مسئله‌یِ تعقیب

امیر آقامحمدی

مسئله‌یِ تعقیب یعنی مسئله‌یِ حرکتِ یک جسم (شکارچی) که بردارِ سرعتش همواره به سمتِ یک جسمِ متحرکِ دیگر (شکار) است. در این مقاله این مسئله برایِ چند وضعیّت خاص مطالعه می‌شود.

1 مقدمه

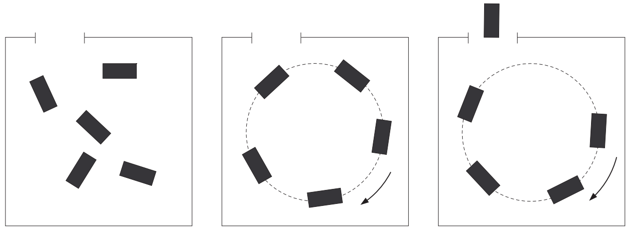
سوارِ دوچرخه‌ای هستیم و از جایی که زمین خیس است رد می‌شویم. وقتی به جایی که زمین خشک است برسیم، ردِّ چرخ‌ها بر رویِ زمین می‌ماند. ممکن است جوری که ما چرخ را می‌رانیم ردِّ کج و کوله‌ای از چرخِ جلو بر رویِ زمین بماند ولی ردِّ چرخِ عقب حتماً انحنایِ کم‌تری دارد. در حینِ حرکتِ دوچرخه، ردِّ چرخِ جلو روی زمین یک خم می‌سازد و چرخِ عقب هم‌واره نقطه‌یِ تماسِ چرخِ جلو با زمین را تعقیب می‌کند. البته بدیهی است که هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد. پدیده‌ای شبیهِ این را در تعقیبِ مورچه‌ها می‌بینیم. فاینمن[a] زمانی قطاری از مورچه‌ها را دید که به دنبالِ هم در حرکت‌اند. تکه‌ای قند را در وانِ حمام گذاشت و منتظر شد که مورچه‌ای آن را پیدا کند. او مسیرِ مورچه‌یِ اول را با مدادِرنگی رویِ زمین علامت گذاشت. مسیرِ مورچه‌یِ اول یک مسیرِ کج‌وکوله‌ی و زیگزاگی بود. مورچه‌هایِ بعدی که به دنبالِ غذا می‌آمدند دقیقاً همان مسیر را طی نمی‌کردند بلکه در مسیرِ هم‌وارتری به سمتِ غذا می‌آمدند [1,2]. در واقع وقتی هر مورچه مورچه‌یِ قبلی را تعقیب می‌کند به‌جایِ مسیرِ خمیده رویِ مسیرِ مستقیمی که به سمتِ مورچه‌یِ جلویی است حرکت می‌کند. بنا بر این به تدریج مسیرِ حرکتِ مورچه‌ها هم‌وارتر می‌شود. شکلِ ۱ را ببینید. در واقع مادامی که بردارِ سرعتِ دو مورچه‌یِ مجاور موازی نیست فاصله‌یِ دو مورچه کم می‌شود و وقتی که این دو مورچه رویِ خطِ راستی حرکت کنند فاصله‌شان ثابت می‌ماند. بالاخره اگر زمانی بردارِ سرعتِ همه‌یِ مورچه‌ها موازی شود، آن‌ها رویِ یک خطِ مستقیم حرکت می‌کنند و فاصله‌شان هم ثابت می‌ماند.

مسئله‌یِ تعقیب اصولاً به دو دسته تقسیم می‌شود. در دسته‌یِ اول یک پیش‌قراول وجود دارد که توسطِ تعقیب‌گر یا دسته‌ای از تعقیب‌گرها دنبال می‌شود. در این مسئله غیر از پیش‌قراول هر کدام از

شکل ۱: هم‌وار شدنِ مسیرِ مورچه‌هایی که به دنبالِ یک مورچه‌ی پیش‌قراول به دنبالِ غذا می‌روند.

