

آزمون فرضیه به دو دسته تقسیم می‌گردد. با سوال فرضیه شروع می‌شوند. فرضیه و همی در خصوص پارامتر جامعه است. فنون آماری مناسب برای بررسی صحت و سقم فرضیه‌ها فنون آزمون فرضیه آماری هستند. همی پژوهشگر و ادعای دربارهمی مقداریک پارامتر جامعه است. ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد. بنا براین H_0 فرضیه مکمل تحت عنوان فرضیه H_1 در فرضیه به وجودی می‌گردد. در آزمون فرضیه آماری با α نوع خطای استنباطی دوم در دستیم و خطای نوع اول یا β احتمال رد کردن فرضیه H_0 در حالی که واقعاً فرضیه H_0 درست باشد. خطای نوع دوم یا β احتمال پذیرفتن فرضیه H_1 در حالی که واقعاً فرضیه H_0 درست باشد. بنابراین هر دو خطا افزایش هم نموده است.

توان یا قدرت آزمون به احتمال رد کردن فرضیه H_0 وقتی در حقیقت H_0 نادرست باشد.

دو نوع خطای استنباطی: α و β		
H_0 غلط است	H_0 درست است	نتیجه گیری از نمونه
خطای نوع دوم β	تصمیم درست	H_0 پذیرفته می‌شود
تصمیم درست (توان آزمون)	خطای نوع اول α	H_0 رد می‌شود

$$1 - \beta = \text{توان آزمون}$$

۳ نوع نوشتن فرضیه آماری

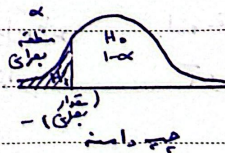
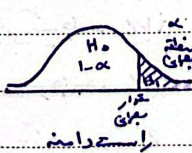
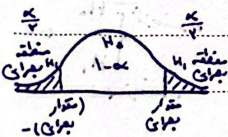
$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$

آزمون دوطرفه

آزمون یک طرفه



مرحله ۱: فرضیه‌ی آزمون

$$\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \neq \mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \leq \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_x \geq \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases}$$

مسئله ۲: آمارهای آزمونی

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_n}{\sqrt{\bar{x}}}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

مرحله ۳: مقدار برای α از جدول Z یا t بر اساس مقدار α

مرحلہ ۴: تعمیم گیری سے باقیابی مقدار برائے واکارہ کی آزمائشوں

[illegible]

فطای ۵۰٪ صفت مقنیه فزون را بررسی کنید

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 40}{\frac{14}{\sqrt{16}}} = -0.0$$

آزمون یک طرفه چپ دانه

$H_0: \mu \geq 5$ ادعا

$H_1: \mu < 5$ نقیض ادعا

مرحله ۲ - آهسته آهسته

سرمدی ۳-۴-۵. مقدار $Z_{0.10A} = 1.45A$ $\frac{1.45A}{1.45A} = 1.45A$ $\alpha = 0.10A$

مرحله ۲ به تصمیم گیری

بامقاسمی آمارهی آزمون در مقدر بهر ای متوجه می شویم که آمارهی

آزمون در منطقه‌ی بهارای مراکز گرفته، پس در سطح خطای مورد نظر

منظریہ H یعنی توان پذیرفتہ



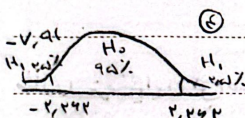
تمرین ۱: حساب بررسی ادعا کرده که میانگین مانده حساب های به کاران شرکت ب ... ۴۵۰ تومان است. م. منظور بررسی این ادعا یک نمونه ۱۰ تایی از حساب های به کاران شرکت انتخاب بشود که میانگین آن ... ۴۰۰ تومان و انحراف معیار ... ۲۰۰ تومان است. توزیع مانده حساب های به کاران شرکت نرمال است؛ مطمئن کنید آیا می توان ادعا را در سطح خطای ۵٪ بپذیریم؟
 * در تمرین بالا چنانچه حساب بررسی نمونه ای که انتخاب کرده بود از جا معیای با انحراف معیار ... ۲۰۰ تومان بود و آزمون را چه بود بررسی کنید.

①

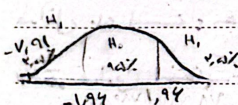
$$\begin{cases} H_0: \mu = 450 \dots & \text{با} & n=10, \quad \sigma = 200 \dots \\ H_1: \mu \neq 450 \dots & \text{تست} & S_n = 200 \dots \end{cases}$$

②

$$\textcircled{5} \quad t = \frac{400 - 450}{\frac{200}{\sqrt{10}}} = -7.91 \quad \alpha = 5\% \quad t_{0.025, 9} = 2.262$$



$$\sigma = 200 \dots \quad Z = \frac{400 - 450}{\frac{200}{\sqrt{10}}} = -7.91$$



الف) با مقایسه آماره آزمون و مقدار بحرانی متوجه می شویم که آماره آزمون در منطقه بحرانی قرار گرفته پس در سطح خطای ۵٪ فرض H_0 را نمی توان بپذیریم.

آزمون های که برای ۲ جامعه استفاده می شود: آزمون های تطبیقی

آزمون فرض میانگین در جامعه

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

آزمون فرض

انحراف معیار جامعه معلوم

انحراف معیار جامعه نامعلوم و $n \geq 30$

انحراف معیار جامعه نامعلوم و $n < 30$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

آزمون فرض

$$F_{PCO} \quad df_1: \left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2 \quad df_2: \left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2$$

با فرضی $\sigma_1 \neq \sigma_2$

انضات بطار جامع نامعلوم و $n < 30$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ با فرض}$$

۳. مقدار بحرانی براساس مقدار α و جدول Z یا t تعیین کنی

مثال: مدیران کارگزینی دو کارخانه A و B اظهار نموده اند که افتلاهی بین حقوق کارکنان دو کارخانه وجود ندارد. برای بررسی این ادعا اقداماتی صورت گرفته و اطلاعات زیر درباره میزان حقوق کارکنان دو کارخانه به دست آمده است:

آیا در سطح خطای ۵٪ می توان ادعای مدیران کارگزینی دو کارخانه را پذیرفت؟

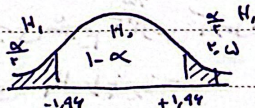
طبی مسئله $\leftarrow Z$ $\rightarrow$ $\bar{x}_1 = 225$ $n_1 = 30$ $\rightarrow A$

$\bar{x}_2 = 220$ $n_2 = 40$ $\rightarrow B$ $\rightarrow$ $\sigma_1^2 = 8$ $\sigma_2^2 = 10$

الفرضیه آزمون

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 & \text{آماره آزمون} \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{8}{30} + \frac{10}{40}}} = 2.5$$

۳. مقدار بحرانی



۴. تعیین کنی

$$Z_{\alpha/2} = 1.96$$

با مقایسه آماره آزمون و

مقدار بحرانی نتیجه می شود که آماره آزمون در منطقه بحرانی قرار گرفته پس در سطح خطای ۵٪

فرضیه H_0 را می توان پذیرفت.

تمرین: فرضیه ای به این صورت بیان شود: روش آموزش مشترک برای مدیران بهتر از روش غیر مشترک است. ملاک سنجش فرضیه بی تفاوت مقایسه میانگین نمره های مدیران است که به روش مشترک و غیر مشترک آموزش دیده اند. نمونه ها از دو گروه انتخاب شده و توزیع نمره های هر گروه نرمال است.

با فرض تساوی واریانس جهت فرضیه بی تفاوت در سطح خطای ۱٪ مطالب کنی:

$$\bar{x}_1 = 52 \quad n_1 = 10 \rightarrow \text{مشترک}$$

$$\bar{x}_2 = 45 \quad n_2 = 15 \rightarrow \text{غیر مشترک}$$

ب) در صورت عدم شکوک و اطمینان، دو جامعه، صحت فرضیه‌ی فوق را بررسی کنید.

ج) چنانچه سید برای که به روش سترکز آموختن دیده (اندازای داربانی) ۶۰ باشند و سید برای که به روش غیر سترکز آموختن دیده (اندازای داربانی) ۸۰ باشند، و نمونه‌هایی که می‌گیریم هم نمونه‌ی روش سترکز ۳۰ با میانگین ۱۰۰ و روش غیر سترکز هم نمونه‌ی ۴۰ را می‌گیریم ۹۰ داشته باشند، صحت فرضیه‌ی زیر را در سطح خطای ۵٪ بررسی کنید.

الف) روش آموختن سترکز برای سیدان بهتر از روش غیر سترکز نیست.

