فصل ۴

دینامیک در فضاهای متریک

در دستگاه‌های دینامیکی، مثال‌های متنوع بر مجموعه‌های مختلف، می‌توانند ویژگی‌های مشابهی داشته باشند. تا اینجا، در مثال‌هایی که دیدیم مجموعه‌ی مورد بررسی زیر بازه‌ای از $\mathbb{R}$ بود. در دیگر حالت‌ها، مجموعه‌ی زیربنایی ممکن است زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$، یا دایره واحد در صفحه‌ی مختلط، یا نوعی از فضاهای دنباله‌ای باشد. از آنجا که تعریفی از آشوب که در فصل‌های بعدی ارائه خواهد شد بر مبنای مثال‌هایی است که بر روی انواع مختلف فضای متریک عمل می‌کنند، در این فصل قصد داریم به معرفی چنین فضاهایی بپردازیم. فضاهای متریک به نوعی کم‌انتزاعی‌ترین نوع فضاهای توپولوژیکی هستند. مثال‌هایی که در این فصل می‌آوریم معمولاً دستگاه‌های دینامیکی هستند که بر روی فضاهای متریک فشرده یا کامل اثر می‌کنند. ابزارهای توسعه‌یافته در این فصل از آنجا که مفاهیم فصل‌های بعدی بر اساس آن‌ها ساخته خواهند شد، حائز اهمیت هستند.

ویژگی‌های اساسی فضای متریک :

در این بخش، ایده فضای متریک را معرفی می‌کنیم. فضای متریک به سادگی دوتایی (X, d) است که در آن X یک مجموعه و d فاصله‌ی تعریف شده روی مجموعه X است و متریک نامیده می‌شود. d باید ویژگی‌های طبیعی خاصی را که از یک تابع فاصله انتظار می‌رود، برآورده کند.

تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه و $x, y, z \in X$ باشند. یک متریک روی X تابعی است به‌صورت $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند :

۱. $d(x, y) \geq 0$،

۲. $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$،

۳. $d(x, y) = d(y, x)$،

۴. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (نامساوی مثلث)

مثال‌ها. ۱. $X=\mathbb{R}$ با $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ یک فضای متریک است. به روشی مشابه، $X=[0,1]$ با تابع فاصله‌ی یکسان یک فضای متریک است.

۲. $X=\mathbb{R}^2$ با فاصله‌ی معمول در صفحه که به‌صورت

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

برای هر $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود، یک فضای متریک است. به طور کلی، $\mathbb{R}^n$ با تابع فاصله‌ی معمول خودش و $\mathbb{C}$، یعنی مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط با $d(z,w)=|z-w|$ برای هر $z,w\in\mathbb{C}$، فضاهای متریک هستند.

۳. فرض کنیم $X=\mathbb{S}^1$ که در آن $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ همان دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط است. متریک طبیعی روی $\mathbb{S}^1$ (کوتاه‌ترین) فاصله بین دو نقطه روی دایره واحد خواهد بود.

۴. اگر X هر مجموعه‌ی دلخواه و $d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$، برای هر $x,y\in X$ باشد، آنگاه d یک متریک روی X است که متریک گسسته نامیده می‌شود و می‌توانیم از آن برای تعریف یک متریک در مجموعه‌ی $X=\{0,1\}$ یا در $X=\mathbb{R}$ استفاده کنیم که با متریک استاندارد تعریف شده در مثال 1 متفاوت است.

۵. فرض کنیم $\mathcal{A}=\{0,1\}$ و $n\in\mathbb{Z}^+$. در این صورت مجموعه‌ی $\mathcal{A}^n$ عبارت است از :

$$\mathcal{A}^n=\{(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}):a_i\in\{0,1\},\ 0\leq i<n\},$$

که مجموعه‌ای از n–تایی‌ها حاصل از n–بار ضرب مستقیم $\mathcal{A}$ در خودش است. برای مثال $\mathcal{A}^2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. این تعریف منجر به نمادگذاری زیر می‌شود :

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}}=\{(a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots):a_i\in\{0,1\},\ i\in\mathbb{N}\},$$

به طوری که اعضای $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ دنباله‌های نامتناهی یک طرفه از صفر و یک هستند (به طور رسمی‌تر، $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ به‌عنوان مجموعه‌ای از همه توابع $f:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}$ تعریف می‌شود).

فاصله‌ی d را روی $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم : اگر

$$\omega_1=(s_0,s_1,s_2,s_3,\cdots),\qquad \omega_2=(t_0,t_1,t_2,t_3,\cdots),$$

اعضای $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ باشند، آنگاه :

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|s_n-t_n|}{2^n}.$$

حال ساده است که بررسی کنیم d یک متریک روی $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ است، بنابراین $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}},d)$ یک فضای متریک است.

برای مثال فرض کنیم $\omega_1=(1,1,1,1,\cdots)$ و $\omega_2=(1,0,1,0,1,\cdots)$، در این صورت :

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|s_n-t_n|}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}=\frac{2}{3}.$$

با این متریک، فاصله‌ی نقاطی که برای n کوچک مختصات متفاوت دارند بیشتر از فاصله بین نقاطی است که برای مقادیر بزرگ n دارای مختصات متفاوتی هستند. برای مثال، فاصله بین دو نقطه‌ی $(1,0,1,1,1,\cdots)$ و $(1,1,1,1,\cdots)$ برابر $\frac{1}{2}$ است، در حالی که فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $(1,1,1,0,1,1,1,\cdots)$ و $(1,1,1,1,1,1,\cdots)$ برابر $1/8$ است.

