیم S دارای اندازهٔ $\aleph_۱$ است، زیرا هر مجموعهٔ $S(\alpha,\beta)$ شماراست؛ و شاه‌بیت مطلب اینجاست: چون همان‌طور که می‌دانیم اندازهٔ $\mathbb{C}$، c است و c بنا به‌فرض بزرگتر از $\aleph_۱$ است، عدد مختلط $z_۰$ای وجود دارد که در S نیست، و به‌ازای این $z_۰$ همهٔ $\aleph_۱$ مقدار $f_\alpha(z_۰)$ متمایزند.

اکنون فرض می‌کنیم $c = \aleph_۱$. مجموعهٔ $D \subseteq \mathbb{C}$ از عددهای مختلط را که دارای بخش حقیقی و بخش موهومی به‌صورت $p + iq$ هستند در نظر می‌گیریم. چون به‌ازای هر p مجموعهٔ $\{p + iq : q \in \mathbb{Q}\}$ شماراست، پس D شماراست. به‌علاوه، D مجموعه‌ای چگال در $\mathbb{C}$ است: هر قرص باز در صفحهٔ مختلط شامل نقطه‌ای از D است. فرض کنیم $\{z_\alpha : ۰ \leq \alpha < \omega_۱\}$ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی از $\mathbb{C}$ باشد. حال خانواده‌ای چون $\{f_\beta : ۰ \leq \beta < \omega_۱\}$ از $\aleph_۱$ تابع تحلیلی متمایز می‌سازیم که

$$f_\beta(z_\alpha) \in D \quad \text{هرگاه} \quad \alpha < \beta \qquad (۱)$$

هر چنین خانواده‌ای در شرط $(P_۰)$ صدق می‌کند. در واقع هر نقطهٔ $z \in \mathbb{C}$ اندیسی، مثلاً $z = z_\alpha$، دارد. اکنون به‌ازای هر $\beta > \alpha$، مقادیر $\{f_\beta(z_\alpha)\}$ در مجموعهٔ شمارای D قرار دارند. چون α یک عدد اُردینال شماراست، تابعهای f_β با ضابطهٔ $\beta \leq \alpha$ حداکثر تعداد شمارایی مقادیر $f_\beta(z_\alpha)$ دیگر تولید خواهند کرد، پس مجموعهٔ همهٔ

مقادیر $\{f_\beta(z)\}$ نیز حداکثر شماراست. بنابراین، اگر بتوانیم خانواده‌ای چون $\{f_\beta\}$ بسازیم که در (۱) صدق کند، آنگاه بخش دوم قضیه به‌اثبات می‌رسد.

ساختن $\{f_\beta\}$ با استقرای ترامتناهی به‌انجام می‌رسد. برای $f_\circ$ می‌توانیم تابع تحلیلی دلخواهی در نظر بگیریم، مثلاً ثابت$= f_\circ$. فرض کنید f_β قبلاً به‌ازای هر $\beta < \gamma$ ساخته شده است. چون γ اُردینالی شماراست، می‌توانیم $\{f_\beta : \circ \leq \beta < \gamma\}$ را به‌شکل دنباله‌ای چون g_1، g_2، g_3، ... مرتب کنیم. با همین تجدید ترتیب در مورد $\{z_\alpha : \circ \leq \alpha < \gamma\}$ دنباله‌ای مانند w_1، w_2، w_3، ... به‌دست می‌آید. حال تابعی چون f_γ می‌سازیم که به‌ازای هر n در شرطهای

$$f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n) \quad , \quad f_\gamma(w_n) \in D \tag{۲}$$

صدق کند. شرط دوم تضمین می‌کند که همهٔ تابعهای $f_\gamma(\circ \leq \gamma < \omega_1)$ متمایز باشند، و شرط اول همان (۱) است، در نتیجه $(P_\circ)$ بنا به استدلال قبلی حاصل می‌شود. توجه کنید که شرط $f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n)$ باز استدلالی از نوع قطری‌سازی است.

برای ساختن f_γ می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f_\gamma(z) := {} & \varepsilon_\circ + \varepsilon_1(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_1)(z - w_2) \\ & + \varepsilon_3(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3) + \dots . \end{aligned}$$

اگر γ اُردینالی متناهی باشد، آنگاه f_γ یک چندجمله‌ای و بنابراین تحلیلی است، و مسلماً می‌توانیم عددهای ε_i را چنان انتخاب کنیم که (۲) برقرار باشد. حال فرض کنید γ اُردینالی شماراست، در این‌صورت

$$f_\gamma(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \varepsilon_n (z - w_1) \dots (z - w_n) \tag{۳}$$

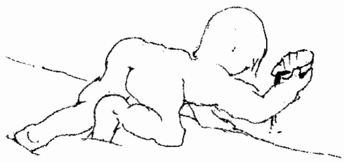
توجه کنید که مقادیر $(m \geq n)\varepsilon_m$ هیچ تأثیری بر مقدار $f_\gamma(w_n)$ ندارند، بنابراین می‌توانیم ε_n را گام‌به‌گام انتخاب کنیم. اگر دنبالهٔ (ε_n) با سرعت کافی به $\circ$ همگرا باشد، آنگاه (۳) تابعی تحلیلی تعریف می‌کند. و بالاخره، چون D مجموعه‌ای چگال است، می‌توانیم این دنبالهٔ (ε_n) را چنان انتخاب کنیم که f_γ شرطهای (۲) را برآورد، و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

پیوست: در بارهٔ عددهای کاردینال و اُردینال

نخست به بحث دربارهٔ این پرسش می‌پردازیم که آیا به‌ازای هر عدد کاردینال یک کاردینالِ بزرگترِ بعدی وجود دارد یا نه. در آغاز نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عدد کاردینال $\mathfrak{m}$ همواره یک عدد کاردینال $\mathfrak{n}$ بزرگتر از $\mathfrak{m}$ وجود دارد. به‌این منظور باز از صورتی از روش قطری‌سازی کانتور استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم M یک مجموعه باشد، و ادعا می‌کنیم که مجموعهٔ $\mathcal{P}(M)$ مرکب از همهٔ زیرمجموعه‌های M اندازه‌ای بزرگتر از M دارد. با فرض اینکه $m \in M$ متناظر است با $\{m\} \in \mathcal{P}(M)$، می‌بینیم که M را می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}$ نگاشت، که از آن بنا به تعریف نتیجه می‌شود $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. باقی می‌ماند که نشان دهیم $\mathcal{P}(M)$ نمی‌تواند به‌طور دوسویی به‌روی زیرمجموعه‌ای از M نگاشته شود. فرض کنید برخلاف این، $\varphi : N \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ نگاشتی دوسویی از $M \supseteq N$ به‌روی $\mathcal{P}(M)$ باشد. زیرمجموعهٔ $U \subseteq N$ مرکب از همهٔ عناصری از N را که مشمول در تصویرشان تحت φ نیستند در نظر می‌گیریم، یعنی $U = \{m \in N : m \notin \varphi(m)\}$. چون φ دوسویی است، uای متعلق به N وجود دارد که $\varphi(u) = U$. حال یا $u \in U$ یا $u \notin U$، ولی هر دو حالت غیر ممکن است! در واقع اگر $u \in U$ آنگاه بنا به تعریف U داریم $u \notin U = \varphi(u)$، و به‌عکس اگر $u \notin U = \varphi(u)$ آنگاه $u \in U$ که تناقض است.

به احتمال زیاد، خواننده این استدلال را قبلاً دیده است. این همان معمای قدیمی آرایشگر است: «آرایشگر کسی است که سرِ همهٔ افرادی را که سر خود را نمی‌تراشند، می‌تراشد. آیا آرایشگر سر خود را می‌تراشد؟



«در افسانه‌ها آمده است که آگوستین قدیس، وقتی در ساحل دریا قدم می‌زد و دربارهٔ بینهایت می‌اندیشید، کودکی را دید که می‌خواست آب دریا را با صدفی کوچک خالی کند.»

در ادامهٔ بحث دربارهٔ این نظریه، مفهوم مهم دیگری از کانتور یعنی مجموعه‌های مرتب و عددهای اُردینال را معرفی می‌کنیم. مجموعهٔ M با رابطهٔ $>$ مرتب می‌شود اگر رابطهٔ $>$ متعدی باشد، و اگر به‌ازای هر دو عضو متمایز a و b از M، یا $a < b$ و یا $b < a$. مثلاً می‌توان $\mathbb{N}$ را به‌طور معمول برحسب اندازهٔ عددها مرتب کرد: $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$، ولی البته می‌توانیم $\mathbb{N}$ را در جهت عکس مرتب کنیم: $\mathbb{N} = \{\ldots, ۴, ۳, ۲, ۱\}$ یا به‌صورت $\mathbb{N} = \{۱, ۳, ۵, \ldots, ۲, ۴, ۶, \ldots\}$ که نخست عددهای فرد و سپس عددهای زوج را قرار دهیم.

در اینجا به‌مفهوم اساسیِ این مبحث می‌رسیم. مجموعهٔ مرتب M را خوش‌ترتیب می‌نامند اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی M دارای اولین عضو باشد. مثلاً ترتیب اول و سوم $\mathbb{N}$ در بالا، مجموعه را خوش‌ترتیب می‌سازد ولی ترتیب دوم چنین نمی‌کند. حال حکم

اساسیِ موسوم به قضیهٔ خوش‌ترتیبی که از اصول موضوع (از جمله اصل موضوع انتخاب) به‌دست می‌آید، چنین می‌گوید که هر مجموعهٔ M پذیرای خوش‌ترتیبی است. از اینجا به بعد فقط مجموعه‌های خوش‌ترتیب مورد نظر ما هستند.

گوییم دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب M و N متشابه‌اند (یا دارای یک نوع ترتیب هستند) اگر نگاشتی دوسویی چون φ از M روی N وجود داشته باشد که ترتیب را محفوظ بدارد یعنی از $m <_M n$ نتیجه بشود $\varphi(m) <_N \varphi(n)$. توجه کنید که هر مجموعهٔ مرتب که متشابه با مجموعه‌ای خوش‌ترتیب باشد، خودش خوش‌ترتیب است.

دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,\ldots\}$ و $\mathbb{N} = \{۱,۳,۵,\ldots,۲,۴,۶,\ldots\}$ متشابه نیستند: اولی فقط یک عضو با این خاصیت دارد که عضوی قبل از آن وجود ندارد، و دومی دو تا از این‌گونه عضوها دارد.

روشن است که تشابه، رابطه‌ای هم‌ارزی است و بنابراین می‌توانیم از یک عدد اُردینال α متعلق به‌رده‌ای از مجموعه‌های متشابه صحبت کنیم. در مورد مجموعه‌های متناهی، هر دو ترتیب که بر مجموعه‌ایِ اعمال شوند، حاصل آن دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب متشابه است، و می‌توان از عدد اُردینال n برای ردهٔ مجموعه‌های nعضوی سخن گفت. توجه کنید که بنا به تعریف، دومجموعهٔ متشابه دارای یک کاردینال هستند. پس صحبت از $|\alpha|$، کاردینال یک عدد اُردینال α، با معنی است. به‌علاوه توجه کنید که هر زیرمجموعه‌ای از یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب نیز با همان ترتیب، خوش‌ترتیب است.

اکنون همان‌طور که در مورد عددهای کاردینال عمل کردیم، عددهای اُردینال را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید M مجموعه‌ای خوش‌ترتیب باشد، $m \in M$، در این‌صورت $M_m = \{x \in M : x < m\}$ قطعه‌ای (آغازی) از M که با m معین می‌شود، نام دارد؛ N قطعه‌ای از M است اگر به‌ازای mای، $N = M_m$. پس، به‌خصوص، وقتی m نخستین عضو M است، M_m مجموعهٔ تهی است. حال فرض می‌کنیم μ و ν عددهای اُردینالی مجموعه‌های خوش‌ترتیب M و N باشند. گوییم μ کوچکتر از ν است، $\mu < \nu$، اگر M متشابه با قطعه‌ای از N باشد. و باز این قانون تعدی را داریم که از $\mu < \nu$، $\nu < \pi$ نتیجه می‌شود $\mu < \pi$، چون تحت یک نگاشت تشابه، یک قطعه به‌روی یک قطعه نگاشته می‌شود.

عدد اُردینال $\{۱,۲,۳,\ldots\}$ کوچکتر از عدد اُردینال $\{۱,۳,۵,\ldots,۲,۴,۹,\ldots\}$ است.

روشن است که $m < n$ برای مجموعه‌های متناهی همان معنای معمول را دارد. عدد اُردینال $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$ را که برحسب اندازهٔ اعداد مرتب شده است با ω نشان می‌دهیم. با در نظر گرفتن قطعهٔ $\mathbb{N}_{n+۱}$ در می‌یابیم که برای هر n متناهی، $n < \omega$. سپس می‌بینیم که $\omega \leq \alpha$ برای هر عدد اُردینال نامتناهی α برقرار است. در واقع، اگر مجموعهٔ خوش‌ترتیب نامتناهی M عدد اُردینال α را داشته باشد، آنگاه M شامل نخستین عضوی چون $m_۱$ است، مجموعهٔ $M \backslash m_۱$ شامل نخستین عضوی

چون m_2 است، $M\backslash\{m_1, m_2\}$ شامل نخستین عضوی چون m_3 است. اگر به‌همین طریق ادامه دهیم، دنبالهٔ $\ldots < m_3 < m_2 < m_1$ در M حاصل می‌شود. اگر $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$، آنگاه M متشابه با $\mathbb{N}$ است، و بنابراین $\alpha = \omega$. اگر، از سوی دیگر، $M\backslash\{m_1, m_2, \ldots\}$ ناتهی باشد، آنگاه شامل نخستین عضوی چون m است، و نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{N}$ متشابه با قطعهٔ M_m است،یعنی بنا به تعریف،$\omega < \alpha$.

اکنون سه‌حکم اساسی را دربارهٔ عددهای اُردینال (بدون آوردن اثباتها، که دشوار هم نیستند) ذکر می‌کنیم. اولین حکم حاکی است که به‌ازای هر عدد اُردینال μ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب W_μ هست که معرف «استاندارد» آن است.

گزارهٔ ۱. فرض می‌کنیم μ عددی اُردینال باشد و مجموعهٔ عددهای اردینال کوچکتر از μ را به W_μ نشان می‌دهیم. در این‌صورت

(i) عضوهای W_μ دوبه‌دو قابل مقایسه‌اند.

(ii) اگر W_μ را برحسب اندازهٔ اعضا مرتب کنیم، آنگاه W_μ خوش‌ترتیب است و عدد اُردینال آن μ است.

گزارهٔ ۲. هر دو عدد اُردینال μ و ν در دقیقاً یکی از رابطه‌های $\mu < \nu$، $\mu = \nu$، یا $\mu > \nu$ صدق می‌کنند.

گزارهٔ ۳. هر مجموعه از عددهای اردینال (که طبق اندازه‌شان مرتب شده باشند) خوش‌ترتیب است.

پس از این گشت وگذار در میان عددهای اُردینال، به‌عددهای کاردینال بر می‌گردیم. فرض می‌کنیم $\mathfrak{m}$ یک عدد کاردینال است، و مجموعهٔ همهٔ عددهای اُردینال μ با ضابطهٔ $|\mu| = \mathfrak{m}$ را به $O_\mathfrak{m}$ نشان می‌دهیم. بنا به‌گزارهٔ ۳، یک کوچکترین عدد اُردینال $\omega_\mathfrak{m}$ در $O_\mathfrak{m}$ وجود دارد که آن را عدد اُردینال آغازی $O_\mathfrak{m}$ می‌نامیم. به‌عنوان مثال، ω را عدد اُردینال آغازی $\aleph_0$ می‌نامیم.

با این مقدمات، اکنون می‌توانیم حکم اساسی این فصل را ثابت کنیم.

گزارهٔ ۴. به‌ازای هر عدد کاردینال $\mathfrak{m}$، عدد کاردینالی بزرگتر مشخصی بلافاصله پس از آن وجود دارد.

■ **اثبات.** از قبل می‌دانیم که عدد کاردینال بزرگتری چون $\mathfrak{n}$ وجود دارد. حال مجموعهٔ K از همهٔ عددهای کاردینال بزرگتر از $\mathfrak{m}$ و حداکثر برابر $\mathfrak{n}$ را در نظر بگیرید. به‌هر

$\mathfrak{p} \in \mathcal{K}$ عدد اُردینال آغازیش $\omega_{\mathfrak{p}}$ را نسبت می‌دهیم. در میان این عددهای آغازی، یک کوچکترین عدد (گزارهٔ ۳) وجود دارد و عدد کاردینال متناظر کوچکترین عدد در $\mathcal{K}$ است، و بنابراین همان عدد کاردینال بزرگتر بلافاصله پس از $\mathfrak{m}$ است. □

گزارهٔ ۵. فرض کنید مجموعهٔ نامتناهی M دارای کاردینال $\mathfrak{m}$ است، و M بر حسب عدد اُردینال آغازی $\omega_{\mathfrak{m}}$ خوش‌ترتیب است. در این‌صورت M دارای آخرین عضو نیست.

■ **اثبات.** در واقع اگر m آخرین عضو M باشد، آنگاه قطعهٔ M_m یک عدد اُردینال $\mu < \omega_{\mathfrak{m}}$ با ضابطهٔ $|\mu| = \mathfrak{m}$ دارد که با تعریف $\omega_{\mathfrak{m}}$ مغایر است. □

چیزی که بالاخره به‌آن نیاز داریم، قویتر کردن این حکم است که اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های شمارا، خودش شماراست. در گزارهٔ زیر، خانواده‌های دلخواه از مجموعه‌های شمارا را در نظر می‌گیریم.

گزارهٔ ۶. فرض کنید $\{A_\alpha\}$ خانواده‌ای با اندازهٔ $\mathfrak{m}$ از مجموعه‌های شمارای A_α است که در آن $\mathfrak{m}$ کاردینالی نامتناهی است. در این‌صورت اندازهٔ اجتماع $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ حداکثر $\mathfrak{m}$ است.

■ **اثبات.** می‌توانیم فرض کنیم که مجموعه‌های A_α دوبه‌دو مجزا هستند، زیرا این فقط می‌تواند اندازهٔ اجتماع را افزایش دهد. همچنین فرض می‌کنیم M با ضابطهٔ $|M| = \mathfrak{m}$ مجموعهٔ اندیسهاست، و آن را برحسب عدد اُردینال آغازی $\omega_{\mathfrak{m}}$ خوش‌ترتیب می‌کنیم. حال به‌جای هر $\alpha \in M$ مجموعهٔ شمارایی چون $B_\alpha = \{b_{\alpha 1} = \alpha, b_{\alpha 2}, b_{\alpha 3}, \ldots\}$ قرار می‌دهیم که برحسب ω مرتب شده است، و مجموعهٔ جدید را $\tilde{M}$ می‌نامیم. در این‌صورت، $\tilde{M}$ نیز با قراردادن $b_{\alpha i} < b_{\beta j}$ به‌ازای $\alpha < \beta$ و $b_{\alpha i} < b_{\alpha j}$ به‌ازای $i < j$ خوش‌ترتیب می‌شود. فرض کنیم $\tilde{\mu}$ عدد اُردینال $\tilde{M}$ باشد. چون M زیرمجموعه‌ای از $\tilde{M}$ است، بنا به یک استدلالی قبلی داریم $\tilde{\mu} \leq \mu$. اگر $\tilde{\mu} = \mu$، آنگاه M با $\tilde{M}$ متشابه است، و اگر $\tilde{\mu} > \mu$، آنگاه M با قطعهٔ $\tilde{M}$ متشابه است. حال، چون ترتیب $\omega_{\mathfrak{m}}$ از M دارای آخرین عضو نیست (گزارهٔ ۵)، می‌بینیم که M در هر دو حالت متشابه با اجتماع مجموعه‌های شمارای B_β است، و بنابراین همان کاردینال را دارد.

بقیهٔ کار آسان است. فرض کنیم $\varphi : \cup B_\beta \to M$ نگاشتی دوسویی باشد و $\varphi(B_\beta) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. هر α_i را با $A_{\alpha i}$ تعویض می‌کنیم و اجتماع $\cup A_{\alpha_i}$

را در نظر می‌گیریم. چون $\cup A_{\alpha i}$ اجتماع تعداد شمارایی مجموعهٔ شماراست (و بنابراین خودْ شماراست)، می‌بینیم که B_β با $\cup A_{\alpha i}$ هم‌اندازه است. به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر β نگاشتی دوسویی از B_β به $\cup A_{\alpha i}$ و بنابراین نگاشتی دوسویی چون ψ از $\cup B_\beta$ به $\cup A_\alpha$ وجود دارد. اما اکنون $\psi\varphi^{-1}$ نگاشت دوسویی مطلوب از M به $\cup A_\alpha$ را به‌دست می‌دهد و از این رو $\mathfrak{m} = |\cup A_\alpha|$. □

مراجع

[1] L.E.J. Brouwer: *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*, Math. Annalen **70** (1911), 161-165.

[2] P. Erdős: *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, Michigan Math. J. **11** (1964), 9-10.

[3] E. Kamke: *Theory of Sets*, Dover Books 1950.

در ستایش نابرابریها فصل ۱۷

آنالیز مملو از نابرابریهاست؛ کتاب مشهور «نابرابریها»یِ هاردی، لیتلوود و پولیا، به‌عنوان مثال، شاهدی بر این مدعاست. در اینجا دو تا از بنیادیترین نابرابریها را با دو کاربرد برای هر یک انتخاب و مطرح می‌کنیم، و می‌بینیم نظر جورج پولیا، که خودش یکی از چهره‌های شاخص «کتاب اثبات» است، دربارهٔ مناسبترین اثبات چیست.

نخستین نابرابری ما منسوب به کوشی، شوارتس و / یا بونیاکوفسکی است.

قضیهٔ ۱ (نابرابری کوشی-شوارتس)
فرض کنید $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ یک حاصلضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی V (با نرم $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle =: |\boldsymbol{a}|^{۲}$) باشد. در این‌صورت، به‌ازای همهٔ بردارهای $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ رابطهٔ

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle^{۲} \le |\mathbf{a}^{۲}||\boldsymbol{b}|^{۲}$$

برقرار است، و برابری وقتی و فقط وقتی برقرار است که $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ وابستهٔ خطی باشند.

■ **اثبات.** اثبات (متداول) زیر احتمالاً کوتاهترین اثبات این قضیه است. تابع درجهٔ دوم

$$|x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^{۲} = x^{۲}|\boldsymbol{a}|^{۲} + ۲x\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + |\boldsymbol{b}|^{۲}$$

از متغیر x را در نظرَ می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $\boldsymbol{a}\neq ۰$، روشن است که اگر $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ آنگاه برابری برقرار است. اما اگر $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ مستقل خطی باشند، آنگاه به‌ازای هر x، $|x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^{۲} > ۰$، و بنابراین مبین $\langle \mathrm{a},\boldsymbol{b}\rangle^{۲} - |\boldsymbol{a}|^{۲}|\boldsymbol{b}|^{۲}$ کوچکتر از ۰ است.□

مثال دوم ما، نابرابریهای بین میانگین همساز، حسابی و هندسی است:

قضیهٔ ۲ (میانگین همساز، حسابی و هندسی)
فرض کنید $a_۱$، ...، a_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند. در این‌صورت

$$\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\ldots+\frac{۱}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n} \le \frac{a_۱+\ldots+a_n}{n}$$

برابری در هر دو مورد وقتی و فقط وقتی برقرار است که همهٔ a_iها برابر باشند.

■ **اثبات.** اثبات استقرایی زیبا و نامتعارف زیر منسوب به‌کوشی است. ([۷] را ببینید). فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای باشد که نابرابری دوم را بیان می‌کند. این نابرابری را به‌شکل

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n$$

می‌نویسیم.

به‌ازای $n = 2$ داریم $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geq 0$، که درست است. حال دو مرحلهٔ زیر را طی می‌کنیم:

(الف) $P(n) \Rightarrow P(n-1)$

(ب) $P(n), P(2) \Rightarrow P(2n)$

که کل حکم به‌وضوح از آنها نتیجه می‌شود.

برای اثبات (الف)، قرار می‌دهیم $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$؛ در این صورت

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) A \overset{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n$$

و بنابراین

$$\prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1}\right)^{n-1}$$

در مورد (ب) می‌بینیم

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n$$
$$\overset{P(2)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n}$$

شرط مربوط به برابری به‌همین سادگی استنتاج می‌شود. اکنون نابرابری طرف چپ بین میانگین همساز و هندسی، با در نظر گرفتن $\frac{1}{a_1}$، . . .، $\frac{1}{a_n}$ نتیجه می‌شود.

■ **اثبات دیگر.** از میان بسیاری اثباتهای دیگر از نابرابری میانگین حسابی‌ـ‌هندسی

(فهرست بیش از ۵۰ تا از این اثباتها در تکنگاشت [۲] آمده است) اثبات بسیار جالب و جدید آلتسر[1] را بر می‌گزینیم. از این اثبات، در واقع، نابرابری قویتر

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

به‌ازای عددهای مثبت دلخواه a_1، ...، a_n، p_1، ...، p_n با ضابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ استنتاج می‌شود. عبارت سمت چپ را با G و عبارت سمت راست را با A نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم $a_n \leq \dots \leq a_1$. واضح است که باید kای وجود داشته باشد که: $a_k \leq G \leq a_{k+1}$. نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{a_i}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G}\right) dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0 \quad (1)$$

چون در هر انتگرال، عبارت زیر انتگرال نامنفی است. رابطهٔ (۱) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{G} dt \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{a_i} \frac{1}{t} dt$$

که طرف چپ آن برابر است با

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{a_i - G}{G} = \frac{A}{G} - 1$$

و طرف راست آن چنین است

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (\log a_i - \log G) = \log \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} - \log G = 0$$

نتیجه می‌گیریم $\frac{A}{G} - 1 \geq 0$؛ پس $A \geq G$. در حالت برابری، همهٔ انتگرالها در (۱) باید صفر باشند که از آن نتیجه می‌شود. $a_1 = \dots = a_n = G$. □

نخستین کاربرد ما حکم زیبایی است از لاگر ([۷] را ببینید) دربارهٔ مکان ریشه‌های چندجمله‌ایها.

قضیهٔ ۱. فرض کنید همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0$

1. Alzer

حقیقی‌اند. در این‌صورت ریشه‌ها در بازه‌ای با نقاط انتهایی

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}$$

هستند.

■ **اثبات.** فرض می‌کنیم y یکی از ریشه‌ها باشد و ریشه‌های دیگر، y_1، . . . ، y_{n-1} باشند. در این‌صورت

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + \ldots + y_{n-1} \\ a_{n-2} &= y(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j} y_i y_j \end{aligned}$$

و بنابراین

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

اگر نابرابری کوشی را در مورد $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ و $(1, \ldots, 1)$ به‌کار ببریم، داریم

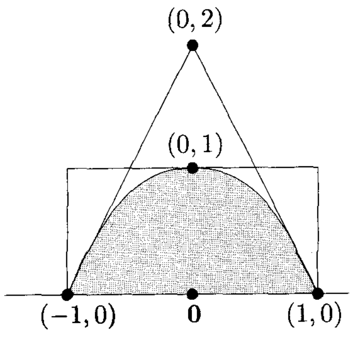
$$\begin{aligned} (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})^2 \\ &\leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2) \end{aligned}$$

یا

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0$$

پس y (و بنابراین هر y_i) بین دو ریشهٔ تابع درجه دوم قرار دارد و این ریشه‌ها کرانهای ما هستند. □

برای تشریح کاربرد دوم، از یک ویژگی مقدماتی معروف سهمی شروع استفاده می‌کنیم. سهمیِ به معادلهٔ $f(x) = 1 - x^2$ بین $x = -1$ و $x = 1$ را در نظر می‌گیریم. برای $f(x)$ یک مثلث مماسی و یک مستطیل مماسی طبق شکل رسم می‌کنیم.



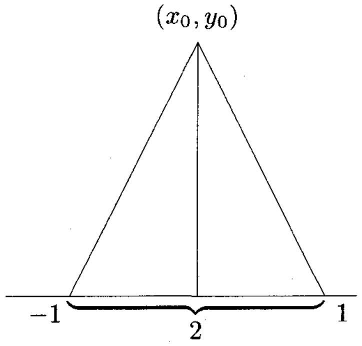
می‌بینیم که مساحت ناحیهٔ هاشورخورده، $A = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx$ برابر $\frac{4}{3}$ است و مساحتهای مثلث و مستطیل، T و R، هر دو برابر ۲ هستند. پس $\frac{T}{A} = \frac{3}{2}$ و $\frac{R}{A} = \frac{3}{2}$.

پال اردوش و تیبور گالای در مقالهٔ زیبایی این پرسش را مطرح کردند که وقتی $f(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی درجهٔ nام دلخواه با ضابطهٔ $f(x) > 0$ به‌ازای

$-۱ < x < ۱$ و $f(-۱) = f(۱) = ۰$ باشد چه پیش می‌آید. در این صورت، مساحت A برابر $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ خواهد بود. فرض کنید $f(x)$ در $(-۱, ۱)$ مقدار ماکسیمم خود را به‌ازای b اختیار می‌کند، پس $R = ۲f(b)$. با محاسبهٔ معادلات مماسها به‌ترتیب در -۱ و ۱ به‌سادگی دیده می‌شود (تابلو را ببینید) که

$$T = \frac{۲f'(۱)f'(-۱)}{f'(۱) - f'(-۱)} \tag{۲}$$

و به‌ازای $f'(۱) = f'(-۱) = ۰$ داریم $T = ۰$.



مثلث مماسی

مساحت مثلث مماسی، T، دقیقاً $y_۰$ است که در آن $(x_۰, y_۰)$ نقطهٔ تقاطع دو مماس است. معادله‌های این مماسها عبارت‌اند از $y = f'(-۱)(x + ۱)$ و $y = f'(۱)(x - ۱)$، پس

$$x_۰ = \frac{f'(۱) + f'(-۱)}{f'(۱) - f'(-۱)}$$

و بنابراین

$$y_۰ = f'(۱)\left(\frac{f'(۱) + f'(-۱)}{f'(۱) - f'(-۱)} - ۱\right) = ۲\frac{f'(۱)f'(-۱)}{f'(۱) - f'(-۱)}$$

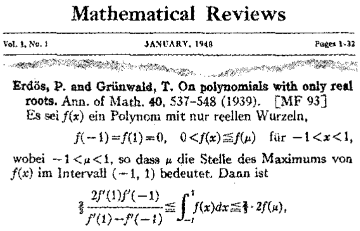
در حالت کلی، کرانهایی نابدیهی برای $\frac{T}{A}$ و $\frac{R}{A}$ وجود ندارند. برای ملاحظهٔ این مطلب، فرض می‌کنیم $f(x) = ۱ - x^{۲n}$. در این‌صورت $T = ۲n$، $A = \frac{۴n}{۲n+۱}$، و بنابراین $\frac{T}{A} > n$. به‌همین نحو $R = ۲$ و لذا $\frac{R}{A} = \frac{۲n+۱}{۲n}$، که وقتی n به‌بینهایت می‌گراید، این نسبت به ۱ میل کند.

ولی همان‌طور که اردوش و گالای نشان دادند، برای چندجمله‌ایهایی که فقط ریشه‌های حقیقی دارند، چنین کرانهایی وجود دارند.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq ۲$ باشد که فقط ریشه‌های حقیقی داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای $-۱ < x < ۱$، $f(x) > ۰$، و $f(-۱) = f(۱) = ۰$. پس

$$\frac{۲}{۳}T \leq A \leq \frac{۲}{۳}R$$

و برابری در هر دو حالت فقط به‌ازای $n = ۲$ برقرار است.


Mathematical Reviews

Vol. 1, No. 1 JANUARY, 1940 Pages 1-32

Erdös, P. and Grünwald, T. On polynomials with only real roots. Ann. of Math. **40**, 537–548 (1939). [MF 93]
Es sei $f(x)$ ein Polynom mit nur reellen Wurzeln,

$$f(-1)=f(1)=0, \quad 0<f(x)\leqq f(\mu) \quad \text{für } -1<x<1,$$

wobei $-1<\mu<1$, so dass μ die Stelle des Maximums von $f(x)$ im Intervall $(-1, 1)$ bedeutet. Dann ist

$$\tfrac{2}{3}\frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)}\leqq\int_{-1}^{1}f(x)dx\leqq\tfrac{2}{3}\cdot 2f(\mu),$$

اردوش و گالای این حکم را با استدلال استقرایی پیچیده‌ای ثابت کردند. جورج پولیا در نقدی که بر مقالهٔ آنها نوشت و در صفحهٔ اول شمارهٔ اول مجلهٔ متمتیکال ریویوز در سال ۱۹۴۰ به‌چاپ رسید، توضیح داد که چگونه نابرابری اول را با استفاده از نابرابری میانگین حسابی و هندسی نیز می‌توان ثابت کرد ــ این نوشته، نمونهٔ زیبایی از نقد دقیق، و در عین حال حاوی اثباتی «کتابی» است.

■ **اثبات $A \le \frac{۲}{۳}T$.** چون $f(x)$ فقط ریشه‌های حقیقی دارد و هیچ‌یک از آنها در بازهٔ باز $(-۱, ۱)$ نیستند، می‌توان آن را ــ صرفنظر از یک ضریب ثابت مثبت که در آخر حذف می‌شود ــ به‌صورت زیر نوشت. $f(x)$

$$f(x) = (۱ - x^۲)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) \qquad (۳)$$

که در آن $\alpha_i \ge ۱$، $\beta_j \ge ۱$. پس

$$A = \int_{-۱}^{۱}(۱ - x^۲)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x)dx$$

با جانشانی $x \to -x$ همچنین در می‌یابیم که

$$A = \int_{-۱}^{۱}(۱ - x^۲)\prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)dx$$

و از این رو بنابه نابرابری میانگین حسابی و هندسی (توجه کنید که همهٔ عاملها نامنفی‌اند) داریم

$$\begin{aligned} A &= \int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۲}\left[(۱ - x^۲)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_i(\beta_j + x) + \right.\\ &\qquad\left.(۱ - x^۲)\prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)\right] dx\\ &\ge \int_{-۱}^{۱}(۱ - x^۲)\left(\prod_i(\alpha_i^۲ - x^۲)\prod_j(\beta_j^۲ - x^۲)\right)^{۱/۲} dx\\ &\le \int_{-۱}^{۱}(۱ - x^۲)\left(\prod_i(\alpha_i^۲ - ۱)\prod_j(\beta_j^۲ - ۱)\right)^{۱/۲} dx\\ &= \frac{۴}{۳}\left(\prod_i(\alpha_i^۲ - ۱)\prod_j(\beta_j^۲ - ۱)\right)^{۱/۲} \end{aligned}$$

حال $f'(۱)$ و $f'(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم. (می‌توانیم فرض کنیم $f'(-۱) \neq ۰$ و $f'(۱) \neq ۰$، چون در غیر این‌صورت $T = ۰$ و نابرابری $A \geq \frac{۲}{۳}T$ بدیهی می‌شود.) بنابه (۳)

$$f'(۱) = -۲\prod_i(\alpha_i - ۱)\prod_j(\beta_j + ۱)$$

و به‌همین نحو

$$f'(-۱) = ۲\prod_i(\alpha_i + ۱)\prod_j(\beta_j - ۱)$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$A \geq \frac{۲}{۳}(-f'(۱)f'(-۱))^{۱/۲}$$

حال با اِعمال نابرابری میانگین همساز و هندسی بر $-f'(۱)$ و $f'(۱)$، بنابه (۲)، به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$A \geq \frac{۲}{۳}\frac{۲}{\frac{۱}{-f'(۱)} + \frac{۱}{f'(-۱)}} = \frac{۴}{۳}\frac{f'(۱)f'(-۱)}{f'(۱) - f'(-۱)} = \frac{۲}{۳}T$$

و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم. خواننده به‌راحتی می‌تواند با تحلیل حالت برابری در همهٔ نابرابریهای ما حکم دوم قضیه را نتیجه بگیرد. □

از خواننده دعوت می‌کنیم در جستجوی اثباتی از نابرابری دوم قضیهٔ ۲ برآید که به‌همین اندازه مبتکرانه باشد.

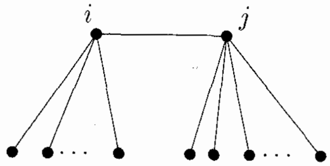
خوب، نابرابریها در آنالیز بیش از هر جای دیگر مطرح می‌شوند ولی در اینجا مثالی از نظریهٔ گراف می‌آوریم که در آن، استفاده از نابرابریها به‌طور نامنتظره مطرح می‌شود. در فصل ۲۷ دربارهٔ قضیهٔ توران بحث خواهیم کرد. این قضیه در ساده‌ترین حالت خود به‌شکل زیر است:

قضیهٔ ۳. فرض کنید G گرافی باشد با n رأس و بدون مثلث. در این صورت G حداکثر $\frac{n^۲}{۴}$ یال دارد، و فقط وقتی دقیقاً این تعداد یال دارد که n زوج باشد و G گراف دو بخشی کامل $K_{n/۲,n/۲}$.

■ **اثبات اول.** این اثبات، که در آن از نابرابری کوشی استفاده می‌شود، متعلق به مانتل[1]

1. Mantel

است. فرض کنیم $V = \{۱, \ldots, n\}$ مجموعهٔ رأسها و E مجموعهٔ یالهای G باشد. درجهٔ i را با d نشان می‌دهیم، پس $\sum_{i\in V} d_i = ۲|E|$ (صفحهٔ ۱۷۴ را در فصل مربوط به‌شمارش دوگانه ببینید). گیریم ij یالی باشد. چون G مثلثی ندارد، داریم $d_i + d_j \leq n$ زیرا هیچ رأسی مجاورِ هر دوی i و j نیست.



نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{ij\in E} (d_i + d_j) \leq n|E|$$

توجه کنید که d_i دقیقاً d_i بار در مجموع ظاهر می‌شود. پس داریم

$$n|E| \geq \sum_{ij\in E} (d_i + d_j) = \sum_{i\in V} d_i^۲$$

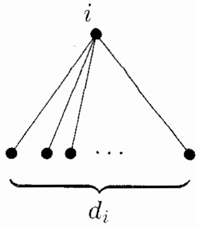
و بنابراین با به‌کاربردن نابرابری کوشی در مورد بردارهای $(d_۱, \ldots, d_n)^T$ و $(۱, \ldots, ۱)^T$ خواهیم داشت

$$n|E| \geq \sum_{i\in V} d_i^۲ \geq \frac{(\Sigma d_i)^۲}{n} = \frac{۴|E|^۲}{n}$$

و حکم حاصل می‌شود. در حالت برابری به‌ازای هر i و j، $d_i = d_j$، و در نتیجه $d_i = \frac{n}{۲}$ (زیرا $d_i + d_j = n$). چون G عاری از مثلث است، $G = K_{n/۲, n/۲}$ فوراً نتیجه می‌شود. □

■ **اثبات دوم.** اثبات زیر از قضیهٔ ۳، که در آن از نابرابری میانگین حسابی و هندسی استفاده می‌شود، یک اثبات «کتابی» معروف است. فرض می‌کنیم α اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ مستقل A باشد، و قرار می‌دهیم $\beta = n - \alpha$. چون G عاری از مثلث است، رأسهای مجاور رأس i مجموعهٔ مستقلی تشکیل می‌دهند و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، $d_i < \alpha$.

مجموعهٔ $B = V\backslash A$ با اندازهٔ β با هر یال G تلاقی دارد [رأسی از هر یال در B است] پس رابطهٔ $|E| \leq \sum_{i\in B} d_i$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون از نابرابری میانگین حسابی و هندسی نتیجه می‌گیریم



$$|E| \leq \sum_{i\in B} d_i \leq \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)^۲ = \frac{n^۲}{۴}$$

و باز حالت برابری به‌سادگی حل و فصل می‌شود. □

مراجع

[1] H. ALZER: *A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 585.

[2] P.S. BULLEN, D.S. MITRINOVICS & P.M. VASIĆ: *Means and their Inequalities*, Reidel, Dordrecht 1988.

[3] P. ERDŐS & T. GRÜNWALD: *On polynomials with only real roots*, Annals Math. **40** (1939), 537-548.

[4] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD & G. PÓLYA: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge 1952.

[5] W. MANTEL: *Problem 28*, Wiskundige Opgaven **10** (1906), 60-61.

[6] G. PÓLYA: *Review of* [3], Mathematical Reviews **1** (1940), 1.

[7] G. PÓLYA & G. SZEGÖ: *Problems and Theorems in Analysis, Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972/78; Reprint 1998.

قضیه‌ای از پولیا دربارهٔ چندجمله‌ایها فصل ۱۸

جورج پولیا

از میان کارهای بسیار پولیا در آنالیز، دستاورد زیر همواره مورد علاقهٔ اردوش بوده است، هم به‌علت شگفت‌انگیز بودن حکم و هم به‌علت زیبایی اثبات. فرض کنید

$$f(z) = z^n + b_{n-۱} z^{n-۱} + \ldots + b_۰$$

چندجمله‌ای مختلطی با درجهٔ $n \geq ۱$، و با ضریب پیشرو[1] ۱ باشد. مجموعهٔ

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq ۲\}$$

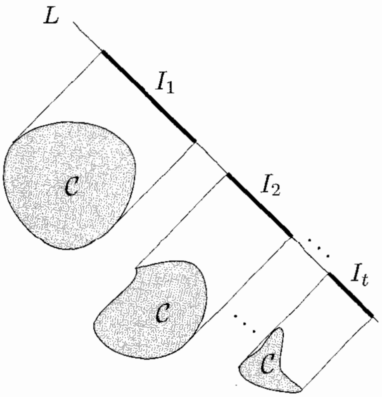
را به $f(z)$ منسوب می‌سازیم یعنی $\mathcal{C}$ مجموعهٔ نقاطی است که تحت f به‌دایره‌ای به‌شعاع ۲ و مرکز مبدأ در صفحهٔ مختلط نگاشته می‌شوند. پس به‌ازای $n = ۱$، قلمرو $\mathcal{C}$ قرص مستدیری به قطر ۴ است.

پولیا با استدلالی که به‌طرز شگفت‌انگیزی ساده است، آشکار ساخت که مجموعهٔ $\mathcal{C}$ ویژگی زیبای زیر را دارد:

> خط دلخواه L در صفحهٔ مختلط و تصویر عمودی مجموعهٔ $\mathcal{C}$ بر L، $\mathcal{C}_L$، را در نظر بگیرید. طول کل هر چنین تصویری هرگز از ۴ بیشتر نیست، و این موضوع برای هر چندجمله‌ای با ضریب پیشرو ۱ صادق است.

منظور ما از اینکه طول کل تصویر $\mathcal{C}_L$ حداکثر ۴ است، چیست؟ خواهیم دید که $\mathcal{C}_L$ اجتماعی متناهی از بازه‌های مجزای $I_۱$، …، I_t است، و این شرط بدان معنی است که $\ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t) \leq ۴$ که در آن $\ell(I_j)$ طول معمولی بازه است.

با دوران دادن صفحه، می‌بینیم کافی است حالتی را در نظر بگیریم که L محور حقیقی صفحهٔ مختلط است. حال با در نظر داشتن این نکته‌ها قضیهٔ پولیا را بیان می‌کنیم.



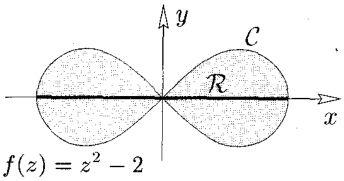
قضیهٔ ۱. فرض کنید $f(z)$ چندجمله‌ای مختلطی با درجهٔ حداقل ۱ و ضریب پیشرو ۱ باشد. قرار دهید $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq ۲\}$، و فرض کنید $\mathcal{R}$ تصویر عمودی $\mathcal{C}$ به‌روی محور حقیقی باشد. در این‌صورت بازه‌های $I_۱$، …، I_ℓ روی محور حقیقی وجود دارند که همراه با هم $\mathcal{R}$ را می‌پوشانند و در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t) \leq ۴$$

1. leading coefficient

واضح است که کران ۴ در این قضیه به‌ازای $n = ۱$ حاصل می‌شود. برای اینکه شناخت بیشتری از مسأله به‌دست آورید، نگاهی به چندجمله‌ای $f(z) = z^۲ - ۲$ بیندازید که آن هم کران ۴ را دارد. اگر $z = x + iy$ عددی مختلط باشد، آنگاه x تصویر عمودی آن بر محور حقیقی است. پس

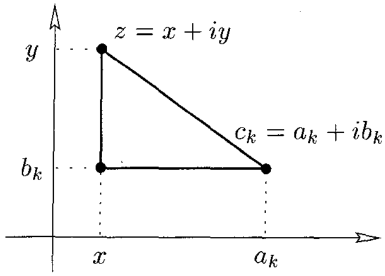
$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : x + iy \in \mathcal{C} \text{ به‌ازای } y\text{ای}\}$$



خواننده به‌راحتی می‌تواند ثابت کند که برای $f(z) = z^۲ - ۲$ داریم $x + iy \in \mathcal{C}$ اگر و تنها اگر

$$(x^۲ + y^۲)^۲ \leq ۴(x^۲ - y^۲)$$

نتیجه می‌گیریم که $x^۴ \leq (x^۲ + y^۲)^۲ \leq ۴x^۲$، و بنابراین $x^۲ \leq ۴$ یعنی $|x| \leq ۲$. از سوی دیگر، هر $z = x \in \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $|x| \leq ۲$ در $|z^۲ - ۲| \leq ۲$ صدق می‌کند، و در می‌یابیم که $\mathcal{R}$ دقیقاً بازهٔ $[-۲, ۲]$ به‌طول ۴ است.



