دنباله‌ها و سریها ۹

تکنیکهای این فصل برای محاسبات عددی لازمند. به کمک آنها می‌توان اعدادی چون e و π یا مقادیر توابعی‌مثل $\ln x$ و $\sin x$ را باهر **دقت مطلوب** تقریب نمود. این کار بانمایش عدد یا مقدار تابع به صورت سری ***نامتناهی***، یعنی مجموعی با بی‌نهایت جمله، صورت می‌گیرد.

برای ریختن پایه‌های سریهای نامتناهی، ابتدا مبحث‌مربوط به آن، یعنی ***دنباله‌های نامتناهی*** (ر.ک. بخش ۱.۹)، را درنظر می‌گیریم؛ اینها را می‌توان توابعی‌درنظرگرفت که فقط بر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تعریف شده‌اند. بخشهای ۲.۹ تا ۵.۹ به بررسی اصولی سریهای نامتناهی که جملاتشان **عدد** هستند اختصاص دارد. مطالعهٔ ***سریهای‌توانی*** بعداز آن صورت می‌گیرد (ر.ک. بخشهای ۶.۹ تا ۷.۹)؛ این سریها، که جملاتشان ***تابع‌اند***، را می‌توان چندجمله‌ایهایی با بی‌نهایت جمله و با درجهٔ بدلخواه بزرگ درنظر گرفت. گاهی اوقات ممکن است تابعی مجموع یک‌سری توانی معلوم شناخته شود. اما اهمیت بیشتر آن توانایی شروع از تابع معلوم f **ونمایش‌آن به صورت مجموعی** از یک سری توانی است. در بخش ۸.۹ نشان می‌دهیم که اگر f خوشرفتار باشد، f را می‌توان مجموعی‌ازیک چندجمله‌ای و یک "جملهٔ باقیمانده" نوشت، و در بخش ۹.۹ یک قدم جلوتر رفته و نشان می‌دهیم که f را می‌توان به صورت یک سری توانی، به نام ***سری تیلور***[1] f، نوشت، و این درحالات متداولی صورت می‌گیرد که درآنها وقتی درجهٔ چندجمله‌ای تقریب‌ساز بدلخواه بزرگ شود، جملهٔ باقیمانده به صفر نزدیک می‌شود.

در بین تکنیکهای محاسبه‌ای قوبی که در این فصل عرضه می‌شوند، **روش نیوتن** برای حل معادلهٔ $f(x) = 0$ (ر.ک. بخش ۱۰.۹) شایستهٔ ذکر است نه فقط به خاطر خودش

---

1. *Taylor*

بلکه به عنوان مثال مهمی از **روشهای تکراری** که در سراسر ریاضیات کاربسته به‌کار می‌رود .

۹.۱ دنباله‌های نامتناهی

فرض‌کنیم به هر عدد صحیح مثبت n عدد حقیقی a_n مربوط شده باشد . در این صورت. لیست

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

با زیرنویس که از چپ به راست به ترتیب صعودی نوشته شده یک *دنباله‌ٔ نامتناهی*،یافقط *دنباله*، نام دارد . اعداد آمده در لیست **جملات** دنباله نام دارند . لذا ، a_1 جملهٔ اول دنباله ، a_2 جملهٔ دوم ، و همین‌طور a_n جملهٔ n م دنباله است ، که پس از آن همانطورکه سه نقطهٔ دوم نشان می‌دهند ، دنباله تا بی‌نهایت می‌رود . جملهٔ n م a_n **جملهٔ عمومی** دنباله نیز نامیده می‌شود .

البته ، فرض است که جملات یک دنباله به‌طور منحصر به فرد معین هستند ، به این معنی که یک و فقط یک‌جمله با زیرنویس داده‌شده وجود دارد . بنابراین ، از دیدگاه صوری، یک دنباله چیزی جز حالت خاصی از تابع نیست؛ یعنی ، تابعی که قلمروش مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت است . به زبانی کمترصوری ، یک دنباله به محض دانستن "قانون‌تشکیل" آن ، یعنی تابع $a_n = f(n)$ که ما را از زیرنویس n (که نقش متغیر مستقل را دارد) به‌جملهٔ عمومی a_n می‌رساند ، کاملا" معین می‌شود .

مثال ۱ . جملات دوم ، پنجم ، و هفتم دنباله با جملهٔ عمومی

$$a_n = 2^n$$

را بیابید .

حل . با انتخاب $n = 2, 5, 7$ داریم

$$a_2 = 2^2 = 4, \qquad a_5 = 2^5 = 32, \qquad a_7 = 2^7 = 128.$$

این دنباله را می‌توان به صورت

$$2, 4, \ldots, 2^n, \ldots,$$

یا ،با تفصیل بیشتر ، به صورت

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^n, \ldots$$

نوشت .

راه دیگر نمایش دنباله‌ٔ (۱) نوشتن جملهٔ عمومی a_n آن بین دو ابروست[1] :

$$\{a_n\}. \qquad (1')$$

مثلاً ، در این نماد ، دنبالهٔ $2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$ شکل اختصاری $\{2^n\}$ را به خود می‌گیرد .

مثال ۲ . چهار جملهٔ اول دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ را بنویسید .

حل . چون $(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^4 = 1$ ، چهار جملهٔ اول عبارتند از $-1, 1, -1, 1$ با علایم " متناوب " . دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ ، مثل هر دنبالهٔ نامتناهی ، بی‌نهایت جمله دارد ، ولی فقط دو مقدار ، یعنی 1 یا -1 ، را می‌گیرد . این با دنبالهٔ $\{2^n\}$ ، که هیچ دو جمله‌اش مقدار یکسان ندارند ، فرق دارد .

مثال ۳ . هفت جملهٔ اول دنبالهٔ $\{n!\}$ ، که جملهٔ عمومی‌اش n فاکتوریل است (ر . ک . صفحهٔ ۲۲۵) ، را بنویسید .

حل . به آسانی معلوم می‌شود که هفت جملهٔ اول عبارتند از

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,$$

که از آنها معلوم می‌شود که جملات این دنباله سریعاً " بسیار بزرگ می‌شوند . با محاسبهٔ حاصل‌ضرب 11 عدد صحیح مثبت اولیه معلوم می‌شود که جملهٔ یازدهم عبارت است از $11! = 39,916,800$.

مثال ۴ . متوسط پنج جملهٔ اول دنبالهٔ $\{b_n\}$ را درصورتی بیابید که

$$b_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$$

حل . توجه کنید که در اینجا دنباله را به‌جای $\{a_n\}$ با $\{b_n\}$ نشان می‌دهیم . (نماد دنباله‌ها به اندازهٔ توابع آزادی انتخاب دارد .) متوسط پنج جملهٔ اول عبارت است از

---

۱ . *قرائن از خلط دنبالهٔ* $\{a_n\}$ *و مجموعه‌ای که تنها عنصرش* a_n *است جلوگیری خواهد کرد .*

$$\frac{1}{5}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5\right) = \frac{39}{20}.$$

فرمولهای بازگشتی. مثل مثالهای قبل، قانون تشکیل یک دنباله اغلب با فرمول صریحی برای جملهٔ عمومی‌آن داده می‌شود. یک دنباله را می‌توان **به‌طور *بازگشتی*** نیز تعریف‌کرد؛ یعنی، با فرمولی به‌نام **فرمول *بازگشتی*** که نشان‌می‌دهد چگونه هرجمله‌را می‌توان‌از جملات با زیرنویسهای پایین‌تر به دست آورد.

مثال ۵. فرض‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$a_1 = 1 \text{ ، اگر } n \geq 2 \text{ ، } a_n = a_{n-1} + n \qquad (۲)$$

در این صورت،

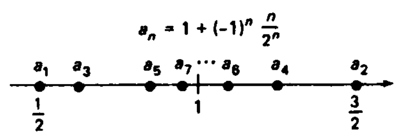
$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 2 = 3, \quad a_3 = a_2 + 3 = 6, \quad a_4 = a_3 + 4 = 10, \ldots,$$

و دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملات $1, 3, 6, 10, \ldots$ شروع می‌شود. به عنوان تمرین، تحقیق‌کنیدکه $\{a_n\}$ رامی‌توان‌به‌طورصریح (غیربازگشتی) به‌صورت‌دنباله‌ای‌باجملهٔ‌عمومی $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ تعریف کرد.

