

تاریخ ریاضی

جلسه چهارم

چی شد که اینطوری تعریف شد؟

فرض کنید  $A$  نقشه یک کشور باشد و زیر مجموعه‌های  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  و  $A_4$  و  $A_5$  استان‌های این کشور باشند. رابطه‌ای که بین هر دو شهروند این کشور برقرار است، رابطه هم‌استانی بودن است. یعنی

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ و } y \text{ در یک استان هستند}$$

این رابطه دارای این خواص است که اگر  $x$  و  $y$  و  $z$  افرادی از این کشور باشند:

۱-  $x$  با خودش هم‌استان است.

۲- اگر  $x$  با  $y$  هم‌استان باشد،  $y$  نیز با  $x$  هم‌استان است.

۳- اگر  $x$  با  $y$  و  $y$  با  $z$  هم‌استان باشند،  $x$  نیز با  $z$  هم‌استان است.

تعریف: رابطه‌ای چون « $\sim$ » روی مجموعه  $A$  یک رابطه هم‌ارزی است اگر به ازای هر  $x$  و  $y$  و  $z$  از  $A$  سه خاصیت زیر برقرار باشد:

الف-  $x \sim x$  یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد.

ب- اگر  $x \sim y$  آنگاه  $x \sim y$

ج- اگر  $x \sim y$  و  $y \sim z$  آنگاه  $x \sim z$

مثال: رابطه توافقی خطوط در صفحه و رابطه همنهشتی دو مثلث  
رابطه‌های هم‌ارزی روی صفحه هستند.

## اقلیدس (مقاله پنجم؛ قضیه ۱۱)

نسبت‌های مساوی با یک نسبت، خود نیز با هم مساویند.

# Fowler (1999)

این مثال روشنی از تعدی است... این رابطه آشکارا بازتابی و  
تقارنی است.

اقلیدس (مقاله اول؛ اولین اصل بدیهی)

چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با هم مساوی‌اند.



# David Joyce (2008)

اولین اصل بدیهی را می‌توان در مورد شکل‌های صفحه به کار برد، برای مثال، اگر یک مثلث با یک مستطیل برابر و مستطیل با مربع برابر باشد، آنگاه مثلث نیز با مربع برابر است.

## اقلیدس (مقاله اول؛ قضیه اول)

اما ثابت شده بود که  $CA$  هم با  $AB$  برابر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست  $CA$  و  $CB$  با  $AB$  برابر است. و چیزهای مساوی با یک چیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین  $CA$  هم با  $CB$  مساوی است.

## فرودنتال (۱۹۶۶)

اگر دو شی با شی سومی همنهشت باشند، آنها نیز با هم  
همنهشتند.

## F-transitivity ف-تعدی

اگر  $B \sim A$  و  $C \sim A$  آنگاه  $C \sim B$

ف-تعدی + بازتابی

هم‌ارزی

# تعاريف خدادادی نیستند

ف-تعدی + بازتابی = تعدی + بازتابی + تقارنی

اقلیدس (مقاله اول؛ قضیه ۳۰)

خطهای راست موازی با یک خط راست با هم موازی اند.

# خط اول اثبات

فرض می‌کنیم هر یک از خطهای راست  $AB$  و  $CD$  با خط راست

$EF$  موازی باشد؛ می‌گوییم که  $AB$  هم با  $CD$  موازی است.



## در دل اثبات

پس زاویه  $\text{GHF}$  با زاویه  $\text{GKD}$  مساوی است.

اما زاویه  $\text{AGK}$  با زاویه  $\text{GHF}$  مساوی بود؛ بنابراین زاویه

$\text{AGK}$  نیز با زاویه  $\text{GKD}$  مساوی است.

# جالب جات

تا اینجا هر جا که اقلیدس از اولین اصل بدیهی استفاده می‌کند، می‌گوید که از آن استفاده کرده است. اینجا اولین جایی است که این کار را نمی‌کند.

## جالب‌جات مهم‌تر

در هر جایی که از نقطه نظر مدرن به جور هم‌ارزی مطرح است، در صورتی که یک حکم کلی را مطرح می‌کند، از ف-تعدی استفاده می‌کند؛ اگر در عمل استفاده می‌کند، آزادانه بین تعدی و ف-تعدی حرکت می‌کند.