به‌عنوان نخستین گام به‌سوی اثبات، می‌نویسیم $f(z) = (z - c_۱) \cdots (z - c_n)$ که در آن $c_k = a_k + ib_k$، و چندجمله‌ای حقیقی $p(x) = (x - a_۱) \cdots (x - a_n)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $z = x + iy \in \mathcal{C}$. در این صورت بنابه قضیهٔ فیثاغورس

$$|x - a_k|^۲ + |y - b_k|^۲ = |z - c_k|^۲$$

و بنابراین به‌ازای هر k، $|x - a_k| \leq |z - c_k|$، یعنی

$$|p(x)| = |x - a_۱| \cdots |x - a_n| \leq |z - c_۱| \cdots |z - c_n| = |f(z)| \leq ۲$$

پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq ۲\}$ قرار دارد، و اگر بتوانیم نشان دهیم که مجموعهٔ اخیر را بازه‌هایی با طول کل حداکثر ۴ می‌پوشانند، به‌هدف رسیده‌ایم. پس قضیهٔ اصلی ما، قضیهٔ ۱، پیامدی از قضیهٔ زیر خواهد بود.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضریب پیشرو ۱ باشد، و همهٔ ریشه‌هایش حقیقی باشند. در این‌صورت، مجموعهٔ $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq ۲\}$ را می‌توان با بازه‌هایی که طول کل آنها حداکثر ۴ باشد، پوشاند.

همان‌طورکه پولیا در مقاله‌اش [۲] نشان می‌دهد، قضیهٔ ۲ نیز پیامدی از قضیهٔ مشهور زیر است که متعلق به چبیشف است. برای اینکه این فصل خودکفا باشد،

اثباتی در پیوست آورده‌ایم (مطابق شرح زیبای پولیا و سگو[1]).

قضیهٔ چبیشف

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضریب پیشرو ۱ باشد. در این‌صورت

$$\max_{-۱\leq x\leq ۱} |p(x)| \geq \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

ابتدا به‌پیامد مستقیم زیر توجه کنید.

فرع. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضریب پیشرو ۱ باشد، و به‌ازای هر x در بازهٔ $[a,b]$، $|p(x)| \leq ۲$. در این‌صورت $b-a \leq ۴$.

■ **اثبات.** جانشانی $y = \frac{۲}{b-a}(x-a) - ۱$ را در نظر می‌گیریم. این جانشانی، بازهٔ xها یعنی $[a,b]$ را به‌روی بازهٔ yها یعنی $[-۱,۱]$ می‌نگارد. چندجمله‌ای متناظر

$$q(y) = p\left(\frac{b-a}{۲}(y+۱)+a\right)$$

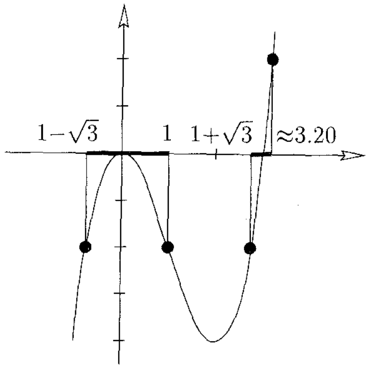
دارای ضریب پیشرو $\left(\frac{b-a}{۲}\right)^n$ است و در

$$\max_{-۱\leq y\leq ۱} |q(y)| = \max_{a\leq x\leq b} |p(x)|$$

صدق می‌کند. بنابه قضیهٔ چبیشف داریم

$$۲ \geq \max_{a\leq x\leq b} |p(x)| \geq \left(\frac{b-a}{۲}\right)^n \frac{۱}{۲^{n-۱}} = ۲\left(\frac{b-a}{۴}\right)^n$$

و بنابراین، $b-a \leq ۴$، که مطلوب ماست. □



برای چندجمله‌ای $p(x) = x^۲(x-۳)$ به‌دست می‌آوریم

$\mathcal{P} = \{۱-\sqrt{۳}, ۱\} \cup \{۱+\sqrt{۳}, \approx ۳.۲\}$

این فرع ما را به‌قضیهٔ ۲ بسیار نزدیک می‌کند. اگر مجموعهٔ $\mathcal{P} = \{x : |p(x)| \leq ۲\}$ یک بازه باشد، طول $\mathcal{P}$ حداکثر ۴ است. ولی مجموعهٔ $\mathcal{P}$ ممکن است بازه نباشد، مانند مثالی که در حاشیه نشان داده شده است و در آن $\mathcal{P}$ مرکب از دو بازه است.

دربارهٔ $\mathcal{P}$ چه می‌توان گفت؟ چون $p(x)$ تابعی پیوسته است، در هر حال می‌دانیم که $\mathcal{P}$ اجتماع بازه‌های بستهٔ مجزای $I_۱$، $I_۲$، ... است و $p(x)$ مقدار ۲ یا -۲ را در هر نقطهٔ انتهایی یک بازهٔ I_j اختیار می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که فقط تعدادی متناهی بازهٔ $I_۱$، ...، I_t وجود دارد زیرا $p(x)$ هر مقدار را فقط به‌تعداد متناهی از دفعات می‌تواند اختیار کند.

1. Szegö

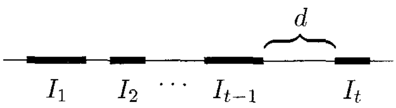
ایدهٔ عالی پولیا، ساختن چندجمله‌ای دیگر چون $\tilde{p}(x)$ از درجهٔ n، بازهم با ضریب پیشرو ۱، بود به‌طوری‌که $\tilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq ۲\}$ بازه‌ای به‌طول دست‌کم $\ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t)$ باشد. در این‌صورت بنابه فرع بالا ثابت می‌شود $۴ \geq \ell(\tilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t)$، و اثبات به‌انجام می‌رسد.

■ **اثبات قضیهٔ ۲.** $p(x) = (x - a_۱)\ldots(x - a_n)$ را با

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq ۲\} = I_۱ \cup \ldots \cup I_t$$

در نظر می‌گیریم؛ در اینجا بازه‌های I_j را چنان مرتب می‌کنیم که $I_۱$ در منتهی‌الیه چپ و I_t در منتهی‌الیه راست قرار گیرد. نخست ادعا می‌کنیم که هر بازهٔ I_j شامل ریشه‌ای از $p(x)$ است. می‌دانیم که $p(x)$ مقادیر ۲ یا ۲− را در نقطه‌های انتهایی I_j می‌گیرد. اگر یکی از این دو مقدار ۲ و دیگری ۲− باشد، آنگاه مسلماً ریشه‌ای در I_j وجود دارد. پس فرض کنیم در هر دو انتها $p(x) = ۲$ (حالت ۲ـ نیز شبیه همین حالت است). گیریم $b \in I_j$ نقطه‌ای باشد که $p(x)$ در آنجا مینیمم خود در I_j را اختیار می‌کند. در این‌صورت $p'(b) = ۰$ و $p''(b) \geq ۰$. اگر $p''(b) = ۰$، آنگاه b ریشهٔ چندگانه‌ای از $p'(x)$ است، و لذا بنابه‌حکم ۱ در تابلو صفحهٔ بعد، ریشه‌ای از $p(x)$ است. ولی اگر $p''(b) > ۰$، از حکم ۲ در همان تابلو نتیجه می‌گیریم $p(b) \leq ۰$. پس یا $p(b) = ۰$، و ما ریشهٔ خود را داریم، یا $p(b) < ۰$، و ما ریشه‌ای در بازهٔ از b تا یک نقطهٔ انتهایی I_j به‌دست می‌آوریم.

حال می‌رسیم به‌ایدهٔ نهایی اثبات. فرض می‌کنیم بازه‌های $I_۱$، …، I_t مانند قبل باشند و $I_۱$، بازهٔ منتهی‌الیه راست، شامل m ریشه از $p(x)$ (با احتساب چندگانگی آنها) باشد. اگر $m = n$، آنگاه I_t (بنابه آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم) تنها بازه است، و کار ما به‌پایان می‌رسد. پس فرض می‌کنیم $m < n$، و d مطابق شکل، فاصلهٔ بین $I_{t-۱}$ و I_t باشد. گیریم $b_۱$، …، b_m ریشه‌هایی از $p(x)$ باشند که در $I_۱$ قرار دارند و $c_۱$، …، c_{n-m} بقیهٔ ریشه‌ها باشند. اکنون می‌نویسیم $p(x) = q(x)r(x)$ که در آن $q(x) = (x - b_۱)\cdots(x - b_m)$ و $r(x) = (x - c_۱)\cdots(x - c_{n-m})$، و قرار می‌دهیم $p_۱(x) = q(x + d)r(x)$. چندجمله‌ای $p_۱(x)$ باز از درجهٔ n و دارای ضریب پیشرو ۱ است. برای $x \in I_۱ \cup \ldots \cup I_{t-۱}$، به‌ازای هر i داریم $|x + d - b_i| < |x - b_i|$، و بنابراین $|q(x + d)| < |q(x)|$. نتیجه می‌گیریم



$$\text{برای } x \in I_۱ \cup \ldots \cup I_{t-۱}، \quad |p_۱(x)| \leq |p(x)| \leq ۲$$

حال اگر $x \in I_t$، داریم $|r(x-d)| \leq |r(x)|$، و بنابراین

$$|p_۱(x-d)| = |q(x)||r(x-d)| \leq |p(x)| \leq ۲$$

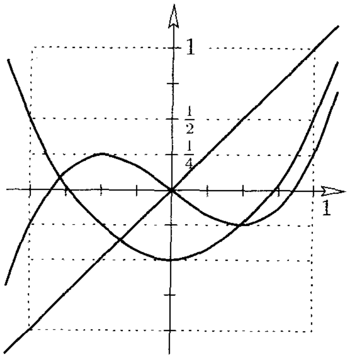
که بدان معنی است که $I_t - d \subseteq \mathcal{P}_۱ = \{x : |p_۱(x)| \leq ۲\}$.

به‌طورخلاصه، می‌بینیم که $\mathcal{P}_۱$ شامل $I_۱ \cup \ldots \cup I_{t-۱} \cup (I_t - d)$ است و بنابراین طول کل آن دست‌کم به اندازهٔ $\mathcal{P}$ است. حال توجه کنید که با گذار از $p(x)$ به $p_۱(x)$ بازه‌های $I_{t-۱}$ و $I_t - d$ ادغام شده به‌صورت یک بازه در می‌آیند. نتیجه می‌گیریم طول کل بازه‌های $J_۱$، ...، J_s از $p_۱(x)$ که $\mathcal{P}_۱$ را می‌سازند، دست‌کم $\ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t)$، است و J_s یعنی بازهٔ منتهی‌الیه راست شامل بیش از m ریشه از $p_۱(x)$ است. با حداکثر $t - ۱$ بار تکرار این فرایند، سرانجام به‌یک چندجمله‌ای چون $\tilde{p}(x)$ با $\tilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq ۲\}$ می‌رسیم که بازه‌ای است به‌طول $\ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t)$، $\ell(\tilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_۱) + \ldots + \ell(I_t)$، و اثبات به‌انجام می‌رسد. $\square$

پیوست: قضیهٔ چبیشف

قضیه. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضریب پیشرو ۱ باشد. در این‌صورت

$$\max_{-۱ \leq x \leq ۱} |p(x)| \geq \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$



به‌ازای چندجمله‌ایهای $p_۱(x) = x$، $p_۲(x) = x^۲ - \frac{۱}{۲}$ و $p_۳(x) = x^۳ - \frac{۳}{۴}x$، حالت برابری در قضیهٔ چبیشف برقرار است.

پیش از شروع اثبات، بیایید به‌چند نمونه که در مورد آنها حالت برابری در این رابطه برقرار است نگاهی بیندازیم. در تصویر حاشیه، نمودار چندجمله‌ایهایی از درجهٔ ۱، ۲، و ۳ دیده می‌شود که در آنها برابری برقرار است. در واقع خواهیم دید که به‌ازای هر درجه، دقیقاً یک چندجمله‌ای وجود دارد که برای آن، رابطهٔ قضیهٔ چبیشف به‌صورت برابری است.

■ **اثبات.** چندجمله‌ای حقیقی $p(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۰$ با ضریب پیشرو ۱ را در نظر می‌گیریم. چون دامنهٔ $-۱ \leq x \leq ۱$ مورد نظر ماست، قرار می‌دهیم $x = \cos\vartheta$ و چندجمله‌ای حاصل برحسب $\cos\vartheta$ را با $g(\vartheta) := p(\cos\vartheta)$ نشان می‌دهیم

$$g(\vartheta) = (\cos\vartheta)^n + a_{n-۱}(\cos\vartheta)^{n-۱} + \ldots + a_۰ \qquad (۱)$$

دو حکم دربارهٔ چندجمله‌ایهایِ با ریشه‌های حقیقی

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای غیرثابت باشد که فقط ریشه‌های حقیقی دارد.

حکم ۱. اگر b ریشهٔ چندگانه‌ای از $p'(x)$ باشد، آنگاه b ریشه‌ای از $p(x)$ نیز هست.

■ **اثبات.** فرض کنیم $b_۱$، …، b_r ریشه‌های $p(x)$ با چندگانگیهای $s_۱$، …، s_r، $\sum_{j=۱}^{r} s_j = n$ باشد. از $p(x) = (x-b_j)^{s_j} h(x)$ نتیجه می‌گیریم که b_j ریشه‌ای از $p'(x)$ است اگر $s_j \geq ۲$، و چندگانگی b_j در $p'(x)$ برابر $s_j - ۱$ است. به‌علاوه، ریشه‌ای از $p'(x)$ بین $b_۱$ و $b_۲$، ریشهٔ دیگری بین $b_۲$ و $b_۳$، …، و یک ریشه بین $b_{r-۱}$ و b_r وجود دارد، و همهٔ این ریشه‌ها باید یگانه (ساده) باشند زیرا $\sum_{j=۱}^{r}(s_j - ۱) + (r-۱)$ برابر با درجهٔ $p'(x)$ یعنی $n - ۱$ است. در نتیجه، ریشه‌های چندگانهٔ $p'(x)$ فقط می‌توانند در میان ریشه‌های $p(x)$ باشند. □

حکم ۲. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $p'(x)^۲ \geq p(x)p''(x)$.

■ **اثبات.** اگر $x = a_i$ ریشه‌ای از $p(x)$ باشد، آنگاه چیزی برای اثبات نمی‌ماند. پس فرض می‌کنیم x ریشه نباشد. طبق قاعدهٔ مشتقگیری از حاصلضرب داریم

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{k=۱}^{n} \frac{p(x)}{x-a_k} \\ p''(x) &= \sum_{k=۱}^{n} \sum_{\substack{\ell=۱ \\ \ell \neq k}}^{n} \frac{p(x)}{(x-a_k)(x-a_\ell)} = ۲p(x) \sum_{\{k,\ell\}} \frac{۱}{(x-a_k)(x-a_\ell)} \end{aligned}$$

که در آن $\{k,\ell\}$ همهٔ جفتهای $\{k,\ell\} \subseteq \{۱,\ldots,n\}$ را اختیار می‌کند. پس

$$\begin{aligned} p'(x)^۲ &= p(x)^۲ \left(\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_k} \right)^۲ \\ &> ۲p(x)^۲ \sum_{\{k,\ell\}} \frac{۱}{(x-a_k)(x-a_\ell)} = p(x)p''(x) \end{aligned}$$

و اثبات به انجام می‌رسد. □

حال اثبات با طی کردن سه مرحلهٔ زیر انجام می‌شود که همه نتایج معروفی هستند و هر یک به‌خودی خود نیز جالب توجه است.

(الف) $g(\vartheta)$ را به‌صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی یعنی یک چندجمله‌ای به‌شکل

$$g(\vartheta) = b_n \cos n\vartheta + b_{n-۱} \cos(n-۱)\vartheta + \ldots + b_۱ \cos\vartheta + b_۰ \quad (۲)$$

می‌نویسیم که در آن $b_k \in \mathbb{R}$، و نشان می‌دهیم که ضریب پیشرو آن عبارت است از $b_n = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$.

(ب) با مفروض بودن چندجمله‌ای کسینوسی دلخواه $h(\vartheta)$ از مرتبهٔ n (یعنی λ_n بالاترین ضریب ناصفر است):

$$h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \lambda_{n-۱} \cos(n-۱)\vartheta + \ldots + \lambda_۰ \qquad (۳)$$

نشان می‌دهیم $|\lambda_n| \leq \max|h(\vartheta)|$ که اگر بر $g(\vartheta)$ اِعمال شود، قضیه ثابت می‌گردد.

(پ) در مسیر اثبات **(ب)** حکم جالب توجه زیر را ثابت می‌کنیم: اگر $h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \ldots + \lambda_۰$ یک چندجمله‌ای کسینوسی نامنفی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه $|\lambda_n| \leq \lambda_۰$.

اثبات (الف). برای اینکه از (۱) به‌نمایش (۲) برسیم، باید همهٔ توانهای $(\cos\vartheta)^k$ را به‌صورت چندجمله‌ایهای کسینوسی بیان کنیم. مثلاً از قضیهٔ جمع کسینوسها نتیجه می‌شود

$$\cos ۲\vartheta = \cos^۲\vartheta - \sin^۲\vartheta = ۲\cos^۲\vartheta - ۱$$

پس $\cos^۲\vartheta = \frac{۱}{۲}\cos ۲\vartheta + \frac{۱}{۲}$. به‌منظور انجام این کار برای توان دلخواه $(\cos\vartheta)^k$، از طریق رابطهٔ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ به‌سراغ عددهای مختلط می‌رویم. عددهای e^{ix} عددهای مختلطی با قدرمطلق ۱ هستند(تابلو مربوط به‌ریشه‌های واحد را در صفحهٔ ۳۴ ببینید). در حالت خاص داریم

$$e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta \qquad (۴)$$

از سوی دیگر

$$e^{in\vartheta} = (e^{i\vartheta})^n = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n \qquad (۵)$$

با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی (۴) و (۵) به‌دست می‌آوریم $i^{4\ell+2} = -1$، $i^{4\ell} = 1$، و $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\begin{aligned}\cos n\vartheta &= \sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{4\ell}(\cos\vartheta)^{n-4\ell}(1-\cos^2\vartheta)^{2\ell}\\ &-\sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{4\ell+2}(\cos\vartheta)^{n-4\ell-2}(1-\cos^2\vartheta)^{2\ell+1}\end{aligned} \tag{۶}$$

نتیجه می‌گیریم که $\cos n\vartheta$ یک چندجمله‌ای برحسب $\cos\vartheta$ است

$$\cos n\vartheta = c_n(\cos\vartheta)^n + c_{n-1}(\cos\vartheta)^{n-1} + \ldots + c_0 \tag{۷}$$

از (۶)، ضریب بزرگترین توان را به‌دست می‌آوریم

$$c_n = \sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{4\ell} + \sum_{\ell\geq 0}\binom{n}{4\ell+2} = 2^{n-1}$$

اکنون در جهت عکس استدلال می‌کنیم. به‌استقرا فرض می‌کنیم که $(\cos\vartheta)^k$ به‌ازای $k < n$ به‌صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبهٔ k قابل بیان است، و از (۷) نتیجه می‌گیریم که $(\cos\vartheta)^n$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبهٔ n با ضریب پیشرو $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ نوشت.

اثبات (پ). فرض کنیم $h(\vartheta)$ یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبهٔ n همچون (۳) باشد. چون $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$ و $\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta$، از (۴) به‌دست می‌آید

$$\cos k\vartheta = \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2}$$

اگر قرار دهیم $z = e^{i\theta}$، می‌توانیم $h(\vartheta)$ را به‌شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}h(\vartheta) &= \lambda_n\frac{z^n + z^{-n}}{2} + \ldots + \lambda_k\frac{z^k+z^{-k}}{2} + \ldots + \lambda_0\\ &= z^{-n}\left(\lambda_n\frac{z^{2n}+z^0}{2} + \ldots + \lambda_k\frac{z^{n+k}+z^{n-k}}{2} + \ldots + \lambda_0 z^n\right)\\ &= z^{-n}H(z)\end{aligned} \tag{۸}$$

حال $H(z)$ را به‌عنوان چندجمله‌ای مختلطی برحسب متغیر z بررسی می‌کنیم. $H(z)$ از درجهٔ $2n$ است و در $z = 0$ صفر نمی‌شود زیرا $\lambda_n \neq 0$. به‌علاوه داریم

$$H(z) = z^{2n}H\left(\frac{1}{z}\right)$$

پس اگر α ریشه‌ای از $H(z)$ باشد، آنگاه $\frac{1}{\alpha}$ نیز هست. علاوه بر آن، چون $H(z)$ دارای ضریبهای حقیقی است، می‌بینیم که عدد مختلط مزدوج $\overline{\alpha}$ و وارونش $1/\overline{\alpha}$ نیز از جمله ریشه‌های آن هستند. $2n$ ریشهٔ $H(z)$ را به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم. در گروه اول، همهٔ ریشه‌های α با $|\alpha| = 1$ را قرار می‌دهیم، یعنی $\alpha = 1/\overline{\alpha}$. در گروه دوم، داریم $\alpha \neq 1/\overline{\alpha}$، پس یا α یا $1/\overline{\alpha}$ قدر مطلقی کوچکتر از ۱ دارد. لذا $H(z)$ را می‌توان به‌صورت

$$H(z) = \frac{\lambda_n}{2} \prod_{|\alpha|=1} (z-\alpha) \prod_{0<|\beta|<1} (z-\beta)(z-\frac{1}{\overline{\beta}}) \qquad (9)$$

نوشت. در اینجاست که فرض $h(\vartheta) \geq 0$ به‌ازای هر ϑ را به‌کار می‌بریم. چون $z = e^{i\vartheta}$ داریم $|z| = 1$، و بنابراین

$$h(\vartheta) = |h(\vartheta)| = |H(z)|$$

اکنون نگاهی به‌ریشه‌های $H(z)$ در (۹) می‌افکنیم. اگر α ریشه‌ای ازگروه اول باشد، $|\alpha| = 1$، آنگاه متناظر با ریشه‌ای حقیقی چون $\tilde{\vartheta}$ از $h(\vartheta)$ داریم $\alpha = e^{i\tilde{\vartheta}}$، که $2\pi \leq \tilde{\vartheta} \leq 0$. با مشتقگیری از معادلهٔ $h(\vartheta) = e^{-in\vartheta}H(e^{i\vartheta})$ به‌راحتی دیده می‌شود که چندگانگی ریشهٔ $\tilde{\vartheta}$ در $h(\vartheta)$ با چندگانگی $e^{i\tilde{\vartheta}}$ به‌عنوان ریشه‌ای از $H(z)$ برابر است. ولی چون $h(\vartheta)$ نامنفی است، در می‌یابیم که $\tilde{\vartheta}$ مینیممی از $h(\vartheta)$ است و لذا دارای چندگانگی زوج است. حال به‌گروه دوم می‌پردازیم و حاصلضربی چون $|z-\beta||z-1/\overline{\beta}|$ را در نظر می‌گیریم. چون $z\overline{z} = 1$، داریم

$$\begin{aligned} |z - \frac{1}{\overline{\beta}}|^2 &= (z-\frac{1}{\overline{\beta}})(\overline{z}-\frac{1}{\beta}) = \frac{(z\overline{\beta}-1)(\overline{z}\beta-1)}{\beta\overline{\beta}} \\ &= \frac{\beta\overline{\beta}-z\overline{\beta}-\overline{z}\beta+1}{\beta\overline{\beta}} = \frac{(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})}{\beta\overline{\beta}} = \frac{|z-\beta|^2}{|\beta|^2} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$|z-\beta||z-\frac{1}{\overline{\beta}}| = \frac{|z-\beta|^2}{|\beta|}$$

به‌طور خلاصه به‌ازای cای مخالف صفر و متعلق به $\mathbb{C}$، $h(\vartheta) = |H(z)| = |c| \prod_{|\alpha|=1} |z-\alpha|^2 \prod_{\alpha<|\beta|<1} |z-\beta|^2$ و بنابراین یک قضیهٔ معروف ریس ([۳] را ببینید) را ثابت کرده‌ایم:

اگر $h(\vartheta)$ یک چندجمله‌ای کسینوسی نامنفی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه

$$h(\vartheta) = |u(z)|^2 \qquad z = e^{i\vartheta} \quad \text{به‌ازای}$$

که در آن $u(z) = u_n z^n + u_{n-1} z^{n-1} + \ldots + u_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است.

علاوه بر آن، چون $H(z)$ ضرایب حقیقی دارد، ریشه‌های α و β از $u(z)$ به‌صورت جفتهای مزدوج هستند، و این بدان معنی است که $u(z)$ یک چندجمله‌ای با ضریبهای حقیقی u_i است. پس به‌دست می‌آید: $z = e^{i\vartheta}$، $\overline{z} = e^{-i\vartheta}$.

$$\begin{aligned} h(\vartheta) &= (u_n z^n + \ldots + u_0)(u_n z^{-n} + \ldots + u_0) \\ &= z^{-n}(u_n z^n + \ldots + u_0)(u_n + \ldots + u_0 z^n) \end{aligned}$$

از مقایسهٔ این رابطه با عبارت (۸) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 \\ \frac{\lambda_k}{2} &= u_n u_{n-k} + u_{n-1} u_{n-1-k} + \ldots + u_k u_0 \quad (0 < k \leq n) \end{aligned} \tag{۱۰}$$

و به‌خصوص

$$\lambda_n = 2 u_n u_0 \tag{۱۱}$$

پس اگر (۱۰) و (۱۱) را با هم در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$|\lambda_n| = 2|u_n||u_0| \leq u_0^2 + u_n^2 \leq u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 = \lambda_0 \tag{۱۲}$$

اثبات (ب). نخست یک چندجمله‌ای کسینوسی چون

$$h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \ldots + \lambda_1 \cos \vartheta$$

از مرتبهٔ $n \geq 1$ با ضریب ثابت $\lambda_0 = 0$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $h(\vartheta)$ مقادیر مثبت و منفی را می‌پذیرد. فرض کنید که برخلاف آن، $h(\vartheta) \geq 0$. دراین‌صورت، بنابه (۱۲)، $|\lambda_n| \leq 0$، و بنابراین $\lambda_n = 0$، که تناقض است. در حالتی که $h(\vartheta) \leq 0$ همین استدلال را در مورد $-h(\vartheta)$ به‌کار می‌بریم.

بالاخره به‌چندجمله‌ایهای کسینوسی کلی $h(\vartheta)$ به شکل (۳) می‌پردازیم و قرار می‌دهیم $M = \max h(\vartheta)$، $m = \min h(\vartheta)$. توجه کنید که بنابه آنچه هم‌اکنون

ثابت کردیم، $M > \lambda_۰ > m$. با در نظر گرفتن چندجمله‌ایهای کسینوسی نامنفی $M - h(\vartheta)$ و $h(\vartheta) - m$، به‌ترتیب، بنابه (۱۲) نتیجه می‌گیریم

$$|\lambda_n| \leq M - \lambda_۰ \qquad \text{و} \qquad |\lambda_n| \leq \lambda_۰ - m \tag{۱۳}$$

و بنابراین

$$|\lambda_n| \leq \frac{M-m}{۲} \leq \max(M, -m) = \max|h(\vartheta)| \tag{۱۴}$$

اثبات (ب) و بنابراین اثبات قضیهٔ چبیشف به انجام می‌رسد. □

با استفاده از فرمولهای (۱۰)-(۱۴)، خواننده به‌راحتی می‌تواند با نشان دادن اینکه $g(\vartheta) = \frac{۱}{۲^{n-۱}}\cos n\vartheta$ تنها چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبهٔ n است که برابری $\max|g(\vartheta)| = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$ برای آن حاصل می‌شود، تحلیل را کامل کند. چندجمله‌ایهای $T_n(x) = \cos n\vartheta$، $x = \cos\vartheta$، چندجمله‌ایهای چبیشف (از نوع اول) نامیده می‌شوند و بنابراین $\frac{۱}{۲^{n-۱}}T_n(x)$ تنها چندجمله‌ای از درجهٔ n است که برای آن برابری در رابطهٔ قضیهٔ چبیشف برقرار است.

مراجع

[1] P.L. Cebycev: *Œuvres*, Vol. I, Acad. Imperiale des Sciences, St. Petersburg 1899, pp. 387-469.

[2] G. Pólya: *Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängenden Gebieten*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1928), 228-232; Collected Papers Vol. I, MIT Press 1974, 347-351.

[3] G. Pólya & G. Szegö: *Problems and Theorems in Analysis, Vol. II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976; Reprint 1998.

درباره‌ٔ لمی از لیتلوود و آفرد فصل۱۹

لیتلوود و آفرد[1] در سال ۱۹۴۳ در مقاله‌ای دربارهٔ توزیع ریشه‌های معادلات جبری، قضیهٔ زیرا ثابت کردند:

جان لیتلوود

فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n عددهای مختلطی با ضابطهٔ $|a_i| \geq 1$ به‌ازای هر i باشند و 2^n ترکیب خطی $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ با $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت تعداد مجموعهای $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ که در درون هر دایرهٔ به‌شعاع ۱ قرار دارند، بزرگتر از

$$c\frac{2^n}{\sqrt{n}}\log n \quad (\text{به‌ازای } c \text{ی ثابت و مثبت})$$

نیست.

چند سال بعد، پال اردوش این کران را با حذف جملهٔ $\log n$ بهتر کرد ولی جالبتر اینکه، او نشان داد این حکم پیامد ساده‌ای از قضیهٔ اسپنسر (صفحهٔ ۱۸۵ را ببینید) است.

برای درک استدلال او، حالتی را در نظر می‌گیریم که همهٔ a_iها حقیقی باشند. می‌توانیم (با تبدیل a_i به $-a_i$ و ε_i به $-\varepsilon_i$ هرگاه $a_i < 0$) فرض کنیم همهٔ a_iها مثبت‌اند. اکنون فرض کنید مجموعه‌ای از ترکیبات $\sum \varepsilon_i a_i$ در درون بازه‌ای به‌طول ۲ قرار دارد، و همچنین، $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ مجموعهٔ اندیسهاست. به‌ازای هر $\sum \varepsilon_i a_i$ قرار می‌دهیم $I := \{i \in N : \varepsilon_i = 1\}$. حال اگر $I \subsetneqq I'$ برای دو تا از این‌گونه مجموعه‌ها برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum \varepsilon'_i a_i - \sum \varepsilon_i a_i = 2 \sum_{i \in I' \setminus I} a_i \geq 2$$

که تناقض است. پس مجموعه‌های I یک پادزنجیر[2] تشکیل می‌دهند، و از قضیهٔ اسپنسر نتیجه می‌گیریم که حداکثر $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ تا از این‌گونه ترکیبات وجود دارد. بنا به فرمول استرلینگ(صفحهٔ ۱۴ را ببینید) داریم

قضیهٔ اسپنسر. هر پادزنجیر از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی دارای اندازه‌ای حداکثر برابر با $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ است.

1. offord 2. antichain

$$\text{به‌ازای } c \text{ای مثبت،}\quad \binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor} \leq c\frac{۲^n}{\sqrt{n}}$$

به‌ازای n زوج و هر $a_i = ۱$، تعداد $\binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor}$ترکیب $\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i a_i$ به‌دست می‌آوریم که مجموعشان ۰ است. پس با نگاهی به بازهٔ $(-۱, ۱)$ می‌بینیم که عدد دوجمله‌ای کران دقیق را به‌دست می‌دهد.

اردوش در همین مقاله این حدس را مطرح کرد که $\binom{n}{\lfloor n/۲\rfloor}$ کران صحیح برای عددهای مختلط تیز هست (او فقط توانست اعتبار کران $c۲^n n^{-۱/۲}$ را به‌ازای cای ثابت کند) و در واقع همین کران برای بردارهای $\boldsymbol{a}_۱$، . . .، $\boldsymbol{a}_n$ با $|\boldsymbol{a}_i| \geq ۱$ در یک فضای حقیقی هیلبرت، اگر به‌جای دایرهٔ به‌شعاع ۱ گوی بازی به‌شعاع ۱ در نظر بگیریم، برقرار است.

حق با اردوش بود، ولی بیست سال طول کشید تا گیولا کاتونا[1] و دانیل کلایتمن[2]، مستقل از هم، به اثباتی در مورد عددهای مختلط (یا معادلش، در مورد صفحهٔ $\mathbb{R}^۲$) دست یافتند. در اثباتهای آنها از ۲ بعدی بودن صفحه به‌صراحت استفاده شده بود، و ابداً روشن نبود که چگونه می‌توان آنها را تعمیم داد تا فضاهای برداری حقیقی متناهی بعد را شامل شوند.

ولی کلایتمن بعداً در ۱۹۷۰، با استدلالی که به‌طرز شگفت‌انگیزی ساده است، حدس را به‌طور کامل در مورد فضاهای هیلبرت ثابت کرد. در واقع چیزی که او ثابت کرد حتی بیش از این بود. استدلال او نمونهٔ بسیار خوبی است که نشان می‌دهد وقتی فرض صحیح استقرا را می‌یابید، چه کارهایی می‌توانید انجام دهید.

برای آسودگی خیال خوانندگانی که با مفهوم فضای هیلبرت آشنا نیستند خاطرنشان می‌کنیم که ما واقعاً نیازی به‌فضاهای هیلبرت در حالت کلی نداریم. چون فقط با تعدادی متناهی بردار $\boldsymbol{a}_i$ سروکار داریم، کافی است فضای حقیقی $\mathbb{R}^d$ را با حاصلضرب اسکالر معمولی در نظر بگیریم. قضیهٔ کلایتمن این است.

1. Gyula Katona   2. Daniel Kleitman

قضیه. فرض کنید a_1، ...، a_n بردارهایی در $\mathbb{R}^d$ باشند که طول هر یک دست‌کم ۱ است، و نیز فرض کنید R_1، ...، R_k، k ناحیهٔ باز از $\mathbb{R}^d$ باشند که در آنها به‌ازای هر x، y که در یک ناحیهٔ R_i واقع‌اند داریم $|x-y| < 2$.
در این‌صورت، تعداد ترکیبات خطی $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$، $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$، که می‌توانند در اجتماع $\bigcup_i R_i$ تا از این ناحیه‌ها واقع باشند حداکثر برابر با مجموع k تا از بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{j}$ است.
به‌خصوص کران $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ را به‌ازای $k = 1$ به‌دست می‌آوریم.

پیش از پرداختن به اثبات خاطرنشان می‌کنیم که این کران برای

$$a_1 = \ldots = a_n = a = (1, 0, \ldots, 0)^T$$

دقیق است. در واقع، به‌ازای n زوج، $\binom{n}{n/2}$ مجموع برابر با ۰، $\binom{n}{n/2-1}$ مجموع برابر با $(-2)a$، $\binom{n}{n/2+1}$ مجموع برابر $2a$، و به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آوریم. با انتخاب گویهایی به‌شعاع او به‌مرکز

$$-2\lceil \frac{k-1}{2} \rceil a, \ldots (-2)a, 0, 2a, \ldots 2\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor a$$

تعداد

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor} + \ldots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n+2}{2}} + \ldots + \binom{n}{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor}$$

مجموع به‌دست می‌آوریم که در این k گوی قرار دارند، و این همان عبارت مورد نظر ماست زیرا بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای حول وسط متمرکزند (صفحهٔ ۱۵ را ببینید).
استدلال مشابهی برای حالتی که n فرد است می‌توان آورد.

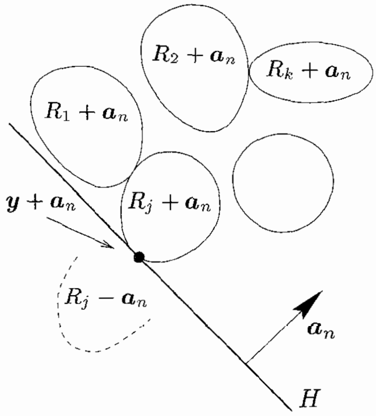
■ **اثبات.** نخست توجه کنید که بدون از دست رفتن کلیت موضوع، می‌توانیم فرض کنیم که ناحیه‌های R_i مجزا هستند، و از این پس چنین خواهیم کرد. کلید اثبات، رابطهٔ بازگشتی بین ضریبهای دوجمله‌ای است که به ما می‌گوید بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای n و $n-1$ چگونه به‌هم مربوط می‌شوند. قرار می‌دهیم $r = \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$، $s = \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$، در این‌صورت $\binom{n}{r}$، $\binom{n}{r+1}$، ...، $\binom{n}{s}$ عبارت‌اند از k تا بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای برای n. از رابطهٔ بازگشتی $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ نتیجه

می‌شود

$$\begin{aligned}\sum_{i=r}^{s}\binom{n}{i} &= \sum_{i=r}^{s}\binom{n-۱}{i} + \sum_{i=r}^{s}\binom{n-۱}{i-۱}\\ &= \sum_{i=r}^{s}\binom{n-۱}{i} + \sum_{i=r-۱}^{s-۱}\binom{n-۱}{i} \qquad (۱)\\ &= \sum_{i=r-۱}^{s}\binom{n-۱}{i} + \sum_{i=r}^{s-۱}\binom{n-۱}{i}\end{aligned}$$

و با محاسبهٔ ساده‌ای معلوم می‌شود که در مجموع اول، $k+۱$ تا بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n-۱}{i}$ و در مجموع دوم $k-۱$ تا از آنها جمع می‌شود.

اثبات با استفاده از استقرا بر n انجام می‌شود؛ حالت $n=۱$ بدیهی است. با توجه به (۱) فقط لازم است برای مرحلهٔ استقرا نشان دهیم که ترکیباتی خطی از $a_۱$، ...، a_n را که در k ناحیهٔ مجزا قرار دارند می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی ترکیباتی از $a_۱$، ...، $a_{n-۱}$ که در $k+۱$ یا $k-۱$ ناحیه قرار دارند نگاشت.



ادعا. دست‌کم یکی از ناحیه‌های انتقال یافتهٔ R_j-a_n مجزا از همهٔ ناحیه‌های انتقال یافتهٔ $R_۱+a_n$، ...، R_k+a_n است.

برای اثبات این ادعا، ابرصفحهٔ $H=\{x:\langle a_n,x\rangle=c\}$ متعامد با a_n را در نظر می‌گیریم که شامل همهٔ ناحیه‌های انتقال‌یافتهٔ R_i+a_n در طرفی است که با $\langle a_n,x\rangle\geq c$ معین می‌شود، و با بستار ناحیه‌ای، مثلاً R_j+a_n، مماس است. چنین ابرصفحه‌ای وجود دارد زیرا ناحیه‌ها کراندارند. حال $|x-y|<۲$ به‌ازای هر $x\in R_j$ و y واقع در بستار R_j برقرار است زیرا R_j باز است. می‌خواهیم نشان دهیم که R_j-a_n در طرف دیگر H قرار دارد. فرض کنید چنین نباشد و داشته باشیم $\langle a_n,x-a_n\rangle\geq c$ به‌ازای xای متعلق به R_j، یعنی $\langle a_n,-x\rangle\geq|a_n|^۲+c$.

همچنین فرض کنید $y+a_n$ نقطه‌ای باشد که در آنجا H با R_j+a_n تماس دارد، در این‌صورت y در بستار R_j است، و $\langle a_n,y+a_n\rangle=c$ یعنی $\langle a_n,-y\rangle=|a_n|^۲-c$ پس

$$\langle a_n,x-y\rangle\geq ۲|a_n|^۲$$

و از نابرابری کوشی-شوارتس نتیجه می‌گیریم

$$۲|a_n|^۲\leq\langle a_n,x-y\rangle\leq|a_n||x-y|$$

و بنابراین (با $|a_n| \geq ۱$) به‌دست می‌آوریم $|x-y| \leq ۲|a_n| \leq ۲$، که تناقض است. بقیهٔ کار آسان است. ترکیبات $\Sigma\varepsilon_i a_i$ را که در $R_۱ \cup \ldots \cup R_k$ قرار می‌گیرند به‌صورت زیر رده‌بندی می‌کنیم. در ردهٔ ۱ همهٔ $\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i a_i$ها با ضابطهٔ $\varepsilon_n = -۱$ و همهٔ $\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i a_i$ها با ضابطهٔ $\varepsilon_n = ۱$ را که در R_j واقع‌اند قرار می‌دهیم و در ردهٔ ۲، ترکیبات باقیماندهٔ $\sum_{i=۱}^{n}\varepsilon_i a_i$ با ضابطهٔ $\varepsilon_n = ۱$ را که در R_j نیستند می‌گذاریم. در نتیجه، ترکیبات $\sum_{i=۱}^{n-۱}\varepsilon_i a_i$ متناظر با ردهٔ ۱ در $k+۱$ ناحیهٔ مجزای $R_۱ + a_{-n}$، ...، $R_k + a_n$ و $R_j - a_n$ قرار دارند، و ترکیبات $\sum_{i=۱}^{n-۱}\varepsilon_i a_i$ متناظر با ردهٔ ۲ در $k-۱$ ناحیهٔ مجزای $R_۱ - a_n$، ...، $R_k - a_n$ بدون $R_j - a_n$ قرار دارند. بنا به‌استقرا، ردهٔ ۱ شامل حداکثر $\sum_{i=r-۱}^{s}\binom{n-۱}{i}$ ترکیب است. ردهٔ ۲ حداکثر $\sum_{i=r}^{s-۱}\binom{n-۱}{i}$ ترکیب را در بردارد — و این [بنا به (۱)] اثبات را کامل می‌کند، اثباتی که مستقیماً از «کتاب» گرفته شده است. □

مراجع

[1] P. ERDŐS: *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1945), 898-902.

[2] G. KATONA: *On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 59-63.

[3] D. KLEITMAN: *On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums*, Math. Zeitschrift **90** (1965), 251-259.

[4] D. KLEITMAN: *On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors*, Advances Math. **5** (1970), 155-157.

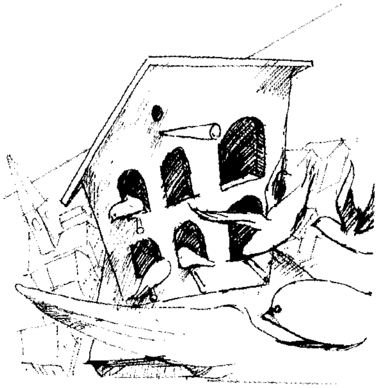
[5] J.E. LITTLEWOOD & A.C. OFFORD: *On the number of real roots of a random algebraic equation III*, Mat. USSR Sb. **12** (1943), 277-285.

ترکیبیات

«مربع لاتینِ افسرده‌ساز»

لانهٔ کبوتر و شمارش دوگانه فصل ۲۰

بعضی از اصول ریاضی، از قبیل دو اصلی که در عنوان این فصل نام برده شده‌اند، آن قدر بدیهی‌اند که ممکن است گمان کنید فقط نتایجی به‌همان اندازه بدیهی به‌دست می‌دهند. برای اینکه متقاعد شوید که «لزوماً چنین نیست» مثالهایی از آنها می‌آوریم که پال اردوش مطرح کرده است. در فصلهای بعد نیز نمونه‌هایی از آنها را خواهید دید.


«لانه‌های کبوتر از دید یک پرنده»

اصل لانهٔ کبوتر

اگر n شیء در r جعبه قرار داده شوند که $r < n$، آنگاه دست‌کم یکی از جعبه‌ها حاوی بیش از یک شیء است.

این اصل واقعاً ساده است و نیازی به‌اثبات ندارد. بیان آن به‌زبان نگاشتها چنین است: فرض کنید N و R دو مجموعهٔ متناهی باشند که

$$|N| = n > r = |R|$$

و $f : N \longrightarrow R$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت aای متعلق به R وجود دارد که $|f^{-1}(a)| \geq 2$. حتی می‌توانیم نابرابری قویتری را ذکر کنیم: aای متعلق به R وجود دارد که

$$|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil \qquad (1)$$

در واقع، در غیر این‌صورت به‌ازای هر a می‌داشتیم $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$، و بنابراین $n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r} = n$، که نمی‌تواند برقرار باشد.

۱. عددها

ادعا. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $2n$ را در نظر بگیرید، و $n+1$ تا از آنها را به‌دلخواه اختیار کنید. در این‌صورت، دو عدد در میان این $n+1$ عدد وجود دارند که نسبت به‌هم اول‌اند.

این ادعا هم واضح است. در اینجا، دو عدد وجود دارند که فقط ۱ واحد اختلاف دارند و بنابراین نسبت به هم اول‌اند.

حال به‌ادعای دیگری می‌پردازیم:

ادعا. باز فرض کنید $A \subseteq \{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ و $|A| = n+۱$. در این‌صورت همواره دو عدد در A وجود دارند به‌طوری که یکی از آنها دیگری را می‌شمارد.

اگر n به‌جای $n+۱$ قرار گیرد، هیچ‌یک از دو حکم دیگر برقرار نیستند. به‌این منظور، به‌ترتیب، مجموعه‌های $\{۲, ۴, ۶, \ldots, ۲n\}$ و $\{n+۱, n+۲, \ldots, ۲n\}$ را در نظر بگیرید.