برخی دیگر از این دست فضاهای دنباله‌ای که می‌توان تعریف کرد عبارتند از $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^+} = \{(a_1,a_2,a_3,\cdots) : a_i \in \{0,1\},\ i \in \mathbb{Z}^+\}$ و $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(\cdots,a_{-1},a_0,a_1,a_2,\cdots) : a_i \in \{0,1\},\ i \in \mathbb{Z}\}$، فضای دوم مجموعه‌ی تمام دنباله‌های دو طرفه از صفر و یک با متریک تعریف شده به‌صورت زیر است :

$$d(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^{|n|}}.$$

که در آن $\omega_1 = (\cdots,s_{-1},s_0,s_1,s_2,\cdots)$ و $\omega_2 = (\cdots,t_{-1},t_0,t_1,t_2,\cdots)$. در این حالت، نقاط زمانی به هم نزدیک هستند که مولفه‌های آنها در نزدیکی مختصات 0 برابر باشند.

تعریف. اگر (X,d) یک فضای متریک، $a \in X$ و $\varepsilon > 0$ باشد، آنگاه

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon\},$$

را گوی (یا همسایگی) باز به مرکز a و شعاع ε می‌گوییم.

مثال‌ها. اگر $X = \mathbb{R}$ مانند مثال 1 از سری مثال‌های قبل، همسایگی‌های باز بازه‌هایی به شکل $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ هستند. اگر $X = \mathbb{R}^2$ و $a = (a_1,a_2)$ نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ باشد، نقاطی از $B_\varepsilon(a)$ آن‌هایی هستند که داخل دایره‌ای به مرکز (a_1,a_2) و شعاع ε قرار دارند (مرز دایره را شامل نمی‌شود). اگر $X = [0,1]$ با همان متریک، گوی‌های باز بازه‌هایی به شکل (c,d) برای $0 < c < d < 1$، همراه با بازه‌های نیمه‌باز به فرم $[0,c)$ و $(d,1]$ هستند.

تعریف. ۱. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را باز گوییم هرگاه برای هر $a \in A$، وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ به طوری که $B_\varepsilon(a) \subseteq A$ (یعنی هر نقطه از A را بتوان با یک گوی باز که کاملاً در A قرار دارد احاطه کرد).

۲. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را بسته گوییم هرگاه متمم مجموعه‌ی A یعنی $X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ (که با A^c نیز نمایش داده می‌شود)، باز باشد.

۳. نقطه‌ی $a \in X$ را یک نقطه‌ی حدی برای مجموعه‌ی $A \subseteq X$ گوییم هرگاه هر گوی $B_\varepsilon(a)$ شامل نقطه‌ای از A به جز a باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad A \cap B'_\varepsilon(a) \neq \emptyset,$$

که در آن $B'_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ گوی بازی به مرکز a است که نقطه‌ی a از آن حذف شده باشد و اغلب همسایگی محذوف a نامیده می‌شود.

مثال‌ها. ۱. بازه‌های باز (a,b) در $\mathbb{R}$ مجموعه‌های باز هستند و هر اجتماع دلخواه از بازه‌های باز نیز باز است. بازه‌های بسته مانند $[a,b]$، $[a,\infty)$ مجموعه‌های بسته هستند. مجموعه‌هایی مانند $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ نه باز هستند و نه بسته.

۲. هر همسایگی یا گوی باز $B_\varepsilon(a)$ در فضای متریک X یک مجموعه‌ی باز است. گوی یا همسایگی بسته‌ی

$$\overline{B}_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq \varepsilon\},$$

یک مجموعه‌ی بسته خواهد بود. مجموعه‌ی تهی $\emptyset$ و تمام فضای X هم باز و هم بسته هستند.

۳. در هر فضای متریک X، اجتماع مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز و اشتراک مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

اثبات. فرض کنیم $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ اجتماعی از مجموعه‌های باز و $a \in A$ باشد. بنابر تعریف اجتماع به ازای برخی مقادیر $\alpha \in \Lambda$ خواهیم داشت $a \in A_\alpha$. از آنجا که A_α مجموعه‌ای باز است، وجود دارد $\delta > 0$ به طوری‌که $B_\delta(a) \subseteq A_\alpha$ که نتیجه می‌دهد $B_\delta(a) \subseteq A$ و بنابراین A باز است.

اگر هر C_α مجموعه‌ای بسته باشد، $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ اشتراکی از مجموعه‌های بسته و هر $X\setminus C_\alpha$ مجموعه‌ای باز است، بنابراین $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus C_\alpha)$ نیز مجموعه‌ای باز است. اما قانون دمورگان می‌گوید :

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus C_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha,$$

و بنابراین $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ مجموعه‌ای بسته است. □

۴. صفر یک نقطه‌ی حدی برای بازه‌ی $(0,1) \subset \mathbb{R}$ و همچنین برای مجموعه‌ی $\{1, \frac{1}{2}, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ است. چون هر همسایگی محذوف از نقطه‌ی صفر شامل نقاطی از هر دو مجموعه‌ی ذکر شده، می‌شود.

۵. اگر X متریک گسسته و $0 < \varepsilon < 1$، آنگاه

$$\forall a \in X \quad : \quad B_\varepsilon(a) = \{a\}.$$

به طور خاص، هر مجموعه‌ی تک عضوی (یعنی هر مجموعه‌ای که شامل تنها یک نقطه است) یک مجموعه‌ی باز است و از آنجا که اجتماع مجموعه‌های باز، باز است، هر مجموعه از نقاط، باز خواهد بود.

۶. اگر (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه می‌توان (A,d) را نیز یک فضای متریک در نظر گرفت که زیرفضای X نامیده می‌شود.

مجموعه‌های چگال :

به منظور تعریف مفهوم آشوب برای نگاشت‌های یک بعدی، به مفاهیم توپولوژیکی‌ای مثل چگال بودن و تعدّی نیاز داریم.

