آ) برای این که دمای زمین T_G و دمای لایه T_A باقی بمانند باید

$$\begin{cases} S_S + S_A = S_G \\ 2S_A = S_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_B^4 + T_A^4 = T_G^4 \\ 2T_A^4 = T_G^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} T_A = T_B \\ T_G = 2^{\frac{1}{4}} T_B \end{matrix}$$

ب) برای لایه l ام : $S_{l+1} + S_{l-1} = 2S_l \quad , 1 \leq l < N$

برای لایه N ام : $S_{N-1} = 2S_N$

برای زمین : $S_S + S_1 = S_E$

پ) از معادلات قسمت ب) و این که $S_0 = S_E$ است :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{زمین} & S_S + S_1 = S_E \\ l=1: & S_2 + S_E = 2S_1 \\ l=2: & S_3 + S_1 = 2S_2 \\ & \vdots \\ l=N-1: & S_N + S_{N-2} = 2S_{N-1} \\ N \text{ لایه} & S_{N-1} = 2S_N \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{از جمع این معادلات}} \begin{array}{c} S_S + S_N = 2S_N \\ \Downarrow \\ T_B^4 = T_N^4 \\ \Downarrow \\ T_N = T_B \end{array}$$

ت) از معادله لایه N : $T_{N-1}^4 = 2T_B^4$

از معادله لایه $l = N-1$: $T_{N-2}^4 = 3T_B^4$

تا رسیدن به معادله کامل l : $T_l^4 = (N-l+1)T_B^4$

$$T_l = (N-l+1)^{1/4} T_B$$

ث) $S_0 = S_E$ در نتیجه $T_E = (N+1)^{1/4} T_B$

۲
آ)

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

ب) اگر $K_0 = 0$ انرژی جنبشی ذره در نقطهٔ 1 روی D_2 باشد و K_1 انرژی جنبشی ذره پس از عبور از شکاف برای اولین بار باشد

$$\Delta K_1 = K_1 - K_0 = qV_0$$

پس از بار دوم

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = qV_0$$

$$\vdots$$

و پس از بار kام

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = qV_0$$

از جمع معادلات فوق

$$K_k - \cancel{K_0} = kqV_0$$

$$\frac{1}{2} m v_k^2 - 0 = kqV_0 \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}$$

پ) مشابه با قسمت آ) :

$$r_k = \frac{m v_k}{qB}$$

$$r_k = \sqrt{\frac{2k V_0 m}{qB^2}}$$

ت) اگر $v_0 = 0$ سرعت ذره هنگام ترک نقطهٔ 1 باشد، سرعت ذره، v_1، پس از اولین عبور از شکاف برابر است با

$$v_1 = at_1 + v_0$$

اندازه سرعت ذره هنگام طی مسیر نیم دایره‌ای در میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند.

پس از دومین عبور ذره از شکاف:

$$v_2 = at_2 + v_1$$

$$\vdots$$

و پس از kام عبور ذره از شکاف:

$$v_k = at_k + v_{k-1}$$

از جمع طرفین معادلات:

$$v_k = a(t_1 + t_2 + \dots + t_k) + \cancel{v_0}$$

بنابراین مجموع زمان‌هایی که ذره بین شکاف‌ها سپری می‌کند

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = \frac{v_k}{a}$$

که a برابر است با $a=\frac{qV_0}{ms}$ زیرا $ma=qE=\frac{qV_0}{s}$.

در نتیجه $t_1+t_2+\dots+t_k=\sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}\Big/\frac{qV_0}{ms}$

شبیه به قسمت (T) زمان طی مسیرهای نیم دایره هم با هم برابراند و برابر است تا رسیدن ذره به نقطهٔ 2 ، $k-1$ بار مسیر نیم دایره‌ای طی شده است .