## سوتی مدرن؛ فرودنتال

برای هر سه عضو  $a$  و  $b$  و  $c$  از  $Z$ ، اگر  $a < b$  و  $b < c$ ،  
آنگاه  $a < c$  (تعدی رابطه  $<$ ).

# David Joyce

اقلیدس رابطه تقارنی را ندید.

چی را ندید؟

صورت استاندارد و مدرن رابطه تقارن : اگر- آنگاه

# چی را دید؟

تقارن را در تعاریف می‌دید:

خطهای راست متوازی خطهای راستی هستند در صفحه ...

# هیلبرت

اگر  $AB \equiv A'B'$

آنگاه  $A'B' \equiv AB$  (تقارن همنهشتی پاره‌خط‌ها)

حالا می‌توانیم بگوییم دو پاره‌خط با هم همنهشتند.



هیلبرت؛ اصل اول

می توان پاره خطی همنهشت با پاره خط مفروض ساخت.

## هیلبرت؛ اصل دوم

اگر پاره‌خط  $A'B'$  و پاره‌خط  $A''B''$  با پاره‌خط  $AB$  هم‌نهشت باشند، آنگاه پاره‌خط  $A'B'$  نیز با پاره‌خط  $A''B''$  هم‌نهشت است،  
به طور خلاصه، اگر دو پاره‌خط با پاره‌خط سومی هم‌نهشت باشند، آنها با هم هم‌نهشتند.

## بازتابی هنوز نام ندارد

چون همنهشتی یا برابری در هندسه فقط با این اصول معرفی می‌شود، به هیچ وجه معلوم نیست که هر پاره‌خط با خودش همنهشت است. هرچند، این را می‌توان از دو اصل اول همنهشتی بدست آورد، اگر پاره خط  $AB$  را روی یک شعاع چنان ساخت که مثلاً با پاره‌خط همنهشت  $A'B'$  باشد و اصل ۲ را درباره همنهشتی‌های  $AB \equiv A'B'$  و  $A'B' \equiv AB$  به کار برد.

...

و بر مبنای این می‌توان تقارن و تعدی همنهشتی پاره‌خطها  
را به کمک اصل ۲ بدست آورد.

تعداد اشیا مهم است

اقلیدس هیچ وقت تعدی یا ف-تعدی را برای دو شی به کار  
نمی برد.

## هیلبرت در تله می افتد

اقلیدس: خطهای راست متوازی خطهای راستی هستند در یک صفحه که اگر از دو سو تا بینهایت امتداد داده شوند یکدیگر را در هیچ طرف نمی برند.

هیلبرت: دو خط را موازی گویند اگر در یک صفحه قرار داشته باشند و یکدیگر را قطع نکنند.

هر دو تعریف...

تقارن در تعریف نهفته است.

اجازه توازی یک خط با خودش را نمی‌دهد.

## یک قضیه و یک شبه اصل

اقلیدس (قضیه ۳۰): خطهای راست موازی با یک خط راست با هم موازی اند.

هیلبرت (چیزی معادل با اصل توازی): اگر دو خط  $a$  و  $b$  در صفحه خط سوم  $c$  را که در همان صفحه قرار دارد قطع نکنند، آنها یکدیگر را نیز قطع نمی کنند.



چیکار می‌کنه این هیلبرت؟

شبه اصل مذکور را برای دو خط استفاده کنید. چه می‌شود؟

وجدان اقلیدس راحت است

# اقلیدس و بازتابی

اقلیدس هیچگاه از عباراتی شبیه زیر استفاده نمی کند:

a برابر است با

موازی است با

...

a.

پس چه می کند؟

از یک چیز دوبار استفاده می کند!

زاویه EBD را به هر یک اضافه می کنیم.

اقلیدس پرهیز می کند

چنین نباشد که رابطه‌ای که بین دو چیز تعریف شده را برای  
یک چیز به کار ببریم.

خرگوشی که هیلبرت از تو کلاه در می آورد.

اصل یک همنهشتی

تعریف هم‌ارزی فقط با بیان یک خاصیت

بشتابید که تمام شد



آخه پس چرا؟