تعریف. بستار مجموعه‌ی A در فضای متریک X به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\bar{A} = A \cup \{\text{مجموعه‌ی نقاط حدی } A\}.$$

گزاره ۷. $\bar{A}$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A است (یعنی اگر B مجموعه‌ی بسته‌ی دیگری شامل A باشد، آنگاه $\bar{A} \subseteq B$).

اثبات. واضح است که $A \subset \bar{A}$. برای اینکه ببینیم $\bar{A}$ یک مجموعه‌ی بسته است، فرض می‌کنیم $a \in X \setminus \bar{A}$. در این صورت a نقطه‌ی حدی برای A نیست و بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که $B_\delta(a) \cap A = \emptyset$.

ادعا می‌کنیم که $B_\delta(a) \cap \bar{A} = \emptyset$، چون اگر x متعلق به این مجموعه باشد، آنگاه $x \notin A$ پس باید یک نقطه‌ی حدی برای A باشد. از طرفی $x \in B_\delta(a)$ یعنی عضوی از یک مجموعه‌ی باز است، بنابراین وجود دارد $\varepsilon > 0$ به طوری که $B_\varepsilon(x) \subseteq B_\delta(a)$. از این رو

$$B_\varepsilon(x) \cap A \subseteq B_\delta(a) \cap A = \emptyset,$$

که در تناقض با این حقیقت است که x نقطه‌ی حدی برای A باشد.

حال کافیست نشان دهیم که اگر B هر مجموعه‌ی بسته‌ی دیگری شامل A باشد، آنگاه $\bar{A} \subseteq B$. فرض کنیم $x \in X \setminus B$ باشد که مجموعه‌ای باز است. پس برای برخی مقادیر $\delta > 0$:

$$B_\delta(x) \subset X \setminus B \subseteq X \setminus A,$$

بنابراین $B_\delta(x) \cap A = \emptyset$ و این به این معناست که x نقطه‌ی حدی از A نیست پس $x \in X \setminus \bar{A}$، از این رو $X \setminus B \subseteq X \setminus \bar{A}$ یا $\bar{A} \subseteq B$. □

تعریف. مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را در X چگال گوییم هرگاه $\bar{A} = X$ باشد.

مثال‌ها. ۱. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باشد. $A \subseteq I$ در I چگال است هرگاه برای هر بازه‌ی باز U درون I داشته باشیم $U \cap A \neq \emptyset$. چون در این صورت هر $x \in I$ یک نقطه حدی برای A است، یعنی اگر $x \in I$ آنگاه برای هر $\delta > 0$ داریم $B_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$. به طور معادل، A در I چگال است هرگاه برای هر $x \in I$ و هر $\delta > 0$، بازه‌ی $(x-\delta, x+\delta)$ شامل نقطه‌ای از A باشد.

به طور شهودی، نقاط A به طور یکنواخت در بازه‌ی I پخش می‌شوند، به گونه ای که هر زیر بازه‌ی I (هرچقدر هم که کوچک باشد)، شامل نقاطی از A است.

۲. مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ در $[0,1]$ چگال است.

اثبات. نشان می‌دهیم که $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ در $[0,1]$ چگال است. فرض می‌کنیم $x \in (0,1)$ کافیست عدد گویای y را بطور دلخواه نزدیک به x پیدا کنیم، یعنی برای برخی مقادیر دلخواه $\delta > 0$ داشته باشیم $|x-y| < \delta$. فرض کنیم x دارای بسط اعشاری باشد :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = .d_1 d_2 d_3 \cdots, \qquad d_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}.$$

عدد $m \in \mathbb{Z}^+$ را چنان انتخاب کنیم که $10^{-m} < \delta$ و قرار دهیم $y = \sum_{n=1}^{m} \frac{d_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$، بنابراین

$$|x-y| = |.d_{m+1}d_{m+2}\cdots| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^m} < \delta.$$

□

۳. مجموعه‌ی اعداد گنگ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.

۴. برای بازه‌های حقیقی یعنی بازه‌هایی در $\mathbb{R}$ داریم $\overline{(a,b)}=[a,b]$. اگر $A=\{1,\frac{1}{2},1/3,\cdots\}$ آنگاه $\bar{A}=A\cup\{0\}$.

۵. یک زیر مجموعه مناسب از فضای متریک X می‌تواند هم باز و هم چگال باشد. به‌عنوان مثال، در $\mathbb{R}$، مجموعه‌ی $E=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{2}\}$ هم باز و هم چگال است، با این ویژگی که $\mathbb{Q}\subset E\neq\mathbb{R}$.

تعریف. اگر (X,d) یک فضای متریک شامل دنباله‌ی (x_n) باشد، آنگاه گوییم $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\in X$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد $N\in\mathbb{Z}^+$ به طوری که برای هر $n>N$ داشته باشیم $d(a,x_n)<\varepsilon$.

قضیه. گزاره‌های زیر برای فضای متریک (X,d) معادل هستند :

(i) مجموعه‌ی A در X چگال است.

(ii) فرض کنیم $\varepsilon>0$، در این صورت برای هر $x\in X$ وجود دارد $a\in A$ به طوریکه $d(a,x)<\varepsilon$.

(iii) برای هر $x\in X$، دنباله‌ی (a_n) در A چنان موجود است که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$.