سرانجام زمان کل برابر است با

$$t=t_1+t_2+\dots+t_k+(k-1)\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\,s+(k-1)\frac{m\pi}{qB}$$

ث)

$$\ell=ks+\sum_{i=1}^{k-1}\pi r_i=ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{i}$$

$$\ell\simeq ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(k-1)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{k-1}\right)$$

$$\ell\simeq ks+\pi\sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}\sqrt{k-1}\left(\frac{2}{3}k-\frac{1}{6}\right)$$

ج) با توجه به این که بعد از زمان $\frac{T}{2}$ پتانسیل الکتریکی D_2 معکوس می‌شود و این که بار q مثبت است ، حرکت در صورتی تند شونده است که پتانسیل D_2 قبل از ورود ذره از D_1 به D_2 منفی و قبل از خروج ذره از D_2 به D_1 مثبت باشد. اگر این فرآیند برعکس شود حرکت ذره بین شکاف ، کند شونده می‌شود. یعنی مجموع زمان هایی که ذره بین D ها می‌گذراند از $\frac{T}{2}$ کمتر باشد

$$t_1+t_2+\dots+t_k<\frac{T}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{2mk}{qV_0}}\,s<\frac{T}{2}\Rightarrow s<\sqrt{\frac{mV_0}{2kq}}\,\frac{\pi}{B}$$

چ)

$$k=\frac{\frac{1}{2}mv_k^2}{qV_0}=\frac{25\times10^6\times1.6\times10^{-19}\,J}{1.6\times10^{-19}\times50\times10^3\,J}=500$$

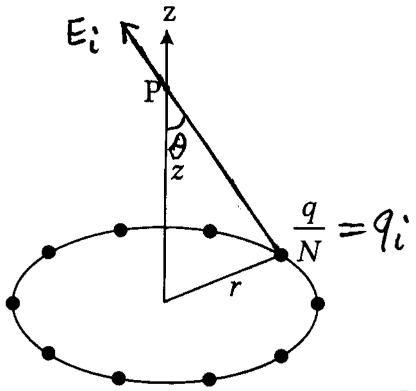
از نتیجهٔ قسمت ت :

$$t=1.57\times10^{-5}\,s$$

از نتیجه قسمت ث) :

$$\ell=726\,m$$

۳ آ)



شکل ۱

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{z^2+r^2}$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \cos\theta = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{z^2+r^2}\,\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

با $\sum_{i=1}^{N} q_i = N\left(\frac{q}{N}\right) = q$ ، بنابراین $E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$.

ب) این بار $q_i = \lim_{N\to\infty} \frac{q}{N}$ ، از طرفی باز هم $\sum_{i=1}^{N\to\infty} q_i = q$

در نتیجه

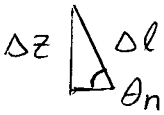
$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$$

پ) $V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}$ ، $q_i = \frac{q}{N}$

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}$$

ت) $\cos\theta_n = \frac{R - n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z}{R} = 1 + \left(-n+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{N} = 1 - \frac{2n-1}{N}$

ث) $\Delta S = (2\pi R\sin\theta_n)\Delta l$ و $\Delta l = \frac{\Delta z}{\sin\theta_n}$



$$= 2\pi R\,\Delta z = 2\pi R\left(\frac{2R}{N}\right) = \frac{4\pi R^2}{N}$$

سطح همه حلقه‌ها برابر و $\frac{1}{N}$ مساحت کره است.

$$\Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2}\Delta S = \frac{Q}{N}$$

ج) در قسمت ب) برای حلقه‌ای با بار ΔQ به فاصله‌ی $z_n = d - R\cos\theta_n$ از نقطه‌ی P و به شعاع $r_n = R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$E_n = \frac{\Delta Q\, z_n}{4\pi\epsilon_0 (z_n^2 + r_n^2)^{3/2}}$$

$$E=\sum_{n=1}^{N} E_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{\left[(d-R\cos\theta_n)^2+(R\sin\theta_n)^2\right]^{3/2}}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{d-R\cos\theta_n}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{3/2}}$$

ج۲) در قسمت ب) برای حلقه‌ای با بار ΔQ به فاصله $z_n=d-R\cos\theta_n$
از نقطه P و به شعاع $r_n=R\sin\theta_n$ به دست آوردیم

$$V_n=\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z_n^2+r_n^2}}\quad,\quad V=\sum_{n=1}^{N}V_n$$