این ادعا آن قدر واضح نیست. پال اردوش به ما می‌گفت شبی ضمن شام این مسأله را برای لایوش پوسا[1]ی جوان مطرح کرده و وقتی شام به‌پایان رسیده، لایوش پاسخ را یافته بوده است. این مسأله در نظر اردوش همواره یکی از مسائل مناسبی بود که برای «تشرف» افراد جدید به‌ریاضیات می‌توان با آنها در میان گذاشت. جواب (مثبت) این مسأله از اصل لانهٔ کبوتر به‌دست می‌آید. هر عدد $a \in A$ را به‌شکل $a = ۲^k m$ می‌نویسیم که در آن m عددی فرد بین ۱ و $۲n - ۱$ است. چون $n+۱$ عدد در A وجود دارند ولی فقط n عامل متفاوت فرد موجود است، باید دو عدد در A باشند که بخش فرد آنها یکی باشد. در این‌صورت یکی از آنها مضرب دیگری است. □

۲. دنباله‌ها

در اینجا یکی دیگر از مسأله‌های مورد علاقهٔ اردوش را که در مقاله‌ای دربارهٔ مسائل رمزی[2] به‌قلم او و سکرش[3] آمده است، می‌آوریم.

ادعا. در هر دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$، $a_{mn+۱}$ از $mn+۱$ عدد حقیقی مجزا، زیردنباله‌ای صعودی چون

$$a_{i_۱} < a_{i_۲} < \ldots < a_{i_{m+۱}} \qquad (i_۱ < i_۲ < \ldots < i_{m+۱})$$

به‌طول $m+۱$، یا زیردنباله‌ای نزولی چون

$$a_{j_۱} > a_{j_۲} > \ldots > a_{j_{n+۱}} \qquad (j_۱ < j_۲ < \ldots < j_{n+۱})$$

به‌طول $n+۱$، یا هر دو، وجود دارد.

این بار کاربرد اصل لانهٔ کبوتر به‌طرز مستقیم انجام نمی‌شود. به‌هر a_i عدد t_i را که طول بزرگترین زیردنبالهٔ صعودی آغازشونده از a_i است منسوب می‌سازیم. اگر به‌ازای iای، $t_i \geq m+۱$، آنگاه زیردنباله‌ای صعودی به‌طول $m+۱$ داریم. فرض کنید به‌ازای هر i، $t_i \leq m$. تابع $f : a_i \longrightarrow t_i$ که $\{a_۱, \ldots, a_{mn+۱}\}$ را به $\{۱, \ldots, m\}$ می‌نگارد بنابه (۱) حکایت از آن دارد که sای متعلق به $\{۱, \ldots, m\}$ وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای $\frac{mn}{m} + ۱ = n+۱$ عدد a_i داریم $f(a_i) = s$. فرض

1. Lajos Pośa 2. Ramsey 3. Szekeres

کنید $a_{j_۱}$، $a_{j_۲}$، ...، $a_{j_{n+۱}}$ $(j_۱ < \ldots < j_{n+۱})$ این عددها باشند. حال دو عدد متوالی a_{j_i}، $a_{j_{i+۱}}$ را در نظر بگیرید. اگر $a_{j_i} < a_{j_{i+۱}}$، آنگاه زیردنباله‌ای صعودی به‌طول s که در $a_{j_{i+۱}}$ آغاز می‌شود، و در نتیجه زیردنباله‌ای صعودی به‌طول $s + ۱$ با آغاز a_j، به‌دست می‌آوریم، که ممکن نیست زیرا $f(a_{j_i}) = s$، پس زیردنباله‌ای نزولی چون $a_{j_۱} > a_{j_۲} > \ldots > a_{j_{n+۱}}$ به‌طول $n + ۱$ به‌دست می‌آوریم. □

این حکم ساده‌نما دربارهٔ زیردنباله‌های یکنوا پیامدی در مورد بعد گرافها دارد که به‌هیچ وجه واضح و ساده نیست. در اینجا نیازی به‌مفهوم بعد برای گرافهای کلی نداریم بلکه فقط با بعد گرافهای کامل K_n سروکار داریم. این حکم به‌این‌صورت بیان می‌شود. فرض کنید $N = \{۱, \ldots, n\}$، $n \geq ۳$، و m جایگشت $\pi_۱$، ...، π_m از N را در نظر بگیرید. می‌گوییم جایگشتهای π_i نمایشگر K_n هستند اگر برای هر سه عدد متمایز i، j، k جایگشت πای وجود داشته باشد که در آن k بعد از هر دوی i و j بیاید. در این‌صورت، بعد K_n کوچکترین mای است که یک جایگشت $\pi_۱$، ...، π_m به‌ازای آن وجود دارد.

شاید اثبات این موضوع برای خواننده جالب باشد که این حکم برای mn عدد در حالت کلی برقرار نیست.

به‌عنوان مثال داریم $\dim(K_۳) = ۳$ چون هریک از سه عدد باید در آخر بیاید، همان‌طورکه در $\pi_۱ = (۱, ۲, ۳)$، $\pi_۲ = (۲, ۳, ۱)$، $\pi_۳ = (۳, ۱, ۲)$ دیده می‌شود. دربارهٔ $K_۴$ چه می‌توان گفت؟ نخست توجه کنید که $\dim(K_n) \leq \dim(K_{n+۱})$. کافی است $n + ۱$ را درنمایش $K_{n+۱}$ حذف کنید. پس $\dim(K_۴) \geq ۳$ و در واقع با در نظر گرفتن

$$\pi_۱ = (۱, ۲, ۳, ۴), \quad \pi_۲ = (۲, ۴, ۳, ۱), \quad \pi_۳ = (۱, ۴, ۳, ۲)$$

می‌بینیم $\dim(K_۴) = ۳$. اثبات $\dim(K_۵) = ۵$ این قدر ساده نیست. ولی پس از آن با تعجب می‌بینیم که تا $n = ۱۲$، بعد در ۴ ثابت می‌ماند. اما $\dim(K_{۱۳}) = ۵$. بنابراین $\dim(K_n)$ تابعی نسبتاً سرکش به‌نظر می‌رسد، حال آنکه چنین نیست! وقتی n به‌سمت بینهایت می‌رود، $\dim(K_n)$ در واقع تابعی بسیار خوشرفتار است — و کلید یافتن کرانی پایین برای آن، اصل لانهٔ کبوتر است. ادعا می‌کنیم

$\pi_۱$:	۱	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۴
$\pi_۲$:	۲	۳	۴	۸	۷	۶	۵	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۱
$\pi_۳$:	۳	۴	۱	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۶	۵	۸	۷	۲
$\pi_۴$:	۴	۱	۲	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۷	۸	۵	۶	۳

این چهار جایگشت نمایشگر $K_{۱۲}$ هستند.

$$\dim(K_n) \geq \log_۲ \log_۲ n \qquad (۲)$$

چون، همان‌طورکه دیده‌ایم، $\dim(K_n)$ تابعی یکنوا از n است، کافی است (۲) را

به‌ازای $n = ۲^{۲^p} + ۱$ ثابت کنیم، یعنی باید نشان دهیم

$$\text{به‌ازای}\quad n = ۲^{۲^p} + ۱،\quad \dim(K_n) \geq p + ۱$$

فرض کنید که برخلاف این داشته باشیم $\dim(K_n) \leq p$، و نیز فرض کنید $\pi_۱$، …، π_p جایگشتهای نمایشگر $N = \{۱, ۲, \ldots, ۲^{۲^p} + ۱\}$ باشند. اکنون حکم خود دربارهٔ زیر دنباله‌های یکنوا را p بار به‌کار می‌بریم. در $\pi_۱$ زیر دنبالهٔ یکنوایی چون $A_۱$ به‌طول $۲^{۲^{p-۱}} + ۱$ وجود دارد (مهم نیست صعودی باشد یا نزولی). به‌این مجموعهٔ $A_۱$ در $\pi_۲$ نظری می‌افکنیم. با استفادهٔ دوباره از حکم، زیردنبالهٔ یکنوای $A_۲$ را از $A_۱$ در $\pi_۲$ می‌یابیم که طول این زیر دنباله $۲^{۲^{p-۲}} + ۱$ است و $A_۲$ البته در $\pi_۱$ نیز یکنواست. با ادامهٔ این کار، سرانجام زیر دنبالهٔ A_pای با اندازهٔ $۳ = ۱ + ۲^{۲^۰}$ می‌یابیم که نسبت به همهٔ جایگشتهای π_i یکنواست. فرض کنید $A_p = (a, b, c)$. در این‌صورت در هر π_i یا $a < b < c$ یا $a > b > c$. ولی این ممکن نیست زیرا باید جایگشتی وجود داشته باشد که در آن b پس از a و c بیاید. $\square$

رشد مجانبی صحیح را جوئل اسپنسر (کران بالا) و اردوش، سمردی[۱]، و تروتر[۲] (کران پایین) مشخص کردند:

$$\dim(K_n) \sim \log_۲ \log_۲ n + \left(\frac{۱}{۲} + o(۱)\right) \log_۲ \log_۲ \log_۲ n$$

ولی این پایان ماجرا نیست: در همین اواخر، موریس[۳] و هوشتن[۴] روشی یافتند که، علی‌الاصول، مقدار دقیق $\dim(K_n)$ را مشخص می‌کند. با استفاده از نتیجه‌ای که آنها به‌دست آوردند و به‌کمک کامپیوتر، می‌توان مقدارهای ذکر شده در حاشیه را به‌دست آورد. واقعاً حیرت‌انگیز است! کافی است در نظر بگیرید که چه تعداد جایگشت با اندازهٔ ۱۴۲۲۵۶۴ وجود دارد. چگونه می‌توان تعیین کرد که ۷ یا ۸ تا از آنها برای نمایش $K_{۱۴۲۲۵۶۴}$ لازم است؟

$$\dim(K_n) \leq ۴ \iff n \leq ۱۲$$
$$\dim(K_n) \leq ۵ \iff n \leq ۸۱$$
$$\dim(K_n) \leq ۶ \iff n \leq ۲۶۴۶$$
$$\dim(K_n) \leq ۷ \iff n \leq ۱۴۲۲۵۶۴$$

۳. مجموعها

پال اردوش کاربرد زیبای زیر از اصل لانهٔ کبوتر را به اندرو وازونی[۵] و مارتا سود[۶] نسبت

1. Szemerédi 2. Trotter 3. Morris 4. Hoşten 5. Andrew Vázsonyi
6. Marta Sved

می‌داد:

ادعا. فرض کنید n عدد صحیح a_1، ...، a_n به ما داده شده است که لزوماً از هم متمایز نیستند. در این‌صورت، همواره مجموعه‌ای از عددهای متوالی a_{k+1}، a_{k+2}، ...، a_ℓ وجود دارد که مجموعشان $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ مضربی از n است.

برای اثبات قرار می‌دهیم $N = \{0, a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n\}$ و $R = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. نگاشت $f : N \longrightarrow R$ را در نظر می‌گیریم که در آن $f(m)$ باقیماندهٔ تقسیم m بر n است. چون $|N| = n+1 > n = |R|$، نتیجه می‌گیریم که دو مجموع $a_1+\ldots+a_k$، $a_1+\ldots+a_\ell$، $(k<\ell)$، با یک باقیمانده وجود دارند که مجموع اول می‌تواند مجموع «تهی» باشد و در این صورت با 0 نمایانده می‌شود. پس

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i = \sum_{i=1}^{\ell} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i$$

دارای باقیماندهٔ 0 است ــ پایان اثبات. □

حال می‌پردازیم به اصل دوم: شمارش از دو طریق. منظورمان این است:

شمارش دوگانه

فرض کنید دو مجموعهٔ متناهی R و C و یک زیرمجموعهٔ $S \subseteq R \times C$ به ما داده شده باشند. هرگاه $(p,q) \in S$، آنگاه می‌گوییم p و q با هم ملازم‌اند. اگر r_p نشان‌دهندهٔ تعداد عضوهایی باشد که ملازم با $p \in R$اند، و c_q نشان‌دهندهٔ تعداد عضوهایی باشد که ملازم با $q \in C$اند، آنگاه

$$\sum_{p\in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q \qquad (3)$$

و باز، چیزی برای اثبات وجود ندارد. مجموع اول، جفتهای اعضای S را برحسب درایه اول رده‌بندی می‌کند و مجموع دوم همان جفتها را برحسب درایهٔ دوم.

راه مفیدی برای توصیف مجموعهٔ S در دست است. ماتریس $A = (a_{pq})$، ماتریس ملازمت S، را در نظر بگیرید که در آن، اندیس سطری و ستونی هر درایهٔ A،

به‌ترتیب، به R و C تعلق دارند:

$$a_{pq} = \begin{cases} ۱ & (p,q) \in S \\ ۰ & (p,q) \notin S \end{cases}$$

R/C	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲		۱		۱		۱		۱
۳			۱			۱		
۴				۱				۱
۵					۱			
۶						۱		
۷							۱	
۸								۱

بنابراین r_p مجموع سطر pام A و c_q مجموع ستون qام آن است. پس نخستین مجموع در (۳)، تعداد عضوهای S (یعنی تعداد ۱های A) را با جمع زدن سطرها به‌دست می‌دهد و مجموع دوم، با جمع ستونها.

مثال زیر این تناظر را روشن می‌سازد. فرض کنید $R = C = \{۱, ۲, \ldots, ۸\}$ و $S = \{(i,j) : i$ ، j را می‌شمارد $\}$ در این‌صورت ماتریسی که در حاشیه دیده می‌شود، به‌دست می‌آید که در آن فقط ۱ها نمایش داده شده‌اند.

۴. بازهم عددها

به‌جدول حاشیه نگاه کنید. تعداد ۱ها در ستون j دقیقاً تعداد مقسوم‌علیه‌های j است؛ این تعداد را با $t(j)$ نشان می‌دهیم. اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که وقتی j از ۱ تا n تغییر می‌کند این عدد به‌طور متوسط چقدر بزرگ است. پس در جستجوی کمیت

$$\overline{t}(n) = \frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n} t(j)$$

هستیم. برای n دلخواه، $\overline{t}(n)$ چقدر است؟ در نخستین نگاه، امیدی به‌یافتن پاسخ این پرسش نمی‌رود. به‌ازای عددهای اول p داریم ۲ $t(p) =$. درحالی‌که به‌ازای ۲^k عدد بزرگی چون $t(۲^k) = k + ۱$ به‌دست می‌آوریم. پس $t(n)$ تابعی است که به‌طرز لگام گسیخته جهش می‌کند و حدس می‌زنیم $\overline{t}(n)$ نیز چنین تابع سرکشی باشد. اما این حدس غلط است و عکس آن درست است! با شمارش از دو طریق، پاسخ غیر منتظره و ساده‌ای به‌دست می‌آید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$\overline{t}(n)$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	۲	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۱۶}{۷}$	$\frac{۵}{۲}$

چند مقدار اولیهٔ $\overline{t}(n)$

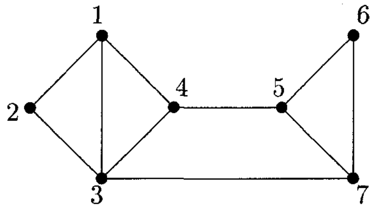
ماتریس A را (مانند بالا) برای عددهای صحیح ۱ تا n در نظر می‌گیریم. با شمارش برحسب ستونها به‌دست می‌آوریم $\sum_{j=۱}^{n} t(j)$. چه تعداد ۱ در سطر i هست؟ به‌آسانی دیده می‌شود که ۱ها با مضربهای i متناظرند: $۱i$، $۲i$، ...، و آخرین مضربی که از n تجاوز نمی‌کند، برابر $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor i$ است. پس به‌دست می‌آوریم

$$\overline{t}(n) = \frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n} t(j) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \frac{n}{i} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i}$$

که در آن خطا در هر عامل جمع، وقتی از $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ به $\frac{n}{i}$ گذر می‌کنیم، کوچکتر از ۱ است. پس خطای کلی برای میانگین نیز کوچکتر ۱ است. حال مجموع آخر، عدد همساز

nام است که (صفحهٔ ۱۳ را ببینید) تقریباً برابر $\log n$ است، با خطایی کوچکتر از ۱.
به‌طورخلاصه، این حکم قابل توجه را ثابت کرده‌ایم: در حالی‌که $t(n)$ کلاً خطا آمیز است، میانگین $\overline{t}(n)$ خوب رفتار می‌کند: $\overline{t}(n) \sim \log n$ باخطایی کمتر از ۲ برقرار است.

۵. گرافها



گیریم G گراف متناهی ساده‌ای با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یالهای E باشد. طبق معمول فرض می‌کنیم G هیچ طوقه و یال چندگانه‌ای نداشته باشد. در فصل ۱۰، $d(v)$ یعنی درجهٔ هر رأس v را به‌عنوان تعداد یالهایی که v یک رأس آنهاست تعریف کردیم. در مثال شکل مقابل، رأسهای ۱، ۲، ...، ۷ به‌ترتیب دارای درجه‌های ۳،۲،۳،۴،۳،۲،۳ هستند.

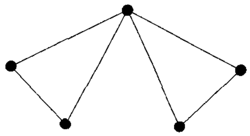
تقریباً هر کتابی در نظریهٔ گراف با حکم زیر شروع می‌شود (که قبلاً آن را در فصلهای ۱۰ و ۱۷ دیده‌ایم):

$$\sum_{v\in V} d(v) = ۲|E| \qquad (۴)$$

برای اثبات، $S \subseteq V \times E$ را در نظر می‌گیریم که S مجموعهٔ جفتهایی چون (v,e) است چنانکه $v \in V$ یک رأس $e \in E$ است. با شمارش عضوهای S از دو طریق، از یک طرف به‌دست می‌آید $\sum_{v\in V} d(v)$، زیرا هر رأسی به‌اندازهٔ $d(v)$ در این شمارش سهم دارد و از سوی دیگر، $۲|E|$ زیرا هر یال دو انتها دارد. □

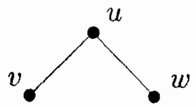
نتیجهٔ (۴) هرچند ساده به‌نظر می‌رسد، پیامدهای مهم زیادی دارد که بعضی از آنها را در ادامهٔ بحث خواهیم دید. در این بخش کاربرد زیبایی از آن در مسألهٔ فرین [اکسترمال] دربارهٔ گرافها را انتخاب و مطرح می‌کنیم. مسأله این است:

> فرض کنید $G = (V,E)$ دارای n رأس است و شامل هیچ دوری به‌طول ۴ (که با $C_۴$ نشان داده می‌شود) یعنی هیچ زیرگراف ▢ نیست. G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟



به‌عنوان مثال، گراف ۵ رأسی در حاشیه، شامل هیچ دوری به‌طول ۴ نیست و ۶ یال دارد. خواننده به‌راحتی می‌تواند نشان دهد که با ۵ رأس، حداکثر تعداد یالها ۶ است، و این گراف در واقع تنها گراف ۵ رأسی با ۶ یال است که دوری به‌طول ۴ ندارد.

حالا به‌مسألهٔ کلی می‌پردازیم. فرض کنید G گرافی با n رأس و بدون ۴ـدور (دوری به‌طول ۴) است. همچون بالا، درجهٔ u را با $d(u)$ نشان می‌دهیم. اکنون عضوهای مجموعهٔ S زیر را به‌دو طریق می‌شماریم: S مجموعهٔ جفتهایی چون $(u, \{v, w\})$ است که در آن u مجاور به v و به w است، $v \neq w$. به‌عبارت دیگر، همهٔ دفعات رخداد



را به‌ازای uهای مختلف می‌شماریم و به‌دست می‌آوریم $|S| = \sum_{u \in V} \binom{d(u)}{۲}$. از سوی دیگر، هر جفت $\{u, w\}$ حداکثر یک رأس همسایهٔ مشترک دارد (بنابه شرط مربوط به ۴ـدور). پس $|S| \leq \binom{n}{۲}$، و نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{۲} \leq \binom{n}{۲}$$

یا

$$\sum_{u \in V} d(u)^{۲} \leq n(n-۱) + \sum_{u \in V} (du) \qquad (۵)$$

حال (چنانکه در این نوع مسائل فرین بسیار معمول است) نابرابری کوشی‌ـشوارتس را در مورد بردارهای $(d(u_۱), \ldots, d(u_n))^T$ و $(۱, ۱, \ldots, ۱)^T$ به‌کاربرده به‌دست می‌آوریم

$$\left(\sum_{u \in V} d(u)\right)^{۲} \leq n \sum_{u \in V} d(u)^{۲}$$

و لذا طبق (۵)

$$\left(\sum_{u \in V} d(u)\right)^{۲} \leq n^{۲}(n-۱) + n \sum_{u \in V} d(u)$$

با توسل به برابری (۴) داریم

$$۴|E|^{۲} \leq n^{۲}(n-۱) + ۲n|E|$$

یا

$$|E|^{۲} - \frac{n}{۲}|E| - \frac{n^{۲}(n-۱)}{۴} \leq ۰$$

با حل این معادلهٔ درجه دوم، قضیهٔ زیر که متعلق به ایشتوان رایمن[1] است به‌دست می‌آید.

قضیه. اگر گراف G با n رأس شامل هیچ ۴ـدوری نباشد، آنگاه

$$|E| \le \frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۴n-۳}) \qquad (۶)$$

به‌ازای $n = ۵$، از این فرمول به‌دست می‌آید $|E| \le ۶$، و گراف بالا نشان می‌دهد که برابری می‌تواند برقرار باشد.

پس با شمارش از دو طریق، به‌راحتی کرانی بالا برای تعداد یالها به‌دست می‌آید. ولی کران (۶) در حالت کلی چقدر خوب است؟ مثال زیبای زیر ([۲]، [۳]، [۶]) نشان می‌دهد که این کران تقریباً دقیق است. همانند بسیاری از این‌گونه مسائل، هندسهٔ متناهی در اینجا هم راه را می‌نمایاند.

در ارائهٔ این مثال، فرض ما این است که خواننده با هیأت متناهی $\mathbb{Z}_p$ از اعداد صحیح به پیمانهٔ عدد اولی چون p آشناست (صفحهٔ ۲۵ را ببینید). فضای برداری ۳ بعدی X روی $\mathbb{Z}_p$ را در نظر می‌گیریم. گراف G_pی زیر را با استفاده از X می‌سازیم. رأسهای G_p زیر فضاهای یک بعدی $[v] := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_p}\{v\}$ هستند که $\boldsymbol{0} \ne v \in X$، و دو تا از این‌گونه زیر فضاها، $[v]$ و $[w]$ را با یالی به‌هم وصل می‌کنیم اگر

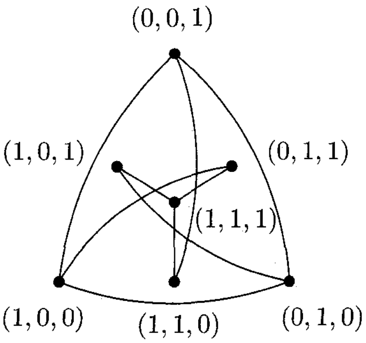
$$\langle v, w\rangle = v_۱w_۱ + v_۲w_۲ + v_۳w_۳ = ۰$$

توجه کنید که فرقی نمی‌کند کدام بردار مخالف ۰ را از زیرفضا در نظر گرفته باشیم. به‌زبان هندسه، این رأسها نقطه‌های صفحهٔ تصویری روی $\mathbb{Z}_p$ هستند و $[w]$ مجاور به $[v]$ است اگر w روی خط قطبی v باشد.

به‌عنوان مثال، گراف $G_۲$ هیچ ۴ـدوری ندارد و شامل ۹ یال است، که تقریباً به کران ۱۰ که از (۶) به‌دست می‌آید، نزدیک است. می‌خواهیم نشان دهیم که این موضوع به‌ازای هر عدد اول p صادق است.

نخست ثابت می‌کنیم که G_p در شرط ۴ـدور صدق می‌کند. اگر $[u]$ هم‌مجاور $[v]$ و هم‌مجاور $[w]$ باشد، آنگاه u جوابی از معادله‌های خطی

$$v_۱x + v_۲y + v_۳z = ۰$$
$$w_۱x + w_۲y + w_۳z = ۰$$



گراف $G_۲$: رأسهایش هفت سه‌تایی مخالف صفر (x,y,z) هستند.

1. Istvan Reiman

است. چون v و w مستقل خطی‌اند، نتیجه می‌گیریم که فضای جواب دارای بعد ۱ است، و بنابراین همسایهٔ مشترک $[u]$ یکتاست.

حال می‌پرسیم که G_p چند رأس دارد. باز هم شمارش دوگانه درکار می‌آید. فضای X شامل $p^۳ - ۱$ بردار مخالف صفر است. چون هر زیر فضای یک بعدی شامل $p - ۱$ بردار مخالف ۰ است، نتیجه می‌گیریم که X دارای $\frac{p^۳-۱}{p-۱} = p^۲ + p + ۱$ زیرفضای یک بعدی است یعنی G_p دارای $n = p^۲ + p + ۱$ رأس است. همین‌طور، هر زیر فضای دوبعدی شامل $p^۳ - ۱$ بردار مخالف ۰ و لذا $\frac{p^۲-۱}{p-۱} = p + ۱$ زیرفضای یک بعدی است.

باقی می‌ماند که تعداد یالها در G_p را، که بنابه (۴) با مجموع درجه‌ها یکی است، تعیین کنیم. با توجه به‌نحوهٔ ساخت G_p رئوس مجاور به $[u]$ جوابهای معادلهٔ

$$u_۱x + u_۲y + u_۳z = ۰ \qquad (۷)$$

هستند. فضای جواب (۷) یک زیرفضای دو بعدی است و بنابراین، $p + ۱$ رأس مجاور به u وجود دارد. ولی باید احتیاط کرد، ممکن است $[u]$ خودش جوابی از (۷) باشد. در این حالت فقط p رأس مجاور به $[u]$ وجود دارد.

خلاصه اینکه، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم: اگر u بر مقطعی مخروطی به‌معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ واقع باشد، آنگاه $d([u]) = p$، و اگر چنین نباشد، آنگاه $d([u]) = p + ۱$. پس باقی می‌ماند که تعداد زیرفضاهای یک بعدی بر مقطع مخروطی

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$$

را تعیین کنیم. در اینجا گزاره‌ای را که به‌زودی ثابت خواهیم کرد ذکر می‌کنیم.

ادعا. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ دقیقاً $p^۲$ جواب (x, y, z) دارد، و بنابراین (با مستثنا کردن جواب صفر) دقیقاً $\frac{p^۲-۱}{p-۱} = p + ۱$ رأس در G_p از درجهٔ p وجود دارد.

با این گزاره، تحلیل خود از G_p را کامل می‌کنیم. $p + ۱$ رأس از درجهٔ p، و از این رو $(p^۲ + p + ۱) - (p + ۱) = p^۲$ رأس از درجهٔ $p + ۱$ وجود دارد. با استفاده از (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{(p+۱)p}{۲} + \frac{p^۲(p+۱)}{۲} = \frac{(p+۱)^۲p}{۲} \\ &= \frac{(p+۱)p}{۴}(۱ + (۲p+۱)) = \frac{p^۲+p}{۴}(۱ + \sqrt{۴p^۲ + ۴p + ۱}) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $n = p^۲ + p + ۱$، رابطهٔ بالا چنین می‌شود

$$|E| = \frac{n-۱}{۴}(۱ + \sqrt{۴n - ۳})$$

و می‌بینیم که این تقریباً با (۶) مطابقت دارد.

اکنون ادعای بالا را ثابت می‌کنیم. استدلال زیرکاربرد زیبایی از جبر خطی شامل ماتریسهای متقارن و ویژه‌مقدارهای آنهاست. همین روش را در فصل ۲۹ خواهیم دید که تصادفی هم نیست: هر دو اثبات از یک مقاله به قلم اردوش، رنی، و سوش[1] گرفته شده‌اند.

زیرفضاهای یک بعدی X را مانند قبل با بردارهای $\boldsymbol{v}_۱$، $\boldsymbol{v}_۲$، ...، $\boldsymbol{v}_{p^۲+p+۱}$ نشان می‌دهیم که هر دو تا از آنها مستقل خطی‌اند. به‌همین نحو، می‌توانیم زیرفضاهای دوبعدی را با یک مجموعه از بردارها نشان دهیم چنانکه زیرفضای متناظر با $\boldsymbol{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)^T$، مانند (۷)، مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $u_۱x + u_۲y + u_۳z = ۰$ باشد. (البته این چیزی نیست جز اصل دوگانی در جبرخطی.) پس، بنابه (۷)، یک زیرفضای یک‌بعدی که با $\boldsymbol{v}_i$ نشان داده می‌شود در زیر فضای دوبعدی که با $\boldsymbol{v}_j$ نمایانده می‌شود قرار دارد اگر و تنها اگر $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = ۰$.

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

ماتریس $G_۲$

حال ماتریس $A = (a_{ij})$ با اندازهٔ $(p^۲ + p + ۱) \times (p^۲ + p + ۱)$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود: سطرها و ستونهای A متناظرند با $\boldsymbol{v}_۱$، ...، $\boldsymbol{v}_{p^۲+p+۱}$ (سطرها و ستونها را به‌یک صورت شماره‌گذاری می‌کنیم) با ضابطهٔ

$$a_{ij} := \begin{cases} ۱ & \text{اگر } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = ۰ \\ ۰ & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

پس A یک ماتریس متقارن حقیقی است، و داریم $a_{ii} = ۱$ اگر $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = ۰$ یعنی دقیقاً وقتی $\boldsymbol{v}_i$ بر مقطع مخروطی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۰$ واقع است. پس تنها کاری که باید انجام دهیم این است که نشان دهیم

$$\text{trace} \quad A = p + ۱$$

از جبر خطی به‌یاد داریم که اثر[2] برابر است با مجموع ویژه مقدارها. در اینجا شگردی به‌کار می‌بریم: هرچند A پیچیده به‌نظر می‌رسد، تحلیل ماتریس $A^۲$ آسان است. دو حقیقت را در اینجا ذکر می‌کنیم:

1. Sós 2. trace

- هر سطر A شامل دقیقاً $p+۱$ تا ۱ است. از این نتیجه می‌شود که $p+۱$ ویژه‌مقداری از A است زیرا $A\mathbf{۱}=(p+۱)\mathbf{۱}$ که در آن $\mathbf{۱}$ بردار مرکب از ۱ هاست.

- به‌ازای هر دو بردار متمایز v_i و v_j دقیقاً یک ستون با یک ۱ در هر دو سطر وجود دارد (ستون متناظر با زیرفضای یکتای تولیدشده به‌وسیلهٔ v_i و v_j).

با استفاده از این دو نکته داریم

$$A^۲=\begin{pmatrix} p+۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & p+۱ & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ ۱ & \dots & & p+۱ \end{pmatrix}=pI+J$$

که در آن I ماتریس همانی و J ماتریسی است که همهٔ درایه‌هایش یک هستند. حال J دارای ویژه‌مقدار $p^۲+p+۱$ (با چندگانگی ۱) و ۰ (با چندگانگی $p^۲+p$) است. پس $A^۲$ ویژه‌مقدارهای $(p+۱)^۲=p^۲+۲p+۱$ با چندگانی ۱ و p با چندگانی $p^۲+p$ را دارد. چون A حقیقی و متقارن است و بنابراین قطری شدنی است، در می‌یابیم که A دارای ویژه مقدارهای $p+۱$ یا $-p(p+۱)$ و $p^۲+p$ ویژه مقدار $\pm\sqrt{p}$ است. طبق نکتهٔ اول در بالا، نخستین ویژه مقدار باید $p+۱$ باشد. فرض کنید که چندگانگی $\sqrt{p}$ برابر r است، و چندگانگی $-\sqrt{p}$ برابر s؛ در این‌صورت

$$\operatorname{trace} A=(p+۱)+r\sqrt{p}-s\sqrt{p}$$

و اکنون به‌مقصد رسیده‌ایم: چون اثر یک عدد صحیح است، باید داشته باشیم $r=s$، پس $\operatorname{trace} A=p+۱$. □

۶. لم اسپنسر

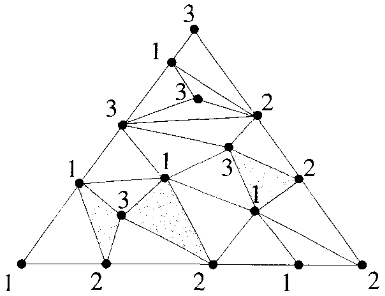
در سال ۱۹۱۱، لویتسن براوئر[1] قضیهٔ مشهور نقطهٔ ثابت خود را انتشار داد:

هر تابع پیوستهٔ $f:B^n\longrightarrow B^n$ از یک گوی n بعدی به‌خودش، نقطهٔ ثابتی (نقطه‌ای چون $x\in B^n$ با ضابطهٔ $f(x)=x$) دارد.

1. Luitzen Brouwer

در حالت ۱ بعدی، یعنی درمورد بازه، این قضیه به‌سادگی از قضیهٔ مقدار میانی به‌دست می‌آید، اما در ابعاد بالاتر، اثبات قضیهٔ براوئر به‌ابزارهای پیچیده‌ای نیاز داشت. بنابراین، مایهٔ شگفتی فراوان شد وقتی که در سال ۱۹۲۸، امانوئل اسپنسر جوان (که در آن موقع ۲۳ ساله بود) حکم ترکیبیاتی ساده‌ای به‌دست آورد که هم قضیهٔ براوئر دربارهٔ نقطهٔ ثابت و هم ناوردایی بعد تحت نگاشتهای پیوسته را می‌توان از آن استنتاج کرد. علاوه بر آن، لم بسیار مبتکرانهٔ اسپنسر اثباتی بسیار زیبا دارد که مبتنی بر شمارش دوگانه است.

ما دربارهٔ لم اسپنسر، و قضیهٔ براوئر به‌عنوان نتیجه‌ای از آن، در حالت جالب $n = ۲$ بعدی بحث می‌کنیم. خواننده در تعمیم اثباتها به ابعاد بالاتر (با استفاده از استقرا بر بعد) مشکلی نخواهد داشت.



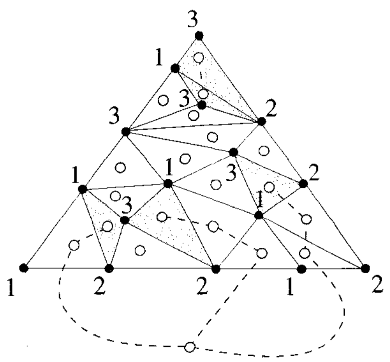
مثلثهایی که با رنگهای مختلف رنگ‌آمیزی شده‌اند، با هاشور نشان داده شده‌اند.

لم اسپنسر

تصور کنید که مثلثی «بزرگ» با رأسهای $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$ مثلث‌بندی شده است (یعنی به تعدادی متناهی مثلث «کوچک» نامتداخل تجزیه شده است که دوبه‌دو در یک ضلع مشترک‌اند.)

فرض کنید رأسها در شکل مثلث‌بندی شده با سه‌رنگ با شماره‌های $\{۱, ۲, ۳\}$ رنگ‌آمیزی می‌شوند به‌طوری که به V_i رنگ i (به‌ازای هر i) زده می‌شود، و فقط رنگهای i و j برای رأسهایِ روی ضلعِ از V_i تا V_j به‌کار می‌روند $(i \neq j)$، در حالی که رأسهای درونی به‌دلخواه با یکی از رنگهای ۱،۲، یا ۳ رنگ‌آمیزی می‌شوند.

در این‌صورت یک مثلث کوچک «سه‌رنگی» باید در مثلث‌بندی وجود داشته باشد که هر سه‌رنگ متفاوت را در رأسهایش دارد.



■ **اثبات.** ما حکم قویتری را اثبات خواهیم کرد: تعداد مثلثهای سه‌رنگی نه تنها غیر صفر است، بلکه همواره فرد است.

گراف دوگان مثلث‌بندی را در نظر می‌گیریم ولی همهٔ یالهای آن را اختیار نمی‌کنیم بلکه فقط یالهایی را در نظر می‌گیریم که یالی را قطع می‌کنند که رئوسش رنگهای متفاوت ۱ و ۲ را دارند. پس یک «گراف دوگان جزئی» به‌دست می‌آوریم که درجهٔ آن در همهٔ رأسهایی که متناظر با مثلثهای سه‌رنگی‌اند ۱ است، برای همهٔ مثلثهایی که در آنها دو رنگ ۱ و ۲ ظاهر می‌شوند ۲ است، و برای همهٔ مثلثهایی که هر دو رنگ ۱ و ۲ را ندارند ۰ است. پس فقط مثلثهای سه‌رنگی متناظر با رأسهای از درجه فرد (درجهٔ ۱) هستند.

ولی رأسی از گراف دوگان که متناظر با بیرونِ مثلث‌بندی است دارای درجهٔ فرد است. در واقع در طول ضلع بزرگ از V_1 تا V_2، تعداد فردی تغییر بین رنگهای ۱ و ۲ رخ می‌دهد. پس تعداد فردی از یالهای گراف دوگان جزئی، این ضلع بزرگ را قطع می‌کنند، درحالی که ضلعهای بزرگ دیگر نمی‌توانند هر دو رنگ ۱ و ۲ را داشته باشند.

حال چون تعداد رأسهای فرد در هر گراف متناهی زوج است [بنابه رابطهٔ (۴)]، تعداد مثلثهای کوچک با سه‌رنگ متفاوت (متناظر با رأسهای درونی فرد درگراف دوگان ما) فرد است. □

به‌آسانی می‌توان قضیهٔ براوئر را از این لم استنتاج کرد.

■ **اثبات قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر (برای $d = 2$).** فرض کنیم Δ مثلثی در $\mathbb{R}^3$ به‌رئوس $e_1 = (1, 0, 0)$، $e_2 = (0, 1, 0)$، و $e_3 = (0, 0, 1)$ باشد. کافی است ثابت کنیم هر نگاشت پیوستهٔ $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ یک نقطهٔ ثابت دارد، زیرا Δ با گوی دوبعدی B_2 همسانریخت[1] است.

حداکثر طول ضلع در یک مثلث‌بندی $\mathcal{T}$ را با $\delta(\mathcal{T})$ نشان می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان دنباله‌ای نامتناهی از مثلث‌بندیهای $\mathcal{T}_n$ از Δ ساخت به‌قسمی‌که دنبالهٔ قطرهای ماکسیمال $\delta(\mathcal{T}_n)$ به 0 میل کند. چنین دنباله‌ای را می‌توان صریحاً ساخت یا آنکه به‌طور استقرایی به‌دست آورد مثلاً به‌این طریق که $\mathcal{T}_{n+1}$ را تقسیم گرانیگاهی[2] $\mathcal{T}_n$ بگیریم.

برای هر یک از این مثلث‌بندیها، رنگ‌آمیزی رأسها (vها) با سه‌رنگ [۳ـرنگ‌آمیزی] را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم: قرار می‌دهیم $\lambda(v) := \min\{i : f(v)_i < v_i\}$، یعنی $\lambda(v)$ کوچکترین اندیس i است به‌طوری که مختص iام $f(v) - v$ منفی است. با فرض اینکه f نقطهٔ ثابتی ندارد، این رنگ‌آمیزی خوش‌تعریف است. برای ملاحظهٔ این مطلب، توجه کنید که هر $v \in \Delta$ در صفحهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ قرار دارد، پس $\sum_i v_i = 1$، بنابراین اگر $f(v) \neq v$، آنگاه دست‌کم یکی از مختصات $f(v) - x$ باید منفی (و دست‌کم یکی مثبت باشد).

حال صادق بودن این رنگ‌آمیزی در فرضهای لم اسپنسر را بررسی می‌کنیم. نخست، به‌رأس e_i باید رنگ i زده شود زیرا تنها مؤلفهٔ منفی ممکن $f(e_i) - e_i$، مؤلفهٔ iام است. به‌علاوه، اگر v برضلع مقابل e_i واقع باشد، آنگاه $v_i = 0$، پس مؤلفهٔ

---

1. homeomorphic 2. barycentric subdivision

iام $f(x) - v$ نمی‌تواند منفی باشد و از این رو v نمی‌تواند رنگ i را دریافت کند.

اکنون لم اسپنسر به ما می‌گوید که در هر مثلث‌بندی T_n یک مثلث سه‌رنگی $\{v^{n:1}, v^{n:2}, v^{n:3}\}$ با $\lambda(v^{n:i}) = i$ وجود دارد. دنبالهٔ نقاط $(v^{n:1})_{n\geq 1}$ لزوماً همگرا نیست ولی چون سادک Δ فشرده است زیر دنباله‌ای از آن یک نقطهٔ حدی دارد. اگر به‌جای دنبالهٔ مثلث‌بندیهای T_n زیر دنبالهٔ متناظر را قرار دهیم (که آنها را هم برای سادگی با T_n می‌نمایانیم) می‌توانیم فرض کنیم که $(v^{n:1})_n$ به‌نقطه‌ای چون $v \in \Delta$ می‌گراید. حال فاصلهٔ $v^{n:2}$ و $v^{n:3}$ از $v^{n:1}$ حداکثر برابر طول شبکهٔ $\delta(T_n)$ است که به ۰ میل می‌کند. پس دنباله‌های $(v^{n:2})$ و $(v^{n:3})$ به یک نقطهٔ v میل می‌کنند.

اما $f(v)$ کجاست؟ می‌دانیم که به‌ازای هر n، نخستین مختص $f(v^{n:1})$ کوچکتر از نخستین مختص $v^{n:1}$ است. حال چون f پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که نخستین مختص $f(v)$ کوچکتر یا مساوی نخستین مختص v است. همین استدلال برای مختصات دوم و سوم صادق است. پس هیچ‌یک از مختصات $f(v) - v$ مثبت نیست ــ و قبلاً دیدیم که این متناقض با فرض $f(v) \neq v$ است. $\square$

مراجع

[1] L.E.J. Brouwer: *Über Abbidungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **71** (1911), 97-115.

[2] W. C. Brown: *On graphs that do not contain a Thomsen graph*, Canadian Math. Bull. **9** (1966), 281-285.

[3] P. Erdős, A. Rényi & V. Sós: *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 215-235.

[4] P. Erdős & G. Szekeres: *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. (1935), 463-470.

[5] S. Hoşten & W.D. Morris: *The order dimension of the complete graph*, Preprint 1998; Discrete Math., to appear.

[6] I. Reiman: *Über ein Problem von K. Zarankiewicz*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **9** (1958), 269-273.

[7] J. Spencer: *Minimal scrambling sets of simple orders*, Acta Math. Hungar. **22** (1971), 349-353.

[8] E. SPERNER: *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), 265-272.

[9] W.T. TROTTER: *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, John Hopkins University Press, Baltimore and London 1992.

فصل ۲۱ سه قضیهٔ مشهور دربارهٔ مجموعه‌های متناهی

امانوئل اسپنسر

در این فصل به یکی از موضوعات بنیادی ترکیبیات می‌پردازیم: ویژگیها و اندازه‌های خانواده‌های خاصی چون $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای متناهی مثل $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. بحث را با دو قضیهٔ مهم و مشهور این مبحث آغاز می‌کنیم که عبارت‌اند از قضایای اسپنسر و اردوش‌ـکوـرادو[1]. هر دو قضیه بارها اثبات شده‌اند و هریک آغازگر شاخهٔ جدیدی از نظریهٔ ترکیبیاتی مجموعه‌ها بوده است. به‌نظر می‌رسد راه طبیعی اثبات هر دو قضیه استفاده از استقرا باشد ولی استدلالهایی که ما می‌آوریم کاملاً متفاوت و واقعاً مبتکرانه‌اند.

امانوئل اسپنسر در سال ۱۹۲۸ پرسش زیر را مطرح کرد و به‌آن پاسخ داد: فرض کنید مجموعهٔ $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ به‌ما داده شده است. خانواده‌ای چون $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های N را پادزنجیر می‌نامیم اگر هیچ یک از مجموعه‌های عضو $\mathcal{F}$ شامل مجموعهٔ دیگری از خانوادهٔ $\mathcal{F}$ نباشد. اندازهٔ بزرگترین پادزنجیر چقدر است؟
واضح است که $\mathcal{F}_k$، خانوادهٔ مرکب از همهٔ مجموعه‌های Kعضوی، در ویژگی پادزنجیر صدق می‌کند و $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{۴}$. با توجه به ماکسیمم ضریبهای دوجمله‌ای (صفحهٔ ۱۵) نتیجه می‌گیریم که پادزنجیری با اندازهٔ $\binom{n}{\lfloor n/۲ \rfloor} = \max \binom{n}{۴}$ وجود دارد. حال قضیهٔ اسپنسر حاکی است که پادزنجیر بزرگتری وجود ندارد.

قضیهٔ ۱. اندازهٔ یک بزرگترین پادزنجیر یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با $\binom{n}{\lfloor n/۲ \rfloor}$.

■ **اثبات.** اثبات زیرکه لوبل[2] آن را عرضه کرده است شاید کوتاهترین و زیباترین برهان در میان اثباتهایِ بسیار باشد. فرض کنید $\mathcal{F}$ پادزنجیری دلخواه است. در این‌صورت باید نشان دهیم $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/۲ \rfloor}$. کلید اثبات این است که زنجیرهایی از زیرمجموعه‌ها چون $\varnothing = C_۰ \subset C_۱ \subset C_۲ \subset \ldots \subset C_n = N$ در نظر می‌گیریم که در آن به‌ازای $i = ۰, \ldots, n$ داریم $|C_i| = i$. چند زنجیر وجود دارد؟ واضح است که می‌توانیم عضوهای N را یکی یکی کنار هم بگذاریم و [هر بار یک زیرمجموعه و در نهایت] زنجیری به‌دست آوریم، پس دقیقاً به‌تعداد جایگشتهای N یعنی $n!$ زنجیر خواهیم داشت. حال این پرسش را برای مجموعه‌ای چون $A \in \mathcal{F}$ مطرح می‌کنیم که

1. Erdős-Ko-Rado 2. Lubell

چندتا از این زنجیرها شامل A هستند. این هم موضوع ساده‌ای است. برای رسیدن به A از $\varnothing$ باید عضوهای A را یکی یکی کنار هم بگذاریم و سپس برای گذار از A به N باید عضوهای باقیمانده را بیفزاییم. از به هم پیوستن این دو زنجیر، زنجیری شامل A به‌دست می‌آید. پس اگر A شامل k عضو باشد، آنگاه با در نظر گرفتن همهٔ این جفت زنجیرها می‌بینیم که دقیقاً $k!(n-k!)$ تا زنجیر شامل A وجود دارد. توجه کنید که هیچ زنجیری نمی‌تواند شامل دو مجموعهٔ متفاوت A و B از $\mathcal{F}$ باشد زیرا $\mathcal{F}$ پادزنجیر است.