الف) $n_1 = 10$ $\bar{x}_1 = 52$ $S_1 = 12$

$n_2 = 15$ $\bar{x}_2 = 55$ $S_2 = 1$ $SP = \frac{9 \times 184 + 15 \times 96}{10 + 15 - 2} = 95.3$

د)

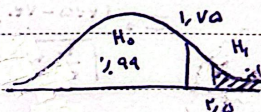
ه)

$SP = 9.74$

تقریباً $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ و $H_1: \mu_1 > \mu_2$ $t = \frac{52 - 55}{9.74 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}} = \frac{3}{9.74 \times \sqrt{0.133}} = 1.75$

و)

ز)



$t_{0.05, 23} = 1.71$

ب) مقایسه‌ی ۵) و ۶) متوجه می‌شویم آماره‌ی آزمون در منطقه‌ی بحرانی قرار نگرفته پس نمی‌توان در سطح خطای ۱٪ فرضیه‌ی H_0 را پذیرفت.

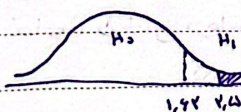
ب) $n_1 = 10$ $\bar{x}_1 = 52$ $S_1 = 12$

$n_2 = 15$ $\bar{x}_2 = 55$ $S_2 = 1$

تقریباً ادعا $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$ و $H_1: \mu_1 > \mu_2$ $t = \frac{52 - 55}{\sqrt{\frac{16}{10} + \frac{96}{15}}} = \frac{-3}{\sqrt{10.4}} = -0.92$

ح)

$t_{0.05, 23} = 1.71$ $t_{0.01, 23} = 2.47$



ب) مقایسه‌ی آماره‌ی آزمون و مقدار بحرانی متوجه می‌شویم

آماره‌ی آزمون در منطقه‌ی بحرانی قرار نگرفته پس در سطح

اطمینان مورد نظر نمی‌توان فرضیه‌ی H_0 را رد کرد.

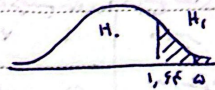
نکته: زمانی که فرض عدم تساوی داریم χ^2 جابجی را داشته باشیم زیرا t هم صورت χ^2 نوشته می شود. اگر χ^2 هم صورت χ^2 جابجی می شود.

①

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 & n_1=3, \quad \bar{x}_1=10, \quad s_1^2=4 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 & n_2=4, \quad \bar{x}_2=9, \quad s_2^2=1, \quad \alpha=0.05 \end{cases} \quad (ج)$$

$$\textcircled{2} Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{10 - 9}{\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{12} + \frac{3}{12}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{19}{12}}} = 1.45$$

⑤ آماره آزمون در منطقه بحرانی



قرار گرفته پس H_0 پذیرفته نمی شود.

آزمون فرضیه ی فرضیه ی جهت شده یا آزمون ستایی می شود.

در آزمون تعادلی بی χ^2 می آید. فرض برای است که نمونه ها مستقل می باشند اما در مواردی مثل بررسی متوسط افزایش کارایی افراد پس از گذراندن یک دوره آموزشی چون نمونه های تعادلی انتخابی مستقل نیستند بنابراین آزمون آزمون استفاده می کنیم.

⑥ فرضیه آزمون

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} H_0: \mu_d \geq 0 \\ H_1: \mu_d < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{آزمون} \\ \text{جهت داده} \end{matrix}$$

$$\textcircled{7} \text{ آماره آزمون } t = \frac{\bar{d}}{S_d} \quad S_d = \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

⑧ مقدار بحرانی $t_{\alpha/2}$

⑨ تصمیم گیری

$$\begin{array}{l} \text{آماره} \\ \mu_d = \frac{\sum d_i}{N} \\ S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \mu_d)^2}{N} \\ S_d = \frac{S_d}{\sqrt{N}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{یا} \\ \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} \\ S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} \\ S_d = \frac{S_d}{\sqrt{n}} \end{array}$$

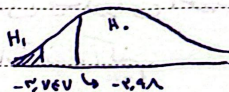
زوج	رتبه x_i	رتبه y_i	$d_i = (y_i - x_i)$
1	x_1	y_1	$d_1 = (y_1 - x_1)$
2	x_2	y_2	$d_2 = (y_2 - x_2)$
3	x_3	y_3	$d_3 = (y_3 - x_3)$
4	x_4	y_4	$d_4 = (y_4 - x_4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	$d_n = (y_n - x_n)$

مثال: به منظور مقایسه‌ی جو سازهای در وضعیت موجود در وضعیت مطلوب، فرضیه‌ی H_0 این صورت بیان شده: جو سازهای در وضعیت موجود با جو سازهای در وضعیت مطلوب اختلاف نامعنی دارد. برای بررسی این فرضیه H_0 مدیر سازهای به طور تصادفی انتخاب شده اند خلاصه‌ی امتیازات حاصل (از سافتی) جو سازهای در وضعیت مطلوب و موجود به این ترتیب است:

مدیر	۱	۲	۳	۴	۵	$\sum di = -۲۵$	$\bar{d} = \frac{-۲۵}{۵} = -۵$
وضع مطلوب (X_i)	۷۰	۵۹	۷۰	۷۸	۷۰	$S^2 d = \frac{۵۹}{۶} = ۱۴$	
وضع موجود (Y_i)	۴۰	۵۷	۴۷	۷۰	۴۸	$S^2 d = \frac{۵۹}{۶} = ۱۴$	
$di = X_i - Y_i$	-۱۰	-۲	-۳	-۸	-۲	$\sum (di - \bar{d})^2 = ۵۹$	

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 & \text{تفحص ادعا} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{ادعا} \end{cases} \quad \textcircled{2} t = \frac{\bar{d}}{S_d} = \frac{-۵}{1.47} = -۳.۹۸$$

$$\textcircled{3} t_{\alpha/2, n-1} = -۳.۷۴۷$$



آماره‌ی آزمون در سطحی بحرانی قرار نگرفته پس در سطح α امکان رد فرضیه H_0 را می‌توان رد کرد.

تمرین: فرضیه‌ی تحقیقی چنین است: در میان مدیران عالی، مهارت اداری، بیشتر از مهارت فنی نیاز است. برای بررسی فرضیه‌ی فوق ۱۰ مدیر را به طور تصادفی انتخاب کرده و از هر یک تست تعیین مهارت اداری و فنی به عمل آمده است. نتایج در جدول زیر آمده: با فرضی نرمال بودن توزیع نیاز در هر نوع مهارت، صحت فرضیه را در سطح خطای ۵٪ آزمون کنید.

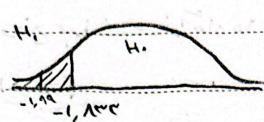
ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	$\bar{d} = \frac{-۹۵}{۱۰} = -۹.۵$
اداری (X_i)	۸۰	۷۰	۷۵	۶۵	۸۲	۸۸	۶۷	۵۷	۹۰	۹۲	$S^2 d = \frac{۹۵۴.۵}{۹} = ۱۰۶.۰۵$
فنی (Y_i)	۵۰	۶۵	۷۰	۷۵	۸۰	۷۵	۶۶	۵۰	۸۰	۹۰	
$di = X_i - Y_i$	۳۰	-۵	-۵	-۱۰	-۲	-۱۳	-۱	-۷	-۱۰	-۲	$S_d = \frac{\sqrt{۱۰۶۰.۵}}{۱۰} = ۳.۲۶$

Subject.

Date.

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 & \text{تقصی ادعا} \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{ادا} \end{cases} \quad \textcircled{2} t.s. \frac{\bar{d}}{s\bar{d}} = \frac{-6.5}{3.46} = -1.99$$

$$\textcircled{3} t_{11, 0.05} = -1.833$$



⑤ با مقایسه آمارهای آزمون و مقدار بحرانی متوجه می شویم که برای

آزمون در منطقه بحرانی قرار گرفته پس در سطح اطمینان مورد نظر

می توان فرضیه H_0 را پذیرفت.