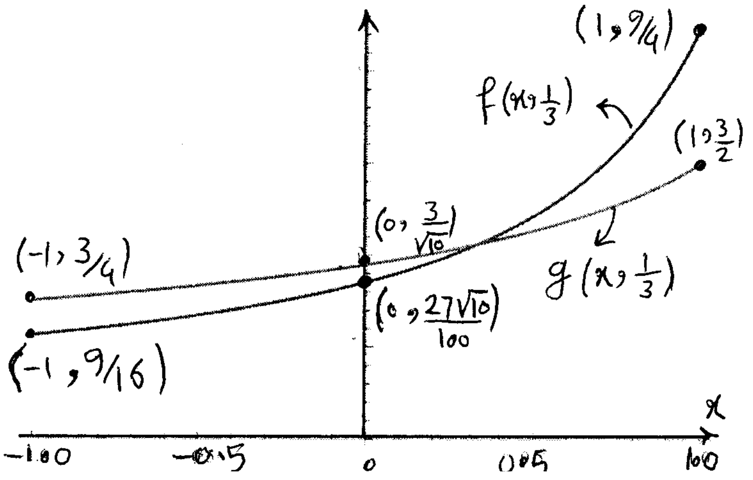
$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta_n)^{1/2}}$$

ج۳)

$$f(x_n,\alpha)=\frac{1-\alpha x_n}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{3/2}}\quad,\quad f(x,\alpha)=\frac{1-\alpha x}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{3/2}}$$

$$g(x_n,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x_n)^{\frac{1}{2}}}\quad,\quad g(x,\alpha)=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha x)^{1/2}}$$

$$f\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1-\frac{x}{3}}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{3/2}}\qquad g\left(x,\tfrac{1}{3}\right)=\frac{1}{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}x\right)^{1/2}}$$



آ) اگر مطابق شکل، θ را از محور x بسنجیم، درصورتی امکان برخورد نور بازتابی به پرده y وجود دارد که $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ باشد.

به ازای $N=3$، شروع انعکاس از یک آینه معین در $\theta=-\frac{\pi}{3}$ است. از مقایسه این بازه با بازه $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ کسر $g=\frac{90^\circ}{120^\circ}=\frac{3}{4}$ به دست می‌آید. در این حالت ΔL کل محور y را در بر می‌گیرد و $f\to\infty$

به ازای $N=4$ بازه‌ای که نور پس از انعکاس به پرده می‌خورد همان $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ است پس $g=\frac{90^\circ}{90^\circ}=1$. در این وضعیت نیز کل محور y به وسیله نقطه روشن جاروب می‌شود و $f\to\infty$.

برای منشوری که سطح مقطع آن N ضلعی منتظم است داریم: $-\frac{\pi}{N}<\theta<\frac{\pi}{N}$.
در این وضعیت $g=1$ است. در هر یک از دو حالت حدی $\theta=\pm\frac{\pi}{N}$ زاویه پرتو بازتاب با محور x، $\pm\frac{2\pi}{N}$ است، بنابراین $\Delta L=2D\tan\frac{2\pi}{N}$ و $f=2\tan\frac{2\pi}{N}$.

به ازای $N=6$، $g=1$ و $f=2\tan\frac{2\pi}{6}=2\sqrt{3}$

N	۳	۴	N > ۴	۶
f	∞	∞	$2\tan\frac{2\pi}{N}$	$2\sqrt{3}$
g	$\frac{3}{4}$	1	1	1

ب)

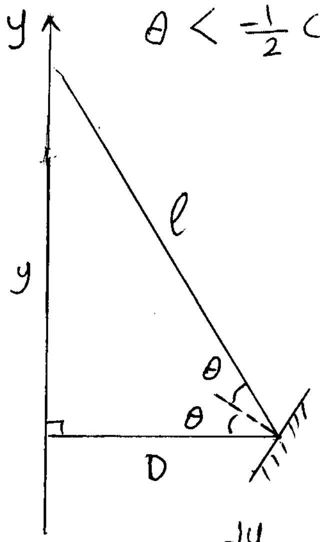
$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\omega D\left(1+\tan^2 2\omega t\right) = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t} = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\theta}$$