اثبات. $(i)\Longrightarrow(ii)$ فرض کنیم A در X چگال و $x\in X$، در این صورت یا $x\in A$ (که بنابراین (ii) برقرار است) و یا x یک نقطه‌ی حدی برای A است. یعنی هر همسایگی $B_\varepsilon(x)$ شامل نقاطی از A است، بنابراین وجود دارد $a\in A$ به طوری که $d(x,a)<\varepsilon$.
$(ii)\Longrightarrow(iii)$ فرض کنیم $x\in X$ و $n\in\mathbb{Z}^+$، در این صورت $a_n\in A$ چنان موجود است که $d(x,a_n)<1/n$ برای $n=1,2,3,\cdots$، بنابراین هنگامی که $n\to\infty$ خواهیم داشت $d(x,a_n)\to 0$. یعنی برای $\varepsilon>0$ وجود دارد $N\in\mathbb{Z}^+$ به طوری که

$$n>N\Longrightarrow\quad d(x,a_n)<\varepsilon,\quad \text{یا}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=x.$$

$(iii)\Longrightarrow(i)$ باید نشان دهیم $\bar{A}=X$. فرض کنیم $x\in X$ در این صورت دنباله‌ی (a_n) در A چنان موجود است که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$ یعنی x یک نقطه‌ی حدی برای A چون برای هر $\delta>0$ داریم $B_\delta(x)\cap A\neq\emptyset$ و بنابراین $\bar{A}=X$. □

مثال‌ها. ۱. برای تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ثابت این نگاشت یعنی $Per_1(f)=Fix(f)$ یک زیرمجموعه‌ی بسته از $\mathbb{R}$ است.

اثبات. فرض کنیم $x\in X$ و (x_n) دنباله‌ای از نقاط در $Fix(f)$ که $x_n\to x$. پیوستگی f نتیجه می‌دهد $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$ یا

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),$$

بنابراین x نیز نقطه‌ی ثابتی از f و $Fix(f)$ بسته است. □

۲. اگر $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$، آنگاه $x=0$ و $x_k=\dfrac{2}{\pi(1+4k)}$ برای $k\in\mathbb{Z}$ نقاط ثابت f هستند. می‌دانیم که $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$. بعلاوه هر x_k نقطه‌ی ثابت غیرهذلولوی و $f'(0)$ تعریف نشده است. مجموعه‌ی $Fix(f)=\{x_k:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\}$

یک مجموعه‌ی بسته است. این تابع دارای تعداد زیادی نقاط در نهایت ثابت است که یافتن آن‌ها آسان است. نقطه ثابت $x = 0$ پایدار است اما جذب نمی‌شود زیرا نقاط ثابت دیگری به طور دلخواه نزدیک به آن وجود دارد.

توابع بین فضاهای متریک :

در این بخش پیوستگی توابع بین دو فضای متریک (X, d_1) و (Y, d_2) و تاثیر آن در مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی را بررسی می‌کنیم.

تعریف. تابع $f : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای متریک (X, d_1) و (Y, d_2) را پیوسته در $a \in X$ گوییم هرگاه برای $\varepsilon > 0$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ به طوری که اگر $x \in X$ آنگاه

$$d_1(x, a) < \delta \implies d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

قضیه. گزاره‌های زیر برای تابع $f : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای متریک (X, d_1) و (Y, d_2) معادل هستند :

(i) f در $x = a$ پیوسته است.

(ii) برای هر همسایگی از $f(a)$ به شعاع ε مانند $B_\varepsilon(f(a))$، همسایگی از a به شعاع δ مانند $B_\delta(a)$ وجود دارد به طوریکه :

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)).$$

(iii) برای هر مجموعه‌ی باز V شامل $f(a)$ یک مجموعه‌ی باز مانند U شامل a وجود دارد به طوریکه :

$$f(U) \subseteq V.$$

اثبات. از آنجایی که گزاره‌ی (ii) بیان نسبتاً ساده‌ی دیگری از تعریف پیوستگی یعنی همان گزاره‌ی (i) است، فقط هم‌ارز بودن گزاره‌های (i) و (iii) را نشان خواهیم داد.

$(i) \implies (iii)$ فرض کنیم $V \subset Y$ مجموعه‌ای باز و $f(a) \in V$. از آنجا که V باز است $\varepsilon > 0$ چنان موجود است که $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. از طرفی f در $x = a$ پیوسته است بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V,$$

حال کافیست قرار دهیم $U = B_\delta(a)$ و در این صورت $f(U) \subseteq V$.

$(iii) \implies (i)$ از آنجا که $B_\varepsilon(f(a))$ یک مجموعه‌ی باز در Y و شامل $f(a)$ است، بنا به فرض گزاره‌ی (iii) مجموعه‌ی U باز در X شامل a چنان موجود است که :

$$f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).$$

چون U باز است می‌توان $\delta > 0$ را چنان پیدا کرد که $B_\delta(a) \subseteq U$. بنابراین f در a پیوسته است، چون :

$$f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(a)).$$

□

تعریف. تابع $f : X \longrightarrow Y$ بر X پیوسته است هرگاه در هر $a \in X$ پیوسته باشد.

حال یک محک سراسری برای پیوستگی f ارائه می‌کنیم. به خاطر داریم که اگر V زیرمجموعه‌ای از Y باشد، آنگاه تصویر V تحت وارون f مجموعه‌ی $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ است. $f^{-1}(V)$ حتی اگر f معکوس‌پذیر نباشد نیز تعریف می‌شود.

قضیه. گزاره‌های زیر برای تابع $f : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای متریک، معادل هستند :

(i) $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته است.

(ii) $f^{-1}(V)$ در X باز است هرگاه V در Y باز باشد.