برای تکمیل اثبات، فرض کنید m_k تعداد مجموعه‌های k عضوی در $\mathcal{F}$ باشد. پس $|\mathcal{F}| = \sum\limits_{k=0}^{n} m_k$. در این‌صورت از بحث ما نتیجه می‌شود که تعداد زنجیرهای شامل عضوی از $\mathcal{F}$ برابر است با

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!$$

و مقدار این عبارت نمی‌تواند از $n!$ یعنی تعداد همهٔ زنجیرها بیشتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \quad \text{یا} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

اگر به‌جای مخرجها بزرگترین ضریب دوجمله‌ای را قرار دهیم به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1 \quad \text{یعنی که} \quad |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

تحقیق کنید که خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $\frac{n}{2}$ عضوی به‌ازای n زوج، و نیز دو خانوادهٔ مرکب از همهٔ مجموعه‌های $\frac{n-1}{2}$ عضوی و همهٔ مجموعه‌های $\frac{n+1}{2}$ عضوی به‌ازای n فرد، واقعاً تنها پادزنجیرهایی هستند که اندازهٔ ماکسیمم را به‌دست می‌آورند.

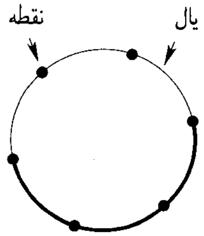
قضیهٔ دوم ما ماهیت کاملاً متفاوتی دارد. باز مجموعهٔ $N = \{1, \ldots, n\}$ را در نظر می‌گیریم. خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های آن را خانوادهٔ متقاطع می‌نامیم اگر هر دو مجموعه در $\mathcal{F}$ دست‌کم یک عضو مشترک داشته باشند. تقریباً به‌طور مستقیم معلوم می‌شود که بزرگترین اندازه‌ای که یک خانوادهٔ متقاطع می‌تواند داشته باشد 2^{n-1} است. اگر $A \in \mathcal{F}$، آنگاه اشتراک متمم آن یعنی $A^c = N \backslash A$ با A تهی است و بنابراین نمی‌تواند در $\mathcal{F}$ باشد. پس نتیجه می‌گیریم هر خانوادهٔ متقاطع حداکثر نیمی از تعداد کل زیرمجموعه‌ها (2^n) را شامل است یعنی $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. اما اگر خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌هایی را در نظر بگیریم که شامل یک عضو مشخص‌اند، مثلاً خانوادهٔ

$\mathcal{F}_۱$ مرکب از همهٔ مجموعه‌های شامل ۱، آنگاه روشن است که $|\mathcal{F}_۱| = ۲^{n-۱}$، و مسأله حل و فصل می‌شود.

اما اکنون به پرسش زیر توجه کنید: اگر همهٔ مجموعه‌های عضو خانوادهٔ متقاطعی چون $\mathcal{F}$ هم‌اندازه، مثلاً دارای اندازهٔ k، باشند، $\mathcal{F}$ چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟ این‌گونه خانواده‌ها را kـخانواده‌های متقاطع می‌نامیم. برای کنارگذاشتن حالات پیش پا افتاده، فرض می‌کنیم $n \geq ۲k$ زیرا در غیر این‌صورت هر دو مجموعهٔ k عضوی اشتراک دارند و چیزی نمی‌ماند که اثبات کنیم. با استفاده از ایدهٔ بالا، مسلماً می‌توانیم چنین خانوادهٔ $\mathcal{F}_۱$ای را با در نظر گرفتن همهٔ مجموعه‌های k عضوی که شامل یک عضو مشخص، مثلاً ۱، هستند، به‌دست آوریم. واضح است که همهٔ مجموعه‌های عضو $\mathcal{F}_۱$ را با افزودن همهٔ زیرمجموعه‌های $(k-۱)$ عضوی $\{۲, ۳, \ldots, n\}$ به ۱ می‌توان به‌دست آورد، پس $|\mathcal{F}_۱| = \binom{n-۱}{k-۱}$ آیا می‌توان نتیجهٔ بهتری به‌دست آورد؟ خیر — و این مضمون قضیهٔ اردوش‌ـکوـرادو است.

قضیهٔ ۲. بزرگترین اندازهٔ یک kـخانوادهٔ متقاطع در یک مجموعهٔ n عضوی، وقتی $n \geq ۲k$، برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$.

پال اردوش، چاوکو[1] و ریچارد رادو این قضیه را در سال ۱۹۳۸ یافتند ولی تا ۲۳ سال بعد انتشار ندادند. از آن زمان به‌بعد، اثباتهای متعدد و صورتهای مختلفی از آن عرضه شده است، ولی استدلال زیر که از آن گیولا کاتونا است، زیبایی و ظرافت خاصی دارد.



دایره‌ای با $n = ۶$ نقطهٔ تقسیم. یالهایی که پررنگ رسم شده‌اند، کمانی به‌طول ۳ را نشان می‌دهند.

■ **اثبات.** کلید اثبات، لم سادهٔ زیر است که در نخستین نگاه، کلاً بی‌ارتباط با مسألهٔ ما به‌نظر می‌رسد. دایره‌ای چون C در نظر بگیرید که به‌وسیلهٔ n نقطه به n بخش [که آنها را «یال» می‌نامیم] تقسیم شده است. فرض کنید کمانی به‌طول k مرکب از $k+۱$ نقطهٔ متوالی و k یال بین آنها باشد.

لم. فرض کنید $n \geq ۲k$، و کمانهای متمایز $A_۱$، ...، A_t به‌طول k به ما داده شده است چنانکه هر دو کمان یک یال مشترک دارند. در این‌صورت $t \leq k$.

برای اثبات این لم، نخست خاطرنشان می‌کنیم که هر نقطه از C نقطهٔ انتهایی حداکثر یک کمان است. درواقع اگر A_i و A_j نقطهٔ انتهایی مشترکی چون v می‌داشتند باید نقطهٔ آغاز آنها در دو طرف نقطهٔ آغازی می‌بود (زیرا این دو کمان متمایزند). ولی

1. Chao Ko

در این‌صورت، وقتی $n \geq ۲k$ آنها نمی‌توانند یال مشترکی داشته باشند. $A_۱$ را تثبیت می‌کنیم. چون هر $A_i(۲ \leq i)$ یالی مشترک با $A_۱$ دارد، یکی از نقاط انتهایی A_i یک نقطهٔ داخلی $A_۱$ است. همان‌طور که دیدیم این نقطه‌های انتهایی باید متمایز باشند، و نیز $A_۱$ شامل $k - ۱$ نقطهٔ داخلی است، پس حداکثر $k - ۱$ کمان دیگر می‌تواند وجود داشته باشد و بنابراین، روی هم رفته، حداکثر k کمان وجود دارد. □

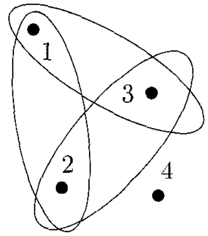
اکنون می‌پردازیم به اثبات قضیهٔ اردوش‌ـکو‌ـرادو. فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک kـخانوادهٔ متقاطع باشد. دایرهٔ C را با n نقطه و n یال مانند فوق، در نظر می‌گیریم. جایگشت دوری دلخواه $\pi = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ را اختیار می‌کنیم و عددهای a_i را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت کنار یالهای C می‌نویسیم. حال به شمارش تعداد مجموعه‌های $A \in \mathcal{F}$ که به‌صورت k عدد متوالی روی C ظاهر می‌شوند می‌پردازیم. چون $\mathcal{F}$ خانواده‌ای متقاطع است، بنابه لم ما، حداکثر k تا از این‌گونه مجموعه‌ها به‌دست می‌آوریم. چون این موضوع برای هر جایگشت دوری صادق است، و چون $(n-۱)!$ جایگشت دوری وجود دارد، به‌این طریق حداکثر

$$k(n-۱)!$$

مجموعه از $\mathcal{F}$ تولید می‌شود که به‌صورت عناصر متوالی جایگشتی دوری ظاهر می‌گردند. یک مجموعهٔ مشخص $A \in \mathcal{F}$ چند بار شمرده می‌شود؟ جواب آسان است: A در π ظاهر می‌شود اگر k عضو A متوالیاً به‌ترتیبی ظاهر شوند. پس $k!$ امکان برای نوشتن A به‌طور متوالی وجود دارد و $(n-k)!$ راه برای مرتب کردن عضوهای باقیمانده. پس نتیجه می‌گیریم که یک مجموعهٔ مشخص A دقیقاً در $k!(n-k)!$ جایگشت دوری ظاهر می‌شود و از این‌رو

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-۱)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-۱-(k-۱))!} = \binom{n-۱}{k-۱} \qquad \square$$

و باز می‌توانیم این پرسش را مطرح کنیم که آیا خانواده‌هایِ شامل یک عضو مشخص تنها kـخانواده‌های متقاطع‌اند یا نه. مسلماً به‌ازای $n = ۲k$ چنین نیست. مثلاً به‌ازای $n = ۴$ و $k = ۲$، خانوادهٔ $\{۱,۲\}$، $\{۱,۳\}$، $\{۲,۳\}$ نیز دارای اندازهٔ $۳ = \binom{۳}{۱}$ است. به‌طور کلی، به‌ازای $n = ۲k$، kـخانواده‌های متقاطع ماکسیمال باندازهٔ $\frac{۱}{۲}\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱}$ را به‌دست می‌آوریم، به‌این طریق که از هر جفت مجموعه که یکی مجموعه‌ای k عضوی چون A و دیگری متمم آن N/A است، یکی را به‌دلخواه بر می‌گزینیم. ولی به‌ازای $n > ۲k$ خانواده‌های خاصِ شامل یک عضو مشخص واقعاً تنها خانواده‌های متقاطع‌اند. از خواننده می‌خواهیم مهارت خود را با اثبات این



خانواده‌ای متقاطع به‌ازای $n = ۴$، $k = ۲$.

موضوع بیازماید.

و بالاخره می‌پردازیم به سومین قضیه که احتمالاً مهمترین قضیهٔ بنیادی در نظریهٔ مجموعه‌های متناهی است، یعنی قضیهٔ «ازدواج» از فیلیپ هال[1] که در سال ۱۹۳۵ به اثبات رسید. این قضیه درهای مبحثی را که امروز نظریهٔ جورسازی[2] نامیده می‌شود گشود و دارای کاربردهای متنوعی است که بعضی از آنها را در ادامهٔ بحث خواهیم دید.

مجموعهٔ متناهی X و گرد آورده‌ای چون $A_۱$، ...، A_n از زیرمجموعه‌های X را (که لزوماً متمایز نیستند) در نظر بگیرید. مجموعه‌ای مثل $\{x_۱, \ldots, x_n\} \subset X$ را یک دستگاه نماینده‌های متمایز[3] $\{A_۱, \ldots, A_n\}$ می‌نامیم اگر x_iها متمایز باشند و به‌ازای هر i، $x_i \in A_i$. البته چنین دستگاهی که به اختصار SDR نامیده می‌شود لزوماً وجود ندارد، مثلاً وقتی یکی از مجموعه‌های A_i تهی است. مضمون قضیهٔ هال، تعریف دقیق شرط وجود SDR است.

قبل از بیان قضیه، تعبیر آن در جامعهٔ انسانی را ذکر می‌کنیم که توجیه کنندهٔ نام قضیهٔ ازدواج است. مجموعه‌ای از دختران چون $\{۱, \ldots, n\}$ و مجموعه‌ای مثل X از پسران را در نظر بگیرید. هرگاه $x \in A_i$، آنگاه دختر i و پسر x مایل به ازدواج با یکدیگرند. پس A_i مجموعهٔ همسران احتمالی دختر i است. در این‌صورت SDR نشان‌دهندهٔ مجموعه‌ای از پسران است که هر یک از آنها فرد دلخواه یکی از دختران $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است.

بیان قضیه به‌زبان مجموعه‌ها چنین است.

«انتخاب همسری از میان جمع»

قضیهٔ ۳. فرض کنید $A_۱$، ...، A_n گردآورده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی X باشد. در این‌صورت دستگاهی از نماینده‌های متمایز وجود دارد اگر و تنها اگر اجتماع هر m مجموعهٔ A_i شامل دست‌کم m عضو باشد که $۱ \leq m \leq n$.

شرط به‌وضوح لازم است: اگر اجتماع m مجموعهٔ A_i کمتر از m عضو داشته باشد، آنگاه این m مجموعه را مسلماً نمی‌توان با عضوهای متمایز نشان داد. حقیقت شگفت‌انگیز (که حاصلش کاربردپذیری عام است) این است که این شرط بدیهی، کافی نیز هست. اثبات اولیهٔ هال نسبتاً پیچیده بود، و متعاقباً اثباتهای متفاوت بسیاری عرضه شد که از میان آنها اثبات زیر (مبتنی بر ایده‌های هالموس و وان[4]) شاید طبیعیترین برهان باشد.

1. Philip Hall 2. matching 3. distinct representatives 4. Vaughan

■ **اثبات.** از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$، چیزی برای اثبات وجود ندارد. گیریم $n > ۱$، و فرض کنیم $\{A_۱, \dots , A_n\}$ در شرط قضیه که آن را به اختصار با (H) نشان می‌دهیم صادق است. گردآورده‌ای از ℓ مجموعهٔ A_i با ضابطهٔ $n > \ell \geq ۱$ را خانوادهٔ بحرانی می‌نامیم اگر اجتماع آن دارای کاردینال ℓ باشد. حال دو حالت را از هم متمایز می‌کنیم.

حالت ۱: هیچ خانوادهٔ بحرانی وجود ندارد.

عضوی چون $x \in A_n$ انتخاب می‌کنیم. x را از X حذف می‌کنیم و گردآوردهٔ $A'_۱$، ...، $A'_{n-۱}$ با ضابطهٔ $A'_i = A_i \backslash x$ را در نظر می‌گیریم. چون هیچ خانوادهٔ بحرانی وجود ندارد، اجتماع هر m مجموعهٔ A'_i شامل دست‌کم m عضو است. پس بنابه استقرا روی n، یک SDR وابسته به $\{A'_۱, \dots , A'_{n-۱}\}$ به‌صورت $x_۱$، ...، $x_{n-۱}$ وجود دارد، و همراه با $x_n = x$، SDRای برای گردآوردهٔ اولیه به‌دست می‌دهد.

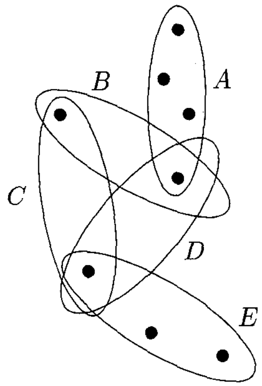
حالت ۲: خانواده‌ای بحرانی وجود دارد.

می‌توانیم با شماره‌گذاری مجدد مجموعه‌ها فرض کنیم $\{A_۱, \dots , A_\ell\}$ یک خانوادهٔ بحرانی است. در این‌صورت $\bigcup_{i=۱}^{\ell} A_i = \tilde{X}$ که $|\tilde{X}| = \ell$. چون $\ell < n$، به‌استقرا، وجود یک SDR را برای $A_۱$، ...، A_ℓ استنتاج می‌کنیم یعنی یک شماره‌گذاری $x_۱$، ...، x_ℓ از $\tilde{X}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $i \leq \ell$، $x_i \in A_i$.

حال گردآوردهٔ باقیماندهٔ $A_{\ell+۱}$، ...، A_n را در نظر می‌گیریم، و m تا از این مجموعه‌ها را به‌دلخواه اختیار می‌کنیم. چون اجتماع $A_۱$، ...، A_ℓ و این m مجموعه بنابه شرط (H) دست‌کم شامل $\ell + m$ عضو است، نتیجه می‌گیریم که m مجموعه شامل دست‌کم m عضو در بیرون $\tilde{X}$ است. به‌عبارت دیگر، شرط (H) برای خانوادهٔ

$$A_{\ell+۱}\backslash\tilde{X}, \dots , A_n\backslash\tilde{X}$$

صادق است. حال با استفاده از استقرا، SDRای برای $A_{\ell+۱}$، ...، A_n به‌دست می‌آید که در آن از $\tilde{X}$ اجتناب می‌شود. با ترکیب آن با $x_۱$، ...، x_ℓ، SDRای برای همهٔ مجموعه‌های A_i به‌دست می‌آوریم. به‌این ترتیب، اثبات به‌انجام می‌رسد. □



$\{B, C, D\}$ خانواده‌ای بحرانی است

همان‌طور که گفتیم، قضیهٔ هال سرآغاز نظریهٔ جورسازی [۵] بوده است که امروز مبحث بسیار گسترده‌ای است. از میان صورتها و نتایج بسیار آن، یک حکم بسیار جذاب را

ذکر می‌کنیم که از خواننده دعوت می‌شود خودش به‌اثبات آن بپردازد:

فرض کنید مجموعه‌های A_1، …، A_n دارای اندازهٔ $k \geq 1$ هستند و به‌علاوه هیچ عضوی در بیش از k مجموعه نیست. در این‌صورت k تا SDR وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای هر i، k نمایندهٔ A_i متمایزند و بنابراین روی هم مجموعهٔ A_i را تشکیل می‌دهند.

این قضیهٔ زیبا افقهای جدیدی را در مورد امکانات ازدواج نشان می‌دهد.

مراجع

[1] P. Erdős, C. Ko & R. Rado: *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. (Oxford), Ser. (2) **12** (1961), 313-320.

[2] P. Hall: *On representatives of subsets*, Quart. J. Math. (Oxford) **10** (1935), 26-30.

[3] P.R. Halmos & H. E. Vaughan: *The marriage problem*, Amer. J. Math. **72** (1950), 214-215.

[4] G. Katona: *A simple proof of the Erdős-Ko-Rado theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **13** (1972), 183-184.

[5] L. Lovász & M. D. Plummer: *Matching Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.

[6] D. Lubell: *A short proof of Sperner's theorem* J. Combinatorial Theory **1** (1966), 299.

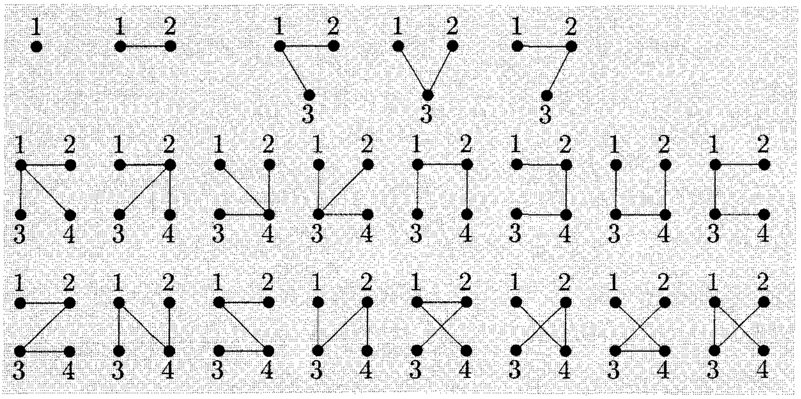
[7] E. Sperner: *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Zeitschrift **27** (1928), 544-548.

فصل۲۲

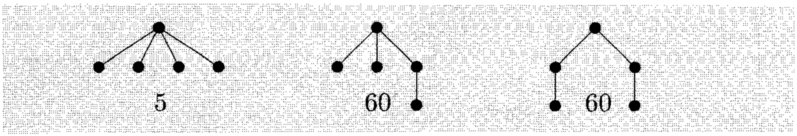
فرمول کیلی برای تعداد درختها

آرتر کیلی

یکی از زیباترین فرمولهای ترکیبیات شمارشی به‌تعداد درختهای نشاندار[1] مربوط می‌شود. مجموعهٔ $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. با این مجموعهٔ رئوس چند درخت متفاوت می‌شود ساخت؟ این تعداد را با T_n نمایش می‌دهیم. با شمارش «با دست»، مقادیر $T_۱ = ۱$، $T_۲ = ۱$، $T_۳ = ۳$، $T_۴ = ۱۶$ برای درختهای نشان داده شده در زیر به‌دست می‌آید:



توجه کنید که ما درختهای نشاندار را در نظر داریم؛ هرچند اگر گرافتهای یکریخت را یکی بگیریم فقط یک درخت از مرتبهٔ ۳ وجود دارد، اما اگر بین درختها برحسب اینکه رأس درونیشان کدام است تمایز بگذاریم، سه‌درخت نشاندار متفاوت وجود دارد. به‌ازای $n = ۵$، سه‌درخت نایکریخت داریم:



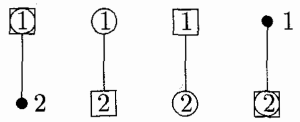
برای درخت اول به‌وضوح ۵ نشانگذاری متفاوت میسر است، و برای دومی و سومی $\frac{۵!}{۲} = ۶۰$ نشانگذاری، و به‌دست می‌آوریم $T_۵ = ۱۲۵$. این شواهد کافی است که حدس بزنیم $T_n = n^{n-۲}$، و قضیهٔ کیلی دقیقاً همین است.

1. labeled

قضیه. $n^{n-۲}$ درخت نشاندار متفاوت با n رأس وجود دارند.

این قضیهٔ زیبا تن به‌اثباتهایی به‌همان اندازه زیبا می‌دهد که مبتنی بر فنون جبری و ترکیبیاتی متعددی هستند. ما رئوس سه‌تا از این اثباتها را ذکر می‌کنیم و سپس اثباتی می‌آوریم که تا به‌امروز در میان اثباتهای این قضیه از همه زیباتر است.

■ **اثبات اول (تناظر دوسویی).** روش سنتی و مستقیم‌ترین روش، یافتن تناظری دوسویی از مجموعهٔ همهٔ درختهای با n رأس به‌روی مجموعهٔ دیگری است با کاردینال معلوم $n^{n-۲}$. طبعاً مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های مرتب $(a_۱, \ldots, a_{n-۲})$ با $۱ \leq a_i \leq n$ به ذهن می‌آید. پس می‌خواهیم هر درخت T را با یک دنبالهٔ $(a_۱, \ldots, a_{n-۲})$ به‌طور یکتا کدگذاری کنیم. چنین کدی را پروفر[1] یافت و در بیشتر کتابهای نظریهٔ گرافها می‌آید.

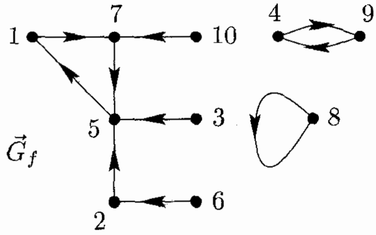


چهار درخت $\mathcal{T}_۲$

در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ اثبات دیگری مبتنی بر تناظر دوسویی صحبت کنیم که از آنِ جویال[2] است و هرچند شهرت کمتری دارد ولی همان قدر زیبا و ساده است. به‌این منظور نه فقط درختهای t روی $N = \{۱, \ldots, n\}$ بلکه درختهایی همراه با دو رأس متمایز، انتهای چپ $\circ$ و انتهای راست $\Box$ که ممکن است برهم منطبق باشند در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\mathcal{T}_n = \{(t; \circ; \Box)\}$ این مجموعهٔ جدید باشد؛ در این‌صورت واضح است که $|\mathcal{T}_n| = n^۲ T_n$.

پس هدف ما اثبات $|\mathcal{T}_n| = n^n$ است. حال مجموعه‌ای هست که می‌دانیم اندازه‌اش n^n است، یعنی مجموعهٔ N^N مرکب از همهٔ نگاشتهای از N به N. پس اگر بتوانیم یک تناظر دو سویی از N^N به‌روی $\mathcal{T}_n$ بیابیم، فرمولمان ثابت می‌شود.

فرض کنید $f : N \longrightarrow N$ نگاشتی دلخواه باشد. با ترسیم پیکانهایی از i به $f(i)$، f را به‌صورت گراف جهتدار $\vec{G}_f$ نمایش می‌دهیم.



مثلاً نگاشت

$$f = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ \\ ۷ & ۵ & ۵ & ۹ & ۱ & ۲ & ۵ & ۸ & ۴ & ۷ \end{pmatrix}$$

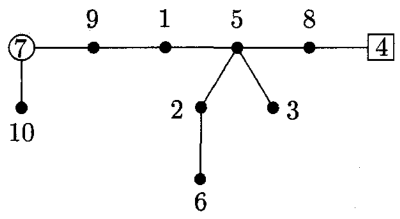
با گراف جهتداری که در حاشیه آمده، نشان داده شده است.

یک مؤلفهٔ $\vec{G}_f$ را در نظر بگیرید. چون دقیقاً یک یال از هر رأس صادر می‌شود،

1. Prüfer 2. Joyal

این مؤلفه شامل تعداد یکسانی رأس و یال، و بنابراین دقیقاً یک دور جهتدار است. فرض کنید $M \subseteq N$ اجتماع مجموعه‌های رأسهای این دورهاست. اندکی تأمل نشان می‌دهد که M زیرمجموعهٔ ماکسیمال یکتای N است به‌طوری‌که تحدید f به‌روی M همچون یک نگاشت دوسویی روی M عمل می‌کند. می‌نویسیم

$$f|_M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & z \\ f(a) & f(b) & \dots & f(z) \end{pmatrix}$$



که در آن عددهای a، b، …، z در ردیف اول در ترتیب طبیعی ظاهر می‌شوند. از اینجا یک ترتیب $f(a)$، $f(b)$، …، $f(z)$ از M مطابق ردیف دوم به‌دست می‌آید. حال $f(a)$ انتهای چپ و $f(z)$ انتهای راست است.

اکنون درخت t متناظر با نگاشت f به‌صورت زیر ساخته می‌شود: $f(a)$، …، $f(z)$ را به‌این ترتیب به‌صورت مسیری از $f(a)$ به $f(z)$ رسم می‌کنیم و رأسهای باقیمانده را مطابق $\vec{G}_f$ (با حذف پیکانها) اضافه می‌کنیم.

در مثال بالا به‌دست می‌آوریم $M = \{۱, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹\}$

$$f_M = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ & ۵ & ۷ & ۸ & ۹ \\ ۷ & ۹ & ۱ & ۵ & ۸ & ۴ \end{pmatrix}$$

و بنابراین درخت t را داریم که تصویرش درحاشیه آمده است.

بلافاصله ملاحظه می‌شود که چگونه این فرایند را معکوس کنیم: با مفروض بودن درخت t، به‌مسیر یکتای P از انتهای چپ تا انتهای راست نظر می‌افکنیم. از اینجا مجموعهٔ M و نگاشت $f|_M$ به‌دست می‌آید. سپس تناظرهای باقیماندهٔ $i \longrightarrow f(i)$ مطابق مسیرهای یکتای از i به P، افزوده می‌شوند. □

■ **اثبات دوم (جبرخطی).** می‌توان T_n را تعداد درختهای فراگیر درگراف کامل K_n در نظر گرفت. حال به یک گراف سادهٔ همبند دلخواه G روی $V = \{۱, ۲, \dots, n\}$ توجه کنید؛ تعداد درختهای فراگیر را با $t(G)$ نشان می‌دهیم؛ پس $T_n = t(K_n)$. قضیهٔ مشهور زیر قضیهٔ ماتریس-درخت کیرشوف ([۱] را ببینید) است. ماتریس ملازمت G یعنی $B = (b_{ie})$ را که سطرهایش با عضوهای V و ستونهایش با عضوهای E نشانگذاری می‌شوند در نظر بگیرید؛ درایه‌های این ماتریس برابر ۱ یا ۰ هستند برحسب آنکه $i \in e$ یا $i \notin e$. توجه کنید که $|E| \geq n - ۱$ چون G همبند است. در هر ستون به‌جای یکی از ۱ها به‌طور دلخواه ۱− را قرار می‌دهیم (این کار معادل است

«روش نامتعارف برای شمارش درختها: گربه‌ای روی هر درخت قرار دهید، سگی را پای درختها راه ببرید، و دفعاتی را که سگ پارس می‌کند، بشمرید.»

با نوعی جهتدهی به G)، و ماتریس جدید را $C \cdot M = CC^T$ می‌نامیم که یک ماتریس متقارن $n \times n$ با درجه‌های $d_۱$، ...، d_n در قطر اصلی می‌نامیم.

گزاره. به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$ داریم $t(G) = \det M_{ii}$ که در آن M_{ii} از M با حذف سطر iام و ستون iام حاصل می‌شود.

■ **اثبات.** کلید اثبات، قضیهٔ بینه[1]ـکوشی در جبر خطی است: فرض کنید P ماتریسی $(r \times s)$ و Q ماتریسی $(s \times r)$ باشد که $r \leq s$. در این‌صورت $\det(PQ)$ برابر با مجموع حاصلضربهای دترمینانهای زیرماتریسهای $(r \times r)$ متناظر است که در اینجا «متناظر» به‌این معناست که اندیسهای یکسانی برای r ستون P و r سطر Q در نظر می‌گیریم. پس به‌ازای M_{ii} داریم

$$\det M_{ii} = \sum_N \det N \cdot \det N^T = \sum_N (\det N)^۲$$

که در آن N روی تمام زیرماتریسهای $(n-۱) \times (n-۱)$ از $C\backslash\{i \text{ سطر}\}$ تغییر می‌کند. $n-۱$ ستون N متناظر است با زیرگرافی از G با $n-۱$ یال و n رأس، و فقط می‌ماند که نشان دهیم

$$\det N = \begin{cases} \pm ۱ & \text{اگر این یالها درختی پدید آورند} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

فرض کنید $n-۱$ یال درختی پدید نیاورند. در این‌صورت مؤلفه‌ای وجود دارد که شامل i نیست. چون مجموع سطرهای متناظر این مؤلفه ۰ است، نتیجه می‌گیریم که این سطرها وابستهٔ خطی‌اند، و بنابراین $\det\ N = ۰$.

حال فرض کنید که ستونهای N درختی پدید می‌آورند. در این‌صورت، رأسی چون $j_۱ \neq i$ از درجهٔ ۱ وجود دارد؛ فرض کنید $e_۱$ یال ملازم با آن باشد. با حذف $j_۱$، $e_۱$ درختی با $n-۲$ یال به‌دست می‌آوریم. و باز رأسی چون $j_۲ \neq i$ از درجهٔ ۱ با یال ملازم $e_۲$ وجود دارد. به‌همین طریق ادامه می‌دهیم تا $j_۱$، $j_۲$، ...، $j_{n-۱}$ و $e_۱$، $e_۲$، ...، $e_{n-۱}$ با $j_i \in e_i$ معین شوند. حال سطرها و ستونها را جابه‌جا می‌کنیم تا j_k به‌سطر kام و e_k به‌ستون kام تبدیل شود. چون بنابه نحوهٔ ساخت، به‌ازای $k < \ell$، $j_k \notin e_\ell$، می‌بینیم که ماتریس جدید N' ماتریس پایین مثلثی است که همهٔ عناصر روی قطر اصلی آن برابر با ± ۱ هستند. پس $\det N = \pm \det N' = \pm ۱$، و کار به انجام می‌رسد.

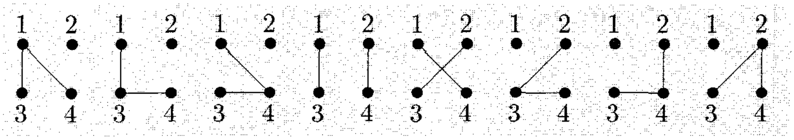
1. Binet

برای حالت خاص $G = K_n$ به‌وضوح به‌دست می‌آوریم

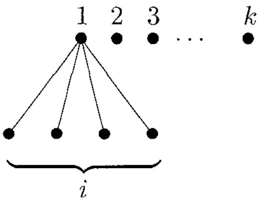
$$M_{ii} = \begin{pmatrix} n-۱ & -۱ & \dots & -۱ \\ -۱ & n-۱ & & -۱ \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -۱ & -۱ & \dots & n-۱ \end{pmatrix}$$

و با محاسبهٔ ساده‌ای معلوم می‌شود $M_{ii} = n^{n-۲}$. □

اثبات سوم (بازگشت). روش سنتی دیگر در ترکیبیات شمارشی، تشکیل یک رابطهٔ بازگشتی و اثبات این رابطه با استفاده از استقراست. ایدهٔ زیر اساساً متعلق به ریوردن[1] و رنی است. برای یافتن رابطهٔ بازگشتی مناسب، مسألهٔ کلیتری را (که قبلاً در مقالهٔ کیلی آمده است) بررسی می‌کنیم. فرض کنید A یک مجموعهٔ k عضوی دلخواه از رأسها باشد. تعداد جنگلهای (نشاندار) روی $\{۱, \dots, n\}$ را با $T_{n,k}$ نشان می‌دهیم که هر یک از آنها مرکب از k درخت است و رأسهای A در درختهای متفاوتی ظاهر می‌شوند. روشن است که مجموعهٔ A مهم نیست، فقط اندازهٔ k مطرح است. توجه کنید که $T_{n,۱} = T_n$.



مثلاً به‌ازای $A = \{۱, ۲\}$ داریم $T_{۴,۲} = ۸$



چنین جنگل Fای را با $A = \{۱, ۲, \dots, k\}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم همان‌طور که در شکل حاشیه نشان داده شده، ۱ مجاور به i رأس باشد. با حذف ۱ می‌بینیم که این i رأس همراه با ۲، ...، k، تعداد $T_{n-۱,k-۱+i}$ جنگل به‌دست می‌دهند. چون می‌توانیم i رأس را به دلخواه از میان $n-k$ رأس متفاوت با ۱، ...، k انتخاب کنیم، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $۱ \leq k \leq n$،

$$T_{n,k} = \sum_{i=۰}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-۱,k-۱+i} \qquad (۱)$$

که در آن قرار می‌دهیم $T_{۰,۰} = ۱$، $T_{n,۰} = ۰$ به‌ازای $n > ۰$. توجه کنید که $T_{۰,۰} = ۱$ برای تضمین $T_{n,n} = ۱$ لازم است.

1. Riordan

گزاره. داریم

$$T_{n,k} = kn^{n-k-1} \qquad (2)$$

و بنابراین درحالت خاص

$$T_{n,1} = T_n = n^{n-2}$$

■ **اثبات.** بنابه (۱)، و با استفاده از استقرا

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} \qquad (i \to n-k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^{i} - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} \\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{i-1} (n-1)^{i-1} \\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{i} (n-1)^{i} \\
&= n^{n-k} - (n-k) n^{n-1-k} = kn^{n-1-k}
\end{aligned}$$

و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

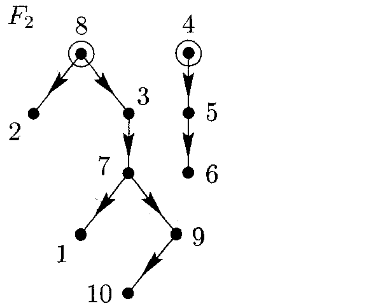
■ **اثبات چهارم (شمارش دوگانه).** ایدهٔ عالی زیر که از آنِ جیم پیتمن[1]ست، فرمول کیلی و تعمیم آن (۲) را بدون استفاده از استقرا یا تناظر دوسویی به‌دست می‌دهد ــ این ایده صرفاً مبتنی بر شمارش هوشمندانه از دو طریق است.

جنگل ریشه‌دار روی $\{1, \ldots, n\}$ جنگلی است همراه با یک ریشهٔ انتخاب شده در هر مؤلفهٔ درختی. فرض کنید $\mathcal{F}_{n,k}$ مجموعهٔ همهٔ جنگلهای ریشه‌دارِ مرکب از k درخت ریشه‌دار است. پس $\mathcal{F}_{n,1}$ مجموعهٔ همهٔ درختهای ریشه‌دار است.

توجه کنید که $|\mathcal{F}_{n,1}| = nT_n$ زیرا در هر درخت، n انتخاب برای ریشه ممکن است. حال $F_{n,k} \in \mathcal{F}_{n,k}$ را یک گراف جهتدار در نظر می‌گیریم که جهت همهٔ یالهایش از ریشه به‌سمت رأسی دیگر است. گوییم جنگل F شامل جنگل دیگر F' است اگر F شامل F' به‌عنوان گراف جهتدار باشد. واضح است که اگر F به‌طور سره

1. Jim Pitman

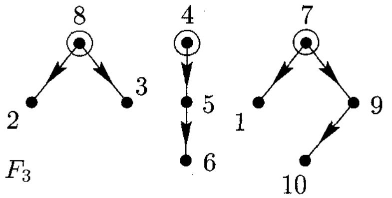
شامل F' باشد، آنگاه F مؤلفه‌های کمتری از F' دارد. شکل روبه‌رو دوتا از این‌گونه جنگلها را نشان می‌دهد که ریشه‌هایشان در بالاست.



F_2 شامل F_3 است

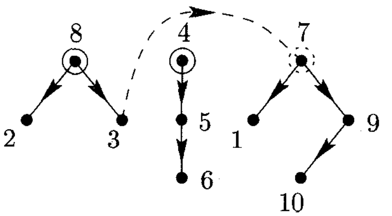
در اینجا می‌رسیم به‌ایدهٔ اساسی و بسیار مهم در اثبات. دنباله‌ای چون F_1، …، F_k از جنگلها را یک دنبالهٔ ظریف‌شونده می‌نامیم اگر به‌ازای هر i، $F_i \in \mathcal{F}_{n,i}$، و F_i شامل F_{i+1} باشد. فرض می‌کنیم F_k جنگل مشخصی در $\mathcal{F}_{n,k}$ باشد و

- تعداد درختهای ریشه‌دار شامل F_k را با $N(F_k)$، و
- تعداد دنباله‌های ظریف‌شوندهٔ منتهی به‌آن را با $N^*(F_k)$



نشان می‌دهیم. $N^*(F_k)$ را به‌دو طریق می‌شمریم، نخست با شروع کردن از یک درخت و سپس با شروع کردن از F_k. فرض کنید $F_1 \in \mathcal{F}_{n,1}$ شامل F_k است. چون می‌توانیم $k-1$ یال $F_1 \backslash F_k$ را در هر ترتیب ممکن حذف کنیم تا دنبالهٔ ظریف‌شونده‌ای از F_1 تا F_k به‌دست آوریم، پس

$$N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)! \qquad (۳)$$



$F_3 \longrightarrow F_2$

حال بیایید از انتهای دیگر شروع کنیم. برای اینکه F_{k-1}ای از F_k حاصل شود باید یک یال جهتدار، از هر رأس a به‌هر یک از $k-1$ ریشهٔ درختهایی که شامل a نیستند، اضافه کنیم (شکل بالا را ببینید که در آن با افزودن یال ۷ $\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$ ۳ از F_3 به F_2 می‌رویم). پس $n(k-1)$ انتخاب داریم. به‌همین نحو برای F_{k-1} می‌توانیم یال جهتداری از هر رأس a تا هر یک از $k-2$ ریشهٔ درختهایی که شامل a نیستند ایجاد کنیم. برای این کار، $n(k-2)$ انتخاب داریم. با ادامهٔ این کار به

$$N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)! \qquad (۴)$$

می‌رسیم و در نتیجه، با توجه به (۳)، رابطهٔ

$$N(F_k) = n^{k-1} \qquad \text{به‌ازای هر } F_k \in \mathcal{F}_{n,k}،$$

به‌دست می‌آید که سادگیِ غیر منتظره‌ای دارد. به‌ازای $k = n$، F_n فقط مرکب از n رأس تک افتاده و منزوی است. پس $N(F_n)$ تعداد همهٔ درختهای ریشه‌دار را می‌دهد، و ما رابطهٔ $|\mathcal{F}_{n,1}| = n^{n-1}$ و بنابراین فرمول کیلی را به‌دست می‌آوریم. □

ولی از این اثبات می‌توان مطالب بیشتری استخراج کرد. از فرمول (۴) به‌ازای $k = n$ داریم

$$\#\{(F_1, F_2, \ldots, F_n) \ \text{(دنباله‌های ظریف‌شوندهٔ)}\} = n^{n-1}(n-1)! \tag{5}$$

به‌ازای $F_k \in \mathcal{F}_{n,k}$ فرض کنید $N^{**}(F_k)$ نشان‌دهندهٔ تعداد آن دنباله‌های ظریف‌شوندهٔ F_1، ...، F_n باشد که جملهٔ kام آنها F_k است. روشن است که این تعداد برابر است با $N^*(F_k)$ ضربدر تعداد راههای انتخاب $(F_{k+1}, \ldots, F_n)$. ولی تعداد اخیر برابر است با $(n-k)!$ چون می‌توانیم $n-k$ یال F_k را به‌هر طریق ممکن حذف کنیم و بنابراین

$$N^{**}(F_k) = N^*(F_k)(n-k)! = n^{k-1}(k-1)!(n-k)! \tag{6}$$

چون این عدد به انتخاب F_k بستگی ندارد با تقسیم (۵) بر (۶) تعداد جنگلهای ریشه‌دار با k درخت معلوم می‌شود

$$|\mathcal{F}_{n,k}| = \frac{n^{n-1}(n-1)!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k)!} = \binom{n}{k} k n^{n-1-k}$$

چون می‌توانیم k ریشه را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب کنیم، فرمول $T_{n,k} = kn^{n-k-1}$ را بدون استفاده از استقرا ثابت کرده‌ایم.

مراجع

[1] M. AIGNER: *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979; Reprint 1997.

[2] A. CAYLEY: *A theorem on trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. **23** (1889), 376-378; Collected Mathematical Papers Vol. 13, Cambridge University Press 1897, 26-28.

[3] A. JOYAL: *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Math. **42** (1981), 1-82.

[4] J. PITMAN: *Coalescent random forests*, Technical Report 457, Dept. Statistics, UC Berkeley 1996.

[5] H. PRÜFER: *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*, Archiv der Math. u. Physik (3) **27** (1918), 142-144.

[6] A. RÉNYI: *Some remarks on the theory of trees.* MTA Mat. Kut. Inst. Kozl. (Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci) **4** (1959), 73-85; Selected Papers Vol. 2, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 363-374.

[7] J. RIORDAN: *Forests of labeled trees*, J. Combinatorial Theory **5** (1968), 90-103.

فصل۲۳ کامل کردن مربعهای لاتین

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴

از جمله قدیمیترین اشیای ترکیبیاتی، که مطالعهٔ آنها ظاهراً از اعصار باستان متداول بوده است، مربعهای لاتین هستند. برای به‌دست آوردن یک مربع لاتین باید $n^{۲}$ خانهٔ یک آرایهٔ مربعی $(n \times n)$ را طوری با عددهای ۱، ۲، ...، n پر کرد که هر عدد دقیقاً یک بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شود، به‌عبارت دیگر، هر یک از سطرها و ستونها جایگشتی از مجموعهٔ $\{۱, \ldots, n\}$ باشند. n را مرتبهٔ مربع لاتین می‌نامیم.

مسأله‌ای که می‌خواهیم دربارهٔ آن بحث کنیم این است. فرض کنید کسی شروع به پرکردن خانه‌ها با عددهای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ کرده است. این شخص در مرحله‌ای کار را متوقف می‌کند و از ما می‌خواهد خانه‌های باقیمانده را پر کنیم تا یک مربع لاتین تشکیل شود. چه‌وقتی این کار ممکن است؟ البته برای اینکه اصلاً شانسی برای توفیق در این کار داشته باشیم باید فرض کنیم در آغاز کار ما هر درایه حداکثر یک بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شده است. به این وضعیت نامی می‌دهیم. وقتی از مربع لاتین ناقص مرتبهٔ n صحبت می‌کنیم که بعضی از خانه‌های آرایهٔ $(n \times n)$ با اعدادی از مجموعهٔ $\{۱, \ldots, n\}$ پر شده باشند به‌طوری که هر عدد حداکثر یک بار در هر سطر و ستون ظاهر شده باشد. پس مسأله این است:

> چه وقتی یک مربع لاتین ناقص را می‌توان کامل کرد تا به یک مربع لاتین با همان مرتبه تبدیل شود؟

نخست چند مثال می‌آوریم. فرض کنید $n - ۱$ سطر اول پر شده‌اند و سطر آخر خالی است. در این‌صورت به‌راحتی می‌توانیم سطر آخر را پر کنیم. کافی است توجه کنید که هر درایه $n - ۱$ بار در این مربع لاتین ناقص ظاهر شده است و بنابراین دقیقاً در یک ستون نیامده است. پس با نوشتن هر درایه در زیر ستونی که شامل آن نیست مربع را به‌درستی کامل کرده‌ایم.

حال در جهت مقابل، فرض کنید فقط یک سطر پر شده است. در این حالت هم می‌توانیم مربع را به‌آسانی کامل کنیم، به این طریق که درایه‌ها را یک گام در هر یک از سطرهای بعدی به‌طور دوری بچرخانیم.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

یک مربع لاتین دوری

بنابراین، در حالی که در نخستین مثال بیش از یک راه برای کامل کردن مربع لاتین وجود نداشت، در مثال دوم امکانات زیادی برای انتخاب وجود دارد. به‌طور کلی هر چه تعداد خانه‌هایِ قبلاً پر شده کمتر باشد، آزادی بیشتری در تکمیل مربع داریم.