به ازای $v > V$ باید $|\cos 2\theta| < \sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$

$\Downarrow$

$\theta < -\frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$ یا $\theta > \frac{1}{2}\cos^{-1}\sqrt{\frac{2\omega D}{V}}$



پ)

$$t = t_m + \frac{l}{c} \quad \text{و} \quad l = \frac{D}{\cos 2\theta}$$

$$t = t_m + \frac{D}{c}\,\frac{1}{\cos 2\omega t_m}$$

ت)

$$y = D\tan 2\theta = D\tan 2\omega t_m$$

ث)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_m}\left(\frac{dt}{dt_m}\right)^{-1}$$

$$v = 2\omega D\left(\frac{1}{\cos^2 2\omega t_m}\right)\left(1+\frac{D}{c}\,\frac{2\omega\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)^{-1}$$

$$v = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t_m + \frac{2\omega D}{c}\sin 2\omega t_m}$$

ج) $\alpha = \frac{\omega D}{c}$ ، $\theta = \omega t_m \Rightarrow \sin 2\theta = P$ ، $\cos^2 2\theta = 1-P^2$

$$\frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{1-P^2+2\alpha P}, \qquad \frac{2\omega D}{v} = 1-P^2+2\alpha P$$

به ازای $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \sin 2\theta < 1 \Rightarrow -1 < P < 1$

اگر $r(P)$ و $q(P)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$q(P) = \frac{2\alpha}{1-P^2+2\alpha P}$$

$$\frac{dq}{dP} = 0 \Rightarrow \frac{4\alpha(P-\alpha)}{(1-P^2+2\alpha P)^2} = 0 \Rightarrow P = \alpha$$

$$q(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad q(-1) = -1, \quad q(1) = 1$$

$$q(0) = 2\alpha$$

$$r(P) = 1-P^2+2\alpha P$$

$$\frac{dr}{dP} = 0 \Rightarrow P = \alpha \Rightarrow r(\alpha) = 1+\alpha^2$$

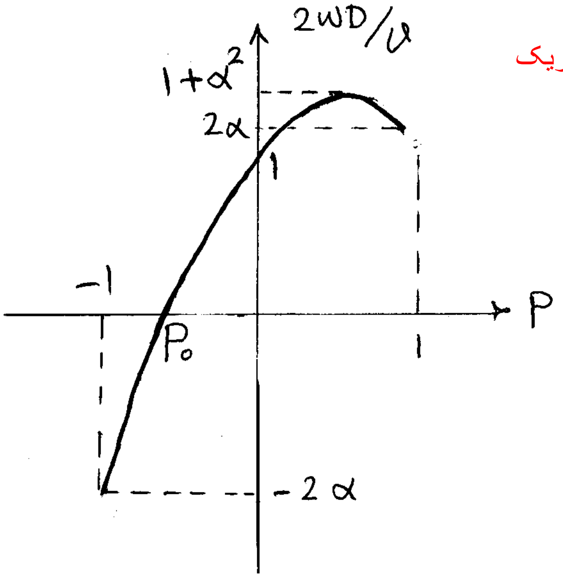
$$r(P) = 0 \Rightarrow P_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$$

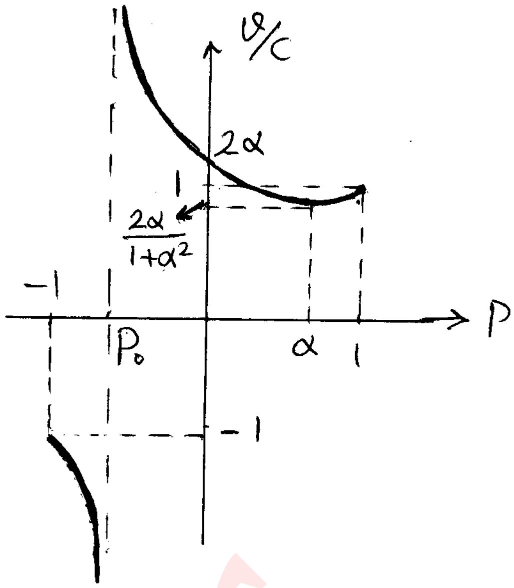
$$r(-1) = -2\alpha$$

$$r(1) = 2\alpha$$

$$r(0) = 1$$

جواب: $\frac{v}{c} \to \pm\infty \Rightarrow P_0 = \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}$