اثبات. $(i) \Longrightarrow (ii)$ فرض کنیم V در Y باز باشد. می‌توانیم فرض کنیم $f^{-1}(V) \neq \emptyset$، در این صورت اگر $a \in f^{-1}(V)$ آنگاه $f(a) \in V$ و از آنجا که V باز است $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $B_\varepsilon(f(a)) \subset V$. از طرفی f در a پیوسته است بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \implies B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \subseteq f^{-1}(V),$$

و بنابراین $f^{-1}(v)$ در X باز است.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ فرض کنیم هنگامی که V در Y باز باشد، $f^{-1}(V)$ در X باز است. در این صورت اگر $a \in X$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه $f(a) \in B_\varepsilon(f(a))$ که یک مجموعه‌ی باز در Y است. بنا بر فرض $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ در X باز است و از آنجا که $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$، وجود دارد $\delta > 0$ به طوری که :

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \implies f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)),$$

و بنابراین f در a پیوسته است. □

به‌عنوان کاربردی از این قضیه، نشان می‌دهیم که دامنه‌ی جاذب $B_f(p)$، از نقطه‌ی ثابت p برای نگاشت پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow X$ روی فضای متریک X، یک مجموعه‌ی باز است. در حوزه‌ی فضاهای متریک نقطه‌ی ثابت جاذب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف. فرض کنیم $f : X \longrightarrow X$ نگاشتی روی فضای متریک (X, d) با نقطه‌ی ثابت $f(p) = p$ باشد. در این صورت :

(i) p یک نقطه‌ی ثابت پایدار است هرگاه برای هر همسایگی باز $B_\varepsilon(p)$ همسایگی باز $B_\delta(p)$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in B_\delta(p)$ و هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $f^n(x) \in B_\varepsilon(p)$.

(ii) p یک نقطه‌ی ثابت جاذب است هرگاه $\varepsilon > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in B_\varepsilon(p)$ هنگامی که $n \to \infty$ داشته باشیم $f^n(x) \to p$.

(iii) p مجانبی پایدار است هرگاه هم پایدار و هم جاذب باشد.

همانند دستگاه‌های دینامیکی یک بعدی، اگر در (i) قرار دهیم $n=1$، خواهیم دید که f باید در $x=p$ پیوسته باشد. هنگامی که با فضاهای متریک سروکار داریم، نتایج بیشتر به نقاط ثابت جاذب و نقاط تناوبی جاذب (به جای نقاط ثابت پایدار یا مجانبی پایدار) مربوط می‌شود.
به خاطر داریم که دامنه‌ی جاذب p مجموعه‌ای به‌صورت زیر است :

$$B_f(p)=\{x\in X \mid f^n(x)\to p \quad as \quad n\to\infty\}.$$

دیدیم که برای $0<\mu<1$، نقطه‌ی $x=0$ یک نقطه‌ی ثابت جاذب از نگاشت لجستیک $L_\mu(x)=\mu\, x\,(1-x)$ با دامنه‌ی جاذب $[0,1]$ است. در این حالت فضای متریک $X=[0,1]$ است، بنابراین دامنه‌ی جاذب یک مجموعه‌ی باز، یعنی کل فضا است (نقطه ثابت 0 جاذب سراسری است). برای نگاشت‌های پیوسته $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با یک نقطه ثابت مجانبی پایدار p، دامنه‌ی جاذب یک مجموعه‌ی باز است، که در این حالت فقط اجتماع بازه‌های باز است. بزرگترین بازه از چنین بازه‌های بازی که p به آن تعلق داشته باشد، دامنه جذب بلافصل p تحت f است. مشخص نیست که چگونه می‌توان دامنه جذب بلافصل را برای یک نگاشت در یک فضای متریک تعریف کرد، در نتیجه این موضوع را بررسی نخواهیم کرد.
به خاطر داریم که $A\subseteq X$ تحت f پایا است هرگاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم $f(x)\in A$.

قضیه. اگر $f:X\longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته از فضای متریک X و p نقطه‌ی ثابت جاذب f باشد، آنگاه دامنه‌ی جاذب p یعنی $B_f(p)$ یک مجموعه‌ی باز پایاست.

اثبات. اگر $x\in B_f(p)$، آنگاه هنگامی که $n\to\infty$ خواهیم داشت $f^n(x)\to p$ و $f^n(f(x))\to f(p)=p$، بنابراین $f(x)\in B_f(p)$ و از این رو $B_f(p)$ تحت f پایاست.
از آنجا که p یک نقطه‌ی ثابت جاذب است، وجود دارد $\varepsilon>0$ به طوری که اگر $x\in B_\varepsilon(p)$ آنگاه هنگامی که $n\to\infty$ خواهیم داشت $f^n(x)\to p$. از طرفی f نگاشتی پیوسته است پس بنا بر قضیه‌ی ؟؟، مجموعه‌ی $f^{-1}(B_\varepsilon(p))$ باز است. ادعا می‌کنیم :

$$B_f(p)=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\varepsilon(p)),$$

که از آن نتیجه به دست می‌آید، زیرا اجتماع مجموعه‌های باز، باز است.
فرض می‌کنیم $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\varepsilon(p))$، در این صورت برای برخی مقادیر $n\in\mathbb{Z}^+$ خواهیم داشت $x\in f^{-n}(B_\varepsilon(p))$ و یا $f^n(x)\in B_\varepsilon(p)$، بنابراین به وضوح $x\in B_f(p)$.
از طرف دیگر فرض کنیم $x\in B_f(p)$، در این صورت وجود دارد $n\in\mathbb{Z}^+$ به طوری که $f^n(x)\in B_\varepsilon(p)$ (چون p جاذب است)، بنابراین $x\in f^{-n}(B_\varepsilon(p))$ و $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\varepsilon(p))$. □

تذکر. ۱. اگر $f:X\longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته با $\Lambda=Fix(f)$ باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_f(\alpha)$ یک مجموعه‌ی باز است. بنابراین $C=X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_f(\alpha)$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی پایاست که ممکن است کاملاً پیچیده باشد.