ولی در شکل حاشیه نمونه‌ای از مربع ناقص دیده می‌شود که فقط n خانهٔ آن پر شده است و به‌وضوح قابل کامل کردن نیست زیرا هیچ راهی برای پر کردن گوشهٔ سمت راست بالا بدون نقض شرط سطر یا ستون وجود ندارد.

1	2	...	n-1	
				n

یک مربع لاتین ناقص که نمی‌توان آن را کامل کرد.

> اگر در یک آرایهٔ $n \times n$ کمتر از n خانه پر شده باشد، آیا همواره می‌توان آن آرایه را کامل کرد تا به‌صورت مربع لاتین درآید؟

این پرسش را ترور اِوَنس[1] در سال ۱۹۶۰ مطرح کرد، و این ادعا که کامل کردن همواره ممکن است به‌سرعت به‌حدس اونس معروف شد. برای اثبات آن طبیعی بود استقرا را بیازمایند و همین روش بود که بالاخره به موفقیت انجامید. ولی اثبات بوهدن اسمتانیوک[2] که در سال ۱۹۸۱ عرضه شد نمونهٔ زیبایی است که نشان می‌دهد چه اثبات استقرایی ظریفی برای چنین امری لازم است؛ و علاوه بر آن، این اثبات سازنده است و به ما امکان می‌دهد مربع لاتین را، با هر آرایش ناقص اولیه، کامل کنیم.

پیش از پرداختن به اثبات، نگاه دقیقتری به مربعهای لاتین در حالت کلی می‌افکنیم، مربع لاتین را به صورت آرایه‌ای ($n^2 \times ۳$) هم می‌توان در نظر گرفت که این را آرایهٔ خطی مربع لاتین می‌نامند. شکل مقابل در حاشیه یک مربع لاتین مرتبهٔ ۳ و آرایهٔ خطی مربوط به آن را نشان می‌دهد که در آن R، C، و E نمایندهٔ سطرها، ستونها، و درایه‌ها هستند.

1	3	2
2	1	3
3	2	1

R: 1 1 1 2 2 2 3 3 3
C: 1 2 3 1 2 3 1 2 3
E: 1 3 2 2 1 3 3 2 1

شرطی که روی مربع لاتین گذاشته‌اند معادل است با اینکه بگوییم در هر دو سطر از آرایهٔ خطی همهٔ n^2 جفت مرتب ظاهر می‌شوند (و بنابراین هر جفت دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود). واضح است که می‌توانیم نمادهای هر سطر را به‌دلخواه جابه‌جا کنیم (متناظر با جایگشتهای سطرها، ستونها، یا درایه‌ها) و باز هم یک مربع لاتین به‌دست آوریم. ولی شرط روی آرایهٔ ($n^2 \times ۳$) چیزی بیش از این می‌گوید: درایه‌ها هیچ نقش خاصی ندارند. همچنین می‌توانیم سطرهای (کل) آرایه را جابه‌جا کنیم بدون آنکه شرطهای روی آرایهٔ خطی نقض شوند، و بنابراین یک مربع لاتین به‌دست آوریم.

مربعهای لاتینی که با چنین جایگشتی به‌هم مربوط‌اند مزدوج هم نامیده می‌شوند. در اینجا نکته‌ای شایان ذکر است که اثبات را روشن می‌سازد: هر مربع لاتین ناقص به‌وضوح متناظر با یک آرایهٔ خطی ناقص است (هر جفت حداکثر یک بار در هر دو سطر ظاهر می‌شود)، و هر مزدوج یک مربع لاتین ناقص باز یک مربع لاتین ناقص

1. Trevor Evans 2. Bohdan Smetaniuk

است. به‌خصوص، یک مربع لاتین ناقص را می‌توان کامل کرد اگر و تنها اگر مزدوج آن را بتوان کامل کرد (کافی است مزدوج را کامل کنیم و سپس جایگشت سه‌سطر را معکوس نماییم).

ما به دو قضیه، از آن رایسر[1] و لیندنر[2]، نیاز داریم که قبل از قضیهٔ اسمتانیوک به‌دست آمده بودند. اگر یک مربع لاتین ناقص به‌صورتی باشد که r سطر اول آن کاملاً پر شده باشند و خانه‌های باقیمانده خالی باشند، آن را مستطیل لاتین $(r \times n)$ می‌نامیم.

اگر سطرهای مثال بالا را به‌طور دوری جابه‌جا کنیم

$$R \longrightarrow C \longrightarrow E \longrightarrow R$$

آرایهٔ خطی و مربع لاتین زیر را به‌دست می‌آوریم

1	2	3
3	1	2
2	3	1

R: 1 3 2 2 1 3 3 2 1
C: 1 1 1 2 2 2 3 3 3
E: 1 2 3 1 2 3 1 2 3

لم ۱. هر مستطیل لاتین $(r \times n)$، $r < n$، را می‌توان چنان گسترش داد که به یک مستطیل لاتین $(r+1) \times n$ تبدیل شود و در نتیجه می‌توان آن را چنان کامل کرد که به‌مربع لاتین تبدیل شود.

■ **اثبات.** قضیهٔ هال را به‌کار می‌بریم (فصل ۲۱ را ببینید). فرض کنید A_j مجموعهٔ عددهایی باشد که در ستون j ظاهر نشده‌اند. در این‌صورت هر سطر پذیرفتنیِ $(r+1)$ام دقیقاً متناظر با دستگاهی از نماینده‌های متمایز برای گردآوردهٔ A_1، …، A_n است. بنابراین برای اثبات لم باید برقراری شرط هال (H) را نشان دهیم. اندازهٔ هر مجموعهٔ A_j برابر با $n-r$ است، و هر درایه در دقیقاً $n-r$ مجموعهٔ A_j قرار دارد (چون r بار در مستطیل ظاهر می‌شود). هر m تا از مجموعه‌های A_j روی هم شامل $m(n-1)$ درایه، ولذا دست‌کم m درایهٔ متفاوت، هستند. که این همان شرط (H) است. □

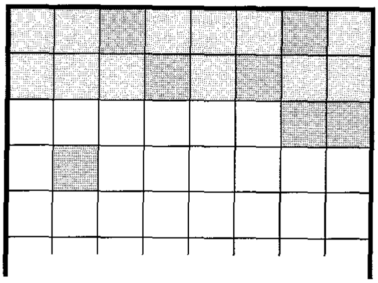
لم ۲. فرض کنید P یک مربع لاتین ناقص از مرتبهٔ n با حداکثر $n-1$ خانهٔ پر شده و حداکثر $\frac{n}{2}$ درایهٔ متمایز باشد. در این‌صورت P را می‌توان کامل کرد تا به‌صورت مربعی لاتین از مرتبهٔ n درآید.

■ **اثبات.** نخست مسأله را به‌صورت مناسبتری در می‌آوریم. با توجه به‌اصل مزدوج بودن که در بالا از آن بحث شد، می‌توانیم به‌جای شرط «حداکثر $\frac{n}{2}$ درایهٔ متمایز» این شرط را قرار دهیم که درایه‌ها در حداکثر $\frac{n}{2}$ سطر ظاهر شده باشند، و نیز می‌توانیم فرض کنیم که این سطرها، سطرهای بالایی باشند. پس فرض می‌کنیم سطرهایِ با خانه‌های پرشده، سطرهای ۱، ۲، …، r باشند با f_i خانهٔ پرشده در سطر i که در

1. Ryser 2. Lindner

آن $r \leq \frac{n}{۲}$ و $\sum_{i=۱}^{r} f_i \leq n - ۱$. با جابه‌جا کردن سطرها می‌توانیم فرض کنیم $f_۱ \geq f_۲ \geq \ldots \geq f_r$. حال سطرهای ۱، …، r را گام‌به‌گام پر می‌کنیم تا وقتی به‌یک مستطیل $(r \times n)$ برسیم که بنابه لم ۱، می‌توانیم آن را گسترش داده به‌صورت مربعی لاتین در آوریم.

تصور کنید قبلاً سطرهای ۱، ۲، …، $\ell - ۱$ را پر کرده‌ایم. در سطر ℓ تعداد f_ℓ خانهٔ پرشده وجود دارد که می‌توانیم فرض کنیم در انتها هستند. وضعیت جاری در شکل مقابل نموده شده است که در آن، بخش سایه‌دار نشان‌دهندهٔ خانه‌های پر شده است.



وضعیت به‌ازای $n = ۸$، $\ell = ۳$، $f_۱ = f_۲ = ۲$، $f_۴ = ۱$. مربعهای پررنگ نشان‌دهندهٔ خانه‌هایِ از قبل پرشده‌اند و مربعهای کم‌رنگ آنهایی هستند که در جریان کامل شدن پر می‌شوند

کامل کردن سطر ℓ با کاربرد دیگری از قضیهٔ هال انجام می‌شود اما این بار، کار ظریف و پیچیده‌ای است. فرض کنید X مجموعهٔ درایه‌هایی باشد که در سطر ℓ ظاهر نشده‌اند، بنابراین $|X| = n - f_\ell$، و به‌ازای $j = ۱, \ldots, n - f_\ell$ فرض کنید A_j مجموعهٔ درایه‌هایی از X را نشان دهد که در ستون j ظاهر نمی‌شوند (نه در بالا و نه در زیر سطر ℓ). پس برای کامل کردن سطر ℓ باید برقراری شرط (H) را برای گردآوردهٔ $A_۱$، …، A_{n-f_ℓ} ثابت کنیم. نخست ادعا می‌کنیم

$$n - f_\ell - \ell + ۱ > \ell - ۱ + f_{\ell+۱} + \ldots + f_r \qquad (۱)$$

حالت $\ell = ۱$ واضح است. در غیر این‌صورت $\sum_{i=۱}^{r} f_i < n$، $f_۱ \geq \ldots \geq f_r$ و $۱ \leq \ell \leq r$ باهم نتیجه می‌دهند

$$n > \sum_{i=۱}^{r} f_i \geq (\ell - ۱) f_{\ell-۱} + f_\ell + \ldots + f_r$$

اکنون یا $f_{\ell-۱} \geq ۲$ (که در این حالت (۱) برقرار است) یا $f_{\ell-۱} = ۱$. در حالت اخیر، (۱) به $n > ۲(\ell - ۱) + r - \ell + ۱ = r + \ell - ۱$ تقلیل می‌یابد که برقرار است زیرا $\ell \leq r \leq \frac{n}{۲}$.

اکنون m مجموعهٔ A_j، $۱ \leq m \leq n - f_\ell$، را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم اجتماع آنها B باشد. باید نشان دهیم $|B| \geq m$. تعداد خانه‌ها (c) در m ستون متناظر با A_jها را که شامل درایه‌های Xاند در نظر بگیرید. حداکثر $(\ell - ۱)m$ تا از این‌گونه خانه‌ها در بالای سطر ℓ و حداکثر $f_{\ell+۱} + \ldots + f_r$ تا از آنها در زیر سطر ℓ قرار دارد، و بنابراین

$$c \leq (\ell - ۱)m + f_{\ell+۱} + \ldots + f_r$$

از سوی دیگر، هر درایهٔ $x \in X\backslash B$ در هر یک از m ستون ظاهر می‌شود، پس $c \geq m(|X|-|B|)$ و بنابراین (با ضابطهٔ $|X| = n - f_\ell$)

$$|B| \geq |X| - \frac{۱}{m}c \geq n - f_\ell - (\ell - ۱) - \frac{۱}{m}(f_{\ell+۱} + \ldots + f_r)$$

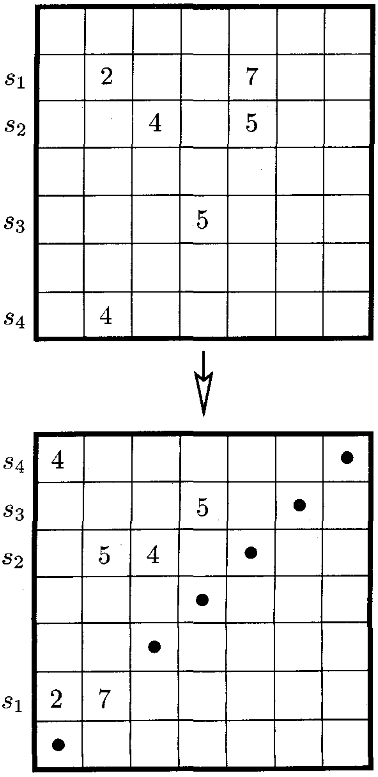
نتیجه می‌گیریم که $|B| \geq m$ اگر

$$n - f_\ell - (\ell - ۱) - \frac{۱}{m}(f_{\ell+۱} + \ldots + f_r) > m - ۱$$

یعنی اگر

$$m(n - f_\ell - \ell + ۲ - m) > f_{\ell+۱} + \ldots + f_r \qquad (۲)$$

نابرابری (۲) بنابه (۱) به‌ازای $m = ۱$ و $m = n - f_\ell - \ell + ۱$ برقرار است و بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر m بین ۱ و $n - f_\ell - \ell + ۱$ برقرار است زیرا طرف چپ آن یک تابع درجهٔ دوم برحسب m با ضریب پیشرو -۱ است. حالت باقیمانده $m > n - f_\ell - \ell + ۱$ است. چون هر عضو x از X در حداکثر $\ell - ۱ + f_{\ell+۱} + \ldots + f_r$ سطر است، می‌تواند در حداکثر همان تعداد ستون هم ظاهر شود. اگر یک بار دیگر از (۱) استفاده کنیم، در می‌یابیم که x در یکی از مجموعه‌های A_j است، و در این حالت نتیجه می‌گیریم $B = X$، $|B| = n - f_\ell \geq m$، و اثبات کامل است. □



و بالاخره می‌پردازیم به‌قضیهٔ اسمتانیوک.

قضیه. هر مربع لاتین ناقص از مرتبهٔ n با حداکثر $n - ۱$ خانهٔ پر شده را می‌توان کامل کرد تا به‌مربعی لاتین با همان مرتبه تبدیل شود.

■ **اثبات.** از استقرا بر n استفاده می‌کنیم؛ حالتهای $n \leq ۲$ بدیهی است. فرض کنید P یک مربع لاتین ناقص از مرتبهٔ $n + ۱$ با حداکثر n خانهٔ پر شده باشد. بنابه لم ۲ می‌توانیم فرض کنیم که بیش از $\frac{n+۱}{۲}$ درایهٔ متمایز وجود دارد، پس درایه‌ای هست که فقط یک بار ظاهر می‌شود: آن را $n + ۱$ می‌نامیم. مانند قبل فرض می‌کنیم r سطر جزئاً پر شدهٔ $s_۱$، ...، s_r با $f_۱$، ...، f_r خانهٔ پر شده وجود دارد، $\sum_{i=۱}^{r} f_i \leq n$. به‌علاوه فرض می‌کنیم که خانهٔ پر شده با $n + ۱$ در سطر $s_۱$ است.

در نخستین گام تمام خانه‌های پر شدهٔ بالای قطر دوم [قطر از شمال‌شرقی تا جنوب‌غربی] به استثنای خانهٔ پر شده با $n+1$ را، که عاقبت روی قطر دوم خواهد بود، انتقال می‌دهیم. (قطر دوم مرکب از همهٔ خانه‌های (i,j) با ضابطهٔ $i+j=n+2$ است). این کار به‌صورت زیر انجام می‌شود: s_1 را به مکان سطری $n+2-f_1$ انتقال می‌دهیم. با جابه‌جا کردن ستونها، خانه‌های پر شده را به‌سمت چپ انتقال می‌دهیم به‌نحوی که $n+1$ آخرین درایه در سطر خودش، و بنابراین روی قطر دوم، باشد. سپس سطر s_2 را به‌مکان $n+1-f_1-f_2$ و خانه‌های پر شده را تاحد امکان به‌چپ انتقال می‌دهیم. به‌طور کلی، سطر s_i را به‌مکان $n+1-f_1-f_2-\dots-f_i$ و خانه‌های پر شده را تا حد امکان به‌سمت چپ انتقال می‌دهیم. روشن است که آرایش مطلوب به‌این ترتیب به‌دست می‌آید. شکلهای صفحهٔ قبل نشان‌دهندهٔ مثالی به‌ازای $n+1=7$ است.

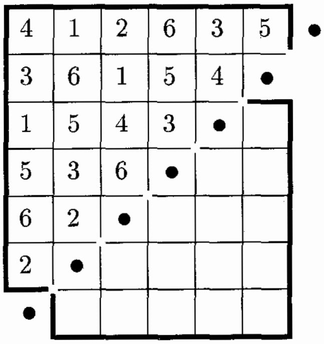
اکنون می‌رسیم به‌ایدهٔ اصلی اثبات. درایهٔ $n+1$ و سطر و ستون آخر را حذف می‌کنیم. به استقرا، مربع لاتین ناقص باقیمانده را که از مرتبهٔ n است می‌توان کامل کرد تا به‌صورت یک مربع لاتین L از مرتبهٔ n در آید. در شکل روبه‌رو، یک صورت کامل شدهٔ مربع لاتین ناقص بالا، از میان صورتهای بسیار را می‌بینید.

L

4	1	2	6	3	5
3	6	1	**5**	4	2
1	**5**	**4**	3	2	6
5	3	6	2	1	4
6	2	3	4	5	1
2	4	5	1	6	3

سپس قسمت بالای مربع لاتین L را به‌انضمام قطر دوم نگه می‌داریم و قسمت پایین را خالی می‌کنیم و آن را یک گام به پایین انتقال می‌دهیم. بنابراین یک مستطیل نیمه پر چون L' به‌دست می‌آوریم که برای مثال ما در حاشیه نشان داده شده است.

L'



توجه کنید که همهٔ خانه‌هایِ از پیش پر شدهٔ L' (به استثنای مورد درایهٔ $n+1$) در «نیمهٔ بالایی» یعنی بالای قطر دوم هستند. پس اگر بتوانیم نیمهٔ پایینی L' را با عددهای ۱، ...، n پر کنیم چنانکه یک مربع لاتین ناقص (حال از مرتبهٔ $n+1$) به‌دست آوریم آنگاه می‌توانیم قطر دوم را با $n+1$ پر کنیم، ستون یکتای آخر را بیفزاییم (حالت پیش پا افتاده‌ای برای لم ۱)، و اثبات به اتمام می‌رسد. اکنون برای برداشتن این گام نهایی، نیمهٔ نهایی را سطر به‌سطر، با استفاده از اطلاعات مربوط به مربع لاتین L برای راهنمایی، پرمی‌کنیم.

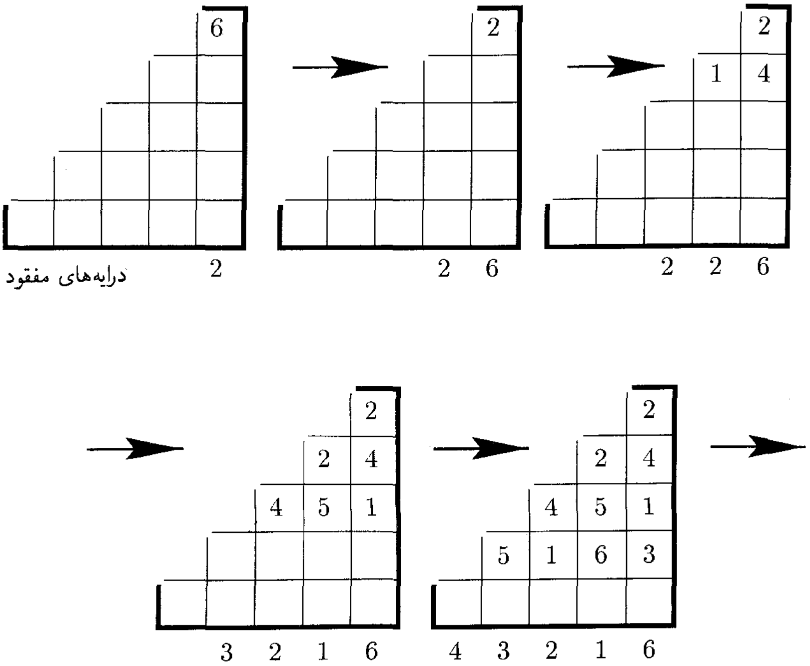
فرض کنید $k \geq 3$، و نیز به استقرا فرض کنید که سطرهای ۳، ...، $k-1$ را تحت شرایط زیر پر کرده‌ایم:

- $k-2$ درایهٔ ستون j از L' که مخالف با $n+1$ هستند در میان $k-1$ درایهٔ ستون j مربع لاتین اصلی یعنی L می‌باشند زیرا $n-k+3 \leq j \leq n$. پس دقیقاً یک «درایهٔ مفقود» در هر ستون داریم.

- درایه‌های مفقود ستونهای L' متمایزند.

اکنون می‌پردازیم به‌سطر k، فرض کنید y_{n-k+2}، …، y_n درایه‌های سطر k در سمت راست (و روی) قطر دوم مربع لاتین L باشند. پس y_{n-k+2} درایهٔ مفقود جدید در ستون $n-k+2$ است. در نخستین اقدام، سطر k را با درایه‌های y_{n-k+3}، …، y_n پر می‌کنیم. توجه کنید که کل سطر k پذیرفتنی است و به‌ازای هر j، $x_j \neq y_j$ چون هر دو متعلق به یک ستون j در L هستند. پس این کار ثمربخش است مگر وقتی به‌ازای jای ناکمتر از $n-k+3$، $y_{n-k+2} = x_j$، زیرا در این‌صورت شرط مربوط به درایه‌های مفقود نقض می‌شود. در این حالت x_j و y_j را با هم تعویض می‌کنیم. سطر جدید k باز هم پذیرفتنی است (زیرا $x_j = y_{n-k+2}$ و y_{n-k+2} قبلاً در سطر k بود). پس کار به‌پایان رسیده است مگر آنکه به‌ازای ℓای مخالف j، $y_j = x_\ell$. در این‌صورت x_ℓ و y_ℓ را با هم تعویض می‌کنیم، و به‌همین ترتیب واضح است که این فرایند حداکثر تا وقتی که همهٔ x_kها به سطر k انتقال یابند، با رسیدن به نتیجهٔ مطلوب متوقف می‌شود. به این طریق همهٔ سطرها را تا سطر n پر می‌کنیم. سطر آخری $n+1$ را می‌توان با درایه‌های مفقود پر کرد، و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

شکلهای زیر این فرایند را برای مثال ما نشان می‌دهند.



4	1	2	6	3	5	**7**
3	6	1	5	4	**7**	2
1	5	4	3	**7**	2	6
5	3	6	**7**	2	4	1
6	2	**7**	4	5	1	3
2	**7**	5	1	6	3	4
7	4	3	2	1	6	5

مراجع

[1] T. EVANS: *Embedding incomplete Latin squares,* Amer. Math. Monthly **67** (1960), 958-961.

[2] C. C. LINDNER: *On completing Latin rectangles,* Canadian Math. Bull **13** (1970), 65-68.

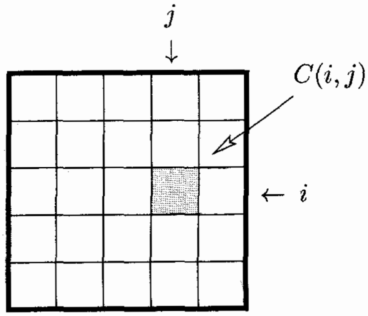
[3] H. J. RYSER: *A combinatorial theorem with an application to Latin rectangles*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 550-552.

[4] B. SMETANIUK: *A new construction on Latin squares I: A proof of the Evans conjecture*, Ars Combinatoria **11** (1981), 155-172.

مسألهٔ دینیتس

فصل ۲۴

مسألهٔ چهار رنگ یکی از عمده‌ترین مسائلی بود که موجب پیدایش نظریهٔ کنونی گراف شدند، و مبحث رنگ‌آمیزی هنوز هم مورد علاقهٔ بسیاری از دست‌اندرکاران نظریهٔ گراف است. در اینجا یک مسألهٔ رنگ‌آمیزی به‌ظاهر ساده می‌آوریم که جف دینیتس[1] در سال ۱۹۷۸ آن را مطرح کرد. تمام تلاشها برای حل این مسأله در طی پانزده سال بعد ناکام ماند تا آنکه فرد گالوین[2] راه‌حلی برای آن به‌دست داد که به‌طرز شگفت‌انگیزی ساده است.



> n^2 خانه را در یک مربع $(n \times n)$ در نظر بگیرید و فرض کنید خانهٔ (i,j) واقع در سطر i و ستون j باشد. تصور کنید برای هر خانهٔ (i,j)، مجموعهٔ $C(i,j)$ مرکب از n رنگ به ما داده شده است.
>
> آیا در این صورت همواره می‌توان کل آرایه را به‌این طریق رنگ‌آمیزی کرد که برای هر خانهٔ (i,j) رنگی از مجموعهٔ رنگهایش $C(i,j)$ انتخاب کرد به‌قسمی که رنگها در هر سطر و هر ستون متمایز باشند؟

نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که همهٔ رنگ‌ـمجموعه‌های $C(i,j)$ یکسان باشند، مثلاً عبارت باشند از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$. در این‌صورت مسألهٔ دینیتس به‌صورت زیر در می‌آید: مربع $(n \times n)$ را با عددهای ۱، ۲، ...، n به‌قسمی پرکنید که عددها در هر سطر و ستون متمایز باشند. به‌عبارت دیگر، هر چنین رنگ‌آمیزی متناظر است با یک مربع لاتین که در فصل قبل مورد بحث قرار گرفت. پس در این حالت پاسخ پرسش مثبت است.

وقتی این حالت خاص این قدر ساده است، چرا باید حالت کلی یعنی حالتی که مجموعهٔ $C := \bigcup_{i,j} C(i,j)$ شامل حتی بیش از n رنگ است، فوق‌العاده مشکلتر باشد؟ این دشواری ناشی از آن است که هر رنگ از C در هر خانه قابل دسترس نیست. مثلاً در حالی‌که در مورد مربع لاتین به‌وضوح می‌توانیم جایگشتی دلخواه از رنگها برای سطر اول اختیار کنیم، در مورد مسألهٔ کلی چنین نیست. حالت $n = ۲$ این دشواری را نشان می‌دهد.

$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,3\}$	$\{2,3\}$

فرض کنید رنگ‌ـمجموعه‌هایی که در شکل نشان داده شده است در اختیار ما

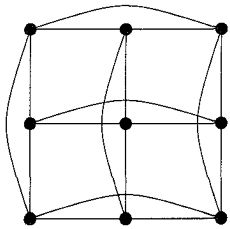
1. Dinitz 2. Galvin

قرار دارد. اگر رنگهای ۱ و ۲ را برای سطر اول انتخاب کنیم، به دردسر خواهیم افتاد زیرا در این‌صورت مجبوریم رنگ ۳ را برای هر دو خانهٔ سطر دوم انتخاب کنیم.

پیش از آنکه به حل مسألهٔ دینیتس بپردازیم، وضعیت را به‌زبان نظریهٔ گراف بیان می‌کنیم. طبق معمول، فقط گرافهای $G = (V, E)$ را که شامل طوقه یا یال چندگانه نیستند در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\chi(G)$ نشان‌دهندهٔ عدد فامی گراف باشد یعنی کمترین تعداد رنگهایی که بتوان به رأسها تخصیص داد به‌طوری که رأسهای مجاور، رنگهای متفاوتی داشته باشند.

به‌عبارت دیگر، هر رنگ‌آمیزی مستلزم افراز V به رده‌هایی است (که هر کدام با یک رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود) به‌طوری‌که هیچ یالی در درون یک رده نباشد. مجموعهٔ $A \subseteq V$ را مستقل نامیم اگر هیچ یالی در درون A نباشد. پس عدد فامی کمترین تعداد مجموعه‌های مستقلی است که مجموعهٔ رئوس V را افراز می‌کنند.

در سال ۱۹۷۶، ویتسینگ[1] و سه سال بعد اردوش، روبین و تیلر، مسألهٔ رنگ‌آمیزی زیر را بررسی کردند که مستقیماً ما را به مسألهٔ دینیتس می‌رساند. فرض کنید در گراف $G = (V, E)$ مجموعهٔ $C(v)$ از رنگها برای هر رأس v در اختیار ما قرار داده شده است. رنگ‌آمیزی فهرستی، رنگ‌آمیزیی چون $c : V \longrightarrow \bigcup_{u \in V} C(v)$ است که در آن به ازای هر $v \in V$، $c(v) \in C(v)$. تعریف عدد فامی فهرستی $\chi_\ell(G)$ واضح است: کوچکترین عدد k به‌قسمی که برای هر فهرست از رنگ‌ـمجموعه‌های $C(v)$ با ضابطهٔ $|C(v)| = k$ به‌ازای هر $v \in V$، همواره یک رنگ‌آمیزی فهرستی وجود داشته باشد. البته، داریم $\chi_\ell(G) \leq |V|$ (چون در غیراین‌صورت، تعدادی از رنگها مازاد بر احتیاج خواهند بود). چون رنگ‌آمیزی معمولی صرفاً حالت خاصی از رنگ‌آمیزی فهرستی در حالتی است که همهٔ مجموعه‌های $C(v)$ برابرند، برای هر گراف G داریم


گراف S_3

$$\chi(G) \leq \chi_\ell(G)$$

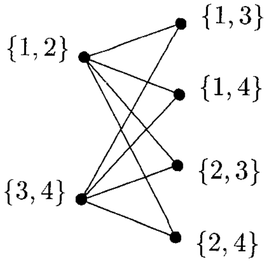
با بازگشت به مسألهٔ دینیتس، گراف S_n را در نظر می‌گیریم که n^2 خانهٔ آرایهٔ $(n \times n)$ ما مجموعهٔ رأسهای آن است به‌طوری که دو خانه مجاورند اگر و تنها اگر در یک سطر یا ستون باشند.

چون هر n خانه در یک سطر دوبه‌دو مجاورند، دست‌کم به n رنگ نیاز داریم. به‌علاوه، هر رنگ‌آمیزی با n رنگ متناظر است با یک مربع لاتین، که در آن خانه‌هایی که با یک عدد اشغال شده‌اند تشکیل رده‌ای از رنگها می‌دهند. چون مربعهای لاتین،

1. Vizing

چنانکه دیده‌ایم، وجود دارند، نتیجه می‌گیریم که $\chi(S_n) = n$، و اکنون مسألهٔ دینیتس را می‌توان به‌طور موجز چنین بیان کرد

$$\chi_\ell(S_n) = n?$$



ممکن است کسی گمان کند که شاید رابطهٔ $\chi(G) = \chi_\ell(G)$ برای هر گراف G برقرار است ولی این گمان خیلی از حقیقت دور است. گراف $G = K_{۲,۴}$ را در نظر بگیرید. عدد فامی آن ۲ است زیرا می‌توانیم یک رنگ را برای دو رأس سمت چپی و رنگ دوم را برای رأسهای سمت راست به‌کار ببریم. ولی اکنون تصور کنید که رنگ‌ـمجموعه‌هایی که در شکل مشخص شده‌اند به ما داده شده است.

برای رنگ‌آمیزی رأسهای سمت چپ چهار امکان ۱|۳، ۱|۴، ۲|۳ و ۲|۴ را داریم، ولی هر یک از این جفتها به‌صورت رنگ‌ـمجموعه در سمت راست ظاهر می‌شود، پس رنگ‌آمیزی فهرستی ممکن نیست. از این رو $\chi_\ell(G) \geq ۳$، و برای خواننده جالب خواهد بود که ثابت کند $\chi_\ell(G) = ۳$ (لازم نیست همهٔ حالتها را بیازمایید!) با تعمیم این مثال یافتن گرافهایی G ای که $\chi(G) = ۲$ دشوار نیست ولی $\chi_\ell(G)$ به‌دلخواه بزرگ است! پس مسألهٔ رنگ‌آمیزی فهرستی به آن سادگی که در نخستین نگاه می‌نماید، نیست.

برگردیم به مسألهٔ دینیتس. گام مهمی به‌سوی حل مسأله به‌وسیلهٔ یانسن[1] در سال ۱۹۹۲ برداشته شد که ثابت کرد $\chi_\ell(S_n) \leq n + ۱$، و ضربهٔ نهایی را فرد گالوین با ترکیب استادانهٔ دو قضیهٔ که از مدتها قبل معلوم بودند وارد ساخت. می‌خواهیم دربارهٔ این دو حکم بحث کنیم و سپس نشان دهیم که چگونه $\chi_\ell(S_n) = n$ از آنها نتیجه می‌شود.

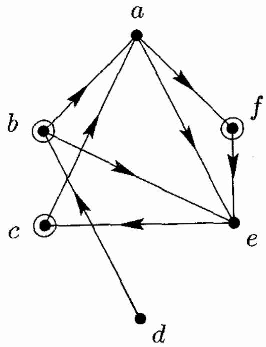
نخست چند نماد را ذکر می‌کنیم. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد؛ در این‌صورت مانند قبل، درجهٔ v را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. در گراف مربعی S_n ما هر رأس با در نظرگرفتن $n - ۱$ رأس دیگر در همان سطر و در همان ستون، دارای درجهٔ $۲n - ۲$ است. در مورد زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq V$، زیرگرافی را که A مجموعهٔ رأسهای آن است و شامل همهٔ یالهای G بین رأسهای A است با G_A نشان می‌دهیم: G_A را زیرگراف القا شده به‌وسیلهٔ A می‌نامیم و می‌گوییم H زیر گرافی القایی از G است اگر به‌ازای Aای، $H = G_A$.

برای بیان اولین حکم خود به گرافهای جهتدار $\vec{G} = (V, E)$ نیاز داریم یعنی گرافهایی که در آنها هر یال e جهتی دارد. نماد $e = (u, v)$ به‌این معنّی است که کمان

1. Jeanette Janseen

eای وجود دارد، که رأس آغازیش u و رأس انتهاییش v است (این کمان با $u \longrightarrow v$ هم نشان داده می‌شود). در این صورت صحبت از درجهٔ خروجی $d^+(v)$ و درجهٔ ورودی $d^-(v)$ معنی دارد؛ $d^+(v)$ تعداد یالهایی است که v رأس آغازی آنهاست و $d^-(v)$ تعداد یالهایی که v رأس انتهایی آنهاست؛ به‌علاوه، $d^+(v)+d^-(v) = d(v)$. وقتی می‌نویسیم G، منظورمان گراف $\vec{G}$ بدون در نظر گرفتن جهت است.

مفهوم زیر از تحلیل بازیها سرچشمه گرفته است و در بحث ما نقش حیاتی خواهد داشت.



تعریف ۱. فرض کنید $\vec{G} = (V,E)$ گرافی جهتدار باشد. هر هستهٔ $K \subseteq V$ زیرمجموعه‌ای از رأسهاست به‌طوری که

(i) K مستقل است.

(ii) به‌ازای هر $u \notin K$ رأسی چون $v \in K$ با یک یال $u \longrightarrow v$ وجود دارد.

بیایید نگاهی به مثال شکل بیندازیم. مجموعهٔ $\{b,c,f\}$ یک هسته تشکیل می‌دهد، ولی زیرگراف القا شده به‌وسیلهٔ $\{a,c,e\}$ هسته‌ای ندارد زیرا این سه یال تشکیل یک دور می‌دهند.

با این مقدمات آمادهٔ بیان اولین حکم هستیم.

لم ۱. فرض کنید $\vec{G} = (V,E)$ گرافی جهتدار باشد، و نیز فرض کنید که به‌ازای هر رأس $v \in V$ یک رنگ‌ـمجموعه چون $C(v)$ داریم که اندازه‌اش بزرگتر از درجهٔ خروجی است، $|C(v)| \geq d^+(v) + ۱$. اگر هر زیر گراف القایی $\vec{G}$ هسته‌ای داشته باشد، آنگاه یک رنگ‌آمیزی فهرستی برای G با رنگی از $C(v)$ برای هر v وجود دارد.

■ **اثبات.** به استقرا بر $|V|$ عمل می‌کنیم. برای $|V| = ۱$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. رنگی چون $c \in C = \bigcup\limits_{u\in V} C(v)$ انتخاب کرده قرار می‌دهیم

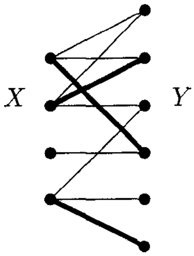
$$A(c) := \{v \in V : c \in C(v)\}$$

بنابه فرض، زیرگراف القایی $G_{A(c)}$ هسته‌ای چون $K(c)$ دارد. حال هر $v \in K(c)$ را با رنگ c رنگ‌آمیزی می‌کنیم (این کار امکان‌پذیر است زیرا $K(c)$ مستقل است)، و $K(c)$ را از G و c را از C حذف می‌کنیم. گیریم G' زیرگراف القایی G روی $V\backslash K(c)$ باشد با $C'(v) = C(v)\backslash c$ به‌عنوان فهرست جدید رنگ‌ـمجموعه‌ها. توجه کنید که به‌ازای هر $v \in A(c)\backslash K(c)$، درجهٔ خروجی $d^+(v)$ دست‌کم یک واحد کاهش

می‌یابد (به‌خاطر شرط (ii) هسته). پس $|C'(v)| \geq d^+(v) + ۱$ بازهم در $\vec{G}'$ برقرار است. همین شرط برای رأسهای بیرون $A(c)$ نیز برقرار است زیرا در این حالت رنگ‌ـمجموعه‌های $C(v)$ بی‌تغییر می‌مانند. گراف جدید G' شامل رأسهای کمتری از G است، و بنابه استقرا، اثبات به‌انجام می‌رسد. □

اکنون روش حل مسألهٔ دینیتس روشن است: باید شیوه‌ای برای جهتدارکردن S_n پیدا کنیم که در مورد درجه‌های خروجی به‌ازای هر v داشته باشیم $d^+(v) \leq n - ۱$ و از وجود هسته‌ای برای همهٔ زیرگرافهای القایی مطمئن شویم. این کار به‌وسیلهٔ حکم دوم ما انجام می‌شود.

و باز نیاز به مقدمات تازه‌ای داریم. از فصل ۸ به یاد آورید که گراف دو بخشی $G = (X \cup Y, E)$ گرافی است با ویژگی زیر: مجموعهٔ رئوس V به‌دو بخش X و Y تقسیم می‌شود به‌طوری‌که یک رأس هر یال در X و رأس دیگرش در Y است. به‌عبارت دیگر، گرافهای دوبخشی دقیقاً گرافهایی هستند که با دو رنگ (یکی برای X و دیگری برای Y) قابل رنگ‌آمیزی‌اند.



یک گراف دوبخشی با یک جورسازی

حال می‌پردازیم به‌مفهوم مهم «جورسازیهای پایدار» با تعبیری در زندگی واقعی. [حاصل] جورسازی M در یک گراف دوبخشی $G = (X \cup Y, E)$ مجموعه‌ای از یالهاست به‌قسمی‌که هیچ دو یال در M، رأس مشترکی نداشته باشند. درگراف نشان داده شده درحاشیه، یالهایی که با خط ضخیم رسم شده‌اند یک جورسازی تشکیل می‌دهند.

تصور کنید که X مجموعه‌ای از مردان و Y مجموعه‌ای از زنان باشد و $uv \in E$ را به‌این صورت تعبیر کنید که u و v ممکن است با هم ازدواج کنند. در این‌صورت، جورسازی عبارت است از ازدواج اعضای این دو مجموعه به‌طوری که هیچ شخصی بیش از یک همسر نداشته باشد. قضیهٔ معروف ازدواج (فصل ۲۱ راجع به‌مجموعه‌های متناهی را ببینید) اندازهٔ دقیق بزرگترین جورسازی ممکن را با فرض معلوم بودن ساختار گراف دوبخشی به‌دست می‌دهد. ما برای مقاصد خود نیاز به‌صورت پالایش یافته‌تر (و واقعگرایانه‌تر؟)ی از جورسازی داریم که گیل[1] و شیپلی[2] آن را مطرح کرده‌اند. واضح است که در زندگی واقعی، هر شخصی ترجیحاتی دارد، و این چیزی است که ما در وضعیت ملحوظ می‌کنیم. در $G = (X \cup Y, E)$ فرض می‌کنیم که برای هر $v \in X \cup Y$، مجموعهٔ $N(v)$ مرکب از رأسهای مجاور به v دارای یک رتبه‌بندی

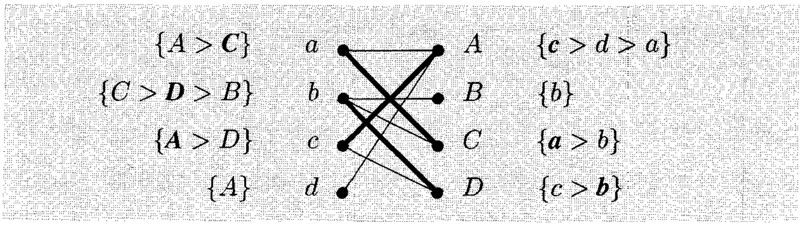
1. Gale 2. Shapley

است: $N(v) = \{z_1 > z_2 > \ldots > z_{d(v)}\}$. پس z_1 انتخاب اول در نظر v است، پس از آن z_2، و به همین ترتیب.

تعریف ۲. جورسازی M از $G = (X \cup Y, E)$ پایدار خوانده می‌شود اگر شرط زیر برقرار باشد: هرگاه $uv \in E \backslash M$، $u \in X$، $v \in Y$، آنگاه یا $uy \in M$ با $y > v$ در $N(u)$، یا $xv \in M$ با $x > u$ در $N(v)$، و یا هر دو.

در تعبیر این مفهوم در زندگی واقعی، مجموعه‌ای از ازدواجها پایدار است اگر هرگز اتفاق نیفتد که u و v با هم ازدواج نکرده باشند ولی u، v را بر همسر خود ترجیح دهد (اگر همسری داشته باشد) و v نیز u را بر جفت خود ترجیح دهد (اگر همسری داشته باشد)، که چنین اتفاقی به‌وضوح وضعیتی ناپایدار پدید می‌آورد.

پیش از اثبات دومین حکم خود نگاهی به مثال زیر می‌افکنیم:



یالهای پررنگ یک ازدواج پایدار تشکیل می‌دهند. در هر فهرست ترجیحات، انتخابی که به ازدواجی پایدار می‌انجامد با حرف سیاه نشان داده شده است.

توجه کنید که در این مثال، یک بزرگترین جورسازی M وجود دارد که یکتاست و چهار یال دارد: $M = \{aC, bB, cD, dA\}$ ولی M پایدار نیست (cA را در نظر بگیرید).

لم ۲. همیشه یک جورسازی پایدار وجود دارد.

■ **اثبات.** الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. در مرحلهٔ اول همهٔ مردان $u \in X$ به‌دختری که انتخاب اول آنهاست پیشنهاد ازدواج می‌دهند. اگر دختری بیشتر از یک پیشنهاد دریافت کند، آن را که بیشتر دوست دارد برمی‌گزیند و در یک فهرست موقت قرار می‌دهد و اگر فقط یک پیشنهاد دریافت کند همان را در فهرست موقت قرار می‌دهد. بقیهٔ مردان رد می‌شوند و گروه ذخیرهٔ R را تشکیل می‌دهند. در مرحلهٔ دوم همهٔ مردان موجود در R به انتخاب دوم خود پیشنهاد ازدواج می‌دهند. دختران پیشنهادها (از جمله پیشنهاد موجود در فهرست موقت، اگر چنین پیشنهادی دریافت کرده باشند) را با هم مقایسه می‌کنند، آن را که دوست دارند بر می‌گزینند و در فهرست موقت

می‌گذارند. بقیه مردود می‌شوند و گروه ذخیرهٔ جدید R را تشکیل می‌دهند. حال مردان موجود در R به انتخاب بعدی خود پیشنهاد ازدواج می‌دهند، و به‌همین ترتیب. مردی که به‌آخرین انتخاب خود پیشنهاد ازدواج دهد و باز هم رد شود، از حیطهٔ بررسی (و از گروه ذخیره) کنار گذاشته می‌شود. واضح است که پس از مدتی، گروه ذخیرهٔ R خالی می‌شود و الگوریتم در این مرحله متوقف می‌شود.

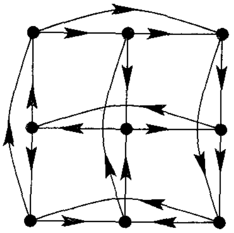
ادعا. وقتی الگوریتم توقف می‌کند، مردان موجود در فهرستهای موقت همراه با دختران متناظر، یک جورسازی پایدار تشکیل می‌دهند.

نخست توجه کنید که [در این فرایند] مردان موجود در فهرست موقتِ هر دختر خاص، به‌ترتیب صعودی ترجیحات او تغییر می‌یابند زیرا در هر مرحله، آن دختر پیشنهادهای تازه را با کاندیدای موجود مقایسه می‌کند و فرد دلخواه جدید را برمی‌گزیند. پس اگر $uv \in E$ ولی $uv \notin M$، آنگاه یا u هرگز به v پیشنهاد ازدواج نداده است که در این‌صورت قبل از آنکه به‌طرف v برود همسر بهتری یافته است و در نتیجه $xy \in M$ با ضابطهٔ $v < y$ در $N(u)$، یا u به v پیشنهاد داده ولی پذیرفته نشده است که در نتیجه $xv \in M$ با $x > u$ در $N(v)$. ولی این دقیقاً همان شرط جورسازی پایدار است. $\square$

حال اگر لمهای ۱ و ۲ را کنار هم بگذاریم، راه‌حل گالوین برای مسألهٔ دینیتس به‌دست می‌آید.

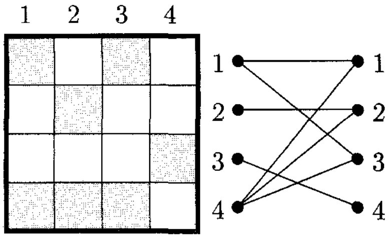
قضیه. به‌ازای هر n، $\chi_\ell(S_n) = n$.