مثال ۶. چون $n! = n(n-1)!$، دنبالهٔ $\{a_n\} = \{n!\}$ همان دنبالهٔ تعریف شده بافرمول بازگشتی زیر است:

$$a_1 = 1 \text{ ، اگر } n \geq 2 \text{ ، } a_n = na_{n-1}$$

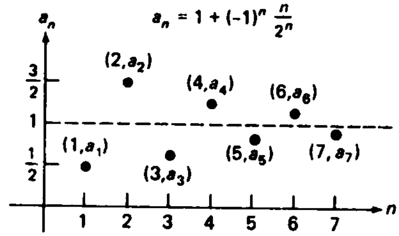
دنباله‌ها را می‌توان به دوطریق رسم کرد، یکی با رسم جملات $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ به عنوان‌نقاط‌بر خط‌اعداد، یا با رسم جفتهای مرتب $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$، به ازای هر جمله یکی، به صورت نقاطی در صفحهٔ مختصات. در شکلهای ۱ و ۲، این دو



شکل ۱

طریق نمایش دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ نموده شده است. طریقهٔ اول ساده‌تر

است ، ولی طریقهٔ دوم بر این تأکید دارد که دنباله‌ها تابع می‌باشند .



شکل ۲

حد یک دنباله . همانطور که تابع $f(x)$ می‌تواند با $x \to \infty$ به حدی نزدیک شود ،دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌تـوانـد با $n \to \infty$ به حدی نزدیک گردد . فرض کنیم در دنبالـهٔ $\{a_n\}$ جملـهٔ عمومی a_n را بتوان باانتخاب n به‌قدر کافی بزرگ هرقدر بخواهیم به عدد L نزدیک‌کرد . در این صورت ، گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ (وقتی n به‌بی‌نهایت نزدیک شود) *به حد L نزدیک می‌شود یا دارای حد L است* ، و می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \tag{۳}$$

یا

$$a_n \to L \ \ (\text{وقتی } n \to \infty) \tag{۳'}$$

معنی دقیق

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

این است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عدد $A > 0$ را طوری یافت که به ازای هر $x > A$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، و بـه‌همین نحو معنی دقیق (۳) این است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عددصحیح $N > 0$ راطوری‌یافت‌که‌به‌ازای‌هر $n > N$ ، یعنی‌به‌ازای $n = N + 1, N + 2, \ldots$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$. به‌بیان‌معادل ، $a_n \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، بازهٔ $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ شامل تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ است که زیرنویسهای آن از عدد صحیح N ، که البته N تابع ε است ، بزرگتر می‌باشد . بخصوص ، با انتخاب $\varepsilon = 1$ ، می‌بینیم که هرگاه $a_n \to L$ آنگاه تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ با زیرنویسهای متجاوز از عدد صحیحی مانند N دربازهٔ $(L - 1, L + 1)$ قـرار دارند؛ از این امر در برهان قضیهٔ ۱ زیر استفاده خواهد شد .

دنباله‌های همگرا و واگرا . اگر دنباله‌ای حد متناهی داشته باشد ، گوییم دنباله *همگرا* (به

این حد) است؛ در غیر این صورت ، گوییم دنباله *واگرا* می‌باشد . دو نوع دنبالهٔ واگرا موجودند که توجه خاص می‌خواهند . گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *واگرا* به ∞ است ، و می‌نویسیم $a_n \to \infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n > C$ ؛ به همین نحو ، گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *واگرا* بـه $-\infty$ است ، و می‌نویسیم $a_n \to -\infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n < -C$. البته ، یک دنباله می‌تواندبه طرق دیگری نیز واگرا باشد (ر.ک. مثال ۹) .

مثال ۷. دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1/n\}$ همگرا با حد 0 است . در واقع ، فرض کنیم به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده ، N عدد صحیحی بزرگتر از $1/\varepsilon$ باشد . در این صورت ، به ازای هر $n > N$ ،

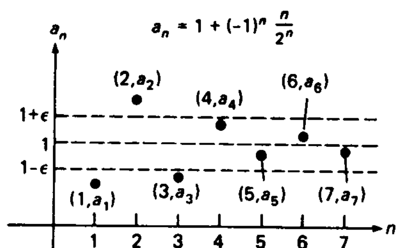
$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

زیرا به ازای هر چنین n ،

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

به‌عنوان تمرین ، از استدلال مشابهی استفاده کرده نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\} = \{(n-1)/n\}$ همگرا با حد 1 می‌باشد .

مثال ۸. از شکل ۳ (تعدیلی از شکل ۲) معلوم می‌شود که بـازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ شامل



شکل ۳

تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ جز تعدادی متناهی از آنهاست . به‌عبارت دیگر ، به ازای بـازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به‌طوری‌که a_n به ازای هر $n > N$ در بازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ قراردارد . لذا ، بدون آنکه نگران یافتن مقدار

N نظیر به ε داده شده باشیم ، می‌توانیم (به‌طور صوری) نتیجه بگیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{n}{2^n}\right]=1$$

در واقع ، این نتیجه را باید با برهانی صوری تأیید کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۵۳) .

مثال ۹ . همانطور که استدلال زیر نشان می‌دهد ، دنبالهٔ $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ واگراست . حد پیشنهادی L را اختیار کرده ، و ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که بازهٔ $I=(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ شامل لااقل یکی از نقاط 1 و -1 نباشد . واضح است که این همواره میسر است حتی اگر $L=1$ یا $L=-1$. چون به ازای n زوج $(-1)^n=1$ ، تمام جملات a_n با n زوج خارج بازهٔ I که شامل 1 نیست قرار دارند ، و چون به ازای n فرد $(-1)^n=-1$ ، تمام جملات a_n با n فرد خارج بازهٔ غیرشامل -1 واقع می‌باشند .لذا ، در هر حال ، دنباله نمی‌تواند همگرا باشد .

مثال ۱۰ . دنبالهٔ $\{2^n\}$ واگرا به ∞ است ، زیرا 2^n به ازای n به‌قدر کافی بزرگ بدلخواه بزرگ است . در واقع ، به ازای هر $C>0$ می‌توان با انتخاب $n>\log_2 C$ نامساوی $2^n>C$ را داشت .

مثال ۱۱ . در مثال ۸ ، صفحهٔ ۵۲۹ ، نشان داده شد که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

که در آن $e=2.7182818\ldots$ پایهٔ لگاریتمهای طبیعی‌است . این یعنی به ازای‌هر $\varepsilon>0$ عددی‌مانند $A>0$ هست به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x متجاوز از A ،

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$$

اما در این صورت واضح است که به ازای هر عدد صحیح n متجاوز از A ،

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon$$

و درنتیجه ، همانطور که در صفحهٔ ۵۲۹ پیش‌بینی شد ،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

به‌طورکلی، اگر تابع f بر $[1, \infty)$ چنان تعریف شده باشد که وقتی $x \to \infty$ ، $f(x) \to L$ ، اساساً همین استدلال نشان می‌دهد که وقتی $n \to \infty$ ، $f(n) \to L$ ، بخصوص، از فرمول (۱۵) ، صفحهٔ ۵۲۹ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

که درآن a عدد دلخواهی می‌باشد.

تبصره. فرض‌کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که فقط در تعدادی متناهی جمله فرق دارند. در این صورت، به آسانی معلوم می‌شود که یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا با حد یکسانند یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو واگرا می‌باشند.

دنباله‌های کراندار و بی‌کران. گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *کراندار* است اگر عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر n ، $-C \le a_n \le C$ ، یا معادلاً، $|a_n| \le C$ ،ولی اگر چنین عددی موجود نباشد، گوییم $\{a_n\}$ *بی‌کران* می‌باشد. (اینها مشابه تعاریف نظیر برای توابع صفحهٔ ۵۰۳ هستند.) مثلاً، دنباله‌های $\{1/n\}$ و $\{(-1)^n\}$ هر دو کراندارند، زیرا به ازای هر n ، $|1/n| \le 1$ و $|(-1)^n| \le 1$. از آن سو، دنباله‌های $\{n\}$ و $\{n!\}$ هر دو بی‌کرانند، زیرا اگر n به‌قدر کافی بزرگ‌باشد، n و $n!$ از عدد مثبت داده‌شدهٔ C بزرگترند (توجه کنید که اگر $n > 2$ ، $n! > n$). همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، در مطالعهٔ دنباله‌های همگرا مفهوم دنبالهٔ کراندار به نحو بسیار طبیعی ظاهر خواهد شد.