۲. برای فضاهای متریک، ایده «همسانی» با مفهوم «هومئومورفیسم» ارائه می‌شود. دو فضای متریک از نظر توپولوژیکی همسان در نظر گرفته می‌شوند اگر بین آنها هومئومورفیسم وجود داشته باشد.

تعریف. تابع $h : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای متریک یک هومئومورفیسم است هرگاه :

(i) h یک به یک باشد، یعنی اگر $h(x) = h(y)$ آنگاه داشته باشیم $x = y$.

(ii) h پوشا باشد، یعنی برای هر $y \in Y$ وجود داشته باشد $x \in X$ به طوریکه $h(x) = y$.

(iii) h پیوسته باشد.

(iv) نگاشت وارون $h^{-1} : Y \longrightarrow X$ پیوسته باشد.

فضاهای X و Y را هومئومورفیک گوییم هرگاه یک هومئومورفیسم بین آن‌ها وجود داشته باشد.

مثال. ۱. اگر $f : [0,1] \to [0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ باشد، آنگاه f یک به یک، پوشا و پیوسته با وارون پیوسته و بنابراین f یک هومئومورفیسم است. در حقیقت هر تابع پیوسته $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ که اکیداً صعودی ($x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$) با $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ باشد، یک هومئومورفیسم است. همچنین، هر تابع پیوسته $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ که اکیداً نزولی با $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$ باشد نیز یک هومئومورفیسم است. می توان نشان داد که هر هومئومورفیسم از $[0,1]$ به خودش یکی از دو نوع بالا است. نگاشت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ یک هومئومورفیسم با تابع وارون $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ است.

۲. نگاشت $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ با ضابطه‌ی $f(x) = \arctan x$ یک هومئومورفیسم از فضاهای متریک متناظر است. نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$، $0 < \mu \leq 4$ یک هومئومورفیسم از $[0,1]$ نیست چون یک به یک نمی‌باشد (این نگاشت تنها در $\mu = 4$ پوشاست).

۳. فضاهای متریک $X = [0,1]$ و $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N}\}$ با متریکی که پیش از این تعریف شد را در نظر می‌گیریم. بعداً نشان خواهیم داد که این دو فضای متریک هومئومورفیک نیستند.

۴. می‌توان پرسید که آیا فضاهای متریک $[0,1]$ و $[0,1] \times [0,1]$ هومئومورفیک هستند؟ مشخص است که نگاشت پیوسته و پوشای $h : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ وجود دارد، اما چنین نگاشتی نمی‌تواند یک به یک باشد. به روشی مشابه، فضاهای متریک $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ نیز هومئومورفیک نیستند و بین بازه‌ی $[0,1)$ و دایره‌ی واحد $\mathbb{S}^1$ هم هومئومورفیسم وجود ندارد.

دیفئومورفیسم‌هایی از $\mathbb{R}$:

در این بخش، هومئومورفیسم‌های f تعریف‌شده در زیر بازه‌های $\mathbb{R}$ را مطالعه می‌کنیم که در آن‌ها f و f^{-1} توابع مشتق‌پذیری هستند و آن‌ها را دیفئومورفیسم‌هایی از $\mathbb{R}$ می‌نامیم. اگر f یک هومئومورفیسم باشد، آنگاه تابع معکوس f^{-1} وجود دارد به طوری که $f(x) = y$ اگر و تنها اگر $x = f^{-1}(y)$. در این بخش، زیر بازه‌های باز $\mathbb{R}$ را با I و J نشان می‌دهیم، به‌عنوان مثال، $I = (a,b)$ برای برخی $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$)، یا $I = (a, \infty)$ و غیره.

تعریف. فرض کنیم I و J بازه‌های بازی در $\mathbb{R}$ باشند. تابع $f: I \to J$ از مرتبه‌ی C^1 روی I نامیده می‌شود هرگاه $f'(x)$ موجود و در هر $x \in I$ پیوسته باشد. چنین تابعی هموار نیز نامیده می‌شود. توابعی از رده‌ی C^2، C^3 و ... را می‌توان به روشی مشابه تعریف کرد، به طوری که گوئیم تابع f از رده‌ی C^n روی I است هرگاه f در هر مقدار از x، n-بار مشتق‌پذیر و مشتق nام f بر I پیوسته باشد.

تعریف. هومئومورفیسم $f: I \longrightarrow J$ یک دیفئومورفیسم روی I نامیده می‌شود هرگاه f و f^{-1} هر دو توابعی از رده‌ی C^1 بر I باشند. اگر f یک دیفئومورفیسم روی $\mathbb{R}$ و $I \subset \mathbb{R}$ یک بازه‌ی بسته باشد، آنگاه اغلب f را به‌عنوان یک دیفئومورفیسم از I به بازه‌ی بسته‌ی J که در آن $f(I) = J$ است، در نظر می‌گیریم و این به ما این امکان را می‌دهد که در بازه‌های بسته در مورد دیفئومورفیسم‌ها بدون نگرانی در مورد مشتق‌پذیری در نقاط انتهائی صحبت کنیم.