ج) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ برحسب P مشخص است که برای کلیه P های منفی و P های مثبتی که $P<P_1$ است اندازه سرعت از c بیشتر است که P_1 برابر است با

$$\frac{v}{c}=1 \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-P_1^2+2\alpha P_1}=1 \Rightarrow P_1=\begin{cases}1\\ 2\alpha-1 \quad \text{قابل قبول}\end{cases}$$

یعنی به ازای $-1<P<2\alpha-1$ داریم $\frac{v}{c}>1$ ، برحسب θ خواهد شد:

$$-1<\sin 2\theta<2\alpha-1 \quad \text{که} \quad \frac{1}{2}<\alpha<1$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{1}{2}\sin^{-1}(2\alpha-1)$$

ح) با توجه به مفهوم مشتق:

$$dt=\left(\frac{dt}{dt_m}\right)dt_m$$

$$T=\left(1+\frac{2\omega D}{c}\,\frac{\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m}\right)T_0$$

همواره $T>T_0$ است.

۵) آ)

$$U(x) = mg\left(L - \sqrt{L^2 - x^2}\right)$$

$$\sqrt{L^2 - x^2} = L\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx L\left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m\left(\frac{g}{L}\right) x^2 \qquad \Rightarrow k = mg/L$$

ب)

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \qquad v \approx v_x \quad \text{و} \quad v \approx$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m v a + k x v = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{-k}{m} = -\frac{g}{L}$$

پ)

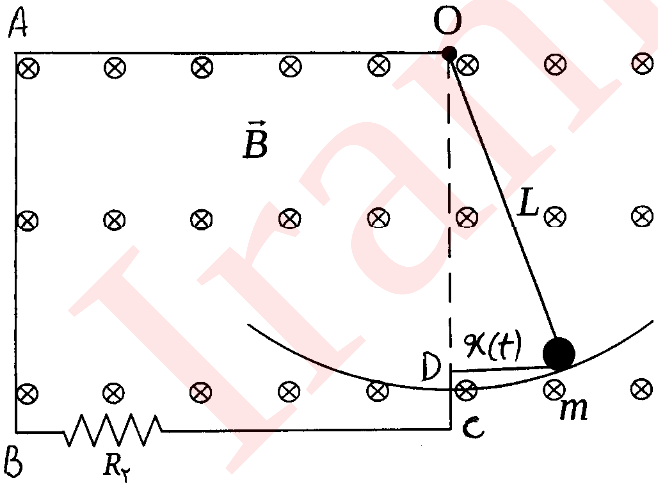
$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \beta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2$$

از مقایسه با قسمت ب: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

در $t=0$ داریم $v=0$ و $x=A$ بنابراین

$$0 = -A\omega \sin\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = A\cos\omega t \quad \text{یا} \quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$



ت) در وضعیت نشان داده شده در شکل مساحت مدار برابر است با

$$A = A_0 + a(t)$$

که A_0 مساحت مستطیل OABC و $a(t)$ مساحت مثلث کوچک ODm است.

$$a(t) = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - x^2(t)}\; x(t)$$

$$= \frac{1}{2} L\, x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} L\, x(t)$$

$$\Phi = BA \;,\; \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\big(\underbrace{A_0}_{\text{با زمان ثابت است}} + a(t)\big)B = -B\frac{da(t)}{dt} = -\frac{LBv(t)}{2}$$

ث) این بار

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2$$

که $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ و $k = \frac{mg}{L}$ و $R = R_1 + R_2$ ، $i = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}$

نیز داریم

$$mva + kxv = -\frac{\left(-\frac{1}{2}LBv\right)^2}{R_1+R_2}$$

$$ma + \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}v + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{L^2B^2}{4(R_1+R_2)}$$