1	2	3
3	1	2
2	3	1



■ **اثبات.** رأسهای S_n را مانند قبل با (i,j)، $1 \leq i,j \leq n$، نشان می‌دهیم. پس (i,j) و (r,s) مجاورند اگر و تنها اگر $i = r$ یا $j = s$. مربع لاتین دلخواهی چون L را که درایه‌هایش متعلق به $\{1, 2, \ldots, n\}$ هستند در نظر گرفته درایهٔ موجود در خانهٔ (i,j) را با $L(i,j)$ نشان می‌دهیم. سپس S_n را به گراف جهتدار $\vec{S}_n$ تبدیل می‌کنیم به این ترتیب که به یالهای افقی جهت $(i,j) \longrightarrow (i,j')$ را می‌دهیم اگر $L(i,j) < L(i,j')$، و به یالهای عمودیْ جهت $(i,j) \longrightarrow (i',j)$ را می‌دهیم اگر $L(i,j) > L(i',j)$. پس جهت را در امتداد افقی از درایهٔ کوچکتر به بزرگتر می‌گیریم و در امتداد عمودی برعکس. (در حاشیه مثالی به‌ازای $n = 3$ آورده‌ایم.)

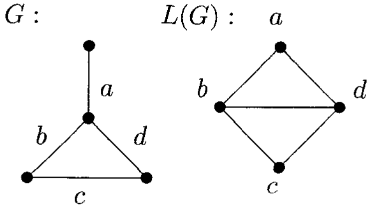
توجه کنید که به‌ازای هر (i,j) به‌دست می‌آوریم $d^+(i,j) = n - 1$. در واقع، اگر $L(i,j) = k$، آنگاه $n - k$ خانه در سطر i شامل درایه‌ای بزرگتر از k هستند، و $k - 1$ خانه در ستون j درایه‌ای کوچکتر از k دارند.



بنابه لم ۱، باقی می‌ماند که نشان دهیم هر زیرگراف القایی $\vec{S}_n$ هسته‌ای دارد. زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq V$ در نظر بگیرید، و فرض کنید X مجموعهٔ سطرهای L باشد، و Y مجموعهٔ ستونهای آن. گراف دو بخشی $G = (X \cup Y, A)$ را به A نسبت می‌دهیم که در آن هر $(i,j) \in A$ به‌وسیلهٔ یال ij، که $i \in X$، $j \in Y$، نشان داده می‌شود. در مثال حاشیه، خانه‌های A سایه‌دارند.

جهتدار کردن یالهای S_n طبیعتاً رأسهای همسایه را در $G = (X \cup Y, A)$ رتبه‌بندی می‌کند به‌این ترتیب که $j' > j$ در $N(i)$ اگر $(i,j') \longrightarrow (i,j)$ در $\vec{S}_n$، و $i' > i$ در $N(j)$ اگر $(i',j) \longrightarrow (i,j)$. بنابه لم ۲، $G = (X \cup Y, A)$ یک جورسازی پایدار چون M دارد. این M، اگر آن را زیرمجموعه‌ای از A در نظر بگیریم، هستهٔ مطلوب ماست! برای ملاحظهٔ دلیل آن، نخست توجه کنید که M در A مستقل است زیر اعضای آن به‌عنوان یالهایی در $G = (X \cup Y, A)$ در یک رأس i یا j مشترک نیستند. دوم اینکه اگر $(i,j) \in A \backslash M$، آنگاه بنابه‌تعریف جورسازی پایدار یا $(i,j') \in M$ با ضابطهٔ $j' > j$ وجود دارد یا $(i',j) \in M$ با ضابطهٔ $i' > i$ که برای $\vec{S}_n$ به‌معنی $(i,j) \longrightarrow (i,j') \in M$ یا $(i,j) \longrightarrow (i',j) \in M$ است، و اثبات تمام است. □

برای اختتام ماجرا کمی فراتر می‌رویم. خواننده ممکن است توجه کرده باشد که گراف S_n از یک گراف دوبخشی با ساختمان ساده‌ای به‌دست می‌آید. گراف دوبخشی کامل را که به‌صورت $K_{n,n}$ نشان داده می‌شود با ضابطهٔ $|X| = |Y| = n$ و همهٔ یالهای بین X و Y در نظر می‌گیریم. اگر یالهای $K_{n,n}$ را رأسهای گراف جدیدی بگیریم که دوتا از این‌گونه رأسها را به‌هم وصل می‌کنند اگر وتنها اگر به‌عنوان یالهایی در $K_{n,n}$، رأس مشترکی داشته باشند، آنگاه به‌وضوح گراف مربعی S_n را به‌دست می‌آوریم. می‌گوییم S_n گراف خطی $K_{n,n}$ است. همین شیوهٔ ساخت را در مورد هر گراف G می‌توان اجرا کرد و گراف حاصل، گراف خطی $L(G)$ از G نامیده می‌شود.



ساختن یک گراف خطی

به‌طورکلی، H را یک گراف خطی می‌نامیم اگر به‌ازای گراف G ای $H = L(G)$. البته هر گرافی یک گراف خطی نیست، و نمونه‌اش گراف $K_{۲,۴}$ است که قبلاً آن را بررسی کردیم و برای این گراف دیده‌ایم که $\chi(K_{۲,۴}) < \chi_\ell(K_{۲,۴})$. ولی اگر H گراف خطی باشد چه؟ با جرح و تعدیل اثبات قضیهٔ ما می‌توان به‌راحتی نشان داد که هرگاه H گراف خطی یک گراف دوبخشی باشد، $\chi(H) = \chi_\ell(H)$ برقرار است، و این روش ممکن است به‌طریقی برای تحقیق در عالیترین حدس این مبحث به‌کار آید:

آیا رابطهٔ $\chi_\ell(H) = \chi(H)$ به‌ازای هر گراف خطی H برقرار است؟

این حدس مشکل به‌نظر می‌رسد و اطلاعات چندانی دربارهٔ آن در دسترس نیست، ولی به‌هر حال مسألهٔ دینیتس هم ۲۰ سال پیش در چنین وضعیتی بود.

مراجع

[1] P. ERDŐS, A.L. RUBIN & H. TAYLOR: *Choosability in graphs*, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium **26** (1979), 125-157.

[2] D. GALE & L.S. SHAPLEY: *College admissions and the stability of marriage*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 9-15.

[3] F. GALVIN: *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **63** (1995), 153-158.

[4] J.C.M. JANSSEN: *The Dinitz problem solved for rectangles*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 243-249.

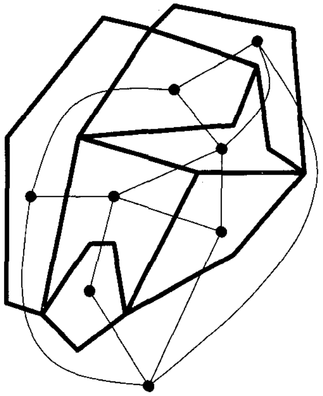
[5] V. G. VIZING: *Coloring the vertices of a graph in prescribed colours (in Russian)*, Metody Diskret. Analiz. **101** (1976), 3-10.

نظریهٔ گراف

«جغرافیدانِ چهار رنگ کن»

فصل ۲۵ رنگ کردن گرافهای مسطح با پنج رنگ

از آغاز پیدایش نظریهٔ گراف، گرافهای مسطح و رنگ‌آمیزی آنها به‌علت ارتباطشان با مسألهٔ چهار رنگ موضوع پژوهشهای گسترده‌ای بوده است. مسألهٔ چهاررنگ، به‌صورتی که در اصل بیان شده است. این است که آیا همواره می‌توان ناحیه‌های یک نقشهٔ مسطح را با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌نحوی که ناحیه‌هایی که مرز مشترک (نه فقط نقطهٔ مشترک) دارند رنگهای متفاوتی داشته باشند. شکل مقابل نشان می‌دهد که رنگ‌آمیزی ناحیه‌های یک نقشه واقعاً با رنگ‌آمیزی نقطه‌های یک گراف مسطح معادل است. همان‌طور که در فصل ۱۰ عمل کردیم، نقطه‌ای در درون هر ناحیه (از جمله ناحیهٔ بیرونی) قرار می‌دهیم و هر دو تا از این نقطه‌ها را که به‌نواحی مجاور تعلق دارند به‌وسیلهٔ خطی که مرز مشترکشان را قطع می‌کند به‌هم وصل می‌کنیم.



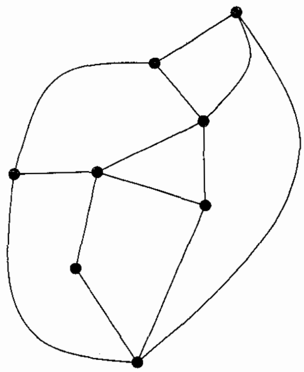
گراف دوگان یک نقشه

در این صورت گراف G ی حاصل، گراف دوگان نقشهٔ M، یک گراف مسطح است و رنگ کردن رأسهای G به مفهوم معمولی، با رنگ کردن نواحی M یکی است. پس می‌توانیم توجه خود را به‌رنگ کردن رأسهای گرافهای مسطح معطوف کنیم و از این پس چنین خواهیم کرد. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم G طوقه یا یال چندگانه ندارد چون اینها در رنگ‌آمیزی مطرح نیستند.

در تاریخ طولانیِ تلاشهای طاقت‌فرسا برای اثبات قضیهٔ چهار رنگ، بسیاری از اقدامات به نزدیکی هدف رسیدند، ولی چیزی که بالاخره به اثبات موفقیت‌آمیز اپل-هاکن در سال ۱۹۷۶ و نیز اثبات جدید رابرتسن، ساندرز[1]، سیمور[2] و توماس در ۱۹۹۷ انجامید، ترکیبی از ایده‌های بسیار قدیمی (که از قرن نوزدهم سابقه دارد) و امکانات محاسباتی بسیار جدید از جمله کامپیوترهای امروزی بوده است. بنابراین، بیست سال پس از اثبات اولیه، وضعیت اساساً تغییری نکرده و هیچ اثبات «کتابی» از این قضیه در دیدرس قرار ندارد.

پس توقع خود را کمتر می‌کنیم و این پرسش را پیش می‌کشیم که آیا اثبات شسته رُفته‌ای برای این حکم وجود دارد که هر گراف مسطح ۵-رنگ‌پذیر است [با پنج رنگ قابل رنگ‌آمیزی است] یا نه. اثباتی از این قضیهٔ پنج رنگ قبلاً به‌وسیلهٔ هیوود در اوائل قرن بیستم عرضه شده بود. ابزار اصلی در اثبات او (و در واقع، در اثبات قضیهٔ چهار رنگ نیز) فرمول اویلر بود (فصل ۱۰ را ببینید). واضح است که در

1. Sanders 2. Seymour



این گراف مسطح ۸ رأس، ۱۳ یال و ۷ ناحیه دارد.

رنگ‌آمیزی هر گراف G می‌توانیم فرض کنیم G همبند است زیرا می‌توان قطعه‌های همبند را به‌طور جداگانه رنگ کرد. هر گراف مسطح صفحه را به‌مجموعه‌ای چون R از نواحی (از جمله، ناحیهٔ بیرونی) تقسیم می‌کند. فرمول اویلر حاکی است که برای گرافهای همبند مسطح $G=(V,E)$ همواره داریم

$$|V|-|E|+|R|=۲$$

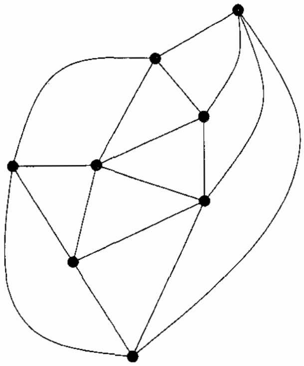
برای دستگرمی در آغاز کار، ببینیم که چگونه می‌توان فرمول اویلر را برای اثبات اینکه هر گراف مسطح G قابل رنگ‌آمیزی با ۶ رنگ است به‌کار برد. به‌استقرا بر تعداد رأسها (n) عمل می‌کنیم. به‌ازای مقدارهای کوچک n (به‌خصوص، به‌ازای $n \leq ۶$) این موضوع بدیهی است. بنابه قسمت (الف) ازگزارهٔ صفحهٔ ۷۸ می‌دانیم که G رأسی چون v با درجهٔ حداکثر ۵ دارد. رأس v و همهٔ یالهای ملازم با v را حذف می‌کنیم. گراف حاصل، $G' = G\backslash v$، گرافی مسطح با $n-۱$ رأس است. بنابه استقرا، این گراف می‌تواند ۶ رنگی باشد. چون v حداکثر ۵ رأس مجاور در G دارد، در رنگ‌آمیزی G' حداکثر ۵ رنگ برای این همسایه‌ها به‌کار می‌رود. پس می‌توانیم هر ۶ـرنگ‌آمیزی G' را به یک ۶ـرنگ‌آمیزی G گسترش دهیم به این طریق که رنگی به v تخصیص دهیم که در هنگام رنگ‌آمیزی G برای هیچ یک از رأسهای مجاور v به‌کار نرود. پس G واقعاً قابل رنگ‌آمیزی با ۶ رنگ است.

اکنون عدد فامی فهرستی گرافهای مسطح را، چنانکه در فصل پیشین مورد بحث قرار گرفت، در نظر می‌گیریم. واضح است که روش ۶ـرنگ‌آمیزی ما برای فهرستهای رنگها نیز می‌تواند به‌کار رود (در اینجا نیز هرگز با کمبود رنگ روبه‌رو نخواهیم شد)، پس $\chi_\ell(G) \leq ۶$ برای هر گراف مسطح G برقرار است. اردوش، روبین، و تیلر در سال ۱۹۷۹ حدس زدند که عدد فامی فهرستی هر گراف مسطح حداکثر ۵ است، و به‌علاوه، گرافهای مسطح G ای با $\chi_\ell(G) > ۴$ وجود دارند. حدس آنها در هر دو مورد درست بود. مارگیت فوکت[1] نخستین کسی بود که مثالی از یک گراف مسطح G با $\chi_\ell(G) = ۵$ ساخت (مثال او ۲۳۸ رأس داشت) و اندکی بعد کارستن توماسن[2] اثباتی واقعاً عالی از حدس ۵ـ رنگ‌آمیزی فهرستی [رنگ‌آمیزی با رنگ‌ـمجموعه‌های ۵ عضوی] عرضه کرد. اثبات او مثال گویایی است از اینکه وقتی فرض صحیح استقرا را یافته باشید چه کارهایی می‌توانید انجام دهید. وی اصلاً از فرمول اویلر استفاده نمی‌کند!

1. Margit Voigt 2. Carsten Thomassen

قضیه. هر گراف هامنی G قابل ۵ـرنگ‌آمیزی فهرستی است:

$$\chi_\ell(G) \leq ۵$$



یک گراف مسطح تقریباً مثلثی.

■ **اثبات.** نخست توجه کنید که افزودن بر یالها فقط می‌تواند عدد فامی را افزایش دهد. به‌عبارت دیگر، وقتی H زیرگرافی از G باشد، آنگاه $\chi_\ell(H) \leq \chi_\ell(G)$ مسلماً برقرار است. پس می‌توانیم فرض کنیم که G همبند است و همهٔ وجوه کراندار صورت نشانده شدهٔ آن در صفحه، مرزی به شکل مثلث دارند. چنین گرافی را تقریباً مثلث‌بندی شده می‌نامیم. درستی قضیه برای گرافهای تقریباً مثلث‌بندی شده به‌درستی آن برای همهٔ گرافهای مسطح دلالت خواهد داشت. شگرد اثبات این است که حکم قویتر زیر را (که امکان به‌کارگیری استقرا را به ما می‌دهد) ثابت کنیم:

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف تقریباً مثلث‌بندی شده و B مرز ناحیهٔ بیرونی باشد. حال فرضهای زیر را دربارهٔ رنگ‌ـمجموعه‌های $C(v)$، $v \in V$، اتخاذ می‌کنیم.

(۱) دو رأس مجاور x و y از B از قبل با دو رنگ (متفاوت) α و β رنگ شده‌اند.

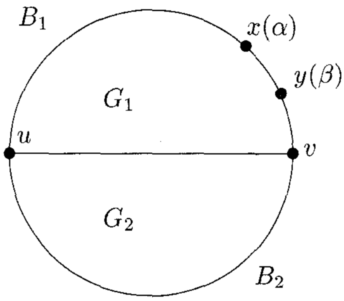
(۲) برای سایر رأسهای v متعلق به B، $|C(v)| \geq ۳$.

(۳) برای سایر رأسهای v در درون، $|C(v)| \geq ۵$.

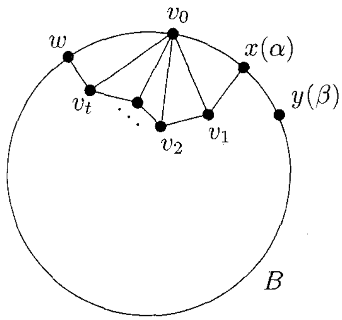
در این‌صورت، رنگ‌آمیزی x و y را می‌توان به رنگ‌آمیزی صحیحی برای G با انتخاب رنگها از فهرستها گسترش داد. به‌خصوص $\chi_\ell(G) \leq ۵$.

این حکم به‌ازای $|V| = ۳$ واضح است زیرا برای تنها رأس رنگ نشدهٔ v داریم $|C(v)| \geq ۳$، پس رنگی در دسترس است. حال به‌استقرا پیش می‌رویم.

حالت ۱: فرض کنید B وتری دارد یعنی یالی که در B نیست و دو رأس $u, v \in B$ را به‌هم وصل می‌کند. زیرگراف $G_۱$ که محدود به $B_۱ \cup \{uv\}$ و شامل x، y، u، و v است، تقریباً مثلث‌بندی شده است و لذا بنابه استقرا یک ۵ـرنگ‌آمیزی فهرستی برای آن وجود دارد. فرض کنید در این رنگ‌آمیزی، رأسهای u و v رنگهای γ و δ را می‌گیرند. حال به قسمت پایین یعنی $G_۲$ که محدود به $B_۲$ و uv است توجه می‌کنیم. اگر فرض کنیم u و v قبلاً رنگ شده‌اند، می‌بینیم که فرضهای استقرا برای $G_۲$ نیز صادق‌اند.



پس $G_۲$ قابل ۵ـرنگ‌آمیزی فهرستی با رنگهای موجود است، بنابراین همین موضوع برای G صادق است.



حالت ۲. فرض کنید Bوتری ندارد، و $v_۰$ رأس واقع در طرف دیگر رأس αـرنگ x بر B است، و x، $v_۱$، ...، v_t، w رأسهای مجاور $v_۰$ هستند. چون G تقریباً مثلث‌بندی شده است، با وضعیتی که در شکل نشان داده شده روبه‌رو هستیم.

گراف تقریباً مثلث‌بندی شدهٔ $G' = G\backslash v_۰$ را با حذف رأس $v_۰$ و همهٔ یالهای صادره از $v_۰$ از G رسم می‌کنیم. G' دارای مرز بیرونی $B' = (B\backslash v_۰) \cup \{v_۱, \dots, v_t\}$ است. چون بنابه فرض (۲) داریم $|C(v_۰)| \geq ۳$، دو رنگ γ و δ در $C(v_۰)$ متفاوت با α وجود دارند. حال به‌جای هر رنگ‌ـمجموعهٔ $C(v_i)$ قرار می‌دهیم $C(v_i)\backslash\{\gamma, \delta\}$، و رنگ‌ـمجموعه‌های اولیه را برای سایر رأسهای G' نگه می‌داریم. در این‌صورت G' به‌وضوح در همهٔ فرضها صدق می‌کند و بنابه استقرا، با رنگ‌ـمجموعه‌های ۵ عضوی قابل رنگ‌آمیزی است. با انتخاب γ یا δ برای $v_۰$، می‌توانیم رنگ‌آمیزی فهرستی G' را به‌همهٔ G گسترش دهیم، و اثبات به انجام می‌رسد. $\square$

خوب، قضیهٔ ۵ـرنگ‌آمیزی فهرستی اثبات شد اما داستان کاملاً به پایان نرسیده است. حدس قویتری مدعی است که عدد فامی فهرستی یک گراف مسطح G حداکثر یک واحد بیشتر از عدد فامی معمولی است:

$$\text{آیا برای هر گراف مسطح } G\text{،} \quad \chi_\ell(G) \leq \chi(G) + ۱ \quad ؟$$

چون بنابه قضیهٔ چهاررنگ داریم $\chi(G) \leq ۴$، سه‌حالت وجود دارد:

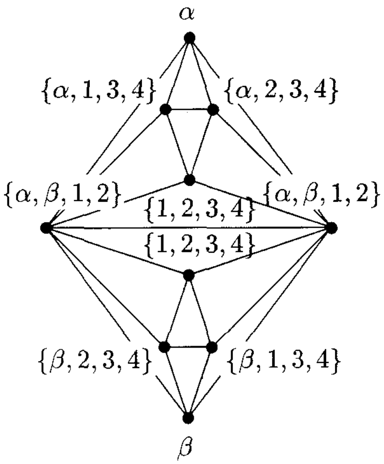
حالت I: $\chi(G) = ۲ \Rightarrow \chi_\ell(G) \leq ۳$

حالت II: $\chi(G) = ۳ \Rightarrow \chi_\ell(G) \leq ۴$

حالت III: $\chi(G) = ۴ \Rightarrow \chi_\ell(G) \leq ۵$

قضیهٔ توماسن تکلیف حالت III را روشن می‌کند، و حالت I با استدلال هوشمندانه (و بسیار پیچیده‌تر) آلون[1] و تارسی[2] اثبات شد. به‌علاوه گرافهای مسطح Gای وجود دارند چنانکه $\chi(G) = ۲$ و $\chi_\ell(G) = ۳$، مانند گراف $K_{۲,۴}$ که در فصل پیش مورد بحث بود.

1. Alon 2. Tarsi



ولی دربارهٔ حالت II چه می‌توان گفت؟ در این حالت حدس غلط از آب در می‌آید. این را مارگیت فوکت برای نخستین‌بار در مورد گرافی که شی گاتنر[1] قبلاً ساخته بود نشان داد. گراف ۱۳۰ رأسی او را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد. نخست به «هشت وجهی مضاعف» (شکل حاشیه را ببینید) نگاهی بیفکنید که به‌وضوح ۳ـرنگ‌پذیر است. فرض کنید $\alpha \in \{۵,۶,۷,۸\}$ و $\beta \in \{۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$، و فهرستهایی را که در شکل داده شده‌اند در نظر بگیرید. از شما دعوت می‌کنیم که بررسی کنید رنگ‌آمیزی با این فهرستها ممکن نیست. حال ۱۶ نسخهٔ این گراف را در نظر بگیرید و همهٔ رأسهای بالایی و رأسهای پایینی را مشخص کنید. به این ترتیب گرافی با $۱۶ \times ۸ + ۲ = ۱۳۰$ رأس به‌دست می‌آید که باز هم مسطح و ۳ـرنگ‌پذیر است. ما $\{۵,۶,۷,۸\}$ را به رأس بالایی و $\{۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$ را به رأس پایینی تخصیص می‌دهیم و فهرستهای میانی نیز متناظر با همهٔ ۱۶ جفت (α,β) که $\alpha \in \{۵,۶,۷,۸\}$، $\beta = \{۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$، خواهند بود. پس به‌ازای هر α و βی انتخاب شده زیرگرافی طبق شکل به‌دست می‌آوریم، و بنابراین رنگ‌آمیزی گراف بزرگ ممکن نیست.

فوکت و ورث[2] با جرح و تعدیل یکی دیگر از مثالهای گاتنر گراف حتی کوچکتری با ۷۵ رأس و $\chi = ۳$، $\chi_\ell = ۵$ به‌دست آوردند که به‌علاوه، فقط از تعداد مینیمم ۵ رنگ در فهرستهای ترکیبی بهره می‌گیرد. رکورد فعلی، ۶۳ رأس است.

مراجع

[1] N. Alon & M. Tarsi: *Colorings and orientations of graphs*, Combinatorica **12** (1992), 125-134.

[2] P. Erdős A.L. Rubin & H. Taylor: *Choosability in graphs*, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium **26** (1979), 125-157.

[3] S. Gutner: *The complexity of planar graph choosability*, Discrete Math. **159** (1996), 119-130.

[4] N. Robertson, D.P.Sanders, P. Seymour & R. Thomas: *The four-color theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **70** (1997), 2-44.

[5] C. Thomassen: *Every planar graph is 5-choosable*, J Combinatorial Theory, Ser. B **62** (1994), 180-181.

1. Shai Gutner 2. Wirth

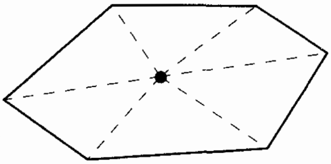
[6] M. VOIGT: *List colorings of planar graphs*, Discrete Math. **120** (1993), 215-219.

[7] M. VOIGT & B. WIRTH: *On 3-colorable non-4-choosable planar graphs.* J. Graph Theory **24** (1997), 233-235.

نگهبانی از موزه

فصل ۲۶

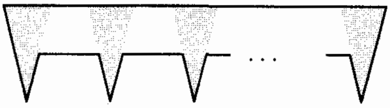
در اینجا مسألهٔ جذابی را ذکر می‌کنیم که ویکتور کلی[1] آن را در سال ۱۹۷۳ عرضه کرد. فرض کنید مدیر موزه‌ای می‌خواهد مطمئن شود که هر نقطه از موزه در همهٔ اوقات تحت نظارت یک نگهبان قرار دارد. نگهبانان در محلهای ثابتی مستقرند ولی می‌توانند گشتی هم در اطراف بزنند. چند نگهبان لازم است؟

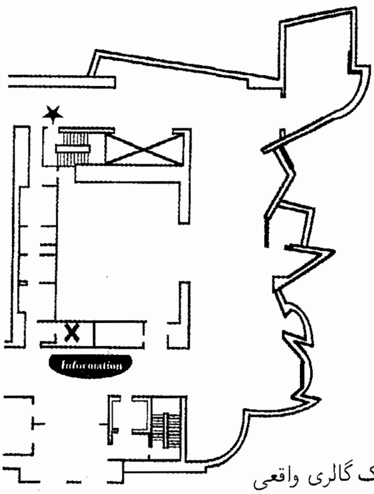


تالار محدبی در موزه

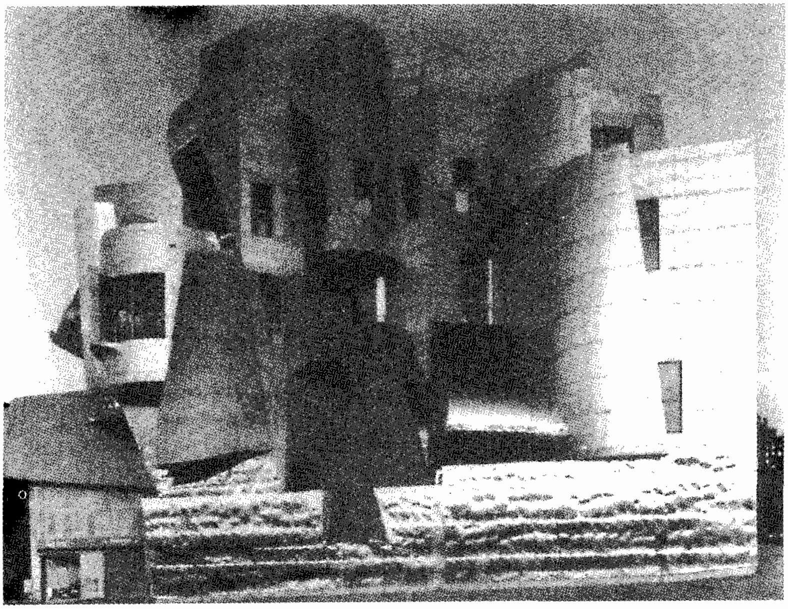
موزه را به‌شکل یک n ضلعی نشان می‌دهیم. البته اگر این n ضلعی محدب باشد، یک نگهبان کافی است. در واقع نگهبان می‌تواند در هر نقطهٔ موزه استقرار داشته باشد. اما در حالت کلی، دیوارهای موزه می‌توانند به‌شکل هرچندضلعی بسته‌ای باشند.

موزه‌ای به شکل شانه با $n = ۳m$ دیوار در نظر بگیرید که در تصویر مقابل نشان داده شده است. به‌راحتی می‌توان ملاحظه کرد که این موزه به حداقل $m = \frac{n}{۳}$ نگهبان





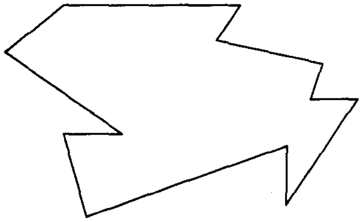
یک گالری واقعی



1. Victor Klee

نیاز دارد. در واقع n دیوار وجود دارد. حال توجه کنید که نقطهٔ ۱ را فقط نگهبانی می‌تواند مشاهده کند که در مثلث هاشورخوردهٔ شامل ۱ مستقر باشد، و همین طور است در مورد سایر نقطه‌های ۲، ۳، …، m. چون همهٔ این مثلثها مجزا هستند، نتیجه می‌گیریم که m نگهبان لازم است. ولی همین m نگهبان کافی هم هست، چون می‌توان آنها را در قاعده‌های مثلثها مستقرکرد. با حذف یک یا دو دیوار در انتها، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر n، موزه‌ای با n دیوار وجود دارد که به تعداد $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان نیازمند است.

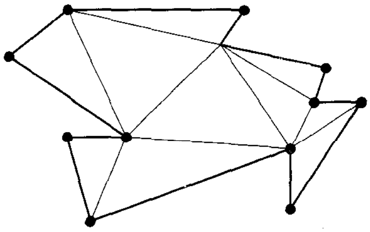
قضیهٔ زیر حاکی است که این بدترین حالت است.



قضیه. برای هر موزه با n دیوار، $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان کافی است.

موزه‌ای با $n = 12$ دیوار

این «قضیهٔ گالری هنری» را اول بار وازک چواتال[1] با استدلال هوشمندانه‌ای ثابت کرد، ولی استیو فیسک[2] هم اثباتی عرضه کرده که واقعاً زیباست.



■ **اثبات.** نخست $n - 3$ قطر نامتقاطع بین گوشه‌های دیوارها رسم می‌کنیم تا سطح داخل مثلث‌بندی شود. مثلاً می‌توانیم ۹ قطر در موزه‌ای که ۱۲ دیوار دارد رسم کنیم تا یک مثلث‌بندی انجام شود. مهم نیست چه مثلث‌بندی را انتخاب کنیم، هرکدام به‌کار ما می‌آید. حال شکل جدید را به‌صورت گراف مسطحی که گوشه‌ها رأسهای آنها و دیوارها و قطرها یالهایشان هستند در نظر می‌گیریم.

ادعا. این گراف قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ است.

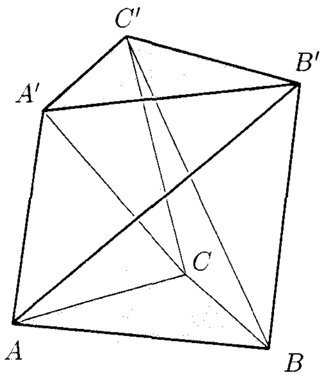
به ازای $n = 3$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. حال به‌ازای $n > 3$ دو رأس دلخواه u و v را که با قطری به هم وصل می‌شوند انتخاب می‌کنیم. این قطر گراف را به دوگراف مثلث‌بندی شدهٔ کوچکتر تقسیم خواهد کرد که هر دو شامل یال uv هستند. به استقرا می‌توانیم هر بخش را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم و در هر رنگ‌آمیزی می‌توانیم رنگ ۱ را برای u و رنگ ۲ را برای v انتخاب کنیم. حال اگر گراف را دوباره یکپارچه در نظر بگیریم، کل گراف قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ است.

بقیهٔ کار آسان است. چون n رأس وجود دارد، دست‌کم یکی از رده‌های رنگ، مثلاً همهٔ رأسهایِ به رنگ ۱، شامل حداکثر $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ رأس است، و در همین‌جاست که

1. Vašek Chvátal 2. Steve Fisk

نگهبانان را مستقر می‌کنیم چون هر مثلث شامل رأسی به رنگ ۱ است، نتیجه می‌گیریم که هر مثلث و در نتیجه، کل موزه، نگهبانی می‌شود. □

خوانندهٔ تیز هوش ممکن است متوجه نکتهٔ ظریفی در استدلال ما شده باشد. آیا همواره یک مثلث‌بندی وجود دارد؟ احتمالاً نخستین پاسخ هر کسی این است: بدیهی است بله! البته مثلث‌بندی همواره وجود دارد ولی این موضوع کاملاً بدیهی نیست، و در واقع تعمیم طبیعی مسأله به‌حالت سه‌بعدی (افراز به‌چهار وجهیها) غلط است! این را با توجه به چندوجهی شونهارت[1] که تصویرش در حاشیه آمده است، می‌توان ملاحظه کرد. این چندوجهی از یک منشور مثلثی با دوران دادن مثلث بالایی، به‌طوری‌که هر یک از وجوه چهار ضلعی به دو مثلث با ضلعی نامحدب تجزیه شود، به‌دست می‌آید. سعی کنید این چندوجهی را مثلث‌بندی کنید! خواهید دید که هر چهار وجهی که شامل مثلث پایینی باشد، باید یکی از سه رأس بالایی را در بر داشته باشد: اما چهار وجهی حاصل مشمول در چندوجهی شونهارت نخواهد بود. پس مثلث‌بندیی بدون یک رأس اضافی وجود ندارد. برای اثبات اینکه در حالتِ چندضلعی نامحدب مسطح، یک مثلث‌بندی وجود دارد، به‌استقرا بر تعداد رأسها (n) عمل می‌کنیم. به‌ازای $n = ۳$، چندضلعی مثلث است، و چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنید $n \geq ۴$. برای استفاده از استقرا، کافی است یک قطر ایجاد کنیم که چندضلعی P را به دوبخش کوچکتر تقسیم کند که بعد بتوان، مانند بالا، دو بخش را به‌هم الحاق کرد.



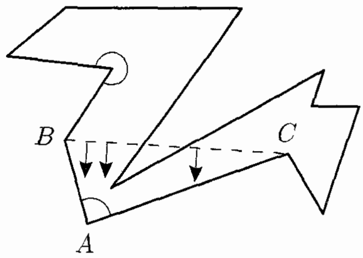
چندوجهی شونهارت: زاویه‌های دووجهی درونی که با یالهای AB'، BC' و CA' مشخص می‌شوند بزرگتر از ۱۸۰° هستند.

رأس A را محدب می‌نامیم اگر زاویهٔ درونیِ با این رأس کوچکتر از ۱۸۰° باشد. چون مجموع زاویه‌های درونی P برابر $(n - ۲)۱۸۰^\circ$ است، باید رأس محدب Aای وجود داشته باشد. در واقع دست‌کم باید سه تا از این رأسها وجود داشته باشد: این موضوع در اساس یکی از کاربردهای اصل لانهٔ کبوتر است! یا می‌توانید غلاف محدب چندضلعی را در نظر بگیرید و توجه کنید که همهٔ رأسهای آن برای چندضلعی اولیه نیز محدب‌اند.

حال به دو رأس همسایهٔ A یعنی B و C توجه می‌کنیم. اگر پاره‌خط BC کاملاً در P قرار داشته باشد، قطر مورد نظر ماست. اگر چنین نباشد، مثلث ABC شامل رأسهای دیگری است. BC را به‌سوی A می‌لغزانیم تا وقتی به رأس آخر Z در ABC برخورد کند: حال AZ در درون P است، و یک قطر داریم.

قضیهٔ گالری هنری گونه‌های بسیار دارد. مثلاً ممکن است بخواهیم فقط از دیوارها حفاظت کنیم (به هر حال تابلوهای نقاشی به دیوارها آویخته‌اند) یا همهٔ نگهبانان را در

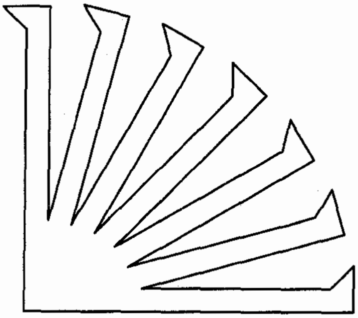
1. Schönhardt



گوشه‌ها مستقر کنیم. گونه‌ای بسیار زیبا (و حل نشده) از مسأله چنین است:

فرض کنید هر نگهبان بتواند از یک دیوار موزه مراقبت کند، پس او در کنار آن دیوار قدم می‌زند و هر چیزی را که بتوان از هر نقطه در امتداد کنار دیوار دید، می‌بینید. در این‌صورت، چند «نگهبان دیوار» برای مراقبت از موزه لازم است؟

گوتفرید توساین[1] نمونه‌ای از موزه را که در حاشیه می‌بینید ساخت. این نمونه نشان می‌دهد که ممکن است $\lfloor \frac{n}{۴} \rfloor$ نگهبان لازم باشد.



این چندضلعی ۲۸ ضلع (و در حالت کلی، $۴m$ ضلع) دارد، و از خواننده دعوت می‌شود که تحقیق کند m نگهبانِ ضلع مورد نیاز است. حدس زده می‌شود که، بجز برای بعضی مقادیر کوچک n، این تعداد کافی نیز هست. ولی هنوز اثباتی برای آن در دیدرس نیست، چه برسد به اثبات «کتابی».

مراجع

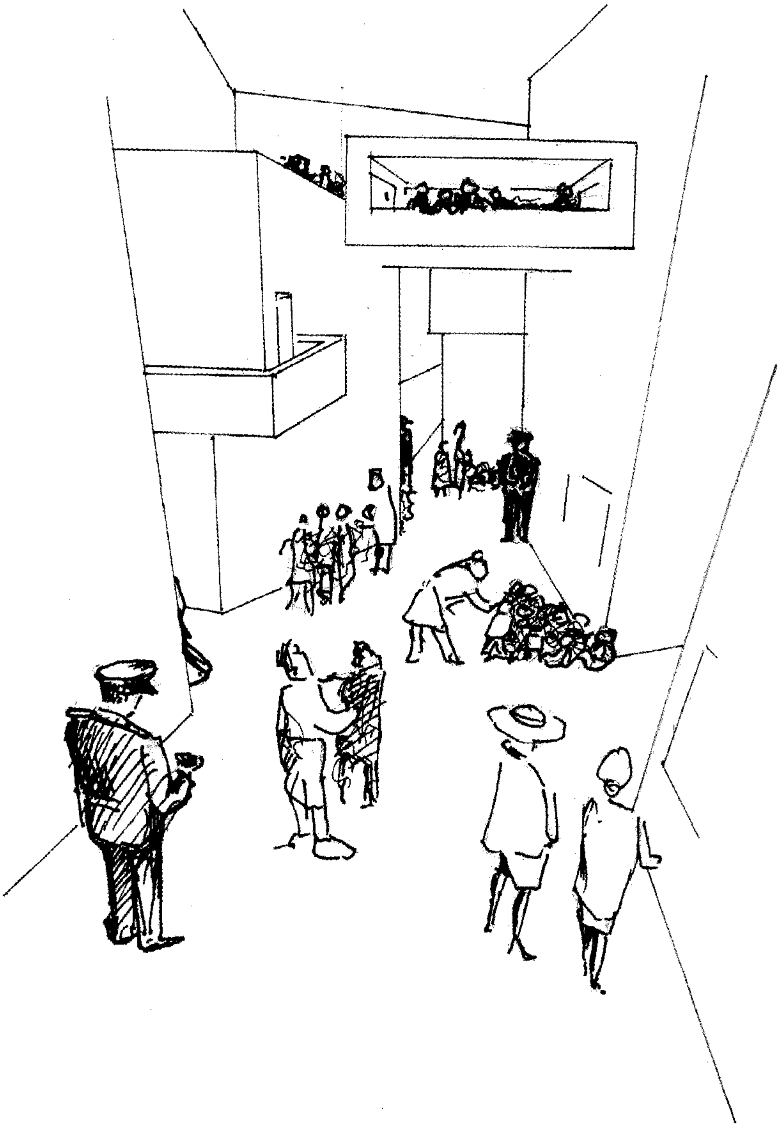
[1] V. Chvátal: *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **18** (1975), 39-41.

[2] S. Fisk: *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **24** (1978), 374.

[3] J. O'Rourke: *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press 1987.

[4] E. Schönhardt: *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder*, Math. Annalen **98** (1928), 309-312.

1. Gottfried Toussaint



«نگهبانان موزه»
(مسألهٔ گالری هنری در حالت ۳ بعدی)

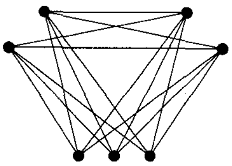
قضیهٔ گراف توران فصل ۲۷

پال توران

یکی از قضیه‌های بنیادی نظریهٔ گراف، قضیهٔ توران است که در سال ۱۹۴۱ عرضه شد و سرآغاز نظریهٔ فرینال گراف[۱] بوده است. قضیهٔ توران بارها تجدید کشف شد و اثباتهای متفاوت متعددی برای آن ارائه گردید. ما چهار تا از این اثباتها را مطرح می‌کنیم و قضاوت در این باره که کدام یک از آنها متعلق به «کتاب» است بر عهدهٔ خواننده خواهد بود.

ابتدا نمادهایی قرار داد می‌کنیم. گرافهای سادهٔ G با مجموعهٔ رئوس $V = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ و مجموعهٔ یالهای E را در نظر می‌گیریم. اگر v_i و v_j مجاور باشند، می‌نویسیم $v_iv_j \in E$. هر pـخوشه در G زیرگراف کاملی از G با p رأس است که با K_p نشان داده می‌شود. پال توران[۲] پرسش زیر را مطرح کرد،

> فرض کنید G گراف ساده‌ای است که شامل pـخوشه نیست. در این‌صورت G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟



گراف $K_{۲,۲,۳}$

به‌آسانی می‌توان مثالهایی از این‌گونه گرافها به‌دست آورد؛ به این منظور V را به $p-۱$ زیرمجموعه دوبه‌دو مجزای $V = V_۱ \cup \ldots \cup V_{p-۱}$ تقسیم می‌کنیم که $|V_i| = n_i$، $n = n_۱ + \ldots + n_{p-۱}$؛ دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر در مجموعه‌های مجزای V_i، V_j قرار داشته باشند. گراف حاصل را با $K_{n_۱, \ldots, n_{p-۱}}$ نشان می‌دهیم؛ این گراف $\sum_{i \neq j} n_in_j$ یال دارد. به‌ازای n مفروض اگر عددهای n_i را چنان انتخاب کنیم که تا حد امکان نزدیک به هم باشند یعنی به‌ازای هر i و j، $|n_i - n_j| \leq ۱$، می‌توانیم تعداد ماکسیمال یالها را در میان این گرافها به دست آوریم. در واقع فرض کنید $n_۱ \geq n_۲ + ۲$. با انتقال یک رأس از $V_۱$ به $V_۲$، گراف $K_{n_۱-۱, n_۲+۱, \ldots, n_{p-۱}}$ را که شامل $(n_۱ - ۱)(n_۲ + ۱) - n_۱n_۲ = n_۱ - n_۲ - ۱ \geq ۱$ یال بیش از $K_{n_۱, n_۲, \ldots, n_{p-۱}}$ است به‌دست می‌آوریم. گرافهای $K_{n_۱, \ldots, n_{p-۱}}$ با ضابطهٔ $|n_i - n_j| \leq ۱$ را گرافهای توران می‌نامیم. به‌خصوص اگر $p-۱$، n را بشمارد، آنگاه می‌توانیم به‌ازای i، $n_i = \frac{n}{p-۱}$

1. extremal graph theory 2. Paul Turán

را انتخاب کنیم و در نتیجه

$$\binom{p-۱}{۲}\left(\frac{n}{p-۱}\right)^۲=\left(۱-\frac{۱}{p-۱}\right)\frac{n^۲}{۲}$$

یال به‌دست می‌آید. حال قضیهٔ توران حاکی است که این عدد یک کران بالا برای تعداد یالهای هر گراف با n رأس و بدون pـخوشه است.

قضیه. اگر گراف $G=(V,E)$ با n رأس هیچ pـخوشه $(p\geq ۲)$ نداشته باشد، آنگاه

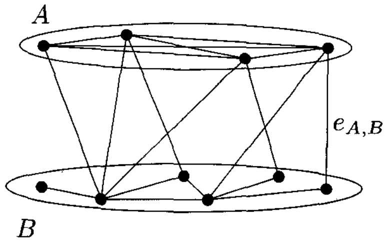
$$|E|\leq\left(۱-\frac{۱}{p-۱}\right)\frac{n^۲}{۲} \qquad (۱)$$

به‌ازای $p=۲$، قضیه بدیهی است. در اولین حالت جالب، $p=۳$، قضیه حاکی است که گرافی عاری از مثلث با n رأس شامل حداکثر $\frac{n^۲}{۴}$ یال است. اثباتهایی از این حالت خاص قبل از مطرح شدن قضیهٔ توران در دست بود. در فصل ۱۷ دو اثبات زیبا که در آنها از نابرابریها استفاده می‌شود آمده است.

حال به حالت کلی می‌پردازیم. دو اثبات نخست مبتنی بر استقرا و به‌ترتیب متعلق به توران و اردوش هستند.