آزمون نسبت یک جا به

① فرضیه آزمون

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: p \geq p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: p \leq p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$$

⑤ آمارهای آزمون

⑤ مقدار بحرانی

⑤ تصمیم گیری

$$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

بر اساس مقدار به از جدول Z

$$\bar{p} = \frac{x}{n}$$

مثال: به منظور مطالعه وضع درآمد خانوارهای یک ناحیه روستایی در نظر است از آن ناحیه

۱۰۰ خانوار به عنوان نمونه تعدادی انتخاب و درآمد آنرا مطالعه گردد. فرض ۲۵ خانوار کم درآمد

بوده است. مطلوب است آزمون فرضیه اینکه نسبت خانوارهای کم درآمد در ناحیه روستایی

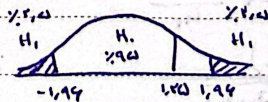
①

⑤

۲۰ درصد است در سطح اطمینان ۹۵٪

$$\begin{cases} H_0: p = 0.2 \\ H_1: p \neq 0.2 \end{cases}$$

$$Z = \frac{0.25 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2(0.8)}{100}}} = \frac{0.05}{0.04} = 1.25$$



$$\textcircled{3} Z_{100, 0.05} = \pm 1.96$$

⑤

تصمیم گیری: با مقایسه آمارهای آزمون و مقدار بحرانی متوجه می شویم که برای

قرار ندادن در سطح اطمینان ۹۵٪ فرضیه H_0 را نمی توان پذیرفت H_1 را می توان رد کرد.

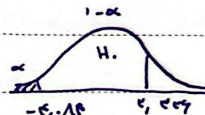
Subject.

Date.

تمرین: ادعا شده وضع بهداشتی خرابیاه طی دانشجویان مذکور است و در صورتی که این ادعا درست است ۵۰٪ از ۵۰ نفر از بین دانشجویان به خطر تصادفی انتخاب شده که ۱۰ نفر از آن از وضع بهداشتی خرابیاه ها شکایت داشته اند. در سطح خطای ۱٪ محاسب کنید آیا ادعای فوق درست است؟

$$\begin{cases} H_0: P \leq 50\% \\ H_1: P > 50\% \end{cases} \quad \bar{p} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$Z_{1-\alpha} = 2.324$$



$$Z = \frac{\bar{p} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{0.2 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{50}}} = \frac{-0.3}{\sqrt{0.01}} = -3.0$$

H_0 را می‌توان رد کرد.

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 & \text{عدم تفاوت} \\ H_1: P \neq P_0 & \text{وجود تفاوت} \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: \beta = 0 & \text{عدم تاثیر} \\ H_1: \beta \neq 0 & \text{وجود تاثیر} \end{cases}$$

آزمون مقایسه‌ای نسبت به

۱) فرضیه‌ی آزمون

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: P_1 \leq P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0: P_1 \geq P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$$

۲) آماره آزمون

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \quad \bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \quad \bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \quad \bar{p} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2}$$

۳) تصمیم‌گیری
برای این مقایسه در جدول Z قرار بدهید

مثال. فرضیه‌ی یکی از باایان ناسه‌های مدیری برای شرح است: انگلیزی توفیق طلبی درسی دانشگاهیان
شهرستانی و تهرانی یک اندازه است. برای بررسی فرضیه‌ی فوق از هر گروه نمونه‌های انتخاب
شده که خلاصه‌ی اطلاعات آنها در جدول زیر آمده است:

شهرستانی / تهرانی	بالا	پایین
شهرستانی	۲۰۰	۱۰۰
تهرانی	۲۵۰	۱۵۰

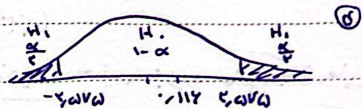
در سطح خطای ۱٪ فرضیه‌ی فوق را بررسی کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2} = \frac{200 + 250}{300 + 350} = 0.44 \quad \bar{p}_1 = \frac{200}{300} = 0.667 \quad \bar{p}_2 = \frac{250}{350} = 0.714$$

$$(2) Z = \frac{0.667 - 0.714}{\sqrt{0.44 \times 0.56 \times \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{350} \right)}} = -1.12 \quad (3) Z = 2.58$$

با مقایسه (2) و (3) در سطح خطای مورد نظر H_0 را می‌توان



پذیرفته.

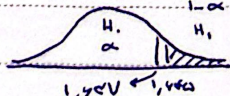
توضیح. ادعا شده که سطح آمادگی کارمندان سازمان الف از کارمندان سازمان ب بالاتر است
برای بررسی این ادعا از بین کارمندان سازمان الف یک نمونه‌ی ۱۰۰ تایی انتخاب شده که ۶۰ نفر
از آنها از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در حالی که منتقل بهی از یک نمونه‌ی ۲۰۰ تایی از کارمندان
سازمان ب از سطح آمادگی بالا برخوردارند. در سطح خطای ۵٪ فرضیه‌ی فوق را بررسی کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: P_1 \leq P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{array} \right. \quad \text{تعیین ادعا} \quad \bar{p}_1 = \frac{60}{100} = 0.6 \quad \bar{p}_2 = \frac{100}{200} = 0.5$$

$$\alpha = 5\% \quad \bar{p} = \frac{100 + 60}{100 + 200} = 0.4 \quad (4) Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\sqrt{\bar{p} \times (1 - \bar{p}) \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{0.6 - 0.4}{\sqrt{0.4 \times 0.6 \times \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right)}} = 1.457$$

$$(5) Z = 1.645$$

(5)



می‌توان H_0 را

پذیرفته.

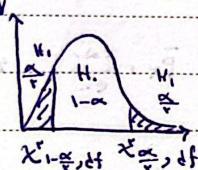
آزمون فرضی دارای بیش از یک جامعه :

① فرضیه آزمون

$$\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

② آماره آزمون

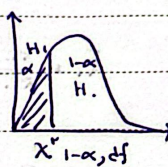
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$



$$\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

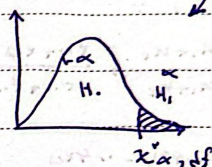
③ مقدار بحرانی

باتوجه به مقدار بحرانی جدول



$$\begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

③ تعیین کنی

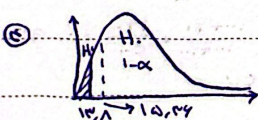


* χ^2 زنگوله ای نیست (بجای زنگوله می شبیه زنگوله کشیدم)

مثال: مدیر عامل بازار بورس تهران ادعا کرده که ریسک (انحراف مجاری) بازده سهام شرکت های عرضه کتفه ای سهام در بازار بورس کمتر از ۵٪ است. بدین منظور یکی از کارکنان این شرکت را به طور تصادفی از بین شرکت های عرضه کتفه ای سهام در بازار بورس انتخاب کرده که میانگین بازده آنها ۱۴٪ و انحراف جیارشان ۴٪ است. اگر بازده سهام های بازار بورس از توزیع نرمال برقرار باشد ادعا را در سطح خطای ۵٪ آزمون کنید.

$$\textcircled{1} \rightarrow \begin{cases} H_0: \sigma_x^2 \geq 16 \\ H_1: \sigma_x^2 < 16 \end{cases} \quad \text{نقص ادعا} \quad \textcircled{2} \rightarrow \chi^2 = \frac{(25)(14)}{16} = 15.34$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \chi^2_{0.05, 24} = 13.84$$



با مقایسه ی ② و ③ متوجه می شویم که نمی توان H_0 را رد کرد

تمرین ۱) فرضیه ای به این صورت مطرح شده: پراکندگی قیمة پودر لباسشویی در فروشگاه های تهران دست کم ۱۰۰ (است. برای بررسی) این فرضیه ۳۲ فروشگاه تهران به طور تصادفی انتخاب شده که میانگین و انحراف جیار قیمة پودر لباسشویی در این فروشگاه ها ۹ و ۱۶۰ می باشد. قیمة کالاهای توزیع نرمال است در سطح اطمینان ۹۹٪ آزمون مناسب را برای بررسی فرضیهی فوق برگزینار کنید.

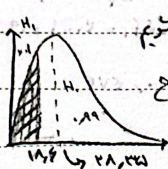
آماره آزمون

$$\chi^2 = \frac{(32-1) \times 9^2}{100} = 28,35$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq 100 \\ H_1: \sigma^2 < 100 \end{cases}$$

$$\chi^2_{1-\alpha} = 18,4 \quad \chi^2_{\alpha} = 22,2$$

بنابراین آماره آزمون در مقدار بحرانی متولد می شود که آماره آزمون در منطقی بحرانی قرار نمی گیرد پس در سطح خطای مورد نظری برای H_0 پذیرفته



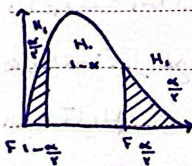
آزمون فرض واریانس دو جابجایی:

① فرضیه آزمون

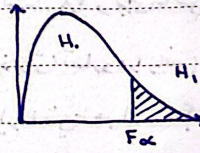
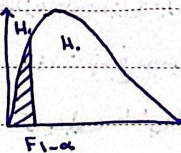
$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$



② تعیین گیری



$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \xrightarrow{\text{آماره تصدی واریانس دو جابجایی}} F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$F_{(1-\alpha), df_1, df_2} = \frac{1}{F_{\alpha, df_2, df_1}}$$

مثال: هدف یک تحقیق مقایسه‌ی طول عمر ۲ نوع لامپ است. برین منظور از لامپ‌های نوع الف یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی انتخاب شد که میانگین آن ۱۵ هزار ساعت و انحراف معیارش ۴۰۰ ساعت است. در حالی که نمونه تصادفی ۲۵ تایی از لامپ‌های نوع ب میانگین ۱۲ هزار ساعت و انحراف معیار ۶۵۰ ساعت دارد. باید برین فرض برین طول عمر لامپ‌ها در هر ۲ نوع و برین فرض تساوی دو واریانس فرضیهی «براکتگی» عمر لامپ‌های نوع الف کمتر از ب است» را در سطح خطای ۵٪ آزمون کنید.