ج) به ازای $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \beta)$ داریم

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \beta) + Ae^{-\gamma t}(-\omega')\sin(\omega' t + \beta)$$

$$a = A(\gamma^2 - \omega'^2)e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \beta) + 2A\omega'\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \beta)$$

با قرار دادن در معادله $ma + bv + kx = 0$ و برابر قرار دادن ضرایب کمیت های مستقل $Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \beta)$ ، $A\sin(\omega' t + \beta)e^{-\gamma t}$ خواهیم داشت

$$m(\gamma^2 - \omega'^2) - b\gamma + k = 0 \quad , \quad k = \frac{mg}{L}$$

$$2m\gamma\omega' - b\omega' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

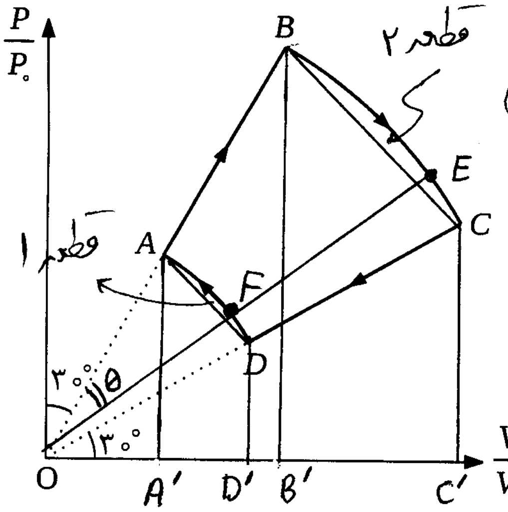
با قرار دادن در معادله اول

برحسب کمیت‌ها ی معلوم

$$\gamma = \frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{L^2B^2}{8m(R_1+R_2)}\right)^2}$$

۶) آ)



معادله‌ی کمان AD: (۱) $\left(\frac{P}{P_\circ}\right)^2+\left(\frac{V}{V_\circ}\right)^2=1$

معادله کمان BC: (۲) $\left(\frac{P}{P_\circ}\right)^2+\left(\frac{V}{V_\circ}\right)^2=4$

معادله خط DC: (۳) $\frac{P}{P_\circ}=\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)\frac{V}{V_\circ}$

معادله خط AB: (۴) $\frac{P}{P_\circ}=\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{V}{V_\circ}$

از معادلات (۱) و (۴):

$V_A=\frac{V_\circ}{2}$ و $P_A=\frac{\sqrt{3}}{2}P_\circ$

از معادله‌ی $PV=nRT$

$T_A=\frac{\sqrt{3}}{4}T_\circ$ که $T_\circ=\frac{P_\circ V_\circ}{nR}$

از معادلات (۲) و (۴) و معادله حالت گاز کامل:

$V_B=V_\circ$ ، $P_B=\sqrt{3}P_\circ$ ، $T_B=\sqrt{3}T_\circ$

به طور مشابه

$V_C=\sqrt{3}V_\circ$ ، $P_C=P_\circ$ ، $T_C=\sqrt{3}T_\circ$

$V_D=\frac{\sqrt{3}}{2}V_\circ$ ، $P_D=\frac{1}{2}P_\circ$ و $T_D=\frac{\sqrt{3}}{4}T_\circ$

ب)

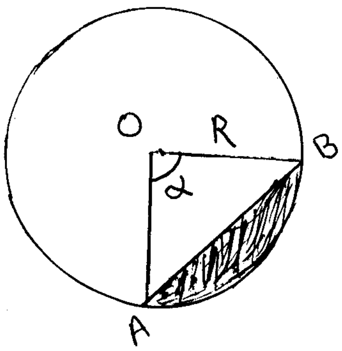
$W_{A\to B}=-(ABB'A'$ مساحت ذوزنقه$)$

$=-(P_A+P_B)\frac{1}{2}(V_B-V_A)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}P_\circ V_\circ$

به طور مشابه

$W_{C\to D}=+(CDD'C'$ مساحت ذوزنقه$)$

$=\frac{3\sqrt{3}}{8}P_\circ V_\circ$



برای ادامه می‌بایست ابتدا مساحت یک قطعه از دایره (ناحیه بین کمان دایره و وتر) را به دست می‌آوریم