تعقیب‌گرها هم‌سایه‌ی جلویی خود را تعقیب می‌کند. دسته‌ی دیگری از مسائلِ تعقیب هستند که پیش‌قراولِ متمایزی وجود ندارد و هر کدام دیگری را تعقیب می‌کند. به این دسته از مسائل تعقیبِ چرخه‌ای‌می‌گویند. اولین مثال برمی‌گردد به مسئله‌ای که توسطِ لوکاس[b] در سالِ ۱۸۷۷ مطرح شد [3]. در این مسئله سه سگ رویِ رأس‌هایِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع هستند. سرعتِ سگ‌ها یک‌سان است و هر کدام سگِ مجاورِ خود را تعقیب می‌کند. سه سال بعد در [4] راهِ حلّی برایِ این مسئله ارائه شد. تعمیم آن به عنوان مسئله‌یِ n حشره نیز حل شده است [5]. اگر سرعتِ حشره‌ها با هم برابر باشد و آن‌ها رویِ رأس‌های یک n ضلعی‌یِ منتظم باشند چنان‌که خواهیم دید پس از زمانِ محدودی همگی‌یِ آن‌ها در مرکزِ n ضلعی به هم می‌رسند. اگر حشره‌ها رویِ رأس‌هایِ n ضلعی‌یِ منتظم نباشند یا اگر سرعتِ آن‌ها برابر نباشد چه می‌شود؟ پاسخِ بخشی از این سئوال‌ها را می‌توانید در [6] بیابید.

یکی از مسائلی که اخیراً موردِ توجه قرار گرفته مسئله‌یِ تعدادی ربات است. فرض کنید تعدادی ربات را به طور کتره‌ای درونِ اتاقی رها کرده‌ایم. این اتاق یک در دارد و می‌خواهیم این ربات‌ها این در را پیدا کرده و به‌طورِ منظم از اتاق خارج شوند. یک راه آن است که این ربات‌ها در مرحله‌یِ اول روی یک مسیرِ دایره‌ای حرکت کنند و پس از آن هر رباتی که به در نزدیک‌تر بود از در خارج شود و بقیه‌یِ ربات‌ها هم به ترتیب هر کدام پشتِ سرِ رباتِ دیگر از در خارج شوند. حالا سئوال این است که هر ربات چه‌گونه حرکت کند تا مجموعه‌یِ ربات‌ها حرکتش رویِ دایره باشد [7]. چنین مجموعه‌یِ خودگردانی از ربات‌ها علاوه بر کاربردهایِ نظامی، در گروه‌هایِ نجات مثلاً ربات‌هایِ آتش‌نشان موردِ توجه قرار گرفته.



شکل ۲: مرتب شدنِ ربات‌ها و خروجِ منظمِ آن‌ها از یک راهِ فرار

2 شکار و شکارچی

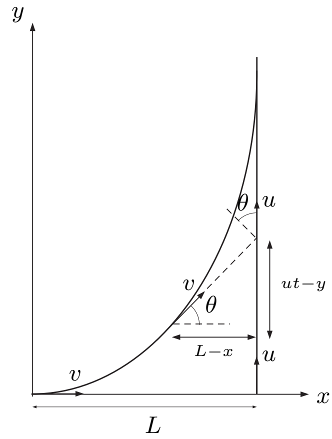
اگر در مسئله‌ي تعقیب با پیش‌قراول، خودمان را به دو موجود محدود کنیم مسئله تبدیل می‌شود به مسئله‌يِ شکار و شکارچی. شکار، مثلاً آهو، رويِ یک خم حرکت می‌کند و شکارچی،مثلاً یوزپلنگ، او را تعقیب می‌کند. مدلِ ساده‌تر آن است که شکار رويِ یک خمِ داده‌شده و با سرعتِ ثابت حرکت کند. اندازه‌يِ سرعتِ شکارچی را ثابت ولی جهتِ بردارِ سرعتش را هم‌واره به سمتِ شکار می‌گیریم. در مدلِ واقعی‌تر شکار رويِ خمِ معینی حرکت نمی‌کند. احتمالاً وقتی یوزپلنگ از حدّ ِمعینی به آهو نزدیک‌تر می‌شود آهو تغییرِ جهت می‌دهد. پاسخِ یوز پلنگ هم آنی نیست و این باعث می‌شود یوزپلنگ عقب بیفتد. یوزپلنگ نیز احتمالاً دقیقاً به سمتِ آهو نمی‌رود بل‌که کمی جلوتر را نشانه می‌گیرد. در واقع هم شکار و هم شکارچی یک تأخیرِ زمانی در تصمیم‌گیری دارند. علاوه بر این سرعت و شتابِ شکار و شکارچی هم ثابت نیست. توجه داشته باشیم که در مسئله‌يِ واقعی شکار و شکارچی هر کدام خصوصیاتِ ویژه‌ای دارند، مثلاً روباه به عنوان شکارچی قدرتِ مانُورِ زیادی دارد. روباه دُمِ بزرگی دارد. با چرخاندنِ دُم و استفاده از پایستگی‌يِ تکانه زاویه‌ای به راحتی می‌تواند جهتِ حرکتِ خودش را به سرعت عوض کتد. در نظر گرفتنِ همه‌يِ این‌ها مسئله را سخت‌تر می کند.