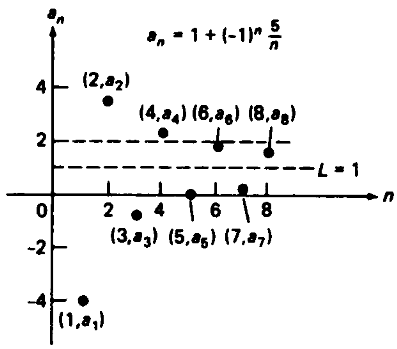
قضیهٔ ۱ (کرانداری دنبالهٔ همگرا). *هر دنبالهٔ همگرا کراندار است.*

برهان. فرض‌کنیم $\{a_n\}$ یک‌دنبالهٔ همگرا با حد L باشد. در این صورت، عدد صحیحی مانند N هست به طوری که تمام جملات $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ ، یعنی تمام جملات دنباله با زیرنویس بیشتر از N ، در بازهٔ $(L-1, L+1)$ قرار دارند. با انتخاب $C > 0$ به قدر کافی بزرگ، می‌توان بازهٔ $[-C, C]$ با نقطهٔ میانی مبداء را طوری گرفت که نه‌فقط بازهٔ $(L-1, L+1)$ با تمام جملات $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ بلکه‌تمام جملات‌باقیمانده $a_1, a_2, \ldots, a_N$ را نیز دربرداشته باشد. اما، دراین صورت، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $|a_n| \le C$ ؛ در نتیجه، دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار است.

مثال ۱۲ . در شکل ۴ ساخت انجام شده در برهان قضیهٔ ۱ برای دنباله‌ای توضیح داده شده که جملهٔ عمومی‌اش عبارت است از

$$a_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{n}.$$

در اینجا $L = 1$ ، $N = 5$ ، و هر $C \geq 4$ کارساز است .



شکل ۴

چون یک دنبالهٔ همگرا باید کراندار باشد ، *یک دنبالهٔ بی‌کران باید واگرا باشد* . مثلاً ، دنباله‌های بی‌کران $\{n\}$ و $\{n!\}$ واگرا هستند . از آن سو ، یک دنبالهٔ کراندار لازم نیست همگرا باشد . در واقع ، قبلاً دیدیم که دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ هم‌کراندار وهم‌واگراست .

قواعد حدی برای دنباله‌ها . اعمال جبری بر دنباله‌ها همانند این‌اعمال بر توابع است؛ یعنی ، مجموع ، تفاضل ، حاصل‌ضرب ، و خارج قسمت دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی با جملات عمومی $a_n + b_n$ ، $a_n - b_n$ ، $a_n b_n$ ، و a_n/b_n می‌باشند . فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا بوده ، و

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = M. \tag{۴}$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M, \tag{۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M, \tag{۶}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LM, \quad (۷)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}, \quad (۸)$$

مشروط بر اینکه در آخرین فرمول $M \neq 0$. (ممکن است تعدادی متناهی جمله از دنباله‌ء $\{a_n/b_n\}$ دارای مخرج صفر بوده و درنتیجه وجود نداشته باشند ، ولی به ازای n بـه قدر کافی بزرگ ، $b_n \neq 0$ ،چون‌وقتی $n \to \infty$ ، $b_n \to M \neq 0$) به‌عبارت‌دیگر، مجموع $\{a_n + b_n\}$ تفاضل $\{a_n - b_n\}$ ،حاصل‌ضرب $\{a_n b_n\}$ ، یا خارج‌قسمت $\{a_n/b_n\}$ دودنباله‌ء همگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ خود یک دنباله‌ء همگراست که حدش مساوی مجموع ، تفاضل ، حاصل‌ضرب ، یا خارج قسمت حدود $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ می‌باشد . قواعد (۵) تا (۸) شبیه قواعد نظیر برای‌حدودتوابع اند، و اساسا" به همان روش ثابت می‌شوند .

اختیاری . به عنوان مثالی از طرز کار ، با استفاده از تعدیل جزئی استدلال به کاررفته در اثبات قضیه‌ء ۴ ، صفحه‌ء ۱۳۰، نشان می‌دهیم که رابطه‌ء (۴) رابطه‌ء (۵) را ایجاب می‌کند. فرض‌کنیم (۴) برقرار باشد . در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان اعداد صحیح و مثبت N_a و N_b را طوری‌یافت‌که به‌ازای‌هر $N > N_a$ ، $|a_n - L| < \varepsilon/2$ وبه‌ازای‌هر $n > N_b$ $|b_n - M| < \varepsilon/2$. بنابراین ،طبق نامساوی‌مثلثی ،به ازای هر $n > N = \max\{N_a, N_b\}$ ،

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\le |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

اما این به " زبان ε, N " یعنی رابطه‌ء (۵) برقرار است .

به ازای هر عدد c ،*دنباله‌ء ثابت* $\{c\}$ که تمام جملاتش‌مساوی c است ،بوضوح‌همگرا با حد c است؛ درنتیجه ،

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

از رابطه‌ء (۷) معلوم می‌شود که هرگاه $\{a_n\}$ همگرا به L باشد ، آنگاه $\{ca_n\}$ همگرا به cL است .

مثال ۱۳ . $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+1}$ را حساب کنید .

حل . به کمک مثال ۷ و چند قاعدهٔ فوق ، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}2}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

یک راه غیرصوریتر محاسبهٔ این حد ، که از بسیاری مراحل دوری می‌کند ، ملاحظهٔ این‌امر است که به ازای n بزرگ ، $3n+1\approx 3n$ ؛ درنتیجه ،

$$\frac{2n}{3n+1}\approx\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3},$$

که در آن تقریب با رفتن $n\to\infty$ بهتر خواهد شد .

دنباله‌های یکنوا . گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ **صعودی** است اگر به ازای هر n ، $a_n\le a_{n+1}$ ، و **نزولی** است اگر به‌ازای هر n ، $a_n\ge a_{n+1}$. منظور از یک دنبالهٔ **یکنوا** یعنی دنباله‌ای‌که صعودی یا نزولی باشد . در اینجا به جای $\le$ و $\ge$ علایم $>$ و $<$ را قرار داده و ، مثل تعاریف نظیر برای توابع (ر.ک. صفحهٔ ۸۰) ، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را *اکیدا* " صعودی نامیم اگر به ازای هر n ، $a_n<a_{n+1}$ ، و *اکیدا* " نزولی نامیم‌اگر به‌ازای هر n ، $a_n>a_{n+1}$ (البته دنباله‌های اکیدا " صعودی و اکیدا " نزولی‌یکنوایند) . این تعاریف ما را برای نتیجهٔ‌اساسی زیر آماده می‌سازد .

قضیهٔ ۲ (همگرایی دنبالهٔ یکنوای کراندار) . هر *دنبالهٔ* یکنوای *کراندار* همگراست .

برهان *(اختیاری)* . فرض‌کنیم $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار باشد . در این صورت ، بنابر کرانداری $\{a_n\}$ ، عددی مانند C وجود دارد به طوری که به‌ازای‌هر $n=1,2,\ldots$ ، $a_n\le C$. یک چنین عدد C یک *کران بالایی* دنبالهٔ $\{a_n\}$ نام دارد . البته ، بی‌نهایت کران بالایی از $\{a_n\}$ وجود دارند ؛ و در واقع ، هر عدد بزرگتر از C نیز یک کران بالایی است ، ولی یکی از این کرانهای بالایی ، که ما آن را با L نشان می‌دهیم ، **کوچکترین** می‌باشد.[1] اما ، به ازای هر $\varepsilon>0$ باید جمله‌ای از دنبالهٔ $\{a_n\}$ ، مثلا " a_N ، وجود

---

۱ . در فرض وجود L به‌خاصیت‌اساسی دستگاه اعداد حقیقی ، به نام تمامیت ،تکیه‌می‌کنیم که می‌گوید هر مجموعه از اعداد حقیقی دارای‌کران‌بالایی کوچکترین کران بالایی‌دارد . برای مطالب بیشتر در باب تمامیت ، ر.ک. کتابی در باب حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته .

داشته باشد به طوری که

$$L-\varepsilon < a_N \le L,$$

زیرا در غیر این صورت عدد $L-\varepsilon$ ، که از L کوچکتر است، یک کران بالایی $\{a_n\}$ می‌شود که با تعریف L متناقض می‌باشد. اما، در این صورت، چون $\{a_n\}$ صعودی است (و L یک کران بالایی است)، به ازای هر $n > N$ خواهیم داشت

$$L-\varepsilon < a_N \le a_n \le L$$

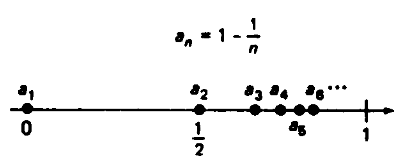
بنابراین، به ازای هر $n > N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ ؛ یعنی، $\{a_n\}$ همگرا با حد L می‌باشد.