④ آماره آزمون
$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

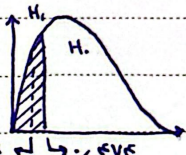
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16}{64.45} = 0.249$$

⑤ مقدار بحرانی $\alpha = 0.05$ $1 - \alpha = 0.95$ $d.f_1 = 20 - 1 = 19$ $d.f_2 = 25 - 1 = 24$

$$F_{0.95, 19, 24} = \frac{1}{F_{0.05, 24, 19}} = \frac{1}{2.11} = 0.474$$

⑤ تصمیم گیری

آماره آزمون در منطقه بحرانی قرار گرفت پس در سطح خطای ۵٪ فرضیهی H_0 را می‌توان رد کرد.



تبریح: می‌خواهیم کنوایه برین چگالی، الیاف نغ جو را به بافی تولیدی با ۲ ماشین بررسی کنیم. هر مشاهده‌ای عبارت است از اندازه گرفتن وزن ۱۰۰ متر نخ که به طور تصادفی انتخاب شده است. برین کنیم که ۱۱ مشاهده وزن از حاصل ماشین الف و ۱۱ مشاهده وزن حاصل ماشین ب برداشته شده است. انحراف معیار اندازه‌های وزن برای ماشین الف ۲۳ و برای ماشین ب ۴۵ است. در سطح اطمینان ۹۵٪ این سوال است پاسخ دهید: (۱) فرضیهی تساوی واریانس ۲ ماشین الف و ب را با دلایل قوی و جود دارد که تقسیم پذیری تولید برای ماشین الف بیشتر از ماشین ب است که حاصل اطمینان لازم را برای نسبه انحراف معیارهای دو جامعه به ازای ۹۰٪ (۲) با داده اطمینان ۹۰٪

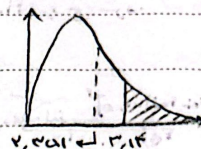
الف)
$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{فرضیهی ادعا} \\ \text{ادعا} \end{cases}$$

⑤ آماره آزمون
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{14.37}{(1.4)^2} = 2.251$$

۵. چون راست داریم خود $\alpha \rightarrow F_{\alpha}, a, i, q = 3, 14$

بامقابی ۷، ۳ متر می شریم آماره آزمون ۴ قسم گیری



در سقته می بصرای قرار گرفته پس در سطح خطای $\pm 5\%$ می توان H_0 را بپذیرفت.

$$P_i \left[\frac{S_i^r}{S_i^r} \times \frac{1}{F_{\beta_i, d f_1, d f_2}} \times \frac{g_i^r}{g_i^r} \times \frac{S_i^r}{S_i^r} \times F_{\frac{1}{\beta_i}, d f_1, d f_2} \right] = 1 - \alpha, \quad \alpha = 0.05 \quad (1)$$

$$F, \omega, q, l = 3, 2 \quad F, \omega, l, q = 3, 1K$$

$$P\left[r, \text{val} \leq \frac{1}{3^{1/K}} \wedge \frac{\partial^r}{\partial b} r, \text{val} \leq \frac{1}{3^{1/K}} \right] = 9\% \rightarrow P\left[\text{val} \leq \frac{\partial^r}{\partial b} r, \text{val} \leq \frac{1}{3^{1/K}} \right] = 9\%$$

معادله نسبت $\rightarrow p = [0.17, 2.99]$ ، 90% انحراف معیاری خواص

۶. ردای X^2 :

۱. x^2 ساده و نیکومی بر از $\mathbb{Z}$ $\rightarrow$ برای مشاهده $\rightarrow$ For

۲. X^2 معادله استقلال

۳۔ X سے چند جابہ $\rightarrow$ کھڑی چند جابہ

⑤ آزمون χ^2 ساده (نیروی برآزمی): فرض کنید آزمایشی K حالت یا حادثه داشته باشد، اگر این

اگر ما بین n بار تکرار کنیم، نتایج راسی توان در k طبقه جمع آوری کردیم، اگر m مزادای های تھی

با مشاهده شده با Fai می گویند. نزادای های مورد انتظار که به عنوان نتایج نظری هستند، Fai

می باشند. آزمون χ^2 می تواند نشان دهد که با احتمال مردد نظر آیا نتایج نظری با نتایج تجربی

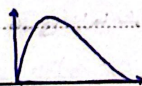
طابقت دارد یا خیر؟ ⑤ فرزند آزمون

مطابقت دارند / فرادای تقریبی و زمانی با هم یکسان هستند $\rightarrow F_{oi} = F_{ei}$ $\rightarrow H_o : F_{oi} = F_{ei}$

[illegible]

df, χ^2 مقدار برای $\chi^2 = \sum \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}$ ۷. آماره آزمون

⑤ تصحیح الہدی



L. K. -

نکات:

۱. اگر χ^2 محاسب شده باشد با χ^2 جدول برابر باشد فرضیه H_0 رد می شود.

۲. در مورد زیر آزمون χ^2 نیاز به اصلاح دارد:

الف) وقتی درجه آزادی $df \leq 1$ باشد از تصحیح پیتر استیوار می کنیم

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}$$

ب) هنگامی که یکی از فراوانی های نظری کمتر از ۵ باشد آن طبقه را با طبقه ی دیگر ادغام می کنیم و در

نتیجه درجه آزادی یک واحد کمتر می شود.

مثال: آمار مربوط به آتش نشانی در یک شهر نشان می دهد که از ۴۵ آتش سوزی که اخیراً به

دو نوع پیوسته است و توزیع آنها نسبت به روزهای هفته عبارت بوده است از: شنبه ۴، یکشنبه ۵،

دوشنبه ۴۵، سه شنبه ۴۰، چهارشنبه ۴۵، پنجشنبه ۶۰، جمعه ۵۵، آزمون ناپیوسته آتش

سوزی ها در هفته از قانون کلیتوزاضه تبعیت می کند یا خیر. (در سطح معنی داری ۵٪)

(قانون کلیتوزاضه: یعنی فراوانی هر مشاهده کلیتوزاضه باشد.)

۱. فرضیه آزمون

روزهای هفته	F_{oi}	F_{ei}	$(F_{oi} - F_{ei})^2$
شنبه	۴	۵۰	۱۰۰
یکشنبه	۴۵	۵۰	۲۵
دوشنبه	۴۵	۵۰	۲۵
سه شنبه	۴۰	۵۰	۱۰۰
چهارشنبه	۴۵	۵۰	۲۵
پنجشنبه	۶۰	۵۰	۱۰۰
جمعه	۵۵	۵۰	۲۵
جمع	۳۵۰	۳۵۰	

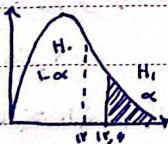
آتش سوزی ها از قانون کلیتوزاضه تبعیت می کند: H_0
یعنی کند: H_1

۱. آمار آزمون $F_{ei} = \frac{350}{7} = 50$

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}} = 12$$

$$\chi^2_{\alpha, df} = \chi^2_{0.05, 6} = 12.59$$

۲. تصمیم گیری



پس H_0 را نمی توان رد کرد.

$$\frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}$$

هم ستون داشته در جمع هم می ریزد بشود ۱۲.

تمرین ۱) شرکتی مشترکانه را بر حسب سرسختی در پرداخت تأخیرها نشان طبقه بندی کرده است. طبقات مختلف عبارتند از: پرداخت به موقع، پرداخت با کمی تأخیر، پرداخت با تأخیر زیاد، عدم پرداخت. برای ۸۰۰ مشتری توزیع نمره پرداخت به ترتیب ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ بوده است. مشخصی مالی را استیاری جهت نزدیک کردن نسبت این ۴ طبقه به ترتیب عبارت از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵. تعیین کنید که آیا توزیع نمره پرداخت مشتریان این شرکت با استاندارد توزیع سایر شرکتها در سطح معنی داری ۵٪ مطابقت دارد یا خیر.