بردارِ مکانِ شکار را $\mathbf{R}$، سرعتِ شکار را u، بردارِ مکانِ شکارچی را $\mathbf{r}$ و سرعتِ شکارچی را v می‌گیریم. بردارِ فاصله‌يِ نسبی‌يِ آن‌ها $\mathbf{R}-\mathbf{r}$. بردارِ سرعتِ شکارچی را هم در راستايِ خطِ واصلِ شکار و شکارچی می‌گیریم؛ داریم

$$\dot{\mathbf{r}} = v\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}.$$

این معادله هم‌راه با معادله‌يِ $\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{R}} = u^2$ و یک $R(t)$ِ داده شده یک دسته معادله‌يِ دیفرانسیلِ جفت‌شده برايِ مؤلفه‌هايِ مکانِ شکارچی می‌دهند. ما دو مدل را این‌جا بررسی می‌کنیم:

۱) شکار رويِ خطی مستقیم حرکت می‌کند،



شکل ۳: شکار رویِ خطی مستقیم حرکت می‌کند و شکارچی او را تعقیب می‌کند.

۲) شکار رویِ یک دایره حرکت می‌کند.

۱.۲ شکار رویِ خطی مستقیم حرکت می‌کند

ممکن است سئوال این باشد که که آیا بالاخره شکارچی شکار را می‌گیرد و این زمان چه‌قدر است. یا آن که سئوال در موردِ مسیرِ شکارچی باشد. جوابِ سئوالِ اول را با محاسبه‌یِ کوتاه‌تری می‌توانیم به دست آوریم.

برایِ سادگی فرض کنیم شکارچی در ابتدا در مبدأ و شکار رویِ محورِ x و در نقطه‌یِ $x = L$ است. اگر شکارچی به شکار برسد جابه‌جاییِ مولفه‌یِ y مکانِ هر دو یک چیز مثلاً D است. در نقطه‌ای از مسیر زاویه‌ای که بردارِ سرعتِ شکارچی با محورِ x می‌سازد را θ می‌گیریم. با توجه به این که مؤلفه‌یِ yِ سرعتِ شکارچی $v\sin\theta$ است نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} D = \int_0^T v\sin\theta\ \mathrm{d}t, \\ \\ D = uT, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_0^T \sin\theta\ \mathrm{d}t = \frac{uT}{v} \tag{1}$$

که T زمانِ رسیدنِ شکارچی به شکار است. فاصله‌یِ آن‌هادر ابتدا L است. اگر فاصله‌یِ آن‌ها را با S نمایش دهیم، $\dot{S} = u\sin\theta - v$ است. پس

$$- L = \int_L^0 \mathrm{d}S = \int_0^T (u\sin\theta - v)\ \mathrm{d}t, \tag{2}$$

که با جاگذاریِ $\int_0^T \sin\theta\ \mathrm{d}t$ از رابطه‌یِ (1) در رابطه‌یِ بالا، T به دست می‌آید

$$T = \frac{Lv}{v^2 - u^2}. \tag{3}$$

تنها در صورتی که $v > u$ باشد شکارچی در زمانِ محدود به شکار می رسد. در این حالت

$$D = \frac{Lvu}{v^2 - u^2}. \tag{4}$$

حالا بیایید معادله‌یِ مسیرِ شکارچی را به دست آوریم. اگر x و y را مختصه‌هایِ مربوط به مکان شکارچی بگیریم

$$\dot{x} = v\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\sin\theta. \tag{5}$$

