مراحل رسم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ (در حالت کلی)

الف) توابع درجه دوم همواره پیوسته بوده و دامنهٔ تعریف آنها بازه $(-\infty,+\infty)$ می باشد. ($D_f=R$)

ب) نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات را بدست آورده و سپس حد تابع را هنگامی که $x\to\pm\infty$ پیدا می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^2+bx+c)=\lim_{x\to\pm\infty}(ax^2)=\begin{cases}+\infty \ (\text{اگر } a>0) \\ -\infty \ (\text{اگر } a<0)\end{cases}$$

ج) مشتق تابع را حساب کرده و ریشه های آنرا می یابیم تا جهت تغییرات و نقطهٔ ماکزیمم یا می نیمم تابع را تعیین کنیم.

مختصات نقطهٔ اکستر مم (رأس سهمی)

$$y'=2ax+b=0\to x=-\frac{b}{2a}\to y=\frac{4ac-b^2}{4a}\longrightarrow S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

د) با تشکیل جدول تغییرات، نمودار تابع را در صفحه مختصات رسم کنید.

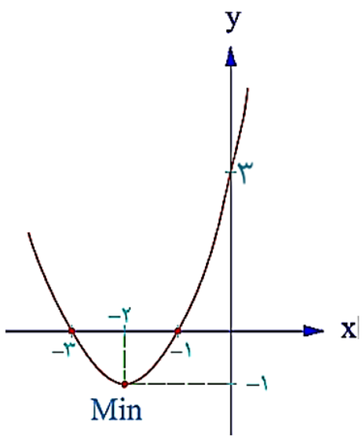
مثال 1) نمودار تابع $y=x^2+4x+3$ را رسم کنید.

مرحله اول : $D_f=R$ یا $D_f=(-\infty,+\infty)$

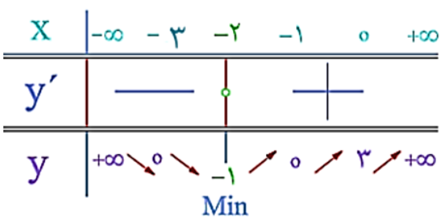
مرحله دوم : $\begin{cases}x=0\to y=3\\ y=0\to x=-1, x=-3\end{cases}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+4x+3)=\lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$

مرحله سوم : $y'=2x+4=0\to x=-\frac{4}{2}=-2$

x	y
$\pm\infty$	$+\infty$
-3	0
-2	-1
-1	0
0	3



مرحله چهارم :



09144101130

مراحل رسم نمودار تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (در حالت کلی)

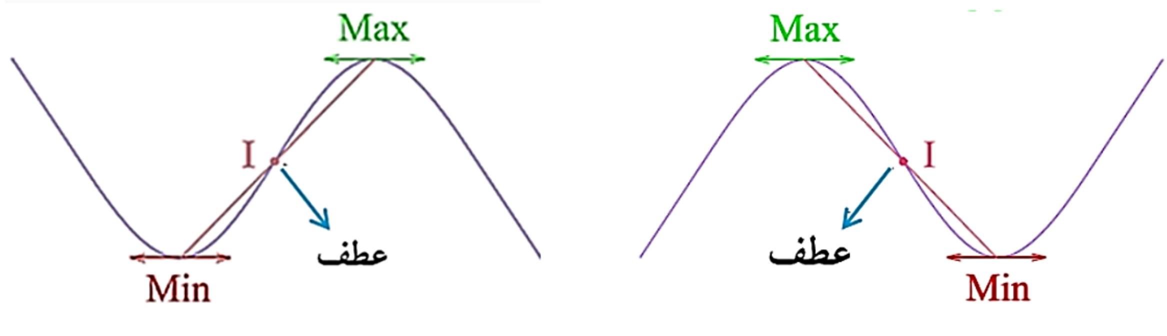
الف) توابع درجه سوم همواره پیوسته بوده و دامنهٔ تعریف آنها بازه $(-\infty, +\infty)$ می باشد: $(D_f = R)$

ب) نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات را بدست آورده و سپس حد تابع را هنگامی که $x \to \pm\infty$ پیدا می کنیم.

