بسمه‌تعالی

تمرین‌های درس ریاضی عمومی(۱)، ............................ مدرس: محفوظ رستم‌زاده

## مباحث: دنباله و سری

۱- همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$i.\ \frac{\sin n}{n+۱} \quad ii.\ \frac{(-۱)^n n}{n^۲+۱} \quad iii.\ \frac{n}{[n]} \quad iv.\ a_۱=۱,\ \ a_{n+۱}=\sqrt{۳a_n}$$

$$v.\ (-۱)^n n \quad vi.\ \sqrt{۲n+۱}-\sqrt{۲n-۱} \quad vii.\ \sqrt[n]{۲^n+۳^n+۵^n} \quad viii.\ (-۱)^n$$

۲- همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$i.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲+۲} \quad ii.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱} \quad iii.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{(n+۲)!} \quad iv.\ \sum_{n=۱}^{\infty}(۱-\sin(\frac{۱}{n}))$$

$$v.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴^n n!}{(۳n)^n} \quad vi.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n\sqrt{n+۱}} \quad vii.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{۲^n} \quad viii.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{e^n}$$

$$ix.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{lnn+۱} \quad x.\ \sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}) \quad xi.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} \quad xii.\ \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲}$$

### یادآوری چند نکته در زمینه‌ی سری‌های توانی

یک سری توانی حول نقطه‌ی $x.$ عبارتست از $\sum_{n=.}^{\infty} a_n(x-x.)^n$. برای هر عدد حقیقی ثابت، سری توانی یک سری عددی است که می‌تواند همگرا یا واگرا باشد. مقادیری از $x$ را که سری توان برای آن‌ها همگراست، دامنه‌ی همگرایی گوییم و نقطه‌ی $x.$ را مرکز همگرایی نامند.
هر سری توانی روی دامنه‌ی همگرایی خود یک تابع حقیقی را مشخص می‌کند. بنابراین تشخیص دامنه‌ی همگرایی یک سری توانی دارای اهمیت خاصی است. دامنه‌ی همگرایی یک سری توانی که با $D$ نمایش می‌دهیم به یکی از حالات زیر است:

الف) $D=R$. یعنی به ازای تمام اعداد حقیقی همگراست.

ب) $D=\{x.\}$. یعنی فقط به ازای $x=x.$ همگراست.

ج) عددی حقیقی و مثبت مانند $r$ وجود دارد که شعاع همگرایی نامیده می‌شود به طوری که $(-r, r) \subseteq D \subseteq [-r, r]$.

روی شعاع همگرایی، سری توانی به تابعی مانند $f(x)$ همگراست که روی آن مشتق‌پذیر و انتگرال‌پذیر است که مشتق و انتگرال آن نیز دارای همان شعاع همگرایی است. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n \implies f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x - x_۰)^{n-۱}$$

$$\int \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} \int a_n (x - x_۰)^n = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n+۱} a_n (x - x_۰)^{n+۱}$$

مثال:
برای $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^n$،

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n-۱}, \qquad \int \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^n = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n+۱} \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n+۱}$$

دربرخی از مورد می‌توان از آزمون‌های همگرایی سری‌های عددی برای به دست آوردن دامنه‌ی همگرایی یک سری توانی استفاده کرد. به طور مثال می‌توان از آزمون نسبت یا آزمون ریشه‌ی n ام استفاده کرد. برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = l \quad (\text{یا} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l)$$

در این صورت
الف) اگر $l = ۰$ آنگاه $D = R$. یعنی به ازای تمام اعداد حقیقی همگراست.

ب) اگر $l = \infty$ آنگاه $D = \{x_۰\}$. یعنی فقط به ازای $x = x_۰$ همگراست.

ج)اگر $l > ۰$ آنگاه عدد $r = \frac{۱}{l}$ شعاع همگرایی است و به ازای $|x - x_۰| < r$ سری همگرا و برای $|x - x_۰| > r$ واگراست و به طور جداگانه مقادیر $x = r$ و $x = -r$ را بررسی می‌کنیم تا دامنه‌ی همگرایی به دست آید.