شرطِ آن که سرعتِ شکارچی رو به شکار باشد را می‌توان به صورتِ قیدی رویِ شیبِ مسیرِ شکارچی نوشت

$$\tan\theta = \frac{ut - y}{L - x}. \tag{6}$$

با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان و جاگذاریِ $\dot{x}$ و $\dot{y}$ از رابطه‌هایِ (5) نتیجه می‌شود

$$u\cos\theta = \frac{L - x}{\cos\theta}\dot{\theta}. \tag{7}$$

این رابطه را جورِ دیگری هم می‌توانستیم به دست آوریم. سرعتِ شکار در چارچوبِ شکارچی، $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$، دو مؤلفه داردِ یکی در راستایِ خطِ واصلِ شکار و شکارچی است

$$\dot{S} = w_{\parallel} = u\sin\theta - v, \tag{8}$$

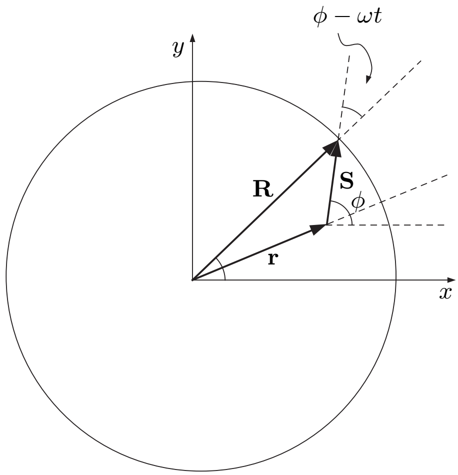
و دیگری مؤلفه‌یِ عرضی‌یِ این سرعت است،

$$S\dot{\theta} = w_{\perp} = u\cos\theta. \tag{9}$$

با جاگذاریِ $S = (L - x)/\cos\theta$ در رابطه‌یِ بالا، (7) به دست می‌آید. با تقسیمِ $\dot{x}$ بر $\dot{\theta}$ و استفاده از (5) و (9) نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v(L - x)}{u\ \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \frac{u\ \mathrm{d}x'}{v(L - x')} = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta'}{\cos\theta'}. \tag{10}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف نتیجه می‌شود



شکل ۴: شکار رویِ یک دایره حرکت می‌کند.

$$\tan\theta = \sinh\left[\frac{u}{v}\ln\left(\frac{L}{L-x}\right)\right]. \tag{11}$$

اما $\tan\theta$ شیبِ مسیرِ شکارچی است. پس

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh\left[\frac{u}{v}\ln\left(\frac{L}{L-x}\right)\right] \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^{u/v} - \left(\frac{L}{L-x}\right)^{-u/v}\right]. \tag{13}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه $y(x)$ به دست می‌آید

$$y(x) = \frac{L}{2}\left[\frac{1-(1-x/L)^{1-(u/v)}}{1-(u/v)} - \frac{1-(1-x/L)^{1+(u/v)}}{1+(u/v)}\right]. \tag{14}$$

۲.۲ شکار رویِ یک دایره حرکت می‌کند

فرض می‌کنیم شکار رویِ دایره‌ای به شعاعِ R با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابت حرکت می‌کند.
بردارِ مکانِ شکار عبارت است از

$$\mathbf{R} = R(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t). \tag{15}$$

بردارِ مکانِ شکارچی $\mathbf{r}$ و بردارِ مکانِ نسبی‌ی آن‌ها $\mathbf{S} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ است. اندازه‌یِ سرعتِ شکارچی نیز

ثابت است و ما آن را با v نمایش می‌دهیم. قیدی که وجود دارد در موردِ جهتِ سرعتِ شکارچی است که همواره رو به شکار است

$$\dot{\mathbf{r}} = v\ \mathbf{s}. \tag{16}$$

$\hat{\mathbf{s}}$ بردارِ یکه‌یِ در راستایِ بردارِ $\mathbf{S}$ است. بردارِ سرعتِ نسبی‌یِ شکار و شکارچی دو مؤلفه دارد

$$\begin{aligned} \dot{S} &= R\omega \sin(\phi - \omega t) - v, \\ S\dot{\phi} &= R\omega \cos(\phi - \omega t). \end{aligned} \tag{17}$$

در حالتی که سرعتِ شکارچی از سرعتِ شکار بیش‌تر است، $v > R\omega$. پس $\dot{S} < 0$ و بنا بر این پس از مدتی $S = 0$ می‌شود.

