$$\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}\,[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my$$

که در آن

$$c=\frac{2}{m}(-1)^{m+1},\ D=\frac{2}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]$$

$$E_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^2_{mn}}\{2AD(\pi\lambda^2_{mn}+n^2)+BD\pi\ (2m^2-n^2-1)\ -\pi Bc\lambda^2_{mn}-Bcm^2\}$$

$$F_{mn}=\frac{1}{\pi\lambda^2_{mn}}\{AD\pi(n^2-1)-c(m^2A-B\pi+n^2B\pi-2B\pi m^2)\}$$

بنابراین

$$u(x,y,t)=y+t-2\frac{t}{\pi}x+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{y}{\pi}(A+Bt-B\pi)+A(1+\frac{2t}{B})-3Bt\}\sin nx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{E_{mn}\sin\lambda_{mn}t+F_{mn}\cos\lambda_{mn}t+\frac{c}{\pi\lambda^2_{mn}}[B\pi-n^2(A+Bt-B\pi)]$$

$$+\frac{D}{\pi\lambda^2_{mn}}[A\pi+B\pi t-n^2(A\pi+2At-3B\pi t)]\}\sin my\sin nx$$

۱۷.۲. تمرینات متفرقه

۱ ـ هر یک از مسائل زیر را حل کنید

a. $u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ ;\ u(x,0)=0\quad ,u_t(x,0)=8\sin^2 x\ ,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0$

جواب.

$$u(x,t)=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{32[(-1)^n-1]}{\pi cn^2(n^2-4)}\sin nct\sin nx$$

b. $u_{tt}+au_t+bu=c^2u_{xx}\quad ,0<x<1\quad ,t>0$

$u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=0$

$u(0,t)=u(1,t)=0$

جواب
$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\, G_n(t) \sin n\pi x$$

که در آن $a_n = ۲\int_{۰}^{\pi} f(x)\sin n\pi x\, dx$ و

$$G_n(t)=\begin{cases} e^{-at/۲}\left(\cosh \alpha t+\dfrac{a}{۲\alpha}\sinh \alpha t\right) ; & \alpha>۰ \\ e^{-at/۲}\left(۱+\dfrac{at}{۲}\right) ; & \alpha=۰ \\ e^{-at/۲}\left(\cos\beta t+\dfrac{a}{۲\beta}\sin \beta t\right) ; & \alpha<۰ \end{cases}$$

$$\beta=\frac{۱}{۲}[۴(b+n^{۲}\pi^{۲}c^{۲})-a^{۲}]^{۱/۲} \;,\; \alpha=\frac{۱}{۲}[a^{۲}-۴(b+n^{۲}\pi^{۲}c^{۲})]^{۱/۲}$$

c. $u_{tt}=c^{۲}u_{xx}+\sinh x \;;\; u(x,۰)=۰ \,,\; u_t(x,۰)=۰ \,,\; u(۰,t)=u(۱,t)=۱$

جواب.
$$u(x,t)=V(x,t)+w(x,t)$$

که در آن

$$V(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\left[-۲\int_{۰}^{۱} w(x,v)\sin n\pi v\, dv\right]\cos nct \sin n\pi x$$

$$w(x,t)=-c^{-۲}\sinh x+(c^{-۲}\sinh ۱)x+۱$$

d. $u_t=۴u_{xx} \;;\; u(x,۰)=x^{۲}(۱-x) \,,\; u(۰,t)=u(۱,t)=۰$

جواب.
$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{n^{۳}\pi^{۳}}[۲(-۱)^{n+۱}-۱]e^{-۴n^{۲}\pi^{۲}t}\sin n\pi x$$

۲ ـ مطلوب است حل مسئله زیر

$$u_{tt}-u_{xx}=x+t \;;\; u(x,۰)=۲ \,,\; u_t(x,۰)=x \,,\; u(۰,t)=\sin t \,,\; u(\pi,t)=۲t$$

جواب.
$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \;;\; w(x,t)=\frac{۲t-\sin t}{\pi}x+\sin t$$

$$v(x,t)=a_۱\cos t+b_۱\sin t+\frac{۴t}{\pi}+۲-\frac{۱}{\pi}t\cos t$$

$$+\sum_{n=۲}^{\infty}\left\{a_n\cos nt+b_n\sin nt+\frac{۲}{\pi n^{۳}}[\pi(-۱)^{n+۱}+((-۱)^{n+۱}+۱)t]+\frac{۲\sin t}{n(n^{۲}-۱)\pi}\right\}\sin nx$$

d. $u_{tt} - (u_{xx}+u_{yy}) = \cos x \cos y \cos t \;; \quad 0 \leq x \leq \pi \;, \quad 0 \leq y \leq \pi \;, \quad t \geq 0$

$u(x,y,0) = \cos x \cos y \;, \quad u_t(\pi,y,0) = 0$

$u(0,y,t) = \cos y \cos t \;, \quad u(\pi,y,t) = -\cos y \cos t$

$u(x,0,t) = \cos x \cos t \;, \quad u(x,\pi,t) = -\cos x \cos t$

۱۳ - هر یک از مسائل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

a. $u_{tt}=c^2 u_{xx}+f(t) \quad ; \; 0<x<\infty \;, \; t>0$

$u(x,0)=0 \quad ; \quad 0 \leq x<\infty$

$u_t(x,0)=0 \quad ; \quad 0 \leq x<\infty$

$u(0,t)=0 \quad ; \quad t \geq 0$

$u_x(x,t) \to 0$ هرگاه $x\to\infty$ آنگاه

b. $u_t= u_{xx}-2u \quad ; \; 0<x<\infty \;, \; t>0$

$u(x,0)=0 \quad ; \quad 0 \leq x<\infty$

$u(0,t)=0 \;; \; t \geq 0$

$u(x,t) \to 0$ هرگاه $x\to\infty$ آنگاه

c. $\alpha^2 u_{xx}=u_t \quad ; \; 0<x<\infty \;; \; t>0$

$u(x,0)=0 \;; \quad 0 \leq x<\infty$

$u_x(0,t)=-1 \;; \; t \geq 0$

$u(x,t) \to 0$ هرگاه $x\to\infty$ آنگاه

۱۴ - مسائل زیر را حل کنید

a. $u_{xx}+u_{yy}=x-y \quad ; \; 0<x<\pi \;; \; 0<y<\pi$