اگر $y = f(x)$ آنگاه $f^{-1}(f(x)) = x$ و در این صورت از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای داریم :

$$(f^{-1})'(f(x)).f'(x) = 1 \implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

پس برای دیفئومورفیسم f به ازای هر $x \in I$ باید داشته باشیم $f'(x) \neq 0$. از آنجایی که $f'(x)$ یک تابع پیوسته است، اگر قرار باشد هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد، آنگاه از قضیه‌ی مقدار میانی نتیجه می‌شود که باید مقدار صفر را نیز اختیار کند که یک تناقض است. بنابراین در یک دیفئومورفیسم برای هر $x \in I$ همواره باید $f'(x) > 0$ و یا $f'(x) < 0$ باشد و این ثابت می‌کند که :

گزاره ۸. فرض کنیم I و J زیربازه‌هایی از $\mathbb{R}$ باشند. در این صورت دیفئومورفیسم $f: I \longrightarrow J$ یا :

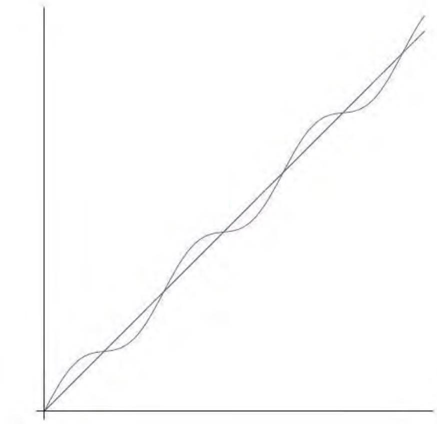
(i) حافظ ترتیب است، یعنی برای هر $x_1, x_2 \in I$ اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$ (f اکیداً صعودی است) و یا

(ii) معکوس‌کننده‌ی ترتیب است، یعنی برای هر $x_1, x_2 \in I$ اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$ (f اکیداً نزولی است).

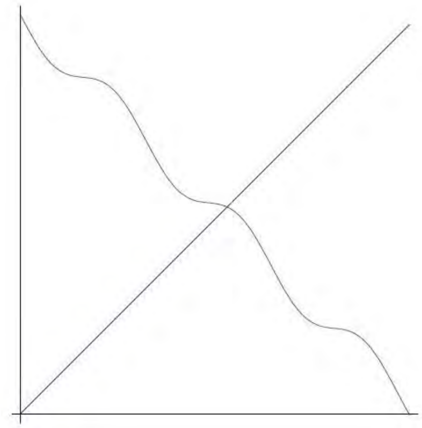
مثال. ۱. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ یک تابع C^1 است که دیفئومورفیسم نمی‌باشد چون $f'(0) = 0$. تابع وارون $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ نیز در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست (در این نقطه مماس عمودی دارد). می‌بینیم که تابع $f: (0,1) \longrightarrow (0,1)$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ یک دیفئومورفیسم حافظ ترتیب است اما تابع $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ دیفئومورفیسم نیست.

تابع $f: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ با ضابطه‌ی $f(x) = \arctan x$ یک دیفئومورفیسم حافظ ترتیب است و $f^{-1}: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ وارون آن با $f^{-1}(x) = \tan x$ است.

۲. دیفئومورفیسم‌های حافظ ترتیب می‌توانند بیش از یک نقطه‌ی ثابت داشته باشند اما خواهیم دید که برای دیفئومورفیسم‌های عکس‌کننده‌ی ترتیب اینطور نیست. برای مثال، تابع $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x) = 1 - x$ یک دیفئومورفیسم عکس‌کننده‌ی ترتیب با یک نقطه‌ی ثابت و یک ۲-دور $\{0,1\}$ است.



Order preserving.



Order reversing.

قضیه. فرض کنیم I و J زیربازه‌هایی از $\mathbb{R}$ و $f : I \longrightarrow J$ یک دیفئومورفیسم عکس‌کننده‌ی ترتیب با $f(I) = J \subseteq I$ باشد، در این صورت f یک نقطه‌ی ثابت یکتا در I دارد.

اثبات. اگر $I = [a, b]$ آنگاه قضیه‌ی نقطه ثابت که در فصل اول بیان شد، وجود نقطه‌ی ثابت را برای f تضمین می‌کند.
فرض کنیم $I = (a, b)$ در این صورت اگر $f(x)$ هیچ نقطه‌ی ثابتی نداشته باشد آنگاه برای هر $x \in (a, b)$ باید داشته باشیم $f(x) > x$ و یا $f(x) < x$. اگر اولی برقرار باشد، از آنجا که $x < f(x) < b$ هنگامی که $x \to b$ خواهیم داشت $f(x) \to b$، بنابراین $f(x)$ به اندازه‌ی کافی به b نزدیک می‌شود که به وضوح چنین اتفاقی برای توابع پیوسته و اکیداً نزولی غیر ممکن است. به طریق مشابه $f(x) < x$ نیز رد می‌شود. پس در این حالت نیز وجود نقطه‌ی ثابت برای f حتمی است.
اگر $I = \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (α و β می‌توانند $\pm\infty$ باشند)، از آنجا که f اکیداً نزولی است $\alpha > \beta$.
قرار دهیم $g(x) = f(x) - x$ در این صورت :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty.$$

حال بنا به قضیه‌ی مقدار میانی وجود دارد $c \in \mathbb{R}$ به طوریکه $g(c) = 0$ و یا $f(c) = c$.
وضعیت برای انواع دیگر بازه‌ها نیز مشابه است. حال فرض کنیم f اکیداً نزولی است و دو نقطه‌ی ثابت دارد، مثلاً $f(\alpha) = \alpha$ و $f(\beta) = \beta$ که $\alpha < \beta$. در این صورت $f(\alpha) > f(\beta)$ یا $\alpha > \beta$ (از آنجایی که آنها نقاط ثابتی هستند) و این یک تناقض است. $\square$

مثال. اگرچه دیفئومورفیسم‌های حافظ ترتیب می‌توانند هر تعداد نقطه‌ی ثابت داشته باشند، اما نمی‌توانند دارای نقاط تناوبی با دوره‌ی بزرگتر از یک باشند. از طرف دیگر، دیفئومورفیسم‌های معکوس کننده‌ی ترتیب می‌توانند نقاط متناوبی از دوره‌ی دو داشته باشند، اما هیچ نقطه‌ای از دوره‌ی تناوب بزرگتر از دو ندارند، برای مثال $f(x) = -x$ را در نظر بگیرید. نکته اصلی این است که دینامیک دیفئومورفیسم‌های یک بعدی پیچیده نیست و این مورد برای دیفئومورفیسم‌های دو بعدی (یعنی دیفئومورفیسم‌های $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$) صادق نیست.