از آن سو، فرض کنیم $\{a_n\}$ یک‌دنبالهٔ نزولی کراندار باشد. دراین‌صورت، $\{-a_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار می‌باشد. لذا، همانطور که اینک ثابت شد، $\{-a_n\}$ همگراست با حدی که به $-L$ نشانش می‌دهیم. اما، در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -(-L) = L,$$

درنتیجه، $\{a_n\}$ نیز همگرا با حد L می‌باشد.

معنی شهودی قضیهٔ ۲ واضح است. هرگاه جملات یک دنباله به بازه‌ای‌متناهی‌محدود شده باشند و نتوانند باافزایش n کوچک‌شوند، آنگاه باید همه درنقطه‌ای مانند L "اجتماع کنند" یا "انباشته شوند"، که این حد دنباله می‌باشد. شکل ۵ این پدیده را برای‌دنبالهٔ صعودی کراندار $\{a_n\} = \{1-(1/n)\}$ توضیح می‌دهد، که عدد $L=1$ را به عنوان‌کوچکترین کران بالایی و نیز حدش دارد.



شکل ۵

مثال ۱۴. همگرایی دنبالهٔ $\{r^n\}$ را بررسی کنید، که در آن r عدد حقیقی‌دلخواهی‌است.

حل. ابتدا فرض کنیم $0 < r < 1$. در این صورت، دنبالهٔ $\{r^n\}$ کراندار است، زیرا به ازای هر n ، $0 < r^n < 1$ ، و نیز ("اکیدا") نزولی است، زیرا به ازای هر n ، $r^{n+1} = r(r^n) < r^n$. از اینرو، بنابر قضیهٔ ۲، $\{r^n\}$ همگرا به همان حد L است. برای تعیین

L ، ملاحظه می‌کنیم که

$$L = \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = \lim_{n \to \infty} r(r^n) = r \lim_{n \to \infty} r^n = rL.$$

چون $r \neq 1$ ، این فقط‌وقتی ممکن است که $L = 0$ ؛ و لذا ،

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (0 < r < 1). \tag{۹}$$

حال فرض‌کنیم $-1 < r < 0$. پس $0 < |r| < 1$ ؛ درنتیجه ، بنابر (۹) با $|r|$ به جای r ، $\{|r|^n\}$ همگرا به 0 می‌باشد . اما ، در این صورت ، $\{r^n\}$ نیز همگرا به 0 است ، زیرا $|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n$ را می‌توان به ازای n به قدر کافی بزرگ هرقدر بخواهیم کوچک کرد . پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < 0). \tag{۹'}$$

از تلفیق این با (۹) و این امر واضح که دنباله‌ٔ $\{0^n\} = \{0\}$ همگرا به 0 است ، درمی‌یابیم که

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < 1).$$

لذا ، اگر $-1 < r < 1$ یا معادلاً $|r| < 1$ ، $\{r^n\}$ همگرا به 0 می‌باشد .

اگر $r = 1$ ، $\{r^n\}$ دنباله‌ٔ ثابت $\{1\}$ است ، که بوضوح همگرا به 1 می‌باشد ، حال آنکه اگر $r = -1$ ، $\{r^n\}$ دنباله‌ٔ واگرای $\{(-1)^n\}$ می‌باشد . هرگاه $r > 1$ ، آنگاه، به کمک قضیهٔ دوجمله‌ای (ر.ک. صفحهٔ ۲۲۷) ،

$$r^n = [1 + (r-1)]^n \geq 1 + n(r-1) > n(r-1),$$

درنتیجه ، $\{r^n\}$ واگرا به ∞ است . در واقع ، اگر $C > 0$ ، به ازای هر $n > C/(r-1)$ ، $r^n > C$ ؛ به صورت دیگر ، هرگاه $r > 1$ ، آنگاه وقتی $x \to \infty$ ، $r^x \to \infty$ (ر.ک. صفحهٔ ۵۰۸) ، که ایجاب می‌کند که وقتی $n \to \infty$ ، $r^n \to \infty$. هرگاه $r < -1$ ، آنگاه $|r| > 1$ و $\{|r|^n\}$ واگرا به ∞ است . اما ، در این صورت ،

$$r^n = (-|r|)^n = (-1)^n |r|^n$$

درصورت زوج بودن n مقدار مثبت بدلخواه بزرگ ، و در صورت فرد بودن n مقدار منفی به دلخواه بزرگ خواهد گرفت .بنابراین ،اگر $r < -1$ ، $\{r^n\}$ حد ندارد . لذا ، بالاخره ، *دنبالهٔ $\{r^n\}$ همگرا به 0 است اگر $|r| < 1$ و همگرا به 1 است اگر $r = 1$ ، حال آنکه واگرا به ∞ است اگر $r > 1$ و حد ندارد اگر $r \leq -1$.*

اغلب برای زیرنویس متغیر جملهٔ عمومی یک دنباله حرفی غیر از n انتخاب می‌شود که معمولا" از حروف وسط الفبا می‌باشد . مثلا" ، $\{2^k\}, \{2^j\}, \{2^i\}$ سه طریق دیگر برای نمایش دنبالهٔ $\{2^n\}$ مثل مثال ۱ است .

فرض کنیم $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ یک دنباله باشد . همچنین ،

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_i}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots)$$

یک " زیر دنباله " باشد که از $\{a_n\}$ با حذف تعدادی متناهی یا نامتناهی جمله به دست آمده است . در این صورت ، اگر $\{a_n\}$ همگرا با حد L باشد ، $\{a_{n_i}\}$ نیز باید همگرا به L باشد (چرا ؟) . بخصوص، زیردنبالهٔ $\{a_{n+N}\}$ حاصل از $\{a_n\}$ به وسیلهٔ حذف N جملهٔ اول باید همگرا به L باشد ، زیردنبالهٔ $\{a_{2k}\}$ مرکب از جملات با اندیس زوج باید به L همگرا باشد ، و غیره . در همین وضع ، اگر $\{a_n\}$ دو زیردنبالهٔ همگرا به حدود مختلف داشته باشد باید واگرا باشد .

مثال ۱۵ . ما قبلا" از مثال ۹ می‌دانیم که دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست . این را می‌توان با توجه به اینکه جملات با اندیس زوج همگرا به 1 هستند ولی جملات با اندیس فرد همگرا به -1 می‌باشند نیز به دست آورد . درواقع ،

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1,$$

حال آنکه

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1.$$

مسائل

شش جملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی داده شده را نوشته و حد L را (در صورت وجود) پیدا کنید . (حالت $L = \infty$ یا $L = -\infty$ مجاز است .)

۱. $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

۲. $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

۳. $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

۴. $a_n = (-1)^{n-1}n^2$

۵. $a_n = n^{(-1)^n}$

۶. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

۷. $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n}$

۸. $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

۹. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n}$

۱۰. $a_n = \underbrace{0.333\ldots3}_{n \text{ رقم}}$

۱۱. $a_n = \sqrt{2}$ تا n رقم اعشار

۱۲. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۳. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۴. $a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ n^2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۵. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{3}$

۱۶. $a_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

۱۷. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

۱۸. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

۱۹. $a_n = \ln \dfrac{1}{n}$

۲۰. $a_n = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{1}{n}$

جملهٔ عمومی a_n دنبالهٔ داده‌شده را نوشته و حد L دنباله‌را (در صورت وجود) درصورتی بیابید که قانون تشکیل ناشی از چند جملهٔ اول دنباله برای تمام جملات برقرار باشد .

۲۱. $0, 3, 8, 15, \ldots$

۲۲. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

۲۳. $-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \ldots$

۲۴. $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots$

۲۵. $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}, \frac{1}{28}, \ldots$

۲۶. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

۲۷. $5, 0, -5, -10, \ldots$

۲۸. $-5, 10, -15, 20, \ldots$

۲۹. جملات دنبالهٔ $\{(-\frac{1}{2})^n\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصلهٔ کمتر از 10^{-6} از حدش قرار دارند ؟

۳۰. جملات دنبالهٔ $\{(2n-1)/(2-3n)\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصلهٔ کمتر از 10^{-3} از حدش قرار دارند؟

شش جملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی را بنویسید.

۳۱. $a_1 = 0$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = 3a_{n-1} + 2$

۳۲. $a_1 = -1$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = 1 - 4a_{n-1}$

۳۳. $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$

۳۴. $a_1 = 3$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = \frac{2}{a_{n-1} + 1}$

۳۵. دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$ ؛ اگر $n \geq 3$ ، $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

به *دنبالهٔ فیبوناچی*[1] معروف است. ده جملهٔ اول $\{a_n\}$ را بنویسید.