در حالتی که $v = R\omega$ است جز موقعی که $\sin(\phi - \omega t) = 1$ است $\dot{S} < 0$ می‌شود. در این حالت $\phi = \omega t + k\pi/2$ و از رابطه‌یِ دومِ (17) نتیجه می‌شود $S\omega = 0$.

حالتی که باقی می‌ماند $v < R\omega$ است. اگر دو معادله‌یِ جفت‌شده‌یِ (17) را بشود حل کرد بردارِ $\mathbf{S}$ و از آن‌جا بردارِ مکانِ شکارچی $\mathbf{r}$ و بالاخره معادله‌یِ مسیرِ شکارچی به دست می‌آید. با تغییرِ متغیرِ

$$\psi = \phi - \omega t, \tag{18}$$

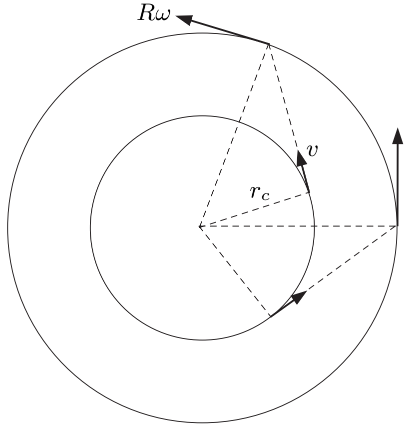
معادله‌هایِ جفت‌شده‌یِ (17) تبدیل می‌شوند به

$$\begin{aligned} \dot{S} &= R\omega \sin\psi - v, \\ S\dot{\psi} &= -S\omega + R\omega \cos\psi. \end{aligned} \tag{19}$$

اگر از معادله‌یِ دوم نسبت به زمان مشتق بگیریم و S و $\dot{S}$ را در آن جای‌گذاری کنیم به یک معادله دیفرانسیلِ غیرِخطی‌یِ برایِ ψ می‌رسیم،

$$\ddot{\psi}\left(\frac{R\cos\psi}{\dot{\psi} + \omega}\right) + \dot{\psi}(2R\sin\psi - v) + \omega(R\omega\sin\psi - v) = 0. \tag{20}$$

اگرچه این معادله یک معادله‌یِ دیفرانسیلِ غیرِخطی است اما یک جواب برایِ آن می‌شود حدس زد. فرض کنید در لحظه‌ای که $\psi = \psi_c$ که $\sin\psi_c := v/(R\omega)$ است، و در همین لحظه $\dot{\psi} = 0$ باشد، یا $S = R\cos\psi_c$، در آن‌صورت از معادله‌یِ دیفرانسیلِ (20) پیداست که $\ddot{\psi} = 0$. در این صورت از این پس ψ ثابت می‌ماند یعنی $\psi = \psi_c$. در این حالت $\dot{S} = 0$ می‌شود. این جواب مربوط به حالتی است که شکارچی هم رویِ دایره‌ای کوچکتر به شعاعِ $r = r_c := R\sin\psi_c$ ولی با همان سرعتِ زاویه‌ای‌یِ شکار به دنبالش می‌رود. در این حالت شکارچی هیچ‌گاه به شکار نمی‌رسد.



شکل ۵: شکار و شکارچی رویِ دایره حرکت می‌کنند.

حالا بیایید پای‌داری‌یِ جواب را بررسی کنیم یعنی اگر r حول و حوشِ r_c و ψ نیز حول و حوشِ ψ_c باشد چه اتفاقی می‌اُفتد. تغییرِ متغیری به صورتِ زیر می‌دهیم.

$$\begin{aligned} S &= R\cos\psi_c + \delta, \\ \psi &= \psi_c + \epsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

وقتی $\psi \approx \psi_c$ و $r \approx r_c$ است δ و ϵ کوچک هستند. با استفاده از (19) و (21) و تا تقریبِ اول بر حسبِ δ و ϵ به معادله‌هایِ زیر برایِ آن‌ها می‌رسیم.