قضیه. فرض کنیم $f : I \longrightarrow I$ یک دیفئومورفیسم روی بازه‌ی باز I باشد. در این صورت :

(i) اگر f حافظ ترتیب باشد، آنگاه f هیچ نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب بزرگتر از یک ندارد.

(ii) اگر f معکوس کننده‌ی ترتیب باشد، آنگاه f هیچ نقطه‌ی تناوبی از دوره‌ی تناوب بزرگتر از دو ندارد.

اثبات. (i) فرض کنیم $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ یک n-دور برای f و $x_0 = f(x_{n-1})$. اگر $x_1 > x_0$، آنگاه $f(x_1) > f(x_0)$ یا $x_2 > x_1$. با تکرار این روند خواهیم داشت :

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} \implies f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} \neq x_0,$$

که یک تناقض است. از طرف دیگر اگر $x_1 < x_0$، آنگاه دوباره به تناقض می‌رسیم، بنابراین باید داشته باشیم $x_0 = x_1$.
(ii) توجه کنید که اگر f یک دیفئومورفیسم معکوس کننده‌ی ترتیب باشد، آنگاه f^2 یک دیفئومورفیسم حافظ ترتیب است. در واقع اگر برای هر x، داشته باشیم $f'(x) < 0$ آنگاه

$$(f^2)'(x) = f'(f(x)).f'(x) > 0,$$

پس بنا بر (i)، f^2 هیچ n-دور با $n > 1$ ندارد و از این رو f هیچ $2n$-دوری با $n > 1$ نخواهد داشت.
اگر n فرد باشد، آنگاه f^n یک دیفئومورفیسم با $(f^n)'(x) < 0$ است، به طوری که f^n یک نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد دارد که باید نقطه‌ی ثابت f باشد. □

می‌توانیم برخی از نتایج فوق را به روش زیر بهبود بخشیم :

گزاره ۹. فرض کنیم $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ $(a < b)$ یک تابع پیوسته و یک به یک باشد. در این صورت :

(i) f یک تابع اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی بر $[a, b]$ است.

(ii) اگر f اکیداً صعودی باشد، آنگاه هر نقطه‌ی تناوبی f نقطه‌ی ثابتی از آن است.

(iii) اگر f اکیداً نزولی باشد، آنگاه f دقیقاً یک نقطه‌ی ثابت دارد و همه‌ی نقاط تناوبی دیگر آن از دوره‌ی تناوب دو هستند.

اثبات. (i) فرض کنیم $f(a) < f(b)$ (چون f یک به یک است این دو مقدار نمی‌توانند برابر باشند) و $x_1, x_2 \in (a, b)$ با $x_1 < x_2$ و $f(x_1) > f(x_2)$ در نظر می‌گیریم. اگر $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$ آنگاه بنا بر قضیه‌ی مقدار میانی وجود دارد $c \in (a, x_1)$ به طوری که $f(c) = f(x_2)$ که با یک به یک بودن f در تناقض است و نمی‌تواند اتفاق بی‌افتد. به طور مشابه، اگر $f(x_2) < f(a) < f(x_1)$ آنگاه می‌توان $c \in (x_1, x_2)$ را چنان یافت که $f(c) = f(a)$. احتمالات دیگر نیز به روشی مشابه رد می‌شوند.
(ii) فرض کنیم c یک نقطه‌ی تناوبی از f با دوره‌ی تناوب p باشد. اگر $c < f(c)$، آنگاه از آنجا که f اکیداً صعودی است $f(c) < f^2(c)$ و به این طریق به یک دنباله‌ی صعودی می‌رسیم که دارای حدی چون L است. در این صورت :

$$c < L = \lim_{n \to \infty} f^n(c) = \lim_{n \to \infty} f^{np}(c) = c,$$

که یک تناقض است. به روش مشابه، $f(c) < c$ نیز تناقض ایجاد می‌کند، بنابراین $f(c) = c$ و $p = 1$.

(iii) از آنجا که f روی بازه‌ی $[a, b]$ به خودش پیوسته است، حداقل یک نقطه‌ی ثابت دارد. باید داشته باشیم $f(a) > a$ چون در غیر این صورت $a \geq f(b) > f(a) = a$ که غیر ممکن است. به طور مشابه $f(b) < b$.

اگر c_1 و c_2 نقاط ثابت متمایزی برای f با $c_1 < c_2$ باشد، آنگاه $c_1 = f(c_1) > f(c_2) = c_2$، که ناممکن است و بنابراین f دقیقاً یک نقطه‌ی ثابت دارد. حال از آنجا که f معکوس کننده‌ی ترتیب است، f^2 حافظ ترتیب خواهد بود، بنابراین تنها نقاط تناوبی f^2 نقاط ثابت f^2 و بنابراین نقاط تناوبی از دوره تناوب دو برای f هستند. □

تذکر. اگر $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ یک هومئومورفیسم باشد، آنگاه یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی است. اگر f صعودی باشد، آنگاه حافظ ترتیب، $f(a) = a$ و $f(b) = b$ و تنها نقاط تناوبی دیگر نقاط ثابت هستند. اگر f نزولی باشد (معکوس‌کننده‌ی ترتیب)، آنگاه دقیقاً یک نقطه ثابت دارد و تمام نقاط تناوبی آن از دوره‌ی تناوب دو هستند. همچنین، f^2 حافظ ترتیب است و باید داشته باشیم $f(a) = b$ و $f(b) = a$.