۳۶. کودکی یک نسل خرگوش به وجود می‌آورد به این ترتیب که یک جفت خرگوش نوزاد، یکی نر و دیگری ماده، را در یک آغل بزرگ رها می‌کند. فرض کنید 1 ماه طول بکشد تا یک جفت خرگوش نوزاد بالغ شوند و 1 ماه دیگر طول بکشد تا یک جفت دیگر خرگوش تولید کنند. با این فرض که هیچ خرگوشی نمیرد و هر زایمان از یک نر و یک ماده تشکیل شده باشد و در روز اول ماه جدید صورت گیرد، نشان دهید که تعداد جفت خرگوشها پس از n ماه در آغل جملهٔ n م دنبالهٔ فیبوناچی می‌باشد.

۳۷. با شروع از دنبالهٔ $\{a_n\}$، فرض کنید $\{s_n\}$ دنبالهٔ دیگری باشد که با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است.

$s_1 = a_1$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $s_n = s_{n-1} + a_n$

عبارتی برای s_n بنویسید که فقط مستلزم جملات $\{a_n\}$ باشد.

درحالتی که $a_n = 2n - 1$ ، فرمول ساده‌ای برای s_n بنویسید.

۳۸. آیا کوچکترین کران بالایی دنبالهٔ $\{1 + (-1)^n/n\}$ همان حد آن است؟ جواب خود را توضیح دهید.

دنبالهٔ کرانداری بیابید که

۳۹. دارای بزرگترین جمله بوده ولی دارای کوچکترین جمله نباشد.

---

1. *Fibonacci*

۴۰. دارای بزرگترین جمله و کوچکترین جمله باشد.

۴۱. نه بزرگترین جمله داشته باشد نه کوچکترین جمله

۴۲. دارای کوچکترین جمله بوده و دارای بزرگترین جمله نباشد.

۴۳. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار باشد (بخصوص، یک دنبالهٔ همگرا)، و $\{b_n\}$ دنبالهای همگرا به صفر باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$ نیز همگرا به‌صفراست.

۴۴. نشان دهید که دو دنباله با جملات عمومی a_n و

$$b_n = a_n + (n-1)(n-2)\cdots(n-N)$$

دارای N جملهٔ اول یکسان بوده ولی در جملات بعد باهم تفاوت دارند. (لذا، دانستن تعدادی متناهی جملهٔ اولیه هرگز نمی‌تواند یک دنباله را به‌طور منحصر به فرد معین سازد.)

۴۵. کدام جملات دو دنبالهٔ $\{n^3 - 6n^2\}$ و $\{6 - 11n\}$ باهم یکی هستند؟

۴۶. از دنباله‌های مسائل ۱ تا ۲۸ کدامها صعودی‌اند؟ کدامها نزولی می‌باشند؟

راهنمایی. اگر $a_n = f(n)$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ درصورتی (اکیدا") صعودی است که به ازای هر $x \geq 1$، $df(x)/dx > 0$ و درصورتی (اکیدا") نزولی است که به ازای هر $x \geq 1$، $df(x)/dx < 0$. دلیلش را توضیح دهید.

فرض کنید r عددی حقیقی باشد. حدود زیر را حساب کنید.

۴۷. $(r \neq -1)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1+r^n}$

۴۸. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1+r^{2n}}$

۴۹. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!}$

دو دنبالهٔ واگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ چنان بیابید که

۵۰. $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد.

۵۱. $\{a_nb_n\}$ همگرا باشد.

۵۲. $\{a_n/b_n\}$ همگرا باشد.

۵۳. فرض کنید c عدد دلخواهی بزرگتر از 1 باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{c^n} = 0.$$

بخصوص، با استفاده از این حد مثال ۸ را تحقیق نمایید.

۵۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا با حد یکسان L بوده، و دنبالهٔ $\{c_n\}$ چنان باشد که به‌ازای‌هر n (یا به‌ازای‌تمام n های به قدر کافی‌بزرگ) $a_n \leq c_n \leq b_n$.

نشان دهید که $\{c_n\}$ نیز همگرا به L می‌باشد.

راهنمایی. این شبیه برای دنباله‌های قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ۷۶۳است (قضیهٔساندویچ).

۵۵. نشان دهید هرگاه وقتی $n \to \infty$ ، $a_n \to L$ و f تابع پیوسته‌ای در L باشد، آنگاه وقتی $n \to \infty$ ، $f(a_n) \to f(L)$.

۵۶. به کمک مسئلهٔ قبل، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

که در آن c عدد مثبت دلخواهی است. همچنین، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

با استفاده از مشتقگیری، بزرگترین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی زیر را پیدا نمایید.

۵۷. $a_n = \sqrt[n]{n}$

۵۸. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 2500}$

۵۹. $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$

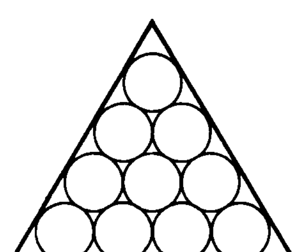
۶۰. پس از اثبات صعودی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^n\}$ و نزولی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^{n+1}\}$، نشان دهید که

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad \text{(یک)}$$

نقص استفاده از این نامساوی مضاعف در تخمین عدد e چیست؟

۶۱. فرض کنید k_n قرص مستدیر همنهشت n سطر را اشغال‌کرده و در یک مثلث متساوی الاضلاع به شکل ۶ محاط شده باشد؛ درنتیجه،

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1 + 2 = 3, \quad k_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \ldots$$



شکل ۶

فرض کنید A مساحت مثلث بوده و A_n مساحت کل k_n قرص باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

۶۲. فرض کنید

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx.$$

در این صورت، بنابر فرمولهای ثابت شده در مسئلهٔ ۱۳، صفحهٔ ۶۱۴،

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}.$$

نشان دهید که وقتی $n\to\infty$، $I_{2n+1}/I_{2n}\to 1$؛ ودرنتیجه،

$$\pi = 2\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}. \qquad \text{(دو)}$$

این فرمول جالب برای π در ۱۶۵۰ توسط جان والیس[1]، ریاضیدان انگلیسی، کشف شد. **راهنمایی.** از مسئلهٔ ۵۴ استفاده نمایید.

۲.۹ سریهای نامتناهی

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ نامتناهی باشد. در این صورت، عبارت

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (۱)$$

یا به‌طور فشرده‌تر،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (۱')$$

یک سری *نامتناهی*، یا فقط یک سری، نامیده می‌شود. در نوشتن (۱′)، از تعدیل نماد سیگما که در صفحهٔ ۳۶۱ معرفی شد، که در آن حد جمعبندی بالایی به جای عددی صحیح ∞ است، استفاده می‌کنیم. اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *جملات* سری نامیده می‌شوند (همچنین، جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ نام دارند)، و a_n جملهٔ n ام یا جملهٔ عمومی نامیده می‌شود.

1. John Wallis.

سریهای همگرا و واگرا. در این مرحله سریهای (۱) یا (′۱) عدد نبوده بلکه صرفاً " یک عبارت صوری می‌باشند، زیرا هنوز در معنی مجموع *بی‌نهایت* جمله، مفهومی که هیچ نقشی در ریاضیات مقدماتی ندارد، تصمیمی نگرفته‌ایم. برای انتساب معنی به یک چنین "مجموع نامتناهی" به صورت زیر عمل می‌کنیم. مجموع n جملهٔ اول سری (۱) یا (′۱) عدد کاملاً" تعریف شدهٔ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

است به نام **مجموع جزئی** n م سری. (بالاخره، ابهامی در معنی مجموع تعداد *متناهی* جمله وجود ندارد.) مجموعهای جزئی متوالی دنبالهٔ زیر را تشکیل می‌دهند:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$$

فرض کنیم این دنباله همگرا با حد

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad (۲)$$

باشد که در بخش ۱.۹ تعریف شد. در این صورت، گوییم سری (۱) یا (′۱) *همگرا* (یا *واگرا*) است، و به آن **مجموع** S را نسبت می‌دهیم. اما، اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ واگرا باشد، یعنی $\{s_n\}$ به حدی متناهی نزدیک نشود، گوییم سری *واگرا*، بدون مجموع، می‌باشد. اگر سری همگرا با مجموع S باشد، می‌نویسیم

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S,$$

یا، با نماد سیگما،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

اندیس جمعبندی، درست مثل یک مجموع متناهی، یک " اندیس ظاهری " است در این معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی خواهد بود. مثلاً"،

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{p=1}^{\infty} a_p$$

همه یک سری را نشان می‌دهند. این ملاحظات به ما اجازهٔ نوشتن (۲) را به شکل زیر می‌دهند:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

که کاملا" شبیه تعریف

$$\int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_c^u f(x)\,dx$$

یک انتگرال مجازی همگرا با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران است .