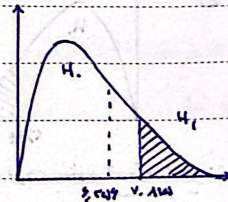
۱) است

تعیین پرداخت مشتریان با استاندارد طبقه بندی: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵

نمره پرداخت	Foi	نسبت	Fei	$\frac{(Foi - Fei)^2}{Fei}$
۲ به موقع	۳۳۹	۹	$800 \times \frac{1}{10} = 80$	$\frac{(-11)^2}{80} = \frac{121}{80} = 1.5125$
با کمی تأخیر	۱۶۸	۳	$800 \times \frac{2}{10} = 160$	$\frac{(8)^2}{160} = \frac{64}{160} = 0.4$
تأخیر زیاد	۱۳۳	۳	$800 \times \frac{3}{10} = 240$	$\frac{(-107)^2}{240} = \frac{11449}{240} = 47.704$
۴ عدم پرداخت	۶	۱	$800 \times \frac{4}{10} = 320$	$\frac{(314)^2}{320} = \frac{98596}{320} = 308.1125$
جمع	۸۰۰	۱۴		$\chi^2 = 47.704$

۵) $df = k - 1 = 4 - 1 = 3$ $\chi^2_{0.05, 3} = 7.879$

۶) کاربرد آزمون در منطقه بحرانی قرار نمی‌گیرد پس در سطح خطای ۵٪ نمی‌توان فرضیه H_0 را رد کرد.



۷) آزمون استقلال (χ^2 همبستگی) در مواردی لازم است طبقه بندی با ۲ متغیر مورد توجه قرار

گیرد که م آن χ^2 همبستگی می‌گویند. در آزمون χ^2 همبستگی با جدول تناوبی سروکار داریم. جدول از

این آزمون این است که آیا بین دو صفت رابطه وجود دارد یا خیر. جدولی که مشاهده

می‌دهد فرادای تجربی یا مشاهده شده است. م کمک فرادای های حاشیه‌ای جدول نظری را استخراج می‌کنیم.

فرمول بحرانی χ^2 $df = (c-1)(r-1)$ P_{4PCO} ردیف ستون

مثال) در یک کارخانه تولیدی که توسط دو منس نظامی می شود، ۱۰۰ محصول را به تصادف انتخاب کردند. محصول به انتخاب شده به حسب منس و کیفیت محصول، شرح زیر گردیده است. انرا آزمون منس و کیفیت محصول همبستگی وجود دارد یا مستقل هستند؟ (در سطح خطای ۵٪)

کیفیت / منس	منس اول	منس دوم	جمع
کیفیت ۱	۳۰ (۲۵)	۲۰ (۲۵)	۵۰
کیفیت ۲	۲۰ (۲۵)	۳۰ (۲۵)	۵۰
جمع	۵۰	۵۰	۱۰۰

$$Fe_{11} = \frac{50 \times 50}{100} = 25$$

$$Fe_{12} = \frac{50 \times 50}{100} = 25$$

$$Fe_{21} = \frac{50 \times 50}{100} = 25$$

$$Fe_{22} = \frac{50 \times 50}{100} = 25$$

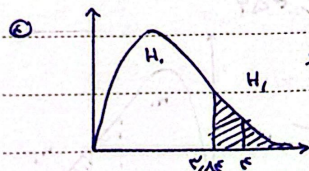
(وجود تفاوت بین ا) (وجود تفاوت بین ب) و حساب می شود

جمع کل

- ① { H_0 : در منس مستقل از هم هستند
 H_1 : در منس وابسته

②

Foi	Fci	$\frac{(Foi - Fci)^2}{Fci}$
۳۰	۲۵	۱
۲۰	۲۵	۱
۲۰	۲۵	۱
۳۰	۲۵	۱
		$\chi^2 = 4$



آماره آزمون در نتیجه به این
 تکرار می شود در سطح خطای ۵٪
 می توان H_0 را رد کرد

آزمون آزمون χ^2 به معنی نشان دهد که بین ۲ منس همبستگی وجود دارد. به روش آزمون

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{4}{4 + 100}} = 0.196$$

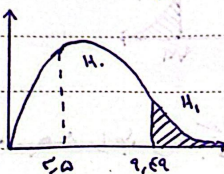
تفاوت معنی دار است

مثال) برای بررسی رابطه بین دو متغیر کیفی، داده های زیر به دست آمده است. فرض کنید که بین دو متغیر کیفی، رابطه وجود دارد یا نه. (در سطح خطای ۵٪ آزمون کنید)

نمرات χ	متوسط	عالي	جمع	f_{oi}	f_{ei}	$(f_{oi} - f_{ei})^2$
						f_{ei}
متوسط	۱۳ (۱۳)	۱۴ (۱۶)	۱۲ (۱۴)	۴	۱۴	۱۴
خوب	۱۰ (۱۵)	۲۰ (۱۶)	۱۰ (۱۴)	۴	۱۴	۱۴
عالي	۶ (۶)	۶ (۸)	۸ (۶)	۲	۱۴	۱۴
جمع	۲۰	۴۰	۳۰	۱۰۰	۶	۶
① H_0 : مستقل است ...				④ $f_{e11} = \frac{4 \times 20}{100} = 8$		
... مستقل نیست: H_1				$f_{e12} = \frac{4 \times 20}{100} = 8$		
				۳,۵		

② $\chi^2 = 9,49$

لح (۳-۱) (۳-۱)



⑤ آمارهای آزمودن در منطقی یعنی

تکرار ندارد پس در سطح خطای ۵٪

می توان H_0 را رد کرد

⑥ $H_0: P_1 = P_2 = \dots = P_n$

مقابل دوتا از نسبت ها با هم برابر نیست

⑦ $\chi^2 = 2 \sum \frac{(f_{oi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$

⑧ $\chi^2 \sim df$

$\rightarrow (C-1)(R-1)$

تعمیم گیری

* فرضیه H_0 نشان دهنده ای است که نمونه ها از یک جامعه انتخاب شوند

* علی رغم تفاوت های آزمون استقلال در همگونی از جنبه نظری در ریاضی یکسان هستند

مثال: از وزارت خانه های کشاورزی، صنعت، ترابری به ترتیب ۱، ۲، و ۳ مدیر بطور تصادفی

برگزیده شده اند. از این نمونه ها ۵۰ مدیر از وزارت کشاورزی، ۸۰ مدیر از وزارت صنایع و ۱۲۰ مدیر از

وزارت ترابری. رضای مدیر هستند. رتبه ها را در آمار می توان در سطح خطای ۱٪ پذیرفت که نسبت

مدیران رضای مدیر (در ۳ وزارت خانه) یکسان است؟

① $H_0: P_1 = P_2 = P_3$

مقابل دوتا از نسبت ها برابر نیستند

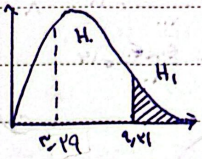
Subject.

Date.

ردیف	فعلی	فعلی	$\frac{(f_{oi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$	رابطه	تعداد	جمع
۱.	۴۱	۴۱	۰	کثافت	۵۰	۱۰۰
۲.	۵۸	۳۳	۱.۱	سایه	۸۰	۴۰۰
۳.	۱۴	۶۶	۰.۰۹	راه و تریلی	۱۲۰	۳۶۰۰
۴.	۱۷	۶۶	۰.۰۲	جمع	۱۵۰	۲۲۵۰۰
۵.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۶.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۷.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۸.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۹.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۰.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۱.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۲.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۳.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۴.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۵.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۶.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۷.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۸.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۱۹.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۰.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۱.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۲.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۳.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۴.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۵.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۶.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۷.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۸.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۲۹.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۰.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۱.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۲.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۳.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۴.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۵.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۶.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۷.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۸.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۳۹.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۰.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۱.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۲.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۳.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۴.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۵.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۶.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۷.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۸.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۴۹.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			
۵۰.	۱۷	۶۶	۰.۰۲			

۳. $\chi^2 = 9.21$

۴. H_0 یعنی توان زدند



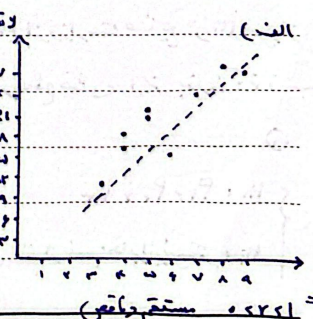
$f_{e11} = \frac{100 \times 40}{400} = 10$

$f_{e12} = \frac{100 \times 40}{400} = 10$

همبستگی و رگرسیون: در این بحث رابطه و همبستگی خطی بین دو صفت متغیر را می بینیم. می شود در حد بیان هر دو صفت یکی کمتر یکی یا چند متغیر به نحوی ارتباط برقرار کنند تا بتوانند در پیش بینی آینده استفاده کنند مثل میزان پولی که صرف تحقیق و توسعه می شرکت می شود و سود حاصل شرکت یا رابطه بین یادداشت و تولید و راه های رگرسیون به نحوی بازگشت است و نشان می دهد که مقدار یک متغیر به متغیر دیگر می گردد یا خیر.