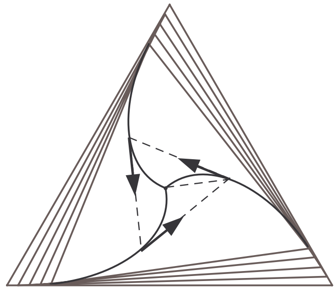
$$\begin{aligned} \dot\delta &= \epsilon R\omega\cos\psi_c, \\ \dot\epsilon &= -\frac{\delta\omega + \epsilon R\omega\sin\psi_c}{R\cos\psi_c}. \end{aligned} \tag{22}$$

با حلّ ِاین دو معادله، معادله دیفرانسیلِ مرتبه‌یِ دویی برایِ δ به دست می‌آید

$$\ddot\delta + \omega\tan\psi_c\dot\delta + \omega^2\delta = 0. \tag{23}$$

برایِ به دست آوردنِ جوابِ معادله، نهاده‌یِ $\mathrm{e}^{p\,t}$ را به عنوانِ جواب می‌گیریم. با جای‌گذاری‌یِ این جواب دو مقدار برایِ p به دست می‌آید

$$p = -\frac{\omega}{2}\left(\tan\psi_c \pm \sqrt{\tan^2\psi_c - 4}\right). \tag{24}$$



شکل ۶: سه ذره که رویِ رأس‌هایِ یک مثلثِ متساوی‌الاضلاع هستند و با سرعتِ یک‌سان هم‌دیگر را تعقیب می کنند.

بخشِ حقیقیِ هر دویِ این‌جواب‌ها منفی هستند. پس با گذشتِ زمان $\delta \to 0$. یعنی اگر از جوابی شروع کنیم که $\psi \approx \psi_c$ و $r \approx r_c$ باشند این جواب به سمتِ $\psi = \psi_c$ و $r = r_c$ میل می‌کند.

3 تعقیبِ چرخه‌ای

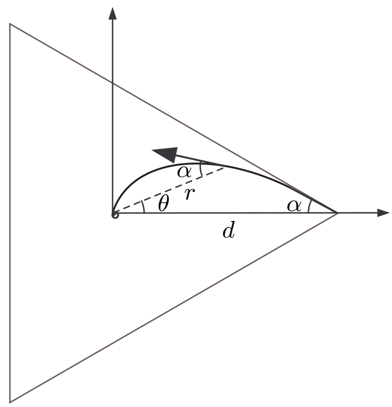
۱.۳ حالتِ سه ذره

فرض کنید سه ذره رویِ رأس‌هایِ مثلثِ متساوی‌الاضلاعی هستند. حرکتِ آن‌ها به گونه‌ای است که هر یک ذره‌یِ جلویی خود را تعقیب می‌کند. در زمانِ کوتاهِ $\mathrm{d}t$ هر ذره به اندازه‌یِ $v\mathrm{d}t$ جابه‌جا می‌شود. در این لحظه سه ذره رویِ رأس‌هایِ مثلثِ متساوی‌الاضلاعِ دیگری که کمی کوچک‌تر است قرار دارند. این مثلث کمی هم چرخیده است. همان‌طور که در شکلِ ۶ می‌بینید مثلثی که سه ذره رویِ رأسِ آن هستند می‌چرخد و کوچک می‌شود تا این که سه ذره در مرکزِ مثلث به هم برسند.

بردارِ سرعتِ هر ذره در راستایِ یکی از اضلاعِ مثلث است و با خطی که به مرکزِ مثلث وصل می‌شود هم‌واره زاویه‌یِ $\alpha = \pi/6$ می‌سازد. کافی است مؤلفه‌هایِ سرعت را در دستگاهِ قطبی بنویسیم.

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= -v\cos\alpha, \\
r\dot{\theta} &= v\sin\alpha. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

از این معادله‌ها $r(t)$ و $\theta(t)$ به دست می‌آیند



شکل ۷: تعقیبِ چرخه‌ای‌ِ سه‌ذره‌ای در چارچوبی که هم‌راهِ مثلث می‌چرخد.

$$r(t) \;=\; d - v\cos\alpha\, t,$$
$$\theta(t) \;=\; \tan\alpha\, \ln\left(\frac{d}{d - v\cos\alpha\, t}\right). \tag{26}$$

با حذفِ t می‌توانیم معادله‌یِ مسیر $r(\theta)$ را نیز به دست آوریم. یک راه دیگر این است که دو معادله‌یِ (25) را بر هم تقسیم کنیم

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\cot\alpha\; \mathrm{d}\theta, \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = d\exp(-\theta\cot\alpha). \tag{27}$$