فرایند یافتن مجموع یک سری همگرا جمعبندی سری نام دارد ، و لوآنکه عملا "عبارت است از محاسبهٔ حد دنبالهٔ مجموعهای‌جزئی‌سری . اگر m عدد صحیح مثبتی (نه‌لزوما "1) باشد ، سری

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

یعنی

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + \cdots,$$

یعنی ، سری حاصل از (۱) با حذف $m-1$ جملهٔ اولیه . گاهی اوقات $m=0$ ؛ یعنـی ، سری نامتناهی با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود ، مثل سری مهمی که در مثال زیر مطرح می‌شود .

سری هندسی

مثال ۱ . در همگرایی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \qquad (۲)$$

که در آن r و $a \neq 0$ ثابتهای دلخواهی می‌باشند ، بحث کنید .

حل . توجه کنید که‌سری هندسی با جملهٔ a شروع شده ، و هر جمله از ضرب جملهٔ قبل در عدد r ، به نام‌قدرنسبت سری ، به دست می‌آید . مجموع n جملهٔ اول سری هندسی ، یعنی مجموع جزئی n م ، عبارت است از

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}.$$

برای به دست آوردن فرمول ساده‌ای جهت s_n ، ملاحظه می‌کنیم که

$$s_n - rs_n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n).$$

که در آن همهٔ جملات جز دو تا حذف شده باقی می‌ماند

$$s_n - rs_n = a - ar^n.$$

پس نتیجه می‌شود که $s_n(1-r) = a(1-r^n)$ ، یا معادلاً

$$s_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n) \qquad (r \neq 1).$$

هرگاه $|r| < 1$ ، آنگاه، بنابر مثال ۱۴، صفحهٔ ۷۹۷، وقتی $n \to \infty$ ، $r^n \to 0$ ؛ ولذا،

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad (|r| < 1).$$

بنابر همان مثال، $\{r^n\}$ به ازای $|r| > 1$ واگراست؛ و درنتیجه، همین امر برای دنبالهٔ $\{s_n\}$ درست است، و سری (۳) واگرا می‌باشد. اگر $r = 1$ ، سری به صورت‌زیردرمی‌آید:

$$a + a + a + a + \cdots,$$

حال آنکه اگر $r = -1$ ، سری شکل زیر را خواهد داشت:

$$a - a + a - a + \cdots.$$

در حالت اول $s_n = na$ ، ولی در حالت دوم

$$s_n = \begin{cases} a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

ولی در هر دو حالت $\{s_n\}$ واگراست؛ و درنتیجه، سری (۳) نیز چنین است. لذا، به‌طور خلاصه، *سری هندسی (۳) همگرا با مجموع* $a/(1-r)$ *است اگر* $-1 < r < 1$ *و درغیراین صورت واگرا خواهد بود.*

مثال ۲. با اختیار $a = 1, r = \frac{1}{2}$ در سری هندسی، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

حال آنکه با انتخاب $a = 1, r = -\frac{1}{2}$ به دست‌می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

مثال ۳. سری هندسی به ازای $a = 3, r = \frac{1}{10}$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10}\right)^n = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{3},$$

نتیجه‌ای که اصلا " تعجب‌آور نیست ، زیرا این مجموع چیزی جز عدد اعشاری‌مکررنمی‌باشد:

$$3.333\ldots = 3.\overline{3} = \frac{10}{3}.$$

(رابطهٔ بین اعشاریها و سریهای نامتناهی ، و بخصوص بین اعشاریهای مکرروسری هندسی، دربخش بعددنبال‌خواهد شد .)از آن سو ، به ازای $a = \frac{1}{10}, r = 3$ ، سری هندسی‌واگرای‌زیر به دست می‌آید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{3^n}{10} + \cdots$$

مثال ۴ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

همگراست ، و مجموع آن را بیابید .

حل . با بسط جملهٔ عمومی برحسب کسرهای جزئی ، معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

و درنتیجه ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

لذا ، مجموع جزئی n م سری عبارت است از

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

چون تمام جملات مجموع سمت راست جز جملهٔ اول و آخر 0 هستند ، مجموع " تسوی هم رفته " ، به

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

تحویل می‌شود . بنابراین ،

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

که از آن نتیجه می‌شود که سری داده شده همگرا با مجموع 1 می‌باشد .

مثال ۵ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

واگراست .

حل . چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

مجموع جزئی n م

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

سری توی هم رفته و به

$$s_n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

تحویل می‌شود . اما

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty,$$

و درنتیجه ، سری داده شده واگرا می‌باشد .

سری توافقی

مثال ۶ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \tag{۴}$$

که به سری *توافقی* معروف است ، واگرا می‌باشد .

حل . فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری توافقی باشد . در این صورت ،

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&\quad +\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{\text{جمله } 2^{k-1}}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^k} = 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{\text{جمله } k} = 1+\frac{k}{2}
\end{aligned}
$$

(با استفاده از این امر که‌به ازای $j = 1, 2, \ldots, 2^{k-2}$ ، $2^{k-1}+j < 2^k$). مثلاً" ،

$$s_4 = s_{2^2} > 1+\frac{2}{2} = 2, \qquad s_8 = s_{2^3} > 1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \qquad s_{16} = s_{2^4} > 1+\frac{4}{2} = 3,$$

و غیره. لذا، دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ شامل جملات بدلخواه بزرگ است؛ ودرواقع بـه ازای $C > 0$ و هـر $k > 2C - 2$ داریم $s_{2^k} > C$. بنابراین، $\{s_n\}$ واگراست؛ و در نتیجه، سری توافقی (۴) نیز چنین می‌باشد.

تبصره. می‌توان نشان داد که مجموع جزئی n م سری توافقی با تقریب‌عالی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$s_n \approx C + \ln n,$$

که در آن $C = 0.5772156649\ldots$ عددی‌است‌که به *ثابت اویلر* معروف است وخطای‌تقریب وقتـی $n \to \infty$ ، سریعا" به 0 نزدیک می‌گردد. با استفاده از این فرمول، معلوم می‌شودکه

$$s_{1000} \approx 7.48, \qquad s_{10,000} \approx 9.79,$$
$$s_{100,000} \approx 12.09, \qquad s_{1,000,000} \approx 14.39.$$

لذا، میزان واگرایی سری توافقی به نحو خارق‌العاده‌ای کند است.

شرط لازم برای همگرایی. حال شرط ساده‌ای به دست می‌آوریم که یک سری برای‌همگرابودن باید در آن صدق نماید.

قضیهٔ ۳ (شرط لازم برای همگرایی یک سری) . هرگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{۵}$$

همگرا باشد ، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{۶}$$

به بیان معادل ، سری درصورتی واگراست که

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \tag{۶'}$$

(در این شکل ، قضیه اغلب " آزمون جملهٔ n م برای واگرایی " نام دارد) .

برهان . واضح است که

$$a_n = s_{n+1} - s_n,$$

که در آن $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مجموع جزئی n م سری می‌باشد . فرض کنیم سری همگرا با مجموع S باشد . در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = S - S = 0.$$

مثال ۷ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1} + \cdots$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

با امتحان اینکه هر سری هندسی همگرا در شرط (۶) صدق می‌کند ، می‌بینیم که

$$\lim_{n\to\infty} ar^n = 0 \quad \text{،} \quad \text{اگر } -1 < r < 1$$

به همین نحو ، سری همگرای مثال ۴ در شرط زیر صدق می‌کند :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

شرطی که قضیهٔ ۳ آن را لازم دارد . لیکن ، عکس قضیهٔ ۳ برقرار نیست ؛ یعنی ، **برقراری (۶) همگرایی سری (۵) را ایجاب نمی‌کند** . مثلاً ، سری توافقی واگراست و لو اینکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

و سری مثال ۵ واگراست و لواینکه

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

به زبان منطق ، (۶) یک‌شرط لازم ولی نه کافی برای همگرایی سری (۵) است . بخش اعظم این فصل به بررسی " آزمونهای‌همگرایی " اختصاص دارد . اینها شرایطی کافی برای‌همگرایی اند؛ یعنی ، شرایطی که همگرایی یک سری را تضمین می‌کنند .