مثال: داده های زیر هزینه تبلیغات شرکت را همراه با تعداد فروش حاصل می شود. در سال مختلف نشان می دهد. ابتدا نمودار برای آنگاه یا به آنگاه آن را رسم کنیم. آیا ارتباطی بین هزینه های تبلیغات و تعداد فروش وجود دارد؟ (ج) در صورت مثبت بودن جواب چه نوع ارتباطی است؟

هزینه تبلیغات (م)	تعداد فروش (م)	$x_i y_i$	$ x_i ^2$	$ y_i ^2$
۳	۱۱	۳۳	۹	۱۲۱
۵	۸	۴۰	۲۵	۶۴
۴	۱۲	۴۸	۱۶	۱۴۴
۷	۲۴	۱۶۸	۴۹	۵۷۶
۹	۲۶	۲۳۴	۸۱	۶۷۶
۶	۱۵	۹۰	۳۶	۲۲۵
۵	۲۱	۱۰۵	۲۵	۴۴۱
۴	۱۸	۷۲	۱۶	۳۲۴
۸	۲۷	۲۱۶	۶۴	۷۲۹
$\sum x_i = 41$	$\sum y_i = 171$	$\sum x_i y_i = 1087$	$\sum x_i^2 = 371$	$\sum y_i^2 = 3761$



$r = \frac{1087 - (41 \times 171 / 9)}{\sqrt{[371 - 9(41^2 / 9)][3761 - 9(171^2 / 9)]}} = 0.88$

$R^2 = (0.88)^2 = 0.77$

Subject. _____

Date. _____

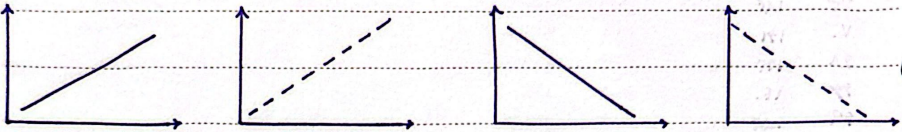
ضریب همبستگی: ^(۲) بهترین معیار تشخیص وجود همبستگی یا عدم آن و حتی نوع و جهت و میزان همبستگی

خطی، ضریب همبستگی پی باشد -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴

$$r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

ضریب همبستگی هاربر پی ۱، ۰، -۱ است

انواع همبستگی:

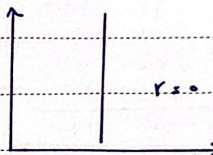
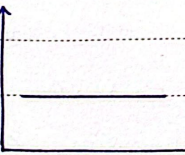
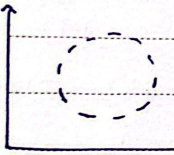


مستقیم کامل $r = 1$

مستقیم ناقص $0 < r < 1$

معکوس کامل $r = -1$

معکوس ناقص $-1 < r < 0$



عدم همبستگی: $r = 0$

درجه ابتداء ضریب همبستگی: پس از محاسبه ضریب همبستگی باید بینیم آیا ضریب همبستگی و همبستگی
بی ۲ متغیر، چقدر دارند؟ از طریق آن جدول همبستگی می داریم. بی توانیم بررسی کنیم
ابتداء درجه آزادی را از جدول $n-2$ به دست می آوریم، سپس به جدول همبستگی داریم. ۲ مراجعه
می کنیم. ۲ ستون در زیر ۱۰۰ و ۵ و ۱۰ و ۵ و ۱۰ و ۵ و ۱۰ در مقابل درجه آزادی به دست آمده
ابعاد مربوط در زیر ستون های فوق را استخراج می کنیم.

الف) ۱۲۱ صاحب شد. اکثر بزرگتر از هر ۲ عدد جدول بیشتر به ضریب همبستگی با ایلی ۹۹٪ می دارد.
ب) ۱۲۱ صاحب شده آری بی ۲ عدد جدول بزرگتر به ضریب همبستگی با طیان ۹۵٪ می دارد.
ج) ۱۲۱ صاحب شده آری از هر ۲ عدد جدول کوچکتر به ضریب همبستگی می ندارد.
ضریب تشخیص یا ضریب تعیین (R^2) : معلومی کند که چند درصد از تغییرات Y با X
ارتباط دارد. R^2 مایعی می دهیم و با معلوم بودن ضریب همبستگی به دست می آید

۴ نشان می دهد ۷۲٪ از تغییرات تعداد فروش مربوط به هزینه تبلیغات است و ۲۸٪ از R^2 می ۴۸٪

P4PCO

تشریح: اندازه‌های مذکور (۱۸) و (۱۲) نوجوانان حاصل اندازه‌گیری شده که هر جدول زیر منطقی

است. مطلوب است: الف) تعیین ضریب همبستگی r و ب) تعیین نوع همبستگی r با اطمینان ۹۹٪

همبستگی بین وزن و قد افراد وجود دارد یا نه؟ ب) ضریب تشخیص را بدست آورید و آن را تفسیر کنید.

x	y	xy	x^2	y^2
۶۵	۱۷۶	۱۱۴۰	۴۲۲۵	۱۵۸۷۶
۷۳	۱۸۴	۱۳۴۳۲	۵۳۲۹	۳۳۸۵۶
۷۰	۱۶۱	۱۱۲۷۰	۴۹۰۰	۲۵۹۲۱
۶۸	۱۶۵	۱۱۱۲۰	۴۶۴۰	۲۷۰۲۵
۶۶	۱۴۰	۹۲۴۰	۴۳۵۶	۱۹۶۰۰
۶۹	۱۵۴	۱۰۶۲۶	۴۷۶۱	۲۳۷۱۶
۷۵	۱۶۰	۱۲۰۰۰	۵۶۲۵	۲۵۶۰۰
۷۸	۱۶۴	۱۲۷۹۲	۶۰۸۴	۲۶۸۹۶
۶۴	۱۷۶	۱۱۲۶۴	۴۰۹۶	۳۱۰۷۶
۷۲	۱۷۲	۱۲۴۸۴	۵۱۸۴	۲۹۵۸۴
۶۵	۱۳۳	۸۶۴۵	۴۲۲۵	۱۷۸۸۹
۷۱	۱۵۰	۱۰۶۵۰	۵۰۴۱	۲۲۵۰۰

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x^2 - n\bar{x}^2)(\sum y^2 - n\bar{y}^2)}} = \frac{13.883 - (12 \times 99 \times 157)}{\sqrt{(57254 - 12 \times 99^2)(33856 - 12 \times 157^2)}} = \frac{887}{969.77} = 0.91454$$

همبستگی بسیار قوی

$$df = n - 2 = 12 - 2 = 10 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow 0.6574$$

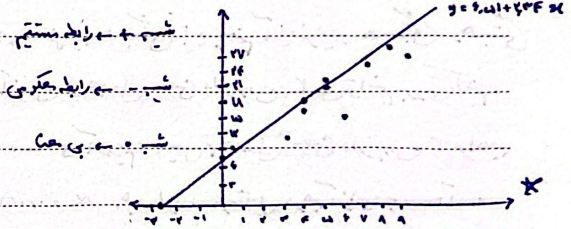
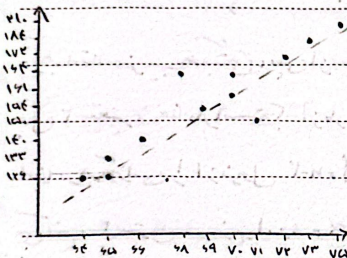
$$\alpha = 0.01 \rightarrow 0.708$$

۱۲٪ با اطمینان ۹۹٪ r مثبتی دارد است.

$$R^2 = 0.836 \text{ و } 87.3\% \text{ تغییرات } y \text{ مربوط به } x$$

$$\bar{x} = 69 \quad \bar{y} = 157 \quad \sum xy = 13.883 \quad \sum x^2 = 57254 \quad \sum y^2 = 33856$$

تغییرات y است و ۱۲٪ x مربوط به y تغییرات y است



$$\bar{y} = a + b\bar{x}$$

$$y = a + bx$$

معادله خط رگرسیون

$$b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

شیب خط a کم می‌آید

$$\sum xy = 1018 \quad \bar{x} = 69 \quad \bar{y} = 157 \quad \sum x^2 = 331$$

$$b = \frac{1018 - 9 \times 69 \times 157}{331 - 9 \times (69)^2} = 2.34 \quad a = 157 - 2.34 \times 69 = 9.91$$

$$y = 9.91 + 2.34x$$

شیب خط مثبت $b > 0$

با توجه به این می‌توانیم بگوییم: $x = 0 \rightarrow y = 9.91$

$$y = 0 \rightarrow x = -4.78$$

$$x = 7 \rightarrow y = 9.91 + 2.34 \times 7 = 26.19$$

تنبیهات

نردیش

Subject.