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^3 = \begin{cases} +\infty & : a > 0 \quad \text{اگر} \\ -\infty & : a < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^3 = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \quad \text{اگر} \\ +\infty & : a < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$

ج) مشتق تابع یک عبارت درجه دوم می باشد که برای تشکیل جدول تغییرات، باید ریشه های آن را بدست آوریم در این صورت با دو حالت زیر روبرو می شویم: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$



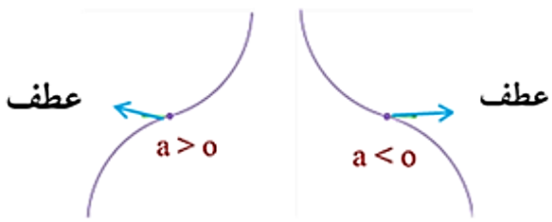
a < o　　　　a > o

الف) $\Delta y' > 0 \Rightarrow$ معادلهٔ $y' = 0$ دارای 2 ریشه است

و تابع درجه سوم دارای یک Max و یک Min نسبی است.

نکته: نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی و نقطه عطف بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره خطی است که ماکزیمم و می نیمم را به یکدیگر وصل می کند. در این صورت مختصات نقطه عطف برابر است با:

$$I\left|\begin{array}{l} x_I = \dfrac{x_{\max} + x_{\min}}{۲} \\ y_I = \dfrac{y_{\max} + y_{\min}}{۲} \end{array}\right.$$



ب) $\Delta y' \leq ۰ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ & : \text{تابع اکیداً صعودی} \\ a < ۰ & : \text{تابع اکیداً نزولی} \end{cases}$

د) در تابع درجه سوم، نقطه عطف مرکز تقارن منحنی است که طول آن $x = -\dfrac{b}{۳a}$ می باشد.

$$I\left|\begin{array}{l} x_I = -\dfrac{b}{۳a} \\ y_I = f(-\dfrac{b}{۳a}) \end{array}\right. \quad \text{مختصات نقطه عطف}$$

هـ) جدول تغییرات را تشکیل داده و نمودار تابع را رسم می کنیم.

مثال) جدول تغییرات و نمودار توابع زیر را رسم نمایید.

$f(x) = x^۳ - ۳x^۲$

$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$

09144101130

مثال) نمودار تابع $y=(x+2)(x-1)^2$ را رسم کنید.

مرحله اول : $D_f=R, D_f=(-\infty,+\infty)$

مرحله دوم :

$$x=0 \to y=2 \quad , \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(x-1)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(x-1)^2=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty \end{cases}$$

$$y=0 \to x=-2, x=1$$

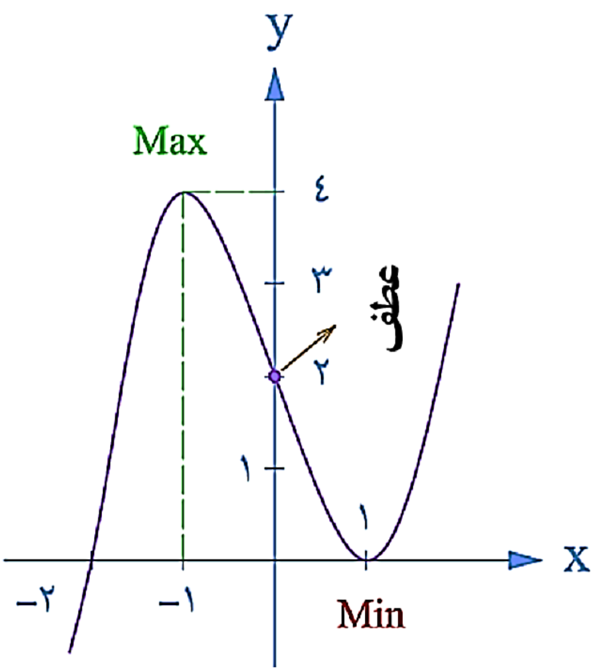
مرحله سوم : $y'=(x-1)^2+2(x-1)(x+2)=(x-1)(3x+3)=0 \to \begin{cases} x=1 : y=0 \\ x=-1 : y=4 \end{cases}$ نقاط اکسترمم

مرحله چهارم : $y''=(3x+3)+3(x-1)=6x=0 \to x=0 : y=2$ نقطه عطف

مرحله پنجم :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$
					Max				Min		

x	y
$-\infty$	$-\infty$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
$+\infty$	$+\infty$



09144101130