اعمال جبری بر سریها . طبق تعریف ، حاصل ضرب سری $\sum a_n$ در عدد c سری $\sum ca_n$ است ، و مجموع یا تفاضل دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری $\sum (a_n + b_n)$ یا $\sum (a_n - b_n)$ می‌باشد (علامت "ساده شدهٔ " $\sum$ اختصاری است برای $\sum_{n=m}^{\infty}$ ، که در آن عدد صحیح نامنفی m اندیس جمعبندی پایینی است که در اینجا مساوی 1 می‌باشد) . این تعاریف چه سریهای $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند یا نه به کار می‌روند ولی هرگاه همگرا و به ترتیب با مجموعهای S و S' باشند ،آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} (ca_1 + \cdots + ca_n) = c \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) = cS,$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} [(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} [(a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_1 + \cdots + b_n) = S + S',\end{aligned}$$

و به همین‌نحو ، $\sum (a_n - b_n) = S - S'$. توجه کنید که در اینجا واژهٔ " مجموع " به دو معنی به کار رفته است ، یکی مجموع یک سری همگرا که عدد است و دیگری مجموع صوری $\sum (a_n + b_n)$ دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ که‌ممکن‌است‌همگرا نباشد ،ولی معنی موردنظر همواره از قراین معلوم خواهد بود .

مثال ۸ . دو سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

همگرا و به ترتیب با مجموعهای 2 و $\frac{2}{3}$ می‌باشند (ر.ک. مثال ۲) . بنابراین ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

و این را می‌توان مستقیما" باتوجه به

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2+0+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$
$$=2+2\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

امتحان نمود . به همین نحو ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

و به‌طورکلی ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2A+\frac{2}{3}B.$$

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دوسری به ترتیب با مجموعهای جزئی n م s_n و t_n بوده ، و سریها فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق داشته باشند؛ درنتیجه ، به ازای هر n متجاوز از عدد صحیح N ، $a_n=b_n$. در این صورت ،

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n+\cdots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+\cdots+b_N+a_{N+1}+\cdots+a_n+\cdots,$$

و درنتیجه ، اگر $n>N$ ،

$$s_n-t_n=(a_1+\cdots+a_N)-(b_1+\cdots+b_N)=s_N-t_N,$$

یا معادلا"

$$s_n=t_n+c,$$

که در آن $c=s_N-t_N$ عدد ثابتی می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که دو دنباله‌ٔ $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ هر دو همگرا یا هر دو واگرایند؛ و درنتیجه ، همین امر برای دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ درست است . به عبارت دیگر ، دو سری که فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا . به عنوان تمرین ، نشان دهید که هرگاه در یک سری تعدادی متناهی جمله حذف شود یا تعدادی‌متناهی جملهٔ اضافی (در مواضع دلخواه) درج

گردد ، آنگاه سری به دست آمده همگراست اگر سری اصلی همگرا باشد و واگراست اگر سری اصلی واگرا باشد . البته ، در حالت همگرایی ، مجموع سری به دست آمده عموما" با مجموع سری اصلی متفاوت می‌باشد .

باقیماندهٔ یک سری . بخصوص ، فرض کنید n جملهٔ اول سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \tag{۷}$$

را حذف کرده ، سری جدید

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots \tag{۷'}$$

را به دست آورده باشیم . در این صورت ، اگر (۷) همگرا باشد ، سری (۷') نیز چنین است . مجموع (۷') را با R_n نشان داده ، و آن را ***باقیمانده پس از n جملهٔ*** سری اصلی (۷) می‌نامیم . فرض کنیم S مجموع (۷) باشد . در این صورت ،

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + R_n,$$

و درنتیجه ،

$$\lim_{n \to \infty} R_n = S - \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S - S = 0.$$

لذا ، *باقیمانده پس از n جملهٔ یک سری همگرا با رفتن $n \to \infty$ همگرا به 0 می‌باشد* .

مثال ۹ . باقیمانده پس از n جملهٔ سری هندسی همگرای

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = 2$$

عبارت است از

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots\right) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

درنتیجه ،

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

تغییر اندیس جمعبندی. در مثال اخیر می‌توانستیم باقیمانده را به شکل زیر بنویسیم:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

که در آن n حد پایینی جمعبندی است. به‌طورکلی، همواره می‌توان اندیس جملهٔ عمومی یک سری نامتناهی را با تغییر نظیر در حد پایینی جمعبندی تغییر داد. مثلاً،

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n, \quad \sum_{n=3}^{\infty} ar^{n-3}, \quad \sum_{n=-2}^{\infty} ar^{n+2}$$

سه طریقهٔ مختلف نوشتن سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

است، ولی طرق دوم و سوم در مقایسه با طریقهٔ اول، که طریقهٔ طبیعی نوشتن سری‌است، مطلوب نمی‌باشند. البته، هرطور که سری را بنویسیم، مجموع جزئی n م آن یکی است، و در این حالت، همانطور که مثال ۱ نشان داده، عبارت است از

$$s_n = \frac{a}{1-r}(1 - r^n) \qquad (r \neq 1).$$

مسائل

پنج مجموع جزئی اول سریهای زیر را حساب کنید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} 3$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

۸. $\sum_{n=3}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$

۹. فرض کنید a_n جملهٔ n م سری $\sum a_n$ و s_n مجموع جزئی n م آن باشد. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را برحسب دنبالهٔ $\{s_n\}$ بیان نمایید.

سریی را بنویسید که مجموع جزئی n م آن به صورت زیر باشد.

۱۰. $s_n = \frac{n+2}{n+1}$

۱۱. $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

۱۲. $s_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

اگر سری داده شده همگرا باشد ، مجموعش را پیدا کنید . در غیر این صورت ، واگرایی آن را نام ببرید . درحالتی که چندجملهٔ اولیهٔ سری داده شده است ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد .

۱۳. $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\cdots$

۱۴. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

۱۶. $1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{8}-1-\frac{1}{16}+\cdots$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty}4\left(-\frac{5}{6}\right)^n$

۱۸. $\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n/2}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

۲۰. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln n}$

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{3}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

۲۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$

۲۴. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

۲۵. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\cdots$

۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty}e^n\pi^{1-n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan n]$

باقیماندهٔ R_n پس از n جملهٔ سری داده شده را یافته ، و تحقیق کنید وقتی $n\to\infty$ ، $R_n\to 0$.

۲۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e-1}{e^{n+1}}$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}$

۳۲. نشان دهید هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا باشد ، آنگاه مجموع دوسری $\sum(a_n+b_n)$ واگراست .

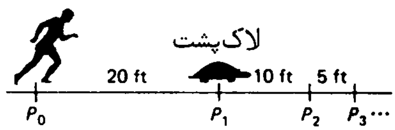
۳۳. آیا عددی مانند r هست که به ازای آن سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)$$

همگرا باشد ؟

۳۴. فرض کنید s_n مجموع جزئی n م یک‌سری همگرا باشد. نشان دهید که برای‌هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $m > N$ و $n > N$ ، $|s_m - s_n| < \varepsilon$. با استفاده از این امر، برهان دیگری برای واگرایی سری توافقی (۴) به دست آورید.

۳۵. آشیل در تعقیب یک‌لاک‌پشت‌در امتداد جاده‌ای می‌دود. در لحظهٔ شروع لاک‌پشت طبق شکل ۷ ، در فاصلهٔ 20 ft از وی قرار دارد؛ آشیل ابتدا در P_0 و لاک‌پشت‌ابتدا



شکل ۷

لاک‌پشت در P_1 است. فرض کنیدآشیل باسرعت 20 ft/sec و لاک‌پشت با سرعت 10 ft/sec بدود.[1] در این صورت ، 1 sec طول می‌کشد تا آشیل از P_0 به P_1 برسد، ولی در این اثنا لاک‌پشت 10 ft بیشتر تا موضع P_2 رفته است. برای رفتن‌آشیل‌از P_1 به P_2 به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ sec دیگر طول می‌کشد، و در این مدت‌لاک‌پشت 5 ft دیگر تا موضع P_3 پیموده است، و همین طور تا بی‌نهایت. چون آشیل همواره در جهت اشغال آخرین موضع‌لاک‌پشت‌است، به‌نظر می‌رسد که، با آنکه سرعت آشیل دوبرابرلاک‌پشت است، هرگز نمی‌تواند به‌لاک‌پشت‌رسیده از او بگذرد. این پارادکس منسوب به زنو[2] ایلیایی، فیلسوف یونانی است که پنج قرن قبل از میلاد می‌زیسته است. بااستدلالی مقدماتی، نشان دهید که آشیل پس از 2 sec عملاً" ازلاک‌پشت‌جلو می‌زند، و سپس پارادکس زنو را با جمعبندی سری هندسی متناسبی باطل نمایید.

۳۶. فرض کنید در مسئلهٔ قبل‌لاک‌پشت‌بتواند با هر سرعتی کمتر از 20 ft/sec بدود، و تصمیم بگیرد وقتی آشیل از P_0 به P_1 می‌رود با سرعت $20(\frac{1}{2}) = 10$ ft/sec ، وقتی‌آشیل

---

۱. این سرعت برای لاک پشت زیاد است، ولی محاسبات را ساده خواهد کرد.