Date.

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a \sum y - b \sum xy}{n-2}}$$

خطای معیار برآورد S_e

در مثال تبلیغات و فروش $\rightarrow \sqrt{\frac{37481 - 2,51 \times 178 - 4,3 \times 1,18}{9-2}} = 4,97$

آزمون منی دار بودن r به کمک جدول t

① فرضیه آزمون

$$H_0: \rho = 0$$

$$t = \frac{r - \rho_0}{s_r} = \frac{r - 0}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

هر یکی هستی

$$H_1: \rho \neq 0$$

$$t_{\alpha/2, df} \quad df = n-2$$

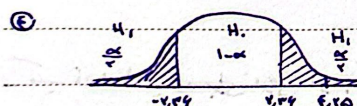
$$H_0: \rho = \rho_0$$

⑤ تصمیم گیری

$$H_1: \rho \neq \rho_0$$

در مثال تبلیغات و فروش $\rightarrow$ ① $\frac{0,18}{\sqrt{\frac{1-(0,18)^2}{9-2}}} = 4,45$

$$t_{0,25,7} = 2,34$$



H_1 را منی توان رد کرد (بین هزینه تبلیغات و فروش رابطه)

وجود دارند) - با اطمینان 95٪

در مثال قد و وزن 12 نوجوان $\rightarrow y = a + bx$

$$b = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x}$$

$$\sum x_i y_i = 13,183 \quad \bar{x} = 99 \quad \bar{y} = 1,18 \quad \sum x_i^2 = 87244$$

$$b = \frac{13,183 - 12(99)(1,18)}{87244 - 12(99)^2} = \frac{117}{135} = 0,86$$

$$a = 1,18 - 0,86(99) = -299,78$$

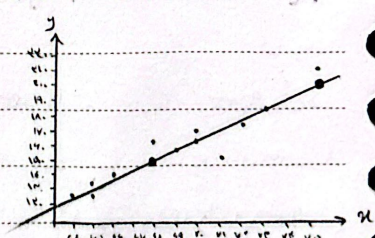
$$y = 0,86x - 299,78 \rightarrow$$

برای رسم $\rightarrow y = 2$ $| y = 1,5$
 $x = 75,8$ $x = 67,95$

قد وزن 47؟ $x = 97$ $y = ?$

$$y = 0,86(97) - 299,78 = 1,37,74$$

$$S_e = \sqrt{\frac{3,681 - (-299,78)(1,18) - (0,86)(13,183)}{12-2}} = 0,22$$



PAPCO

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$$

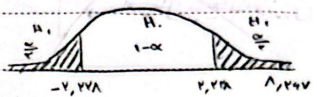
$$\textcircled{2} t = \frac{0.955}{\sqrt{\frac{1-(0.955)^2}{12-2}}}$$

$$= 1.247$$

$$\textcircled{3} t_{0.05, 10} = 2.228$$

در سطح اطمینان ۹۵٪ می توان H_0 را رد کرد یا برای

بین قد و وزن نر و ماده ای رابطه وجود دارد.



تحلیل رگرسیون و استنباط آماری

معادله رگرسیون نرینه $y = a + bx$

معادله رگرسیون ماده ای $y = \alpha + \beta x$

$$P[a - t_{\alpha/2, df} \cdot S_a \leq \alpha \leq a + t_{\alpha/2, df} \cdot S_a] = 1 - \alpha \quad df = n - 2 \quad \alpha = \text{فاصله اطمینان}$$

$$S_a = S_e \times \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

فاصله اطمینان برای عرض از میانگین در مثال هزنی تبلیغات و تعداد فروش با اطمینان ۹۵٪

$$S_e = 2.97 \quad n = 9 \rightarrow df = 9 - 2 = 7 \quad \bar{x} = 2.97 \quad \sum x_i^2 = 321$$

$$\alpha = 2.361 \quad t_{0.025, 7} = 2.365 \quad S_a = 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{(2.97)^2}{321 - 9(2.97)^2}} = 3.15$$

$$P[2.51 - 2.365 \times 3.15 \leq \alpha \leq 2.51 + 2.365 \times 3.15] = 95\%$$

$$P[-0.985 \leq \alpha \leq 13.91] = 95\%$$

مسئله قبل در مثال قد و وزن

$$S_e = 9.23 \quad n = 12 \rightarrow df = 12 - 2 = 10 \quad \bar{x} = 49 \quad \sum x_i^2 = 57244 \quad \alpha = 299.71$$

$$t_{0.025, 10} = 2.228 \quad S_a = 9.23 \times \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(49)^2}{57244 - 12(49)^2}} = 22.01$$

$$P[-299.71 - 2.228 \times 22.01 \leq \alpha \leq -299.71 + 2.228 \times 22.01] = 95\%$$

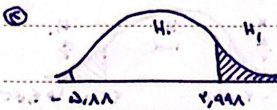
$$P[-442.5 \leq \alpha \leq -156.9] = 95\%$$

- آيا مي توان در سطح معني داري ۱٪ ادعا كرد خط رگرسيون جامعه مورد بررسي باالاتر از ۲۵ قطع كنند؟

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \alpha \leq 25 \\ H_1: \alpha > 25 \end{cases} \quad \text{تستني ادعا}$$

$$\textcircled{2} t = \frac{a - \alpha}{S_a} \rightarrow \frac{4,512 - 25}{3,15} = -5,118$$

$$\textcircled{3} t_{\alpha, df} \rightarrow t_{0,01, 7} = 2,998$$



۵. رايي توان رد كرد

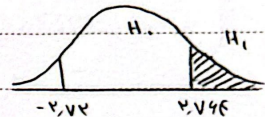
لاشال تبليغات دوزني

- آيا مي توان در سطح خطاي ۱٪ ادعا كرد خط رگرسيون جامعه مورد بررسي باالاتر از ۱۵۰ قطع كنند؟

$$\textcircled{1} \begin{cases} H_0: \alpha \leq 150 \\ H_1: \alpha > 150 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} t = \frac{-299,78 - (-150)}{55,08} = -2,72$$

$$\textcircled{3} t_{0,01, 10} = 2,764$$



۵. رايي توان رد كرد

لاشال قد دوزني

$$p[b - t_{\alpha, df} \cdot S_b \leq \beta \leq b + t_{\alpha, df} \cdot S_b] = 1 - \alpha \quad df = n - 2$$

آبر مردانه + شيب خط +

$$S_b = S_e \times \frac{1}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

آبر مردانه - شيب خط -

آبر مري + ديگري - تفاوت معناداري بين ۲ متغير نسيب

- آيا فاصله اطمینان برای شیب خط جامعه در مثال هزینه تبلیغات در تعداد فردی با اطمینان ۹۵٪

$$S_b = 2,97 \times \frac{1}{\sqrt{271 - 9 \times (2,71)^2}} = 0,528$$

آبر مردانه

$$p[2,34 - 2,345 \times 0,528 \leq \beta \leq 2,34 + 2,345 \times 0,528] = 95\%$$

$$p[1,07 \leq \beta \leq 3,512] = 95\%$$

$$S_b = 9,22 \times \frac{1}{\sqrt{5744 - 11(91)^2}} = 0,797$$

سوال قبل در مثال قد دوزني

$$p[2,42 - 2,228 \times 0,797 \leq \beta \leq 2,42 + 2,228 \times 0,797] = 95\% \rightarrow p[1,24 \leq \beta \leq 4,14] = 95\%$$

آزمون آبی بتا

آبی توان در سطح اطمینان ۹۵٪ ادعا کرد که تعداد خریدی تابعی از هزینه تبلیغات نیست.