$S_{\text{قطعه}}=S_{\overset{\frown}{OAB}}-S_{\triangle OAB}=\frac{R^2}{2}\alpha-\frac{1}{2}\left(R\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$S_{\text{قطعه}}=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$

$$W_{B\to C} = -\left(BCC'B' \text{ مساحت ذوزنقه } + 2 \text{ مساحت قطعه}\right)$$

$$= -\left[(P_B+P_C)\frac{1}{2}(V_C-V_B) + \frac{2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)P_0V_0\right]$$

$$= -\left[P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{3}-1\right)P_0V_0\right] = -\frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$W_{D\to A} = \left[ADD'A' \text{ مساحت ذوزنقه } + 1 \text{ مساحت قطعه}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}P_0V_0 + \left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)P_0V_0\right] = \frac{\pi}{12}P_0V_0$$

پ)

$$W_{\text{چرخه}} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to D} + W_{D\to A}$$

$$W_{\text{چرخه}} = -\frac{\pi}{4}P_0V_0$$

ت)

$$\Delta U = Q + W$$

$$Q_{A\to B} = U_B - U_A - W_{A\to B}$$

$$= \left(\frac{3}{2}nRT_B - \frac{3}{2}nRT_A\right) - W_{A\to B} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right]P_0V_0$$

$$Q_{A\to B} = \frac{3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to C} = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3}P_0V_0\right)\right] = \frac{\pi}{3}P_0V_0$$

$$Q_{C\to D} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}P_0V_0$$

$$Q_{D\to A} = -\frac{\pi}{12}P_0V_0$$

ث) از قانون اول ترمودینامیک:

$$dU = dW + dQ$$

$$d\left(\frac{3}{2}nRT\right) = -PdV + dQ$$

$$\frac{3}{2}d(PV) = -PdV + dQ$$

$$dQ = \frac{5}{2}PdV + \frac{3}{2}VdP$$

در تحول BC :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=4$$

$$P=P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}\Rightarrow dP=-P_0\frac{\frac{V}{V_0^2}}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}dV$$

$$dQ=dV\left(\frac{5}{2}P_0\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}-\frac{3}{2}P_0\frac{V^2/V_0^2}{\sqrt{4-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}}\right)$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_E}=0\Rightarrow\left(\frac{V_E}{V_0}\right)^2=\frac{5}{2}\Rightarrow V_E=\sqrt{\frac{5}{2}}V_0\ ,\ P_E=\sqrt{\frac{3}{2}}P_0$$

$$T_E=\sqrt{\frac{15}{4}}T_0$$

در تحول DA :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}\right)^2=1$$

$$\left.\frac{dQ}{dV}\right|_{V=V_F}=0\Rightarrow\left(\frac{V_F}{V_0}\right)^2=\frac{5}{8}\Rightarrow V_F=\sqrt{\frac{5}{8}}V_0\ ;\ P_F=\sqrt{\frac{3}{8}}P_0$$

$$T_F=\sqrt{\frac{15}{64}}T_0$$

ج) بنابر قسمت (ث):

$$Q_{E\to C}<0\quad ,\quad Q_{B\to E}>0$$

$$Q_{F\to A}<0\qquad Q_{D\to F}>0$$

$$Q_+=Q_{A\to B}+Q_{B\to E}+Q_{D\to F}$$

مطابق شکل: $\theta=\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$W_{F\to A}=(\text{مساحت ذوزنقه } AFF'A' + \text{مساحت قطعه } AF)$$

$$=(P_F+P_A)\frac{1}{2}(V_F-V_A)+\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)P_0V_0$$

اما: $\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)$

$$W_{F\to A}=\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)P_0V_0$$

$$Q_{F\to A}=U_A-U_F-W_{A\to F}=\frac{3}{2}nR(T_A-T_F)-W_{A\to F}$$

$$Q_{F\to A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

به طور مشابه

$$Q_{B\to E} = U_E - U_B - W_{B\to E}$$

$$= \frac{3}{2} nR\left(T_E - T_B\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

$$Q_{B\to E} = \left(\sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

سرانجام

$$Q_+ = Q_{A\to B} + Q_{B\to E} + \left(Q_{D\to A} - Q_{F\to A}\right)$$

$$Q_+ = \left(\frac{5\sqrt{15}}{4} + \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} - \frac{5}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) P_0 V_0$$