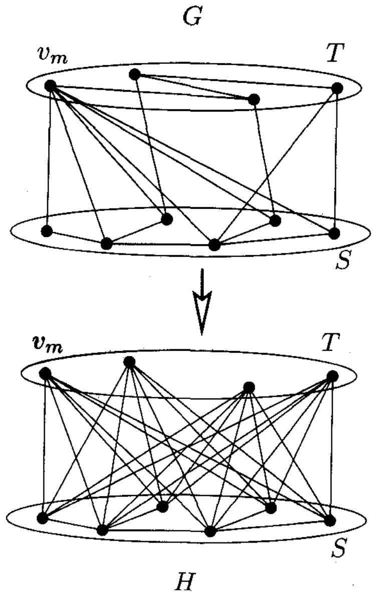
■ **اثبات اول.** از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. رابطهٔ (۱) به‌ازای $n=۱$ بدیهی است. فرض می‌کنیم G گرافی روی $V=\{v_۱,\ldots,v_n\}$ باشد که بدون pـخوشه و دارای بیشترین تعداد یال است. G مسلماً شامل $(p-۱)$ـخوشه هست زیرا در غیر این‌صورت می‌توانستیم یالهایی به آن بیفزاییم. گیریم A یک $(p-۱)$ خوشه باشد، و قرار می‌دهیم $B:V\backslash A$

A شامل $\binom{p-۱}{۲}$ یال است و ما اکنون تعداد یالهای B(یعنی e_B) و تعداد یالهای بین A و B,A(یعنی $e_{A,B}$) را برآورد می‌کنیم. به استقرا داریم $e_B\leq\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{p-۱})(n-p+۱)^۲$. چون G هیچ pـخوشه‌ای ندارد، هر $v_j\in B$ مجاور به حداکثر $p-۲$ رأس در A است، و به دست می‌آوریم $e_{A,B}\leq(p-۲)(n-p+۱)$. پس روی هم رفته داریم



$$|E|\leq\binom{p-۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{p-۱}\right)(n-p+۱)^۲+(p-۲)(n-p+۱)$$

که دقیقاً $\left(۱-\frac{۱}{p-۱}\right)\frac{n^۲}{۲}$. □



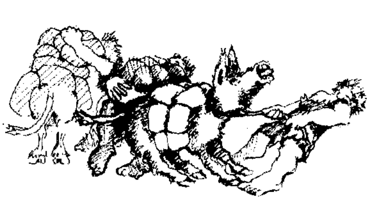
■ **اثبات دوم.** در این اثبات از ساختار گرافهای توران استفاده می‌شود. فرض کنیم $v_m \in V$ رأسی با درجهٔ ماکسیمال $d_m = \max_{1\leq j\leq n} d_j$ باشد. مجموعهٔ رأسهای مجاور به v_m را با S نشان می‌دهیم، $|S| = d_m$، و قرار می‌دهیم $T = v\backslash S$. چون G شامل هیچ pـخوشه‌ای نیست و v_m مجاور به همهٔ رأسهای S است، پس S شامل هیچ $(p-1)$ خوشه‌ای نیست.

حال گراف H زیر را روی V می‌سازیم (شکل را ببینید). H متناظر است با G روی S و شامل همهٔ یالهای بین S و T است، ولی هیچ یالی در درون T ندارد. به‌عبارت دیگر، T مجموعه‌ای مستقل در H است، و نتیجه می‌گیریم که H باز pـخوشه ندارد. فرض می‌کنیم d'_j درجهٔ v_j در H باشد. اگر $v_j \in S$، آنگاه مسلماً بنابه نحوهٔ ساخت H داریم $d'_j \geq d_j$، و به‌ازای $v_j \in T$ بنابه‌نحوهٔ انتخاب v_m، می‌بینیم $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$. پس $|E| \geq |E(H)|$، و نتیجه می‌گیریم که در میان همهٔ گرافهایِ با تعداد ماکسیمال یالها، باید یکی به شکل H باشد. بنابه استقرا، گراف القا شده به‌وسیلهٔ S حداکثر همان تعداد یال دارد که گراف مناسبی چون $K_{n_1,\ldots,n_{p-2}}$ روی S دارد. پس $|E| \leq |E(H)| \leq E(K_{n_1,\ldots,n_{p-1}})$ که در آن $|T| = n_{p-1}$، و رابطهٔ (۱) از اینجا نتیجه می‌شود. □

دو اثبات آخر ما ماهیتی کاملاً متفاوت دارند و در آنها از استدلالی بر اساس ماکسیمم‌سازی و مفاهیمی از نظریهٔ احتمال استفاده می‌شود. این اثباتها، به‌ترتیب، متعلق به موتسکین‌ـاشتراوس و آلون‌ـاسپنسر هستند.

■ **اثبات سوم.** توزیع احتمال $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ را برای رأسها در نظر می‌گیریم یعنی مقادیر $w_i \geq 0$ را با ضابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ به‌رأسها نسبت می‌دهیم. هدف ما ماکسیمم کردن تابع

$$f(\boldsymbol{w}) = \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j$$


«وزنهای متحرک»

است. فرض می‌کنیم $\boldsymbol{w}$ توزیعی دلخواه باشد و v_i و v_j جفتی از رأسهای غیر مجاور با وزنهای مثبت w_i، w_j باشند. گیریم s_i مجموع وزنهای همهٔ رأسهای مجاور به v_i باشد، و s_j همین حالت را برای v_j داشته باشد که می‌توانیم فرض کنیم $s_i \geq s_j$. حال وزن را از v_j به v_i انتقال می‌دهیم یعنی وزن جدید v_i، $w_i + w_j$ است در حالی‌که وزن v_j به ۰ تقلیل می‌یابد. برای توزیع جدید w' داریم

$$f(\boldsymbol{w}') = f(\boldsymbol{w}) + w_j s_i - w_j s_j \geq f(\boldsymbol{w})$$

با تکرار این گام (به‌دست آوردن رأسهای کمتر با وزنهای مثبت در هرگام) نتیجه می‌گیریم که توزیع بهینه‌ای وجود دارد که در آن وزنهای ناصفر روی یک خوشه، مثلاً روی یک kـخوشه، متمرکزند. حال اگر مثلاً $w_۱ > w_۲ > ۰$، آنگاه εای انتخاب می‌کنیم که $۰ < \varepsilon < w_۱ - w_۲$، و $w_۱$ را به $w_۱ - \varepsilon$ و $w_۲$ را به $w_۲ + \varepsilon$ تغییر می‌دهیم. توزیع جدید $\boldsymbol{w}'$ در $f(\boldsymbol{w}') = f(\boldsymbol{w}) + \varepsilon(w_۱ - w_۲) - \varepsilon^۲ > f(\boldsymbol{w})$ صدق می‌کند و نتیجه می‌گیریم که مقدار ماکسیمال f به‌ازای $w_i = \frac{۱}{k}$ روی یک kـخوشه و $w_i = ۰$ در غیر این‌صورت، به‌دست می‌آید. چون هر kـخوشه شامل $\frac{k(k-۱)}{۲}$ یال است، به‌دست می‌آوریم

$$f = \frac{k(k-۱)}{۲}\frac{۱}{k^۲} = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{k}\right)$$

چون این عبارت برحسب k صعودی است، بهترین کاری که می‌توانیم بکنیم این است که قرار دهیم $k = p - ۱$ (چون G هیچ pـخوشه‌ای ندارد). پس نتیجه می‌شود که به‌ازای هر توزیع $\boldsymbol{w}$

$$f(\boldsymbol{w}) \leq \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{p-۱}\right)$$

به‌خصوص این نابرابری برای توزیع یکنواختی که با $w_i = \frac{۱}{n}$ به‌ازای هر i مشخص می‌شود، برقرار است. پس

$$\frac{|E|}{n^۲} = f(w_i = \frac{۱}{n}) \leq \frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{p-۱})$$

که دقیقاً همان (۱) است. □

■ **اثبات چهارم.** این بار مفاهیمی از نظریهٔ احتمال را به‌کار می‌گیریم. فرض کنید G گراف دلخواهی با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ باشد. درجهٔ v_i را با d_i نشان می‌دهیم، و تعداد رأسها در بزرگترین خوشه را با $\omega(G)$، و این تعداد را عدد خوشه‌ای G می‌نامیم.

ادعا. داریم $\omega(G) \geq \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n - d_i}$.

جایگشت تصادفی $\pi_۱\pi_۲\ldots\pi_n$ از V را با احتمال $\frac{۱}{n!}$ (یکسان برای همه جایگشتها) انتخاب می‌کنیم و مجموعهٔ C_π را به‌شرح زیر می‌سازیم. π_i را در C_π قرار می‌دهیم اگر و تنها اگر π_i مجاور به هر π_j $(j < i)$ قبل از π_i باشد. بنابه‌تعریف، C_π

خوشه‌ای در G است. فرض کنید $X = |C_\pi|$ متغیر تصادفی متناظر باشد. داریم $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که در آن X_i متغیر تصادفی نشانگر رأس v_i است یعنی $X_i = 1$ یا $X_i = 0$ برحسب اینکه $v_i \in C_\pi$ یا $v_i \notin C_\pi$. توجه کنید که v_i نسبت به جایگشت $\pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ به C_π تعلق دارد اگر و تنها اگر v_i قبل از $n-1-d_i$ رأسی که مجاور به v_i نیستند قرار داشته باشد یا به‌عبارت دیگر، اگر v_i در میان v_i و $n-1-d_i$ رأس غیر مجاورش اولین رأس باشد. احتمال این رویداد $\frac{1}{n-d_i}$ است، پس $EX_i = \frac{1}{n-d_i}$.

پس بنابه خطی بودن امید ریاضی (صفحهٔ ۱۱۲ را ببینید) به‌دست می‌آوریم

$$E(|C_\pi|) = EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-d_i}$$

در نتیجه، باید خوشه‌ای دست‌کم با این اندازه وجود داشته باشد، و این ادعای ما بود.

برای استنتاج قضیهٔ توران از این ادعا، از نابرابری کوشی‌ـشوارتس استفاده می‌کنیم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{n=1}^{n} b_i^2\right)$$

قرار می‌دهیم $a_i = \sqrt{n-d_i}$، $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$، پس $a_i b_i = 1$، و خواهیم داشت

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(n-d_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d_i}\right) \leq \omega(G)\sum_{i=1}^{n}(n-d_i) \quad (2)$$

در این مرحله از فرض $\omega(G) \leq p-1$ در قضیهٔ توران استفاده می‌کنیم. همچنین با به‌کارگیری رابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$ که در فصل مربوط به‌شمارش دوگانه آمد، نابرابری (۲) را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$n^2 \leq (p-1)(n^2 - 2|E|)$$

و این معادل است با نابرابری توران. □

حال به‌صورت قوی زیر از قضیهٔ توران توجه کنید:

فرض کنید $t(n,p)$ تعداد یال‌ها در گراف توران، $K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$، با $n = n_1 + \ldots + n_{p-1}$ رأس باشد.

در این‌صورت به‌ازای هر گراف H با n رأس بدون pـخوشه داریم $|E(H)| \leq t(n,p)$، که علامت برابری فقط برای گراف توران برقرار است.

از هر دو اثبات ۱ و ۲، این حکم قویتر نتیجه گرفته می‌شود.

مراجع

[1] M. AIGNER: *Turán's graph theorem*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), 808-816.

[2] N. ALON & J. SPENCER: *The Probabilistic Method*, Wiley Interscience 1992.

[3] P. ERDŐS: *On the graph theorem of Turán (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok **21** (1970), 249-251.

[4] T. S. MOTZKIN & E. G. STRAUSS: *Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán*, Canad. J. Math. **17** (1965), 533-540.

[5] P. TURÁN: *On an extremal problem in graph theory*, Math. Fiz. Lapok **48** (1941), 436-452.

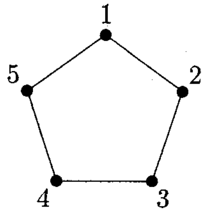
فصل ۲۸

مخابرهٔ بدون خطا

کلود شانن[1] بنیانگذار نظریهٔ اطلاعات در سال ۱۹۵۶ پرسش بسیار جالب زیر را مطرح کرد:

> فرض کنید می‌خواهیم پیامهایی را از طریق یک کانال (که در آن بعضی از نمادها ممکن است تحریف شوند) برای گیرنده‌ای بفرستیم. آهنگ ماکسیمال انتقال پیام به‌نحوی‌که گیرنده بتواند پیام اصلی را بدون خطا دریافت کند چیست؟

اول ببینیم منظور شانن از «کانال» و «آهنگ انتقال» چیست. مجموعه‌ای چون V از نمادها به ما داده شده است، و هر پیام صرفاً رشته‌ای از نمادهای متعلق به V است. گرافی چون $G = (V, E)$ را به‌عنوان مدل کانال در نظر می‌گیریم که در آن V مجموعهٔ نمادهاست، و E مجموعهٔ یالهای بین جفتهای غیر قابل اعتماد از نمادها، یعنی نمادهایی که در خلال انتقال ممکن است با هم اشتباه شوند. مثلاً در مکالمه با تلفن [به‌زبان انگلیسی] نمادهای P و B را به‌وسیلهٔ یالی به هم وصل می‌کنیم زیرا گیرنده ممکن است این دو حرف را از هم تشخیص ندهد. G را گراف اشتباه می‌نامیم.



۵ـدور [دورِ به‌طول ۵] $C_۵$ نقش برجسته‌ای در بحث ما خواهد داشت. در این مثال، ۱ و ۲ ممکن است با هم اشتباه شوند، ولی ۱ و ۳ با هم اشتباه نمی‌شود. کمال مطلوب این است که بتوانیم هر ۵ نماد را برای انتقال به کار ببریم، اما چون می‌خواهیم پیام رسانی ما عاری از خطا باشد ــ اگر فقط نمادهای سیگنالی را ارسال کنیم ــ از هر جفت نمادی که ممکن است با هم اشتباه شوند فقط یکی را به‌کار می‌گیریم. پس برای ۵ـدور می‌توانیم فقط از دو نماد (هر دو نمادی که به وسیلهٔ یالی به‌هم وصل نیستند) استفاده کنیم. این به‌زبان نظریهٔ اطلاعات بدان معنی است که برای ۵ـدور، آهنگ اطلاع برابر $\log_۲ ۲ = ۱$ (به‌جای مقدار ماکسیمال $\log_۲^۵ \approx ۲٫۳۲$) است. روشن است که در این مدل، برای گراف دلخواه $G = (V, E)$، بهترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم انتقال نمادهای متعلق به یک مجموعهٔ مستقل با بزرگترین اندازه است، پس آهنگ اطلاع، وقتی نمادهای سیگنالی می‌فرستیم، $\log_۲ \alpha(G)$ است که در آن $\alpha(G)$ عدد استقلال G است.

---

1. Claude Shannon

حال ببینیم که آیا می‌شود آهنگ اطلاع را با استفاده از رشته‌های بزرگتر به‌جای تک نمادها افزایش داد یا خیر. فرض کنید می‌خواهیم رشته‌هایی به‌طول ۲ را انتقال دهیم. رشته‌های $u_۱u_۲$ و $v_۱v_۲$ فقط در صورتی ممکن است با هم اشتباه شوند که از یکی از حالتهای زیر برقرار باشد:

- $u_۱ = v_۱$ و $v_۲$ قابل اشتباه با $v_۲$ باشد.
- $u_۲ = v_۲$ و $u_۱$ قابل اشتباه با $v_۱$ باشد.
- $u_۱ \neq v_۱$ قابل اشتباه با هم و $u_۲ \neq v_۲$ نیز قابل اشتباه باهم باشند.

به‌زبان نظریهٔ گراف، این معادل است با در نظر گرفتن $G_۱ \times G_۲$، حاصلضرب دو گراف $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$. گراف $G_۱ \times G_۲$ دارای مجموعهٔ رئوس $V_۱ \times V_۲ = \{(u_۱, u_۲) : u_۱ \in V_۱, u_۲ \in V_۲\}$ است که $(u_۱, u_۲) \neq (v_۱, v_۲)$ با یالی به‌هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر به‌ازای $i = ۱, ۲$، $u_i = v_i$ یا $u_iv_i \in E$. پس گراف اشتباه برای رشته‌هایی به طول ۲ عبارت است از $G^۲ = G \times G$، حاصلضرب گراف در خودش. لذا آهنگ اطلاع رشته‌های به‌طول ۲ در هر نماد برابر است با

$$\frac{\log_۲ \alpha(G^۲)}{۲} = \log_۲ \sqrt{\alpha(G^۲)}$$

حال، البته، می‌توانیم رشته‌هایی با هر طول دلخواه n را به‌کار گیریم. گراف اشتباه nام $G^n = G \times G \times \ldots \times G$ دارای مجموعهٔ رئوس

$$V^n = \{(u_۱, \ldots, u_n) : u_i \in V\}$$

است که $(u_۱, \ldots, u_n) \neq (v_۱, \ldots, v_n)$ با یالی به هم وصل می‌شوند اگر به ازای هر i، $u_i = v_i$ یا $u_iv_i \in E$، پس آهنگ اطلاع در نماد برای رشته‌های به طول n چنین است

$$\frac{\log_۲ \alpha(G^n)}{n} = \log_۲ \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

دربارهٔ $\alpha(G^n)$ چه می‌توان گفت؟ یک نکتهٔ مقدماتی این است. فرض کنید $U \subseteq V$ یک مجموعهٔ مستقل در G با بزرگترین اندازه باشد، $|U| = \alpha$. α^n رأس در G^n به شکل $(u_۱, \ldots, u_n)$ که به‌ازای هر i، $u_i \in U$، به‌وضوح مجموعهٔ مستقلی در G^n تشکیل می‌دهند. پس

$$\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n$$

بنابراین

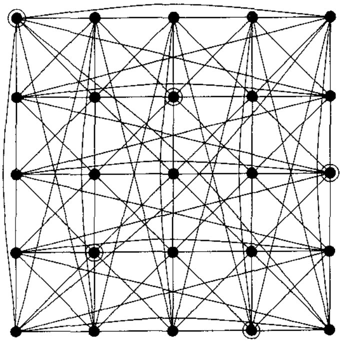
$$\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \geq \alpha(G)$$

یعنی با استفاده از رشته‌های طویلتر به‌جای تک نمادها، آهنگ اطلاع هرگز کاهش نمی‌یابد. این موضوع، در ضمن یکی از مفاهیم اصلی نظریهٔ کدگذاری است: با کدگذاری نمادها به‌صورت رشته‌های طویلتر می‌توانیم مخابرات عاری از خطا را کاراتر سازیم.

پس با صرفنظر از لگاریتم می‌توانیم به تعریف بنیادی شانن برسیم: ظرفیت خطا_صفر گراف G با رابطهٔ

$$\Theta(G) : \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

مشخص می‌شود و مسألهٔ شانن محاسبهٔ $\Theta(G)$ و به‌خصوص $\Theta(C_5)$ بود.



گراف $C_5 \times C_5$

بیایید نگاهی به C_5 بیندازیم. تا اینجا می‌دانیم $\alpha(C_5) = 2 \leq \Theta(C_5)$. با توجه به ۵_دورکه قبلاً نشان داده شد، یا به‌حاصلضرب $C_5 \times C_5$ که نمودارش در حاشیهٔ مقابل رسم شده است، می‌بینیم که مجموعهٔ $\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,2),(5,4)\}$ در C_5^2 مستقل است. پس داریم $\alpha(C_5^2) \geq 5$. چون یک مجموعهٔ مستقل می‌تواند فقط شامل دو رأس از هر دو سطر متوالی باشد، می‌بینیم که $\alpha(C_5^2) = 5$. پس، با استفاده از رشته‌های به‌طول ۲، کران پایین ظرفیت را به $\sqrt{5} \leq \Theta(C_5)$ افزایش داده‌ایم.

تا اینجا کران بالایی برای ظرفیت نداریم. برای به‌دست آوردن چنین کرانهایی باز از ایده‌های اصلی شانن پیروی می‌کنیم. نخست به‌تعریف دوگان مجموعهٔ مستقل نیاز داریم. به یادآورید که زیرمجموعه‌ای چون $C \subseteq V$ یک خوشه است اگر هر دو رأس C با یالی به هم وصل شوند. پس رأسها خوشه‌های پیش پا افتاده با اندازهٔ ۱ تشکیل می‌دهند، یالها خوشه‌های با اندازهٔ ۲ هستند، مثلثها خوشه‌های با اندازهٔ ۳ هستند، و به همین ترتیب. فرض کنید $\mathcal{C}$ مجموعهٔ خوشه‌های موجود در G باشد. یک توزیع احتمال دلخواه $\boldsymbol{x} = (x_v : v \in V)$ برای مجموعهٔ رئوس در نظر بگیرید، یعنی $x_v \geq 0$ و $\sum_{v \in V} x_v = 1$. به هر توزیع $\boldsymbol{x}$ «مقدار ماکسیمال یک خوشه»

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v$$

را نسبت می‌دهیم، و بالاخره قرار می‌دهیم

$$\lambda(G) = \min_{\boldsymbol{x}} \lambda(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x}} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v$$

اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید از inf به‌جای min استفاده کنیم، ولی مینیمم وجود دارد زیرا $\lambda(\boldsymbol{x})$ روی مجموعهٔ فشردهٔ همهٔ توزیعها پیوسته است.

حال مجموعهٔ مستقلی چون $U \subseteq V$ با اندازهٔ ماکسیمال $|U| = \alpha(G)$ در نظر بگیرید. توزیع $\boldsymbol{x}_U = (x_v : v \in V)$ را وابسته به U تعریف می‌کنیم به‌این ترتیب که قرار می‌دهیم $x_v = \frac{۱}{\alpha}$ اگر $v \in U$ و $x_v = ۰$ در غیر این‌صورت. چون هر خوشه‌ای شامل حداکثر یک رأس از U است، نتیجه می‌گیریم $\lambda(\boldsymbol{x}_U) = \frac{۱}{\alpha}$، و بنابراین، طبق تعریف $\lambda(G)$

$$\alpha(G) \leq \lambda(G)^{-۱} \quad \text{یا} \quad \lambda(G) \leq \frac{۱}{\alpha(G)}$$

چیزی که شانُن به آن پی برد این است که $\lambda(G)^{-۱}$ در واقع یک کران بالا برای هر $\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ و در نتیجه برای $\Theta(G)$ است. برای اثبات این موضوع کافی است نشان دهیم که به‌ازای گرافهای G و H رابطهٔ

$$\lambda(G \times H) = \lambda(G)\lambda(H) \qquad (۱)$$

برقرار است چون از اینجا نتیجه می‌شود $\lambda(G^n) = \lambda(G)^n$ و بنابراین

$$\alpha(G^n) \leq \lambda(G^n)^{-۱} = \lambda(G)^{-n}$$
$$\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \lambda(G)^{-۱}$$

برای اثبات (۱) از قضیهٔ دوگانی برنامه‌سازی خطی ([۱] را ببینید) استفاده کرده به‌دست می‌آوریم

$$\lambda(G) = \min_{\boldsymbol{x}} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v = \max_{\boldsymbol{y}} \min_{v \in V} \sum_{C \ni v} y_C \qquad (۲)$$

که در آن طرف راست همهٔ توزیعهای احتمال $\boldsymbol{y} = (y_C : C \in \mathcal{C})$ بر $\mathcal{C}$ را در بر می‌گیرد.

$G \times H$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{x}'$ توزیعهایی باشند که مینیممهای $\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda(G)$، $\lambda(\boldsymbol{x}') = \lambda(H)$ را به‌دست می‌دهند. در مجموعه رئوس $G \times H$ مقدار $z_{(u,v)} = x_u x'_v$ را به رأس (u,v) منسوب می‌کنیم. چون $\sum_{(u,v)} z_{(u,v)} = \sum_u x_u \sum_v x'_v = ۱$، توزیعی به‌دست می‌آوریم. سپس ملاحظه می‌کنیم که خوشه‌های ماکسیمال در $G \times H$ به‌شکل

$C \times D = \{(u,v) : u \in C, v \in D\}$ هستند که C و D خوشه‌هایی، به‌ترتیب، در G و Hاند. پس با استفاده از تعریف $\lambda(G \times H)$ داریم

$$\lambda(G \times H) \leq \lambda(z) \max_{C \times D} \sum_{(u,v) \in C \times D} z_{(u,v)}$$
$$= \max_{C \times D} \sum_{u \in C} x_u \sum_{v \in D} x'_v = \lambda(G)\lambda(H)$$

به‌همین طریق، نابرابری معکوس یعنی $\lambda(G \times H) \geq \lambda(G)\lambda(H)$ با استفاده از عبارت دوگان برای $\lambda(G)$ در (۲) ثابت می‌شود. به‌طور خلاصه، می‌توانیم بگوییم که به‌ازای هر گراف G

$$\Theta(G) \leq \lambda(G)^{-1}$$

اکنون یافته‌های خود را در مورد ۵ـدور، و به‌طورکلی، در مورد mـدور C_m به‌کار می‌بریم. با استفاده از توزیع یکنواخت $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ برای رأسها، رابطهٔ $\lambda(C_m) \leq \frac{2}{m}$ را به‌دست می‌آوریم چون هر خوشه شامل حداکثر دو رأس است. به‌همین نحو، با انتخاب $\frac{1}{m}$ برای یالها و ۰ برای رأسها، بنابه عبارت دوگان در (۲) داریم $\lambda(C_m) = \frac{2}{m}$، و از این رو به‌ازای هر m

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{2}$$

حال اگر m زوج باشد، به‌وضوح $\alpha(C_m) = \frac{m}{2}$ و لذا $\Theta(C_m) = \frac{m}{2}$. ولی به‌ازای mهای فرد داریم $\alpha(C_m) = \frac{m-1}{2}$. به‌ازای $m = 3$، C_3 یک خوشه است، و هر حاصلضرب C_3^n نیز چنین است که در نتیجه $\alpha(C_3) = \Theta(C_3) = 1$. پس نخستین حالت جالب توجه، ۵ـدور است که در مورد آن تا اینجا می‌دانیم که

$$\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2} \tag{۳}$$

شانن با استفاده از رویکرد مبتنی بر برنامه‌سازی خطی (و بعضی ایده‌های دیگر) توانست ظرفیت بسیاری گرافها و، به‌خصوص همهٔ گرافهایِ با پنج رأس یا کمتر، را محاسبه کند ــ به استثنای C_5 که در این مورد نتوانست از کرانهای مذکور در (۳) فراتر رود. وضع در همین حالت متوقف ماند تا آنکه ۲۰ سال لاسلو لوواس[1] با استدلالی که به‌طرز شگفت‌آوری ساده است نشان داد که واقعاً $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$. مسأله‌ای ترکیبیاتی که به‌ظاهر بسیار دشوار بود راه‌حلی غیر منتظره و زیبا یافت.

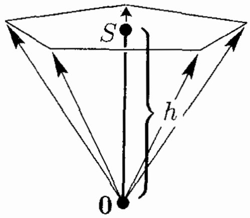
ایدهٔ اصلی لوواس، نشان دادن رأسهای vی گراف به‌وسیلهٔ بردارهای حقیقی به‌طول ۱ بود به‌نحوی که هر دو برداری که به رأسهای غیر مجاور در G تعلق دارند بر یکدیگر

1. László Lovász

عمود باشند. چنین مجموعه‌ای از بردارها را نمایش یکامتعامد G می‌نامیم. روشن است که چنین نمایشی همواره وجود دارد: کافی است بردارهای واحد $(۱,۰,\ldots,۰)^T$، $(۰,۱,۰,\ldots,۰)^T$، ...، $(۰,۰,\ldots,۱)^T$ با بعد $m = |V|$ را در نظر بگیریم.

به‌منظور اینکه نمایش یکامتعامدی برای $C_۵$ در $\mathbb{R}^۳$ به‌دست آوریم، «چتر»ی با پنج «سیم‌پرهٔ» $v_۱$، ...، $v_۵$ به‌طول واحد در نظر می‌گیریم. سپس چتر را (که رأس آن در مبدأ است) تا جایی باز می‌کنیم که زاویه‌های بین سیم‌پره‌هایِ یک در میان ۹۰ درجه باشد.

لوواس سپس نشان داد که h، ارتفاع چتر، یعنی فاصلهٔ بین ۰ و S، کران



چتر لوواس

$$\Theta(C_۵) \leq \frac{۱}{h^۲} \qquad (۴)$$

را به‌دست می‌دهد. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که $h^۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$؛ تابلو صفحهٔ بعد را ببینید. از اینجا نتیجه می‌شود $\Theta(C_۵) \leq \sqrt{۵}$، و بنابراین $\Theta(C_۵) = \sqrt{۵}$.

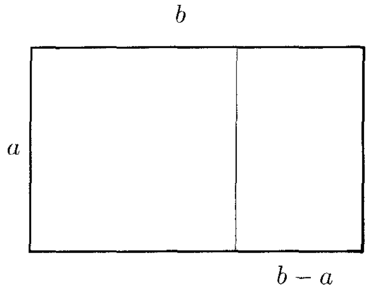
ببینیم که لوواس چگونه به اثبات نابرابری (۴) پرداخت. (نتایج او در واقع خیلی کلیتر بود). حاصلضرب داخلی معمولی دو بردار $\boldsymbol{x} = (x_۱,\ldots,x_s)$، $\boldsymbol{y} = (y_۱,\ldots,y_s)$ در $\mathbb{R}^s$ یعنی

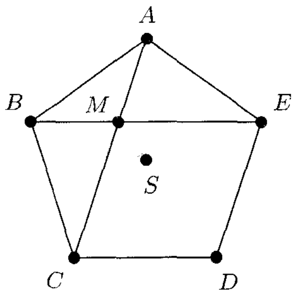
$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = x_۱y_۱ + \ldots + x_sy_s$$

را در نظر بگیرید. در این‌صورت $|\boldsymbol{x}|^۲ = \langle \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\rangle = x_۱^۲ + \ldots + x_s^۲$ مربع $|\boldsymbol{x}|$ یعنی طول $\boldsymbol{x}$ است و زاویهٔ γ بین $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ با

$$\cos\gamma = \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$$

مشخص می‌شود. پس $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ متعامد باشند.





پنج ضلعی و نسبت طلایی

از روزگار باستان، مستطیلی را از لحاظ زیبایی‌شناختی مطلوب می‌دانستند که در صورت جدا کردن مربعی به طول ضلع a از آن، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه باشد. عرض و طول چنین مستطیلی، a و b، باید در $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$ صدق کنند. با فرض $\tau := \frac{b}{a}$ به‌دست می‌آوریم $\tau = \frac{۱}{\tau-۱}$ یا $\tau^۲ - \tau - ۱ = ۰$. با حل این معادلهٔ درجهٔ دوم، نسبت طلایی $\tau = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \approx ۱٫۶۱۸۰$ به‌دست می‌آید.

حال یک پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع a در نظر بگیرید و فرض کنید d طول قطرهایش باشد. بر اقلیدس معلوم بود (مقالهٔ پنج، قضیهٔ ۲) که $\frac{d}{a} = \tau$، و نقطهٔ تقاطع دو قطر، قطرها را به نسبت طلایی تقسیم می‌کند.

و این است اثبات «کتابی» اقلیدس برای آن. چون مجموع زاویه‌های پنج ضلعی ۳π است، زاویهٔ هر رأس برابر $\frac{۳\pi}{۵}$ است. بنابراین $\sphericalangle ABE = \frac{\pi}{۵}$، چون ABE مثلثی متساوی‌الساقین است. و از اینجا پی می‌بریم $\sphericalangle AMB = \frac{۳\pi}{۵}$، و در نتیجه مثلثهای ABC و AMB متشابه‌اند. چهار ضلعی $CMED$ لوزی است زیرا ضلعهای مقابل آن موازی‌اند (به زاویه‌ها نگاه کنید)، و بنابراین $|MC| = a$ و از این رو $|AM| = d - a$. از تشابه ABC و AMB نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{|MC|}{|MA|} = \tau$$

اما نتایج دیگری هم می‌توان به‌دست آورد. از خواننده می‌خواهیم که نشان دهد s، فاصلهٔ یک رأس تا گرانیگاه پنج ضلعی (S)، در رابطهٔ $s^۲ = \frac{d^۲}{\tau+۲}$ صدق می‌کند (توجه کنید که BS قطر AC را به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کند و آن قطر را نصف می‌کند). حال برای اختتام این گشت و گذار در هندسه، چتری در نظر بگیرید که این پنج ضلعی منتظم در بالای آن است؛ چون سیم‌پره‌های یک در میان (به‌طول ۱) زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $d = \sqrt{۲}$، و بنابراین $s^۲ = \frac{۲}{\tau+۲} = \frac{۴}{\sqrt{۵}+۵}$. پس، باز به کمک قضیهٔ فیثاغورس، نتیجه‌ای را که در مورد $h = |OS|$ وعده کرده بودیم، می‌یابیم

$$h^۲ = ۱ - s^۲ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}+۵} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

اکنون می‌پردازیم به کران بالای "$\Theta(G) \leq \sigma_T$" برای ظرفیت شانن گراف دلخواه G که نمایش متعامد بسیار «خوب»ی دارد. به‌این منظور فرض می‌کنیم $T = \{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(m)}\}$ نمایش متعامدی از G در $\mathbb{R}^s$ باشد که در آن $\boldsymbol{v}^{(i)}$ متناظر است با رأس v_i. به‌علاوه فرض می‌کنیم که هر $\boldsymbol{v}^{(i)}$ زاویه‌ای یکسان (مخالف 90°) با بردار $\boldsymbol{u} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{v}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{v}^{(m)})$ دارد یا به عبارت دیگر، حاصلضرب داخلی

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u} \rangle = \sigma_T$$

به‌ازای هر i مقدار یکسان $\sigma_T \neq 0$ را دارد. این مقدار σ_T را ثابت نمایش T می‌نامیم. برای آن چتر لوواس که نمایش دهندهٔ C_5 است، شرط $\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{u} \rangle = \sigma_T$ مسلماً برقرار است زیرا $\boldsymbol{u} := \vec{OS}$.

(الف) یک توزیع احتمال $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ بر V در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\mu(\boldsymbol{x}) := |x_1\boldsymbol{v}^{(1)} + \ldots + x_m\boldsymbol{v}^{(m)}|^2$$

و

$$\mu_T(G) = \inf_{\boldsymbol{x}} \mu(\boldsymbol{x})$$

فرض می‌کنیم U مجموعهٔ مستقلی با بزرگترین اندازه در G باشد که $|U| = \alpha$، و $\boldsymbol{x}_U = (x_1, \ldots, x_m)$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: $x_i = \frac{1}{\alpha}$ اگر $v_i \in U$ و $x_i = 0$ در غیر این‌صورت. چون همهٔ بردارهای $\boldsymbol{v}^{(i)}$ دارای طول واحدند و به‌ازای هر دو رأس غیر مجاور داریم $\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = 0$، نتیجه می‌گیریم

$$\mu_T(G) \leq \mu(\boldsymbol{x}_U) = \left| \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{v}^{(i)} \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

پس داریم $\mu_T(G) \leq \alpha^{-1}$ و بنابراین

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\mu_T(G)}$$

(ب) حال $\mu_T(G)$ را محاسبه می‌کنیم. در این کار به‌نابرابری کوشی-شوارتس نیاز داریم که این است: به‌ازای بردارهای $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^s$

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2$$

اگر این نابرابری را بر $a = x_1 v^{(1)} + \ldots + x_m v^{(m)}$ و $b = u$ اعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\langle x_1 v^{(1)} + \ldots + x_m v^{(m)}, u\rangle^2 \leq \mu(x)|u|^2 \qquad (5)$$

بنابه این فرض که به‌ازای هر i، $\langle v^{(i)}, u\rangle = \sigma_T$، برای هر توزیع x داریم

$$\langle x_1 v^{(1)} + \ldots + x_m v^{(m)}, u\rangle = (x_1 + \ldots + x_m)\sigma_T = \sigma_T$$

پس، به‌خصوص این رابطه باید برای توزیع یکنواخت $(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ برقرار باشد که در نتیجه $|u|^2 = \sigma_T$. بنابراین (۵) به‌صورت

$$\sigma_T^2 \leq \mu(x)\sigma_T \qquad \text{یا} \qquad \mu_T(G) \geq \sigma_T$$

در می‌آید.

از سوی دیگر، به‌ازای $x = (\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ به‌دست می‌آوریم

$$\mu_T(G) \leq \mu(x) = |\frac{1}{m}(v^{(1)} + \ldots + v^{(m)})|^2 \ |u|^2 = \sigma_T$$

و بنابراین ثابت کرده‌ایم

$$\mu_T(G) = \sigma_T \qquad (6)$$

خلاصه اینکه، نابرابری

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \qquad (7)$$

را به‌ازای هر نمایش یکامتعامد T با σ_Tی ثابت، اثبات کرده‌ایم.

(پ) برای تعمیم این نابرابری به $\Theta(G)$ مانند قبل عمل می‌کنیم. دوباره حاصلضرب دو گراف، $G \times H$، را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم G و H به‌ترتیب نمایشهای یکامتعامد R و S، به‌ترتیب، در $\mathbb{R}^r$ و $\mathbb{R}^s$ با ثابتهای σ_R و σ_S باشند. گیریم $v = (v_1, \ldots, v_r)$ برداری در R و $w = (w_1, \ldots, w_s)$ برداری در S باشد. به رأسی در $G \times H$ که متناظر با جفت (v, w) است، بردار

$$vw^T := (v_1 w_1, \ldots, v_1 w_s, v_2 w_1, \ldots, v_2 w_s, \ldots, v_r w_1, \ldots, v_r w_s) \in \mathbb{R}^{rs}$$

را نسبت می‌دهیم. فوراً می‌توان دید که $R \times S := \{vw^T : v \in R, w \in S\}$ نمایشی یکامتعامد از $G \times H$ با ثابت $\sigma_R \sigma_S$ است. پس بنابه (۶) به‌دست می‌آوریم.

$$\mu_{R\times S}(G \times H) = \mu_R(G)\mu_S(H)$$

این رابطه به‌ازای $G^n = G \times \ldots \times G$ و نمایش T با ثابت σ_T به این معنی است که

$$\mu_{T^n}(G^n) = \mu_T(G)^n = \sigma_T^n$$

و بنا به (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\alpha(G^n) \leq \sigma_T^{-n} \quad , \quad \sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \alpha_T^{-1}$$

به‌این ترتیب، با کنار هم گذاشتن همهٔ این مطالب، استدلال لوواس را کامل کرده‌ایم:

قضیه. هرگاه $T = \{v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}\}$ نمایشی یکامتعامد از G با ثابت σ_T باشد، آنگاه

$$\Theta(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \tag{۸}$$

«چترهایی با پنج سیم‌پره»

با نظری به چتر لوواس داریم $u = (0, 0, h = \frac{1}{\sqrt[4]{5}})^T$، و بنابراین $\sigma = \langle v^{(i)}, u\rangle = h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ که به‌دست می‌آید $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$. پس مسألهٔ شانن حل شده است.

بحث را اندکی ادامه می‌دهیم. با توجه به (۸) می‌بینیم که هر قدر σ_T برای یک نمایش G بزرگتر باشد، کران بهتری برای $\Theta(G)$ به‌دست می‌آوریم. در اینجا روشی ذکر می‌کنیم که نمایشی یکامتعامد برای هر گراف G به‌دست می‌دهد. به $G = (V, E)$ ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})$ را منسوب می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود: فرض می‌کنیم $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & v_iv_j \in E \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

A یک ماتریس متقارن حقیقی است که عناصر قطر اصلیش ۰ اند.

اکنون به دو مطلب از جبر خطی نیاز داریم. نخست، A به‌عنوان ماتریس متقارن دارای m ویژه مقدار $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ است (که بعضی از آنها می‌توانند

برابر باشند)، و مجموع ویژه مقدارها برابر مجموع درایه‌های قطری A، یعنی ۰، است. پس کوچکترین ویژه مقدار باید منفی باشد (بجز در حالت پیش پا افتاده‌ای که G یالی نداشته باشد). فرض کنید $p = |\lambda_m| = -\lambda_m$ قدرمطلق کوچکترین ویژه‌مقدار باشد، و ماتریس

$$M := I + \frac{۱}{p}A$$

را در نظر بگیرید که در آن I نشان‌دهندهٔ ماتریس همانی $(m \times m)$ است. این M دارای ویژه مقدارهای

$$۱ + \frac{\lambda_۱}{p} \geq ۱ + \frac{\lambda_۲}{p} \geq \ldots \geq ۱ + \frac{\lambda_m}{p} = ۰$$

است. حال مطلب دوم را نقل می‌کنیم (قضیهٔ محور اصلی در جبر خطی): اگر $M = (m_{ij})$ یک ماتریس متقارن حقیقی باشد که همهٔ ویژه مقدارها نامنفی باشد، آنگاه بردارهای

$$\boldsymbol{v}^{(۱)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(m)} \in \mathbb{R}^s \quad \text{به‌ازای } s = (\text{رتبهٔ } M)$$

وجود دارند به‌نحوی‌که

$$m_{ij} = \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle \qquad (۱ \leq i, j \leq m)$$

در حالت خاص $M = I + \frac{۱}{p}A$ داریم

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(i)} \rangle = m_{ii} = ۱ \qquad \text{به‌ازای هر } i\text{،}$$

و

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = \frac{۱}{p}a_{ij} \qquad \text{به‌ازای هر } i \neq j\text{،}$$

چون هرگاه $v_iv_j \notin E$، $a_{ij} = ۰$، می‌بینیم که بردارهای $\boldsymbol{v}^{(۱)}$، ...، $\boldsymbol{v}^{(m)}$ واقعاً نمایشی یکامتعامد از G تشکیل می‌دهند.

و بالاخره، این شیوهٔ ساخت را در مورد mـدورهای C_m به‌ازای mهای فرد ناکمتر از ۵ به‌کار می‌بریم. در اینجا به‌راحتی $p = |\lambda_{\min}| = ۲\cos\frac{\pi}{m}$ را محاسبه می‌کنیم (تابلو صفحهٔ ۲۵۳ را ببینید). هر سطر از ماتریس مجاورت شامل دوتا ۱ است و در نتیجه مجموع هر سطر از ماتریس M برابر $۱ + \frac{۲}{p}$ است. این برای نمایش $\{\boldsymbol{v}^{(۱)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(m)}\}$ بدین معنی است که

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس مجاورت برای ۵ـدور $C_۵$

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{v}^{(m)} \rangle = ۱ + \frac{۲}{p} = ۱ + \frac{۱}{\cos \frac{\pi}{m}}$$

و از اینجا، به‌ازای هر i

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{u} \rangle = \frac{۱}{m}(۱ + (\cos \frac{\pi}{m})^{-۱}) = \sigma$$

پس می‌توانیم حکم اصلی بحث (۸) را به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{۱ + (\cos \frac{\pi}{m})^{-۱}} \qquad \text{(به‌ازای } m \geq ۵ \text{ فرد)} \qquad (۹)$$

توجه کنید که چون $\cos \frac{\pi}{m} < ۱$، کران (۹) بهتر از کران $\Theta(C_m) \leq \frac{m}{۲}$ است که قبلاً یافتیم. به‌علاوه، $\cos \frac{\pi}{۵} = \frac{\tau}{۲}$ که $\tau = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ نسبت طلایی است. در اینجا برای $m = ۵$ باز رابطهٔ

$$\Theta(C_۵) \leq \frac{۵}{۱ + \frac{۴}{\sqrt{۵} + ۱}} = \frac{۵(\sqrt{۵} + ۱)}{۵ + \sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

را به‌دست می‌آوریم. البته نمایش یکامتعامدی که با این ساختمان مشخص می‌شود دقیقاً همان «چتر لوواس» است.

و دربارهٔ $C_۷$، $C_۹$، و سایر دورهای فردچه می‌توان گفت؟ با در نظرگرفتن $\alpha(C_m^۲)$، $\alpha(C_m^۳)$ و سایر توانهای کوچک مسلماً می‌توان کران پایین $\frac{m-۱}{۲} \leq \Theta(C_m)$ را افزایش داد اما به‌ازای هیچ $m \geq ۷$ فرد، کرانهای پایین معروف با کران بالای مشخص شده در (۸) توافق ندارند. پس بیست سال پس از اثبات شگفت‌انگیز لوواس از $\Theta(C_۵) = \sqrt{۵}$، این مسأله‌ها حل ناشده مانده‌اند و بسیار دشوار قلمداد می‌شوند ــ ولی به‌هرحال، قبل از آن هم با این وضعیت روبه‌رو بودیم.

ویژه‌مقدارهای C_m

به A، ماتریس مجاورت دور C_m، توجه کنید. برای یافتن ویژه مقدارها (و ویژه بردارها)، ریشه‌های mام یک را در نظر می‌گیریم. اینها به‌ازای $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ به‌صورت $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{m-1}$ هستند ــ تابلو صفحهٔ ۳۴ را ببینید. فرض کنید $\lambda = \zeta^k$ یکی از این ریشه‌ها باشد. ادعا می‌کنیم که $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{m-1})^T$ ویژه برداری از A متناظر با ویژه مقدار $\lambda + \lambda^{-1}$ است. در واقع با تشکیل ماتریس A داریم

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda^{m-1} \\ \lambda^2 + 1 \\ \lambda^3 + \lambda \\ \vdots \\ 1 + \lambda^{m-2} \end{pmatrix} = (\lambda + \lambda^{-1})\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix}$$

چون بردارهای $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{m-1})$ مستقل‌اند (آنها یک ماتریس واندرموند تشکیل می‌دهند) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای mهای فرد

$$\begin{aligned} \zeta^k + \zeta^{-k} &= [(\cos(2k\pi/m) + i\sin(2k\pi/m)] \\ &\quad + [\cos(2k\pi/m) - i\sin(2k\pi/m)] \\ &= 2\cos(2k\pi/m) \quad (0 \le k \le \frac{m-1}{2}) \end{aligned}$$

همگی ویژه مقدارهای A هستند. اما کسینوس تابعی نزولی است و بنابراین

$$2\cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = -2\cos\frac{\pi}{m}$$

کوچکترین ویژه مقدار A است.