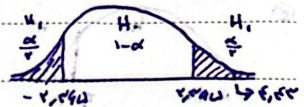
$$① \begin{cases} H_0: \beta = 0 & \text{ادعا} \\ H_1: \beta \neq 0 & \text{نتیجه ادعا} \end{cases}$$

$$② t = \frac{b - \beta}{S_b} = \frac{4.24 - 0}{0.571} = 7.42$$

$$③ t = 7.42, V = 10 \rightarrow t_{0.025, 10} = 2.228$$

$$④ \text{رأی توان پذیرفته پس تعداد خریدی}$$

تابعی از هزینه تبلیغات هست.



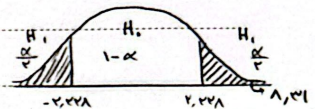
آبی توان در سطح اطمینان ۹۵٪ ادعا کرد که قوه جاذبه تابعی از وزن آنان نیست.

$$① \begin{cases} H_0: \beta = 0 & \text{ادعا} \\ H_1: \beta \neq 0 & \text{نتیجه ادعا} \end{cases}$$

$$② t = \frac{4.44 - 0}{0.747} = 5.94$$

$$③ t = 5.94, V = 10 \rightarrow t_{0.025, 10} = 2.228$$

$$④ \text{رأی توان پذیرفته پس قوه جاذبه تابعی از وزن آنان هست.}$$



تحلیل واریانس (ANOVA) (analyze of variance)

تجزیه و تحلیل واریانس یک طرز یک عامل و دو طرز دو عاملی باشد. در تجزیه و تحلیل واریانس

یک طرز، تأثیر یک صفت متغیر مثل بذرها، مختلف در میزان حاصل بررسی می شود.

الف) حجم نمونه ها برابر باشد. ب) حجم نمونه ها برابر نباشد.

و در تجزیه و تحلیل واریانس دو طرز، تأثیر دو صفت بررسی می شود. مثل انواع بذرها و یک ها.

در میزان حاصل.

در مواردی لازم است یکسان بودن میانگین چند جا به مورد بررسی قرار گیرد که از تحلیل واریانس

استفاده می شود. در روش تحلیل واریانس فرض می کنیم که می خواهیم فرضیه یکسان بودن میانگین های

K جا به را مورد بررسی قرار دهیم. اگر بفرض کنیم تأثیر یک صفت متغیر را بر روی آزمون یکسان بودن

میانگین های چند جا به مورد بررسی قرار دهیم به آن تجزیه و تحلیل واریانس یک طرز یا یک عامل

Subject.

Date.

چگونه می‌توانیم تأثیر ۲ صفت متغیر را بررسی کنیم، آزمونی داریم در طرفه یا دو عاملی کویم.

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \\ H_1: \text{لااقل ۲ تا از } \mu \text{ ها برابر نیستند} \end{array} \right. \quad \textcircled{2} F_{\alpha, df, df} = F_{\alpha, (k-1), K(n-1)}$$

تصمیم گیری

$$\textcircled{3} F = \frac{MS(T)}{MS(E)}$$

منبع تغییرات	درجه آزادی df	جمع مربعات انحرافات SS	میانگین مربعات انحرافات MS	F
بین گروه‌ها (تاریخ) T	K - 1	SS(T)	$MS(T) = \frac{SS(T)}{K-1}$	$\frac{MS(T)}{MS(E)}$
درون گروه‌ها (خطا) E	K(n-1)	SS(E)	$MS(E) = \frac{SS(E)}{K(n-1)}$	
کل (جمع) T	Kn-1	SS(T)		

$$SS(T) = \sum \sum x_{ij}^2 - \frac{1}{nK} T_{..}^2 \quad SS(E) = SS(T) - SS(T)$$

$$SS(T) = \frac{1}{n} \sum T_{i.}^2 - \frac{1}{nK} T_{..}^2$$

مثال: نمره‌های آمار دانشجوین ۳ کلاس مختلف در میان ترم دارای توزیع نرمال است. از هر کلاسی نمونه‌ای به طور تصادفی انتخاب و نمره‌های میان ترم آمار آنها در جدول درج شده است:

در سطح ۵٪ می‌توانیم نمره‌های میان ترم درس آمار دانشجوین این ۳ کلاسی

با هم برابر است؟

کلاس	نمرات آمار میان ترم	$\sum x_{ij} = T_{i.}$	$\sum x_{ij}^2$	$T_{i.}^2$
A	۳ ۴ ۵ ۶ ۲	$T_{1.} = ۲۰$	۹۰	۴۰۰
B	۵ ۵ ۷ ۶ ۲	$T_{2.} = ۲۵$	۱۴۹	۶۲۵
C	۴ ۸ ۵ ۷ ۴	$T_{3.} = ۳۰$	۱۹۰	۹۰۰
		$\sum \sum x_{ij} = ۷۵$	$\sum \sum x_{ij}^2 = ۴۲۹$	$\sum T_{i.}^2 = ۱۹۲۵$

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \text{لااقل ۲ تا از } \mu \text{ ها برابر نیستند} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{2} K = ۳ \quad n = ۱۵$$

نمونه

PAPCO

منبع تغییرات	df	مجموع مربعات انحرافات	میانگین مربعات انحرافات	F
TV	۲-۱ = ۱	$SS(TV) = 10$	$\frac{SS(TV)}{K-1} = \frac{10}{1} = 10$	$\frac{MS(TV)}{MS(E)} = \frac{10}{14} = 0.71$
E	۳(۵-۱) = ۱۲	$SS(E) = 34$	$\frac{SS(E)}{K(n-1)} = \frac{34}{12} = 2.83$	
T	۱۴	$SS(T) = 44$		

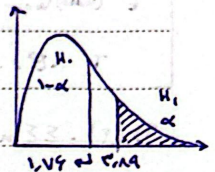
مثال ۱: $T \sim \sum \sum x_{ij}^2$ و $SS(T) = 44$ - $\frac{1}{5 \times 3} \times (15)^2 = 44$

$SS(TV) = \frac{1}{5} \times 1945 - \frac{1}{5 \times 3} \times (15)^2 = 10$

$SS(E) = 44 - 10 = 34$

② $F = 0.71, 2, 12 = 0.19$

③ H_0 را بپذیریم.



مثال ۲: از ۳ کارخانه لاستیک سازی، از هر کارخانه یک نمونه ۵ تای انتخاب و پس از آزمایش عمر مفید لاستیک ها بر حسب هزار کیلومتر در جدول زیر ثبت گردید. آیا میانگین عمر مفید لاستیک های ۳ کارخانه را می توان یکسان دانست؟ ($\alpha = 0.01$)

نمونه / کارخانه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$T_{i.}$	$\sum x_{ij}^2$	$T_{i.}^2$
۱	۱۴	۱۱	۱۳	۱۴	۱۰	۹	$T_{1.} = 71$	۸۶۳	۵۰۴۱
۲	۱۶	۱۳	۱۵	۱۱	۱۴	۱۲	$T_{2.} = 81$	۱۳۱۴	۷۷۴۴
۳	۲۴	۱۸	۲۳	۲۱	۲۴	۲۱	$T_{3.} = 141$	۳۴۷۷	۱۹۸۸۱
							$\sum T_{i.} = 193$	$\sum x_{ij}^2 = 5584$	$\sum T_{i.}^2 = 22673$

① $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ② $K = 3, n = 9, SS(T) = 5584 - \frac{1}{3 \times 3} \times (193)^2 = 514$

H_1 : حداقل یکی از μ ها برابر نیستند. $SS(TV) = \frac{1}{3} \times 32444 - \frac{1}{3 \times 3} \times (193)^2 = 446$

$SS(E) = 514 - 446 = 68, 33 = 129, 67$

Subject. _____

Date. _____

منبع تغییرات	df	مجموع مربعات انحرافات	میانگین مربعات انحرافات	F
TR	۳-۱=۲	۴۴۴, ۳۳	$\frac{۴۴۴,۳۳}{۲} = ۲۲۲, ۱۶۵$	$\frac{۲۲۲, ۱۶۵}{۹, ۳۱} = ۲۳, ۸۶$
E	۳(۴-۱)=۱۵	۱۳۹, ۶۷	$\frac{۱۳۹, ۶۷}{۱۵} = ۹, ۳۱$	
T	۱۷	۵۸۴		

⑤ $F_{\alpha, 2, 15}$ و $F_{\alpha, 15, 2}$

⑥ نمی توان H_0 را پذیرفت.