<u>۷</u> آ)

$$T_1\cos\theta - T_2\cos\theta = Mg$$

$$T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = M\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\omega^2$$

$$T_2\cos\theta = mg$$

ب) به‌ازای $\theta\neq 0$:

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{m}T_2 \qquad T_1 + T_2 = M\frac{\ell}{2}\omega^2 \quad\Rightarrow\quad T_2 = \frac{M\frac{\ell}{2}\omega^2}{2+\frac{M}{m}}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{T_2} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{2g}{\ell\omega^2}\left(\frac{2m}{M}+1\right)$$

$$\cos\theta < 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2g}{\ell\omega^2}\left(\frac{2m}{M}+1\right) < 1 \quad\Rightarrow\quad \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\frac{2m}{M}+1\right)}$$

پ) به‌ازای $\omega = 2\omega_m$ از معادلات قسمت ب):

$$\cos\theta = \frac{1}{4}\ ,\quad T_2 = 4mg\ ,\quad T_1 = 4(m+M)g\ ,\quad \frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}\ell$$

ت)

(۱) $T\cos\theta - T\cos\varphi = Mg$

(۲) $T\sin\theta + T\sin\varphi = M(\ell-d)\sin\theta\,\omega^2$

(۳) $T\cos\varphi = mg$

ث) از هندسه شکل ۲ شعاع دایره مسیر

(۴) $(\ell-d)\sin\theta = d\sin\varphi$

به‌ازای $M=2m$: از تقسیم معادله (۱) به معادله (۳):

(۵) $\cos\theta = 3\cos\varphi$

با قرار دادن (۴) و (۵) در $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

(۶) $$\cos^2\theta = \frac{2u-1}{u^2/9 - (1-u)^2}$$

ج) با قرار دادن $\sin\varphi$ از معادله (۴) در معادله (۲):

$$T\,\frac{\ell}{d} = 2m(\ell-d)\omega^2$$

$$T\cos\theta = (m+2m)g$$ با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱)

از حذف T بین دو معادله فوق

$$(7)\quad \frac{\ell\omega^2}{g} = \frac{3}{2u(1-u)\cos\theta}$$

با قرار دادن $\cos\theta$ از معادله (۶) در معادله (۷):

$$\frac{\ell\omega^2}{g} = \frac{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}{2u(1-u)\sqrt{1-2u}}$$

چ) به ازای $u=\frac{1}{4}$:

$$\omega^2 = \frac{8\sqrt{10}}{3}\,\frac{g}{\ell}\ ,\quad \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ T=\sqrt{10}\,mg$$

شعاع دایره مسیر $\quad d\sin\varphi = \frac{3}{4\sqrt{10}}\ell$

ح)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\ell\omega^2}{g}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{d}{du}\sqrt{9(1-u)^2-u^2}\right)u(1-u)\sqrt{1-2u}$$
$$-\frac{d}{du}\left(u(1-u)\sqrt{1-2u}\right)\sqrt{9(1-u)^2-u^2}=0$$

$$\frac{8u-9}{\sqrt{9(1-u)^2-u^2}}\,u(1-u)\sqrt{1-2u} = \frac{5u^2-5u+1}{\sqrt{1-2u}}\sqrt{9(1-u)^2-u^2}$$

$$(8u-9)\,u(1-u)(1-2u) = (5u^2-5u+1)\left(9(1-u)^2-u^2\right)$$

$$u^4-\frac{11}{3}u^3+\frac{9}{2}u^2-\frac{9}{4}u+\frac{3}{8}=0$$

$$c_0=\frac{3}{8}\ ,\quad c_1=-\frac{9}{4}\ ,\quad c_2=\frac{9}{2}\ ,\quad c_3=-\frac{11}{3}$$