مراجع

[1] V. Chvátal: *Linear Programming*, Freeman, New York 1983.

[2] W. Haemers: *Eigenvalue methods*, in: "Packing and Covering in Combinatorics" (A. Schrijver, ed.), Math. Centre Tracts **106** (1979), 15-38.

[3] L. LOVÁSZ: *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Trans. Information Theory **25** (1979), 1-7.

[4] C. E. SHANNON: *The zero-error capacity of a noisy channel*, IRE Trans. Information Theory **3** (1956), 3-15.

از دوستان و سیاستمداران فصل ۲۹

معلوم نیست چه‌کسی برای اولین‌بار مسألهٔ زیر را مطرح کرده یا چه‌کسی آن را برحسب گروههای انسانی بیان کرده است.

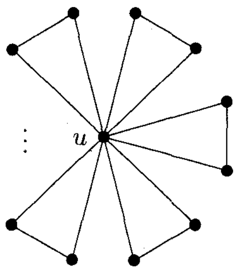
«لبخند سیاستمدار»

> فرض کنید در گروهی مرکب از دست‌کم سه‌نفر، هر دو نفر دقیقاً یک دوست مشترک دارند. در این صورت همواره یک نفر («سیاستمدار») هست که با همه دوست است.

این مسأله را در زبان اهل ریاضیات، قضیهٔ دوستی می‌نامند.

پیش از پرداختن به اثبات، مسأله را به‌زبان نظریهٔ گراف بیان می‌کنیم. افراد گروه را مجموعهٔ رئوس V با $|V| = n \geq ۳$ در نظر می‌گیریم و دو رأس را با یالی به‌هم وصل می‌کنیم اگر افراد متناظر با آن رأسها با هم دوست باشند. ضمناً فرض می‌کنیم دوستی همیشه دوطرفه است، یعنی اگر u دوست v باشد، v نیز دوست u است، و به‌علاوه هیچ کس دوست خودش نیست. پس قضیه به‌شکل زیر در می‌آید:

قضیه. فرض کنید G گرافی با $n \geq ۳$ رأس باشد که در آن هر دو رأس دقیقاً یک رأس همسایهٔ مشترک داشته باشند. در این‌صورت رأسی وجود دارد که مجاور به همهٔ رأسهاست.



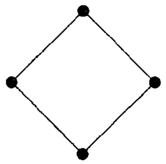
گرافی به‌شکل آسیاب بادی

خاطرنشان می‌کنیم که گرافهایی با این ویژگی، مانند شکل حاشیه، وجود دارند که در آنها u سیاستمدار است: در واقع نشان خواهیم داد که این "گرافهایِ به‌شکل آسیاب بادی" تنها گرافهایی هستند که این ویژگی را دارند.

روشن است که درصورت وجود یک سیاستمدار، گرافهای مورد نظر فقط به‌شکل آسیاب بادی می‌توانند باشند. اثباتهای متعددی برای قضیهٔ دوستی وجود دارد، ولی اولین اثبات، که اردوش، آلفرد رنی و ورا شوش[1] آن را عرضه کردند هنوز هم استادانه‌تر از همه است.

■ **اثبات.** فرض کنید حکم غلط باشد، و G مثال ناقضی برای آن باشد، یعنی هیچ رأسی از G مجاور به‌همهٔ رأسهای دیگر نباشد. برای به‌دست آوردن تناقض در دو مرحله

1. Vera Sós



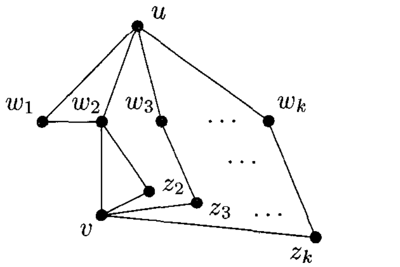
اقدام می‌کنیم. اولین قسمت به‌ترکیبیات و قسمت دوم به‌جبر خطی تعلق دارد.

(۱) ادعا می‌کنیم که G گرافی منتظم است یعنی به‌ازای هر $u \,,\, v \in V$، $d(u) = d(v)$. نخست توجه کنید که بنابه شرط قضیه، هیچ دوری به‌طول ۴ مانند شکل در G وجود ندارد. این را شرط $C_۴$ می‌نامیم.

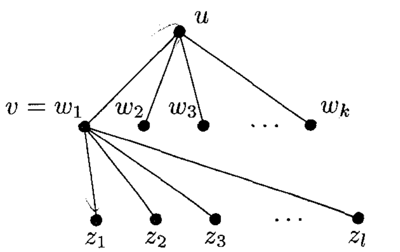
ابتدا اثبات می‌کنیم که هر دو رأس غیرمجاور u و v درجهٔ برابر دارند: $d(u) = d(v)$. فرض کنید $d(u) = k$ که در آن $w_۱$، ...، w_k رأسهای مجاور به u هستند.

دقیقاً یکی از w_iها، مثلاً $w_۲$، مجاور به v است، و $w_۲$ مجاور به دقیقاً یکی از w_iهای دیگر مثلاً $w_۱$ است، پس با وضعیتی روبه‌رو هستیم که در شکل حاشیه می‌بینید. رأس v با رأس $w_۱$ همسایهٔ مشترک $w_۲$ را دارد و با $w_i (i \geq ۲)$ همسایهٔ مشترک $z_i (i \geq ۲)$ را. بنابه شرط $C_۴$، همهٔ این z_iها باید متمایز باشند. نتیجه می‌گیریم $d(v) \geq k = d(u)$، و لذا بنابه‌تقارن، $d(u) = d(v)$.

باقی می‌ماند که نشان دهیم $d(u) = d(v)$ برای رأسهای مجاور u و v نیز برقرار است. فرض کنید $v = w_۱, w_۲, \ldots, w_k$ رأسهای مجاور به u هستند. اگر هر یک از رأسهای z غیرمجاور به u (دست‌کم یکی از این رأسها بنابه فرض وجود دارد) غیرمجاور به v نیز باشد، آنگاه بنابه آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم نتیجه می‌گیریم $d(u) = d(z) = d(v)$. پس می‌توانیم فرض کنیم که v مجاور به‌هر $z \notin \{w_۲, \ldots, w_k\}$ است. پس شکل دوم حاشیه همهٔ $۱ + k + l$ رأس گراف را نشان می‌دهد.



بنابه‌فرض $d(v) < n - ۱$ باید w_iای، مثلاً $w_۲$، وجود داشته باشد که مجاور به v نباشد. ولی $z_۱$ و $w_۲$ باید همسایهٔ مشترکی داشته باشند. این همسایه نمی‌تواند u باشد زیرا u و $z_۱$ مجاور نیستند، و نیز نمی‌تواند $v = w_۱$ باشد زیرا v و $w_۲$ مجاور نیستند. همچنین بنابه شرط $C_۴$ نمی‌تواند هیچ یک از w_jهای دیگر باشد. ولی یکی از z_jها $(j \geq ۲)$ هم بنا به‌شرط $C_۴$ نیست، و به این ترتیب همهٔ امکانات مختلف برای همسایهٔ مشترک $z_۱$ و $w_۲$ رد می‌شود.



در نتیجه، به‌ازای هر u و به‌ازای kای بین ۲ و $n - ۲$، $d(u) = k$. با نگاهی دوباره به‌شکل برای بررسی حالت رأسهای مجاور، پی‌می‌بریم که $n = k^۲ - k + ۱$. در واقع، هر یک از w_iها دقیقاً $k - ۲$ همسایه در بیرون $\{w_۱, \ldots, w_k\}$ دارد، و این رأسها همه (بنابه شرط $C_۴$) متمایزند. اینها همهٔ رأسهای باقیمانده هستند، زیرا هر رأس z در بیرون $\{u, w_۱, \ldots, w_k\}$ با u یک همسایهٔ مشترک دارد. پس

$$n = ۱ + k + k(k - ۲) = k^۲ - k + ۱ \qquad (۱)$$

(۲) بقیهٔ اثبات، کاربرد زیبایی از بعضی قضیه‌های متعارف جبر خطی است. نخست دقت کنید که k باید بزرگتر از ۲ باشد زیرا به‌ازای $k = ۲$، بنابه (۱) فقط $G = K_۳$ ممکن است، که گرافی به‌شکل آسیاب بادی است. ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})$ را که در فصل قبل تعریف شد در نظر بگیرید. بنابه قسمت (۱)، هر سطر دقیقاً k تا ۱ دارد، و بنابه شرط قضیه، هر دو سطر دقیقاً یک ۱ در یک ستون دارند. به‌علاوه، قطر اصلی مرکب از ۰هاست. پس داریم

$$A^۲ = \begin{pmatrix} k & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & k & & ۱ \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ۱ & \dots & ۱ & k \end{pmatrix} = (k - ۱)I + J$$

که در آن I ماتریس همانی است، و J ماتریس همهٔ ۱هاست. فوراً می‌توان دید که J دارای ویژه مقدارهای n (با چندگانگی ۱) و ۰ (با چندگانگی $n - ۱$) است. نتیجه گرفته می‌شود که $A^۲$ دارای ویژه مقدارهای $k - ۱ + n = k^۲$ (با چندگانگی ۱) و $k - ۱$ (با چندگانگی $n - ۱$) است.

چون A متقارن است و بنابراین قطری شدنی است، نتیجه می‌گیریم که A دارای ویژه مقدارهای k (با چندگانگی ۱) و $\pm\sqrt{k - ۱}$ است. فرض کنید r تا از ویژه مقدارها برابر $\sqrt{k - ۱}$ و s تا از آنها برابر $-\sqrt{k - ۱}$ هستند که $r + s = n - ۱$. حال تقریباً به‌مقصد رسیده‌ایم. چون مجموع ویژه مقدارهای A برابر است با اثر (که ۰ است)، داریم

$$k + r\sqrt{k - ۱} - s\sqrt{k - ۱} = ۰$$

و به‌خصوص، $r \neq s$، و

$$\sqrt{k - ۱} = \frac{k}{s - r}$$

نتیجه می‌شود که $\sqrt{k - ۱}$ عددی صحیح چون h است (اگر $\sqrt{m}$ گویا باشد، عددی صحیح است!)، و به‌دست می‌آوریم

$$h(s - r) = k = h^۲ + ۱$$

چون h، ۱ $h^۲ +$ و $h^۲$ را می‌شمارد، در می‌یابیم که h باید برابر ۱ باشد، و بنابراین $k = ۲$، که قبلاً آن را کنار گذاشته‌ایم. پس به‌تناقض رسیده‌ایم و اثبات تمام است. □

ولی داستان کاملاً به‌پایان نرسیده است. بیایید قضیه را به‌صورت زیر بیان کنیم: فرض کنید G گرافی است با این ویژگی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر به‌طول ۲ وجود دارد. روشن است که این بیان دیگری از شرط دوستی است. پس قضیهٔ ما حاکی است که تنها گرافهایِ از این نوع، گرافهایی به‌شکل آسیاب بادی هستند ولی اگر مسیرهایی به‌طول بیش از ۲ را در نظر بگیریم چه می‌شود؟ طبق حدسی از آنتون کوتزیگ[1]، وضعیت مشابه ناممکن است.

حدس کوتزیگ. فرض کنید $\ell > 2$. در این‌صورت گرافی با این ویژگی وجود ندارد که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر به‌طول ℓ موجود باشد.

حدس کوتزیگ به‌ازای برخی ℓها محقق شده است، ولی در حالت کلی هنوز حل نشده است.

مراجع

[1] P. Erdős, A. Rényi & V. Sós: *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math. **1** (1966), 215-235.

[2] A. Kotzig: *Regularly k-path connected graphs*, Congressus Numerantium **40** (1983), 137-141.

1. Anton Kotzig

فصل ۳۰ احتمالْ شمارش را (گاهی) آسان می‌سازد

همان‌طور که این کتاب را با اولین مقاله‌های پال اردوش در نظریهٔ اعداد آغاز کردیم، آن را با بحث دربارهٔ موضوعی به‌پایان می‌آوریم که شاید پر دوام‌ترین میراث اردوش باشد، یعنی معرفی روش احتمالاتی با همکاری آلفرد رنی. این روش به‌ساده‌ترین صورت چنین بیان می‌شود:

> اگر در مجموعهٔ مفروضی از اشیا احتمال اینکه شیئی یک ویژگی معین P را نداشته باشد کوچکتر از ۱ باشد، باید شیئی با این ویژگی وجود داشته باشد.

پس ما یک قضیهٔ وجودی داریم. یافتن این شیء ممکن است بسیار دشوار باشد (و اغلب هم هست) ولی می‌دانیم که وجود دارد. در اینجا سه مثال (که به‌ترتیب پیچیده‌تر می‌شوند) از روش احتمالاتی اردوش می‌آوریم، و در پایان کاربرد بسیار نو و زیبایی را شرح می‌دهیم.

برای آماده‌سازی صحنه، خانواده‌ای چون $\mathcal{F}$ مرکب از زیرمجموعه‌های A_i از یک مجموعهٔ مبنایی متناهی X را که اندازهٔ همگی $d \geq ۲$ است در نظر می‌گیریم. گوییم $\mathcal{F}$، ۲ـرنگ‌پذیر است اگر یک رنگ‌آمیزی X با دو رنگ وجود داشته باشد به‌نحوی که در هر مجموعهٔ A_i هر دو رنگ ظاهر شوند. روشن است که هر خانواده‌ای به این طریق قابل رنگ‌آمیزی نیست. به‌عنوان مثال، همهٔ زیرمجموعه‌های با اندازهٔ d از مجموعهٔ $(۲d-۱)$ عضوی X را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت، صرفنظر از اینکه چگونه X را با ۲ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم، باید d عضو وجود داشته باشند که رنگشان همانند باشد. از سوی دیگر به همین اندازه روشن است که هر زیرخانواده از خانواده‌ای ۲ـرنگ‌پذیر از مجموعه‌های d عضوی خودش ۲ـرنگ‌پذیر است. پس ما به کوچکترین عدد $m = m(d)$ توجه داریم که به‌ازای آن خانواده‌ای با m مجموعه وجود دارد که ۲ـرنگ‌پذیر نیست. به بیان دیگر، $m(d)$ کوچکترین عددی است که تضمین می‌کند هر خانواده که کمتر از $m(d)$ مجموعه عضو آن باشند، ۲ـرنگ‌پذیر است.

قضیهٔ ۱. هر خانوادهٔ مرکب از حداکثر $۲^{d-۱}$ مجموعهٔ d عضوی، ۲ـرنگ‌پذیر است، یعنی $m(d) > ۲^{d-۱}$.

■ **اثبات.** فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های d عضوی با حداکثر $۲^{d-۱}$

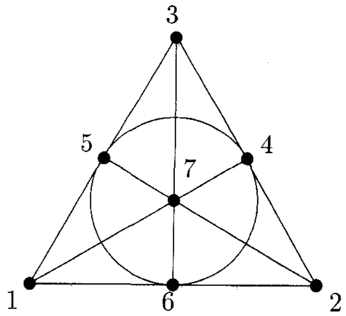
مجموعه باشد. X را با دو رنگ به‌طور تصادفی رنگ می‌کنیم چنانکه همهٔ رنگ‌آمیزیها هم‌احتمال باشند. به‌ازای هر مجموعهٔ $A \in \mathcal{F}$، فرض کنید E_A این پیشامد باشد که همهٔ عضوهای A رنگ مشابه داشته باشند. چون دقیقاً دوتا از این‌گونه رنگ‌آمیزیها وجود دارد، داریم

$$\mathrm{Prob}(E_A) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{d-۱}$$

و بنابراین با $m = |\mathcal{F}|$ (توجه کنید که پیشامدهای E_A مجزا نیستند):

$$\mathrm{Prob}(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} E_A) < \sum_{A\in\mathcal{F}} \mathrm{Prob}(E_A) = m\left(\frac{۱}{۲}\right)^{d-۱} \leq ۱$$

نتیجه می‌گیریم رنگ‌آمیزیی از X با دو رنگ بدون مجموعه‌ای تکرنگ وجود دارد و این درست شرط ۲ـرنگ‌پذیری ماست. □

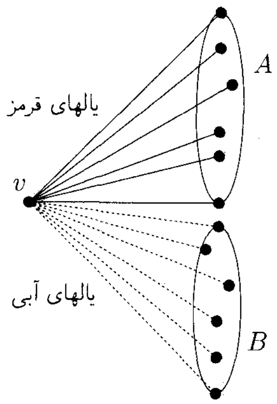


همچنین اردوش، باز با استفاده از روش احتمالاتی و این بار با به‌کارگیری مجموعه‌های تصادفی و یک رنگ‌آمیزی ثابت، کران بالایی برای $m(d)$ یافت که تقریباً برابر $d^{۲}۲^{d}$ است. اما در مورد مقادیر دقیق $m(d)$ فقط دو مقدار اول $m(۲) = ۳$ و $m(۳) = ۷$ معلوم‌اند. البته $m(۲) = ۳$ به‌وسیلهٔ گراف $K_۳$ تحقق می‌یابد، حال آنکه از آرایش فانو به‌دست می‌آید $m(۳) \leq ۷$. در اینجا $\mathcal{F}$ مرکب از هفت مجموعهٔ ۳ عضوی (از جمله، مجموعهٔ دایره‌ای $\{۴,۵,۶\}$) است که در شکل مقابل دیده می‌شود. ممکن است برای خواننده جالب باشد که نشان دهد $\mathcal{F}$ نیاز به ۳ رنگ دارد. اثبات اینکه همهٔ خانواده‌های مرکب از ۶ مجموعهٔ سه‌عضوی، ۲ـرنگ‌پذیر هستند و بنابراین $m(۳) = ۷$، به‌دقت بیشتری نیاز دارد.

آخرین مثال ما موضوعی مهم و معروف در این مبحث ــ اعداد رمزی ــ است. گراف کامل K_N با N رأس را در نظر بگیرید. گوییم K_N دارای ویژگی (m,n) است اگر، صرفنظر از اینکه یالهای K_N را چگونه با رنگهای آبی و قرمز رنگ کنیم، همواره زیرگراف کاملی با m رأس که همهٔ یالهایش رنگ قرمز خورده باشند یا زیرگراف کاملی با n رأس که همهٔ یالهایش آبی‌رنگ باشند، وجود داشته باشد. روشن است که اگر K_N ویژگی (m,n) را داشته باشد، آنگاه هر K_s با $s \geq N$ نیز این ویژگی را خواهد داشت. پس همان‌طور که در مثال اول عمل کردیم، در جستجوی کوچکترین عدد Nای (در صورت وجود) که دارای این ویژگی باشد بر می‌آییم و این عدد، عدد رمزی $R(m,n)$ است.

در آغاز توجه کنید که مسلماً داریم $R(m,۲) = m$ زیرا یا همهٔ یالهای K_m قرمزند یا یالی آبی‌رنگ وجود دارد که در نتیجه $K_۲$ آبی است. با استدلالی بر اساس تقارن داریم $R(۲,n) = n$. اکنون تصور کنید $R(m-۱,n)$ و $R(m,n-۱)$ وجود دارند. سپس فرض کنید $R(m,n)$ وجود دارد و

$$R(m,n) \leq R(m-۱,n) + R(m,n-۱) \qquad (۱)$$



حال فرض کنید $N = R(m-۱,n) + R(m,n-۱)$، و یک رنگ‌آمیزی دلخواه قرمز-آبی K_N را در نظر بگیرید. به‌ازای هر رأس v، تصور کنید A مجموعه رأسهایی باشد که با یال قرمز به v وصل شده‌اند و B مجموعهٔ رأسهای وصل شده با یال آبی باشد.

چون $|A| + |B| = N - ۱$، در می‌یابیم که یا $|A| \geq R(m-۱,n)$ یا $|B| \geq R(m,n-۱)$. فرض کنید $|A| \geq R(m-۱,n)$، حالت دیگر مشابه همین حالت است. در این‌صورت، بنابه‌تعریف $R(m-۱,n)$ زیرمجموعه‌ای از A چون A_R با اندازهٔ $m-۱$ وجود دارد که همهٔ یالهایش قرمز رنگ‌اند و همراه با v یک K_m قرمز به‌دست می‌دهد، و یا زیرمجموعه‌ای چون A_B با اندازهٔ n که همهٔ یالهایش آبی‌رنگ هستند. نتیجه می‌گیریم که K_N در ویژگی (m,n) صدق می‌کند، و ادعای (۱) ثابت می‌شود.

از ترکیب (۱) با مقادیر آغازی $R(m,۲) = m$ و $R(۲,n) = n$، با توجه رابطهٔ بازگشتیِ آشنایِ ضرایب دوجمله‌ای، به‌دست می‌آوریم

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-۲}{m-۱}$$

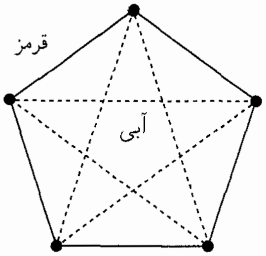
و به‌خصوص

$$R(k,k) \leq \binom{۲k-۲}{k-۱} = \binom{۲k-۳}{k-۱} + \binom{۲k-۳}{k-۲} \leq ۲^{۲k-۳} \qquad (۲)$$

اکنون چیزی که واقعاً مورد علاقهٔ ماست، کرانی پایین برای $R(k,k)$ است. در این مورد باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $N < R(k,k)$، رنگ‌آمیزی از یالها وجود دارد به‌نحوی که هیچ K_kی قرمز یا آبی از آن نتیجه نشود. و در اینجاست که روش احتمالاتی وارد کار می‌شود.

قضیهٔ ۲. به‌ازای هر $k \geq ۲$، کران پایین زیر برای عددهای رمزی برقرار است:

$$R(k,k) \geq ۲^{k/۲}$$



■ **اثبات.** داریم $R(۲,۲) = ۲$. از (۲) می‌دانیم $R(۳,۳) \leq ۶$، و پنج‌ضلعی رنگ‌شده طبق شکل نشان می‌دهد که $R(۳,۳) = ۶$.

حال فرض می‌کنیم $k \geq ۴$، و $N < ۲^{k/۲}$؛ همهٔ رنگ‌آمیزیهای قرمز-آبی را در نظر می‌گیریم که در آنها هر یال را مستقلاً با احتمال $\frac{۱}{۲}$ رنگ آبی یا قرمز می‌زنیم. پس همهٔ رنگ‌آمیزیها احتمال یکسان $۲^{-\binom{n}{۲}}$ را دارند. فرض کنیم A مجموعه‌ای از رأسها با اندازهٔ k باشد. در این‌صورت احتمال پیشامد A_R یعنی این پیشامد که به همهٔ یالها در A رنگ قرمز زده می‌شود. برابر $۲^{-\binom{k}{۲}}$ است. پس نتیجه می‌گیریم که احتمال p_R برای اینکه همهٔ یالها در مجموعه‌ای k عضوی قرمز رنگ شوند محدود است به

$$p_R = \text{Prob}\left(\bigcup_{|A|=k} A_R\right) \leq \sum_{|A|=k} \text{Prob}(A_R) = \binom{N}{k} ۲^{-\binom{k}{۲}}$$

حال به ازای $N < ۲^{k/۲}$ و $k \geq ۴$، با استفاده از $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{۲^{k-۱}}$ برای $k \geq ۲$ (صفحهٔ ۱۶ را ببینید)، داریم

$$\binom{N}{k} ۲^{-\binom{k}{۲}} \leq \frac{N^k}{۲^{k-۱}} ۲^{-\binom{k}{۲}} < ۲^{\frac{k^۲}{۲} - \binom{k}{۲} - k + ۱} = ۲^{-k/۲+۱} \leq \frac{۱}{۲}$$

پس $p_R < \frac{۱}{۲}$، و بنابه تقارن، $p_B < \frac{۱}{۲}$، که نابرابری اخیر مربوط است به‌احتمال اینکه به همهٔ یالهای بین k رأس رنگ آبی زده شود. نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $N < ۲^{\frac{k}{۲}}$، $p_R + p_B < ۱$، پس باید رنگ‌آمیزیی وجود داشته باشد بدون K_kی قرمز یا آبی، و این بدان معنی است که K_N ویژگی (k,k) را ندارد. □

البته اختلاف زیادی بین کران پایین و بالای $R(k,k)$ وجود دارد. با این حال، هرچند این اثبات «کتابی» بسیار ساده است، در طی بیش از ۵۰ سال پس از ارائهٔ قضیهٔ اردوش، هیچ کران بهتری در نما برای k در حالت کلی پیدا نشده است. در واقع هیچ کس نتوانسته است کرانی پایین به شکل $R(k,k) > ۲^{(\frac{۱}{۲}+\epsilon)k}$ یا کرانی بالا به‌شکل $R(k,k) < ۲^{(۲-\epsilon)k}$ را به‌ازای ϵ مثبت مشخصی ثابت کند.

سومین قضیهٔ ما نمونهٔ زیبای دیگری است از کاربرد روش احتمالاتی. گراف Gای با n رأس و عدد فامی آن $\chi(G)$ را در نظر بگیرید. اگر $\chi(G)$ بزرگ باشد یعنی اگر نیاز

به رنگهای زیادی داشته باشیم، ممکن است انتظار داشته باشیم که G شامل زیرگراف کاملِ بزرگی باشد. ولی در واقعیت چنین نیست. قبلاً در دهۀ چهل میلادی، بلانش دکارت[1] گرافهایی با عدد فامیِ به‌دلخواه بزرگ و بدون مثلث ساخت یعنی گرافهایی که در آنها طول هر دور دست‌کم ۴ است، و بسیاری دیگر نیز چنین کردند (تابلو را ببینید).

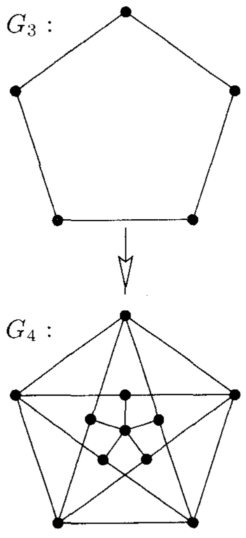
گرافهای عاری از مثلث با عدد فامی بزرگ

دنباله‌ای از گرافهای عاری از مثلث G_3، G_4، ... با

$$\chi(G_n) = n$$

را در نظر می‌گیریم. از $G_3 = C_5$ یعنی ۵ـدور شروع می‌کنیم. بنابراین $\chi(G_3) = 3$. فرض کنید قبلاً G_n را با مجموعۀ رأسهای V ساخته‌ایم. گراف جدید G_{n+1} دارای مجموعۀ رأسهای $V \cup V' \cup \{z\}$ است که در آن رأسهای $v' \in V'$ تناظر دو سویی با $v \in V$ دارند، و z تک رأسی دیگر است. یالهای G_{n+1} به ۳ رده تقسیم می‌شوند: نخست همۀ یالهای G_n را می‌گیریم؛ دوم، هر رأس v' دقیقاً به رأسهای مجاور v در G_n وصل می‌شود؛ سوم، z به هر $v' \in V'$ وصل می‌شود. پس، از $G_3 = C_5$ گراف موسوم به میسیلسکی[2] را به‌عنوان G_4 به‌دست می‌آوریم.

روشن است که G_{n+1} باز عاری از مثلث است. برای اثبات $\chi(G_{n+1}) \geq n + 1$ از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. nـرنگ‌آمیزی دلخواه G_n را در نظر می‌گیریم و به یک ردۀ رنگی c توجه می‌کنیم. باید رأسی چون $v \in C$ وجود داشته باشد که دست‌کم مجاور به یک رأس از هر ردۀ رنگی دیگر است؛ در غیر این‌صورت می‌توانستیم رأسهای C را در $n - 1$ ردۀ رنگی دیگر توزیع کنیم که در نتیجه $\chi(G_n) \leq n - 1$. ولی اکنون روشن است که v' (رأسی در V' که متناظر با v است) باید در این nـرنگ‌آمیزی با v همرنگ باشد. بنابراین همۀ n رنگ در V' ظاهر می‌شوند، و ما به‌رنگ جدیدی برای z نیاز داریم.



ساختن گراف میسیلسکی

ولی در این مثالها دورهای بسیاری به‌طول ۴ وجود داشتند. آیا ما می‌توانیم کار بهتری بکنیم؟ آیا می‌توانیم قید کنیم که هیچ دوری با طول کوچک وجود نداشته باشد و در عین حال، عدد فامی به‌دلخواه بزرگ باشد؟ بله، می‌توانیم! برای دقت بخشیدن به بحث،

1. Blanche Descartes 2. Mycielski

طول کوتاهترین دور در G را کمر[1] G ، $\gamma(G)$، می‌نامیم. حال قضیهٔ زیر را داریم که برای اولین بار به‌وسیلهٔ پال اردوش ثابت شد:

قضیهٔ ۳. به‌ازای هر $k \geq ۲$، گرافی چون G با عدد فامی $\chi(G) \geq k$ و کمر $\gamma(G) > k$ وجود دارد.

استراتژی اثبات مانند اثباتهای پیشین است: یک فضای احتمال معین روی گرافها در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که احتمال $\chi(G) \leq k$ کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ است، و همین‌طور احتمال $\gamma(G) \leq k$ کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ است. در نتیجه باید گرافی با ویژگیهای مطلوب وجود داشته باشد.

■ **اثبات.** فرض می‌کنیم $V = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ مجموعهٔ رأسها باشد و p عددی مشخص بین ۰ و ۱، که بعداً به دقت انتخاب می‌شود. فضای احتمال ما، $\mathcal{G}(n,p)$، مرکب از همهٔ گرافهایی روی V است که در آنها هر یک از یالها با احتمال p، مستقل از دیگران، ظاهر می‌شود. به‌عبارت دیگر، با یک آزمایش برنولی سروکار داریم که در آن یالها را با احتمال p انتخاب می‌کنیم. به‌عنوان مثال، احتمال $\text{Prob}(K_n)$ برای گراف کامل چنین است: $\text{Prob}(K_n) = p^{\binom{n}{۲}}$. در حالت کلی داریم $\text{Prob}(H) = p^m(۱-p)^{\binom{n}{۲}-m}$ اگر گراف H روی V دقیقاً m یال داشته باشد.

نخست نگاهی به‌عدد فامی $\chi(G)$ می‌افکنیم. عدد استقلال یعنی بزرگترین اندازه برای مجموعه‌های مستقل در G را با $\alpha = \alpha(G)$ نشان می‌دهیم. چون در یک رنگ‌آمیزی با $\chi = \chi(G)$ رنگ، همهٔ رده‌های رنگی مستقل‌اند (و بنابراین اندازهٔ آنها نابیشتر از α است) نتیجه می‌گیریم $\chi\alpha \geq n$. بنابراین اگر α در مقایسه با n کوچک باشد، آنگاه χ باید بزرگ باشد، که مطلوب ما هم همین است.

گیریم $۲ \leq r \leq n$. احتمال اینکه یک مجموعهٔ r عضوی مشخص در V مستقل باشد، $(۱-p)^{\binom{r}{۲}}$ است، و با همان استدلالی که برای قضیهٔ ۲ آوردیم، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\text{Prob}(a \geq r) &\leq \binom{n}{r}(۱-p)^{\binom{r}{۲}}\\ &\leq n^r(۱-p)^{\binom{r}{۲}} = (n(۱-p)^{\frac{r-۱}{۲}})^r \leq (ne^{-p(r-۱)/۲})^r\end{aligned}$$

چون به‌ازای هر p، $۱-p \leq e^{-p}$.

1. girth

حال با مفروض بودن kی مثبت مشخصی، انتخاب می‌کنیم $p = n^{-\frac{k}{k+1}}$، و می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای nهایی که به‌قدرکافی بزرگ باشند، داریم

$$\text{Prob}(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < \frac{1}{2} \tag{۳}$$

در واقع چون $n^{\frac{1}{k+1}}$ سریعتر از $\log n$ رشد می‌کند، به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ داریم $n^{\frac{1}{k+1}} \geq 6k \log n$، و بنابراین $p \geq 6k\frac{\log n}{n}$. از اینجا به‌ازای $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ به‌دست می‌آید $pr \geq 3 \log n$، و از این‌رو

$$ne^{-p(r-1)/2} = ne^{-pr/2}e^{p/2} \leq ne^{-\frac{3}{2}\log n}e^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = (\frac{e}{n})^{\frac{1}{2}}$$

که این کمیت با گرایش n به‌بینهایت، به‌صفر میل می‌کند. پس (۳) به‌ازای هر $n \geq n_1$ برقرار است.

اکنون پارامتر دوم، $\gamma(G)$، را بررسی می‌کنیم. به‌ازای kی مفروض، می‌خواهیم نشان دهیم که دورهای خیلی زیادی با طول نابیشتر از k وجود ندارند. فرض کنیم i بین ۳ و k باشد، و $A \subseteq V$ یک مجموعهٔ i عضوی مشخص باشد. تعداد iـدورهای ممکن بر A به‌وضوح تعداد جایگشتهای دوری A تقسیم بر ۲ است. (چون می‌توانیم دور را در هر جهت طی کنیم)، و بنابراین برابر با $\frac{(i-1)!}{2}$ است. پس تعداد کل iـدورهای ممکن برابر با $\binom{n}{i}\frac{(i-1)!}{2}$ است، و هر چنین دور Cای با احتمال p^i ظاهر می‌شود. فرض کنید X متغیری تصادفی باشد که تعداد دورهایِ به‌طول نابیشتر از k را می‌دهد. برای برآورد کردن X دو ابزار ساده ولی زیبا را به‌کار می‌بریم. اولی، خطی بودن امید ریاضی است و دومی، نابرابری مارکوف برای متغیرهای تصادفی نامنفی که حاکی است

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

که در آن EX مقدار امید ریاضی X است. پیوست فصل ۱۴ را در این زمینه ببینید.

فرض کنید X_C متغیر تصادفیِ نشانگر دور C به‌طول، مثلاً، i، باشد. یعنی قرار می‌دهیم $X_C = 1$ یا $X_C = 0$ برحسب اینکه C درگراف ظاهر شود یا نشود؛ پس $EX_C = p^i$. چون X تعداد همهٔ دورهای به‌طول نابیشتر از k را می‌دهد، داریم $X = \sum X_C$ و لذا بنابه خطی بودن

$$EX = \sum_{i=3}^{k}\binom{n}{i}\frac{(i-1)!}{2}p^i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2)n^k p^k$$

که در آن، نابرابری اخیر به این دلیل برقرار است که $np = n^{\frac{1}{k+1}} \geq 1$، حال با به‌کار بردن نابرابری مارکوف با $a = \frac{n}{2}$ به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{Prob}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{EX}{n/2} \leq (k-2)\frac{(np)^k}{n} = (k-2)n^{-\frac{1}{k+1}}$$

چون طرف راست، با گرایش n به‌بینهایت، به ۰ میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $n \geq n_2$، $p(X \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2}$.

حال تقریباً به‌مقصد رسیده‌ایم. تحلیل ما حاکی است که به‌ازای $n \geq \max(n_1, n_2)$، گرافی چون H با n رأس با ضابطهٔ $\alpha(H) < \frac{n}{2k}$ و با کمتر از $\frac{n}{2}$ دور به طول نابیشتر از k، وجود دارد. یک رأس را از هر یک از این دورها حذف می‌کنیم و فرض می‌کنیم G گراف حاصل باشد. در این‌صورت $\gamma(G) > k$ در هر حال برقرار است. چون G شامل بیش از $\frac{n}{2}$ رأس است و در $\alpha(G) \leq \alpha(H) < \frac{n}{2k}$ صدق می‌کند، در می‌یابیم که

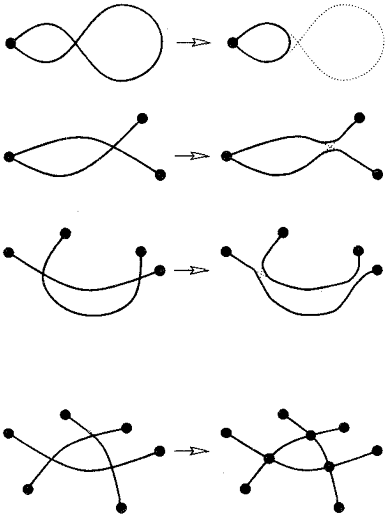
$$\chi(G) \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{2\alpha(H)} > \frac{n}{n/k} = k$$

و اثبات به‌انجام می‌رسد. □

نحوهٔ ساخت صریح گرافهایی با کمر و عدد فامی بزرگ (با اندازهٔ غول‌آسا) معلوم است. (در مقابل، کسی نمی‌داند که چگونه می‌توان ۲ـرنگ‌آمیزیهای خوبی بدون خوشه‌های تکرنگ بزرگ، ترتیب داد). نکته‌ای که هنوز شگفتی ما را در مورد اثبات اردوش بر می‌انگیزد این است که این اثبات، وجود گرافهای نسبتاً کوچک با عدد فامی و کمر بزرگ را به‌ثبوت می‌رساند.

گشت و گذار خود در دنیای احتمالات را با بحث دربارهٔ قضیهٔ مهمی در نظریهٔ هندسی گراف به پایان می‌آوریم (که این هم به پال اردوش بر می‌گردد) که اثبات «کتابی» فوق‌العاده جالب آن خیلی نو است.

گراف ساده‌ای چون $G(V,E)$ با n رأس و m یال در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم G را در صفحه بنشانیم درست همان‌طور که در مورد گرافهای هامنی عمل می‌کردیم. حال از فصل ۱۰ این مطلب را ــ به‌عنوان نتیجه‌ای از فرمول اویلر ــ می‌دانیم که یک گراف هامنی سادهٔ G حداکثر $3n-6$ یال دارد. پس اگر m بزرگتر از $3n-6$ باشد، باید تقاطعهایی بین یالها وجود داشته باشد. پس عدد تقاطع $\operatorname{cr}(G)$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود: این عدد کمترین تعداد تقاطعها در میان همهٔ صورتهای نشانده‌شدهٔ G است. لذا $\operatorname{cr}(G) = 0$ اگر و تنها اگر G هامنی باشد.



در چنین صورت نشانده شدهٔ مینیمالی، قواعد زیر برقرار است:

- هیچ یالی نمی‌تواند خودش را قطع کند.
- یالهایی که رأس مشترک دارند نمی‌توانند هم را قطع کنند.
- هیچ دو یالی یکدیگر را دوبار قطع نمی‌کنند.

دلیل این قواعد این است که اگر برقرار نباشند، می‌توانیم با اعمالی که در شکلهای حاشیه نشان داده شده‌اند، ترسیم متفاوتی ازگراف مورد نظر به‌دست دهیم که تقاطعهای کمتری داشته باشد. پس، از این به‌بعد فرض می‌کنیم هر نشاندنی از این قاعده‌ها تبعیت می‌کند.

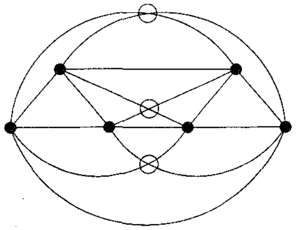
فرض کنید G در $\mathbb{R}^۲$ نشانده‌شده و $\mathrm{cr}(G)$ تقاطع دارد. بلافاصله می‌توانیم کران پایینی برای تعداد تقاطعها به‌دست آوریم. گراف H زیر را در نظر بگیرید: رأسهای H همان رأسهای G همراه با همهٔ نقطه‌های تقاطع هستند، و یالها همگی قطعاتی از یالهای اولیه‌اند وقتی از نقطهٔ تقاطع به‌نقطهٔ تقاطع می‌رویم.

حال گراف جدید H مسطح و ساده است (این موضوع از سه فرض ما نتیجه می‌شود!). تعداد رأسها در H برابر با $n+\mathrm{cr}(G)$ و تعداد یالها برابر با $m+۲\mathrm{cr}(G)$ است، چون هر رأس جدید دارای درجهٔ ۴ است. پس با استفاده از کران تعداد یالها برای گرافهای مسطح داریم

$$m+۲.\mathrm{cr}(G) \le ۳(n+\mathrm{cr}(G))-۶$$

یعنی

$$\mathrm{cr}(G) \ge m-۳n+۶ \qquad (۴)$$



به‌عنوان مثال، برای گراف کامل $K_۶$ داریم

$$\mathrm{cr}(K_۶) \ge ۱۵-۱۸+۶=۳$$

و در واقع، صورت نشانده‌شده‌ای با فقط ۳ تقاطع وجود دارد.

وقتی m نسبت به n خطی باشد، کران (۴) به‌قدرکافی خوب است، ولی وقتی در مقایسه با n بزرگتر باشد، آنگاه تصویر تغییر می‌کند، و این قضیهٔ ماست.

قضیهٔ ۴. فرض کنید G گراف ساده‌ای با n رأس و m یال باشد که در آن $m \ge ۴n$.

در این صورت

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{۱}{۶۴}\frac{m^{۳}}{n^{۲}}$$

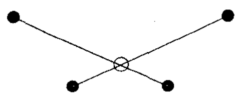
این قضیه که به لم تقاطع معروف است تاریخچهٔ بسیار جالبی دارد. اردوش و گای آن را در سال ۱۹۷۳ حدس زدند (با ثابت cای به‌جای $\frac{۱}{۶۴}$). نخستین اثباتها را لایتون[1] در ۱۹۸۲ (با $\frac{۱}{۱۰۰}$ به‌جای $\frac{۱}{۶۴}$) و مستقل از او، آیتای[2]، چواتال، نیوبورن[3]، و سمردی عرضه کردند. لم تقاطع چندان شناخته نبود (در واقع مدتها پس از اثباتهای اولیه، خیلیها آن را یک حدس می‌دانستند) تا آنکه لاسلو سکلی[4] سودمندی آن را در مقالهٔ زیبایی نشان داد به این طریق که آن را در مورد انواعی از مسائل هندسی فرین دشوار به‌کار برد. اثباتی که در اینجا می‌آوریم، از مکاتبات بین برنار شازل[5]، میشا شریر[6]، و امو ولتسل[7] با پست الکترونیک گرفته شده است و این اثبات بدون شک به «کتاب» تعلق دارد.

■ **اثبات.** نشاندن مینیمالی از G را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم p عددی بین ۰ و ۱ است (که بعداً انتخاب می‌شود). هر رأس را مستقلاً با احتمال p انتخاب می‌کنیم و گراف القا شده به‌وسیلهٔ رأسهایی را که در G_p هستند با G_p نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم n_p، m_p، X_p متغیرهایی تصادفی باشند که نمایندهٔ تعداد رأسها، یالها و تقاطعها در G_p هستند. چون $\mathrm{cr}(G) - m + ۳n \geq ۰$ بنابه (۴) به‌ازای هر گراف برقرار است، مسلماً برای امید ریاضی داریم

$$E(X_p - m_p + ۳n_p) \geq ۰$$

اکنون می‌پردازیم به‌محاسبهٔ هر یک از امیدهای $E(n_p)$، $E(m_p)$ و $E(X_p)$. روشن است که $E(n_p) = pn$ و $E(m_p) = p^{۲}m$ چون یک یال در G_p ظاهر می‌شود اگر و تنها اگر هر دو رأس آن چنین کنند. و بالاخره، $E(X_p) = p^{۴}\mathrm{cr}(G)$ چون تقاطعی در G_p وجود دارد اگر و تنها اگر هر چهار رأس (متفاوت!) مربوطه در آنجا باشند.



پس بنابه خطی بودن امید ریاضی داریم

$$۰ \leq E(X_p) - E(m_p) + ۳E(n_p) = p^{۴}\mathrm{cr}(G) - p^{۲}m + ۳pn$$

1. Leighton 2. Ajtai 3. Newborn 4. László Székely
5. Bernard Chazelle 6. Micha Sharir 7. Emo Welzl

که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{p^{۲}m - ۳pn}{p^{۴}} = \frac{m}{p^{۲}} - \frac{۳n}{p^{۳}} \qquad (۵)$$

در اینجا می‌رسیم به شاه‌بیت اثبات: قرار می‌دهیم $p = \frac{۴n}{m}$ (که بنابه‌فرض ما حداکثر ۱ است)، پس (۵) به‌این صورت در می‌آید

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{۱}{۶۴}\left[\frac{۴m}{(n/m)^{۲}} - \frac{۳n}{(n/m)^{۳}}\right] = \frac{۱}{۶۴}\frac{m^{۳}}{n^{۲}}$$

و این همان است که می‌خواستیم. □

پال اردوش طبعاً دوست می‌داشت این اثبات را ببیند.

مراجع

[1] M. AJTAI, V. CHVÁTAL, M. NEWBORN & E. SZEMERÉDI: *Crossing-free subgraphs*, Annals of Discrete Mathematics **12** (1982), 9-12.

[2] N. ALON & J. SPENCER: *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience 1992.

[3] P. ERDŐS: *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292-294.

[4] P. ERDŐS: *Graph theory and probability*, Canadian J. Math **11** (1959), 34-38.

[5] P. ERDŐS: *On a combinatorial problem I*, Nordisk Math. Tidskrift **11** (1963), 5-10.

[6] P. ERDŐS & R. K. GUY: *Crossing number problems*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 52-58.

[7] P. ERDŐS & A. RÉNYI: *On the evolution of random graphs*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int Közl. **5** (1960), 17-61.

[8] T. LEIGHTON: *Complexity Issues in VLSI*, MIT Press, Cambridge MA 1983.

[9] L. A. SZÉKELY: *Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry*, Combinatorics, Probability, and Computing **6** (1997), 353-358.

فهرست راهنما