---

مثال ۱:
برای سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} n! x^n$ داریم:

$$l = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+۱)!}{n!}| = \lim_{n\to\infty} |n+۱| = \infty \quad \implies D = \{۰\}$$

........................................................................................................................

مثال ۲:
برای سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n۲^n} x^n$ داریم:

$$l = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n۲^n}{(n+۱)۲^{n+۱}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n}{۲(n+۱)}| = \frac{۱}{۲} \quad \implies r = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

پس این سری توانی به ازای $|x-\text{۰}| = |x| < \text{۲}$ یا به طور معادل روی $(-\text{۲}, \text{۲})$ همگراست.
حال برای $x = \text{۲}$

$$\sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{n\text{۲}^n}\text{۲}^n = \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{n}$$

که واگراست و برای $x = -\text{۲}$

$$\sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{n}{\text{۲}^n}(-\text{۲})^n = \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^n}{n}$$

که همگراست. بنابراین $D = [-\text{۲}, \text{۲})$.

.............................................................................................................

مثال ۳:
برای سری توانی $\sum_{n=\text{۰}}^{\infty} (\frac{n}{n+\text{۱}})^n (x-\text{۱})^n$ داریم:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(\frac{n}{n+\text{۱}})^n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{n}{n+\text{۱}}| = \text{۱} \quad \Longrightarrow r = \frac{\text{۱}}{\text{۱}} = \text{۱}$$

پس این سری توانی به ازای $|x-\text{۱}| < \text{۱}$ یا به طور معادل روی $(-\text{۱}, \text{۱})$ همگراست.
حال برای $x = \text{۱}$

$$\sum_{n=\text{۰}}^{\infty} (\frac{n}{n+\text{۱}})^n (\text{۱}-\text{۱})^n = \text{۰}$$

به وضوح همگراست و برای $x = -\text{۱}$

$$\sum_{n=\text{۰}}^{\infty} (\frac{n}{n+\text{۱}})^n (-\text{۱}-\text{۱})^n = \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} (\frac{n}{n+\text{۱}})^n (-\text{۲})^n$$

که واگراست(چرا؟). بنابراین $D = (-\text{۱}, \text{۱}]$.

---

۳- شعاع و دامنه‌ی همگرایی سری‌های توانی زیر را به دست آورید.

$$i.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{n^\text{۲}+\text{۲}} x^n \quad ii.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^n}{n+\text{۱}} (x+\text{۱})^n \quad iii.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{n!}{\text{۲}^n} x^n \quad iv.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} n^\text{۲} (x-\text{۲})^n$$

$$v.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^n}{n} x^n \quad vi.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{n\sqrt{n+\text{۱}}} (x-\text{۱})^n \quad vii.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} \frac{\text{۱}}{\text{۲}^n} x^n \quad viii.\ \sum_{n=\text{۰}}^{\infty} x^n$$

---

۴- سری تیلور هر یک از توابع

$$f(x) = \sin x \ , \ \ h(x) = \frac{\text{۱}}{\text{۱}-x} \ , \ \ k(x) = \tan x, \ \ m(x) = e^x$$

را حول نقطه‌ی $x. = \text{۰}$ و برای تابع $g(x) = lnx$ حول $x. = \text{۱}$ به دست آورید.
(یادآوری می‌کنیم که سری تیلور تابع بی‌نهایت مشتق‌پذیر $f(x)$ حول $x.$ عبارتست از

$f(x) = \sum_{n=.}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x.)}{n!}(x-x.)^n$ که در آن $f^{(n)}(x.)$ مشتق مرتبه n ام است. )

۵- با استفاده از ویژگی‌های سری توانی تیلور و تمرین قبل سری تیلور توابع $\cos x$(ویژگی مشتق‌پذیری)، $\frac{۱}{x}$(ویژگی مشتق‌پذیری)، $\frac{۱}{۱-x^۲}$ و $e^{x^۲}$ را به دست آورید. توجه کنید برای $\frac{۱}{۱-x^۲}$ و $e^{x^۲}$ می‌توان از $f(x^۲)$ در $f(x) = \sum_{n=.}^{\infty} a_n x^n$ استفاده کرد.