زمانی که ذرات به هم می‌رسند $r(T) = 0$ است و از این‌جا T به دست می‌آید

$$T = \frac{d}{v\cos\alpha}. \tag{28}$$

از معادله‌یِ دومِ (26) پیداست که در زمانِ T، θ بی‌نهایت می‌شود. در واقع وقتی ذرات در مرکزِ مثلث به هم می‌رسند بی‌نهایت دفعه دورِ مرکزِ مثلث چرخیده‌اند. ممکن است این نتیجه غیرِفیزیکی به نظر برسد ولی باید توجه داشته باشیم این مطلب از فرضِ غیرِفیزیکی‌یِ بی‌بُعد بودنِ ذرات ناشی شده است. اگر برایِ ذرات بُعد قائل شویم وقتی ذرات به هم می‌رسند فاصله‌شان از مرکزِ مثلث دیگر صفر نیست و در این مدت هم θ مقداری محدود دارد.

یک راه، ساده‌یِ دیگر آن است که مسأله را در چارچوبِ دوّاری که همراه مثلث با سرعتِ زاویه‌ای‌ِ $\dot{\theta}$ می‌چرخد بررسی کنیم. در این چارچوب مثلث دیگر نمی‌چرخد بل‌که فقط کوچک می‌شود و هر ذره رویِ خطِ راستی با سرعتِ $v\cos\alpha$ به مرکزِ مثلث که ثابت است نزدیک می‌شود.

براي مثلثِ متساوي‌الاضلاع $\alpha = \pi/3$. اگر به جاي سه ذره، N ذره داشتيم که رويِ رأس‌هايِ يک N ضلعي‌ي منتظم باشند، کافی است در معادله‌هايِ (26—28) به جايِ α، π/N قرار دهيم.

$$
\begin{aligned}
r(t) &= d_N - v\cos(\pi/N)\,t, \\
\theta(t) &= \tan(\pi/N)\,\ln\left(\frac{d_N}{d_N - v\cos(\pi/N)\,t}\right) \\
T &= \frac{d_N}{v\cos(\pi/N)},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

d_N فاصله‌يِ رأس تا مرکزِ چندضلعي‌يِ منتظم است.

4 يادداشت‌ها

[1] R. P. Feynman; *Surely you are joking Mr. Feynman*, W. W. Norton & Company, 1985

[2] G. S. Ranganath; *Why is an ant's trial straight? problems of pursuit*, Resonance (1996) 74.

[3] E. Lucas; Nouvelles Correspondance Mathematique **3** (1877)

[4] H. Brocard; Nouvelles Correspondance Mathematique **6** (1880)

[5] A. Watton, D. W. Kydon; *Analytical aspects of the N-bug problem*, Amer. J. Phys. **37** (1969) 220-221.

[6] F. Behroozi, R. Gagnon; *Cyclic pursuit in a plane*, J. Math Phys. **20** (1979) 2212-2216, T. Richardson; *Non-mutual captures in cyclic pursuit*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence **31** (2001),127-146, T. Richardson; *Stable polygons of cyclic pursuit*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence **31** (2001),147-172

[7] J. A. Marshall, M. E. Broucke, B. A. Francis; *Formation of vehicles in cyclic pursuit*, IEEE Transactions of automatic control **49** (2004) 1963-1974.

اسامی ِ خاص

a) Feynman, b) Lucas

مسئله ی ۴

سه ذره که رویِ سه رأسِ مثلثی به ابعادِ $AB = l_1$، $BC = l_2$، و $CA = l_3$ هستند با سرعت‌هایِ v_1، v_2، و v_3 هم‌دیگر را تعقیب می‌کنند. فرض کنید که مثلثی که از این ذره‌ها در هر لحظه ساخته می‌شود متشابه با مثلثِ اولیه باشد و این ذره‌ها پس از مدت‌زمانِ T در نقطه‌ای مثلِ O به هم می‌رسند. فاصله‌یِ ذره‌ها تا نقطه‌یِ O را r_1، r_2، و r_3 بگیرید. فرض کنید ذره‌یِ **1** در ابتدا روی محورِ x بوده.

الف) θ_i ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

ب) نسبتِ $\frac{r_i v_j}{r_j v_i}$ در هر لحظه چه‌قدر است؟

ج) θ را بر حسبِ v_1/v_2 و زاویه‌یِ B به دست آورید.

د) نسبتِ v_1/v_2 را بر حسبِ l_1، l_2، l_3، و A، B، و C زوایایِ مثلث به دست آورید.

ه) r_1 را بر حسبِ زمان به دست آورید.