2. Zeno

از P_1 به P_2 می‌رود با سرعت $20(\frac{2}{3}) = 13\frac{1}{3}$ ft/sec ، وقتی آشیل از P_2 به P_3 می‌رود با سرعت $20(\frac{3}{4}) = 15$ ft/sec ، و در حالت کلی وقتی آشیل از P_{n-1} به P_n می‌رود ، با سرعت $20n/(n+1)$ ft/sec حرکت کند . نشان دهید که در این حالت ، باآنکه‌لاک‌پشت هرگز به سرعت آشیل نمی‌دود ، آشیل هیچگاه ازلاک‌پشت سبقت نخواهد گرفت !

۳۷ . یک توپ لاستیکی پس از افتادن از ارتفاع 45 ft روی یک پیاده‌رو سفت بالا و پایین می‌رود . الاستیسیتهٔ توپ چنان است که در هر برگشت به دوسوم ارتفاع قبلی خود می‌رسد . مسافت پیموده شده توسط توپ وقتی به اوج ششمین برگشت خود رسیده چقدر است ؟ مسافت پیموده شده توسط توپ تا وقتی به حال سکون درمی‌آید چقدر است ؟

۳۸ . وقتی پول صرف خرید کالا و دریافت سرویس‌می‌شود ،آنهایی که پول دریافت‌می‌کنند بخشی از آن را خرج می‌کنند ، آنهایی که دوبار دریافت می‌کنند قسمتی از آن را باز می‌گردانند و کار همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد . فرض کنید خرج اولیه D دلار بوده ، و هر دریافت‌کننده $100c$ درصد آن را خرج‌و $100s$ درصد را پس‌انداز‌می‌کند . کمیات c و s ،که به *تمایل حاشیه‌ای به‌مصرف* و *تمایل حاشیه‌ای به پس‌انداز*معروفند ، هر دو اعدادی بین 0 و 1 می‌باشند ؛ واضح است که $c + s = 1$ ، زیرا پول یا مصرف می‌شود (خرج می‌شود) یا پس‌انداز می‌گردد . پس درآمد اجتماع کلا" (در مورد تمام کشور ، درآمد ملی) مآلا" به اندازهٔ kD دلار افزایش می‌یابد ، که در آن k ضریب نام دارد . تمام این مفاهیم کلیدی اقتصاد در مقیاس بزرگ از اقتصاددان انگلیسی ، جان میناردکینز[1] (۱۸۸۳ – ۱۹۴۰) است . نشان دهیدکه $k = 1/s > 1$ ، که به " اثر چندگانه " منجرمی‌شود که در اقتصاد کینزی‌اهمیتی*اساسی دارد . (مثلا"* هرگاه $s = 0.2$ ، آنگاه $k = 5$ ؛ درنتیجه ، $1 خرج یا سرمایه‌گذاری منجر به افزایش $5 درآمد ملی می‌شود .)

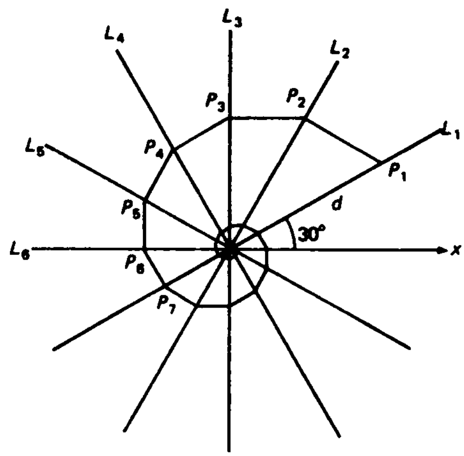
۳۹ . حسن و حسین که ابتدا 250 ft از هم فاصله دارند به سوی یکدیگر ، هر یک با سرعت 10 ft/sec ، می‌دونـد . در همین مدت سگی بین حسن و حسین با سرعت 15 ft/sec این طرف و آن طرف می‌دود . وقتی حسن و حسین به هم برسند ، سگ چه مسافتی‌را دویده است ؟ این مسئله را به روش مقدماتی و جمعبندی یک سری مناسب‌حل‌نمایید .

۴۰ . مسئلهٔ قبل را مجددا" به دو راه و با این فرض حل کنید که حسین به جای‌دویدن‌به سوی حسن باسرعت 10 ft/sec باسرعت 5 ft/sec از وی دور شود .

1. John Maynard Keynes

۴۱. عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار یک ساعت وقت ظهر برهم منطبق‌اند. زمان (تا نزدیکترین ثانیه) را بیابید که عقربه‌ها مجددا" برهم منطبق شوند. این را به دو طریق انجام دهید.

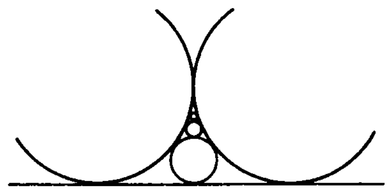
۴۲. همانند شکل ۸، فرض کنید $L_1, L_2, \ldots, L_6$ شش خط باشند به طوری که L_1 با محور مثبت x زاویهٔ $30°$ ساخته و زاویهٔ بین هر جفت خط مجاور نیز $30°$ باشد (توجه‌کنید



شکل ۸

که L_3 بر محور y و L_6 بر محور x منطبق است). از نقطهٔ P_1 بر L_1 به فاصلهٔ d تا مبداء عمودی بر L_2 فرود می‌آوریم تا آن را در نقطهٔ P_2 قطع کند، از P_2 عمودی بر L_3 فرود می‌آوریم تا آن را در P_3 قطع کند، و همین‌طور تا آخر (خط بعد از L_6 مجددا" L_1 است). پاره‌خطهای متوالی $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_{n+1}, \ldots$ مسیر چند ضلعی مارپیچی $P_1P_2 \ldots P_n \ldots$ راتشکیل می‌دهند که حول مبداء پیچیده و در عین حال به سمت آن منقبض می‌شود. نشان دهید که این مسیر به طول $(2 + \sqrt{3})d$ می‌باشد.

۴۳. شکل ۹ ناحیهٔ محدود به دو دایرهٔ مماس به شعاع 1 و یک خط مماس بر هر دو آنها



شکل ۹

را نشان می‌دهد. دنباله‌ای از دوایر کوچکتر را به شیوهٔ نموده شده محاط می‌کنیم. از هندسه می‌دانیم که اقطار این دوایر جملات یک سری‌اند که مجموعشان 1 می‌باشد. این سری چیست؟

۴۴. نشان دهید که سری $\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + \cdots$ به ازای هر θ واگراست، ولی سری $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta + \cdots$ واگراست مگر آنکه $\theta = k\pi$، که در آن k عددی صحیح است.

راهنمایی. از اتحادهای

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta,$$
$$\sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos\theta - \cos n\theta \sin\theta,$$
$$\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$$

استفاده کنید.

۴۵. تقی فشارخون دارد، و دکترش یک سری معالجات با دارو را تجویز کرده است. تقی اولین نوبت را در لحظهٔ $t = 0$ می‌خورد، و نوبتهای بعدی در لحظات $t = T, 2T, \ldots, nT, \ldots$ می‌باشند. در هر نوبت غلظت دارو درخون وی به سرعت به میزان C_0 بالا می‌رود، ولی در همان حال بدنش برای حذف دارو وارد عمل می‌شود. فرض کنید $C = C(t)$ غلظت دارو در خون تقی در لحظهٔ t باشد. در این صورت، مثل مسئلهٔ ۲۵، صفحهٔ ۵۴۵، C در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

صدق می‌کند، که در آن $k > 0$ ثابت حذف می‌باشد. نشان دهید که C مآلاً بین سطح

$$R = \frac{C_0}{e^{kT} - 1},$$

به نام *غلظت مانده‌ای*، و سطح $R + C_0$ نوسان می‌کند. فرض کنید دکتر بخواهد مطمئن شود که غلظت هیچگاه زیر سطح C_e که در آن دارو موءثر است و نیز هیچگاه بالای سطح C_s که در آن دارو بی‌مصرف می‌ماند قرار نمی‌گیرد. نشان دهید که این با انتخاب

$$C_0 = C_s - C_e, \qquad T = \frac{1}{k}\ln\frac{C_s}{C_e}$$

صورت خواهد گرفت.

۳.۹ سریهای نامنفی؛ آزمونهای مقایسه و آزمون انتگرال

سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

را *نامنفی* گوییم اگر تمام جملات آن نامنفی باشند؛ یعنی، اگر به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$، $a_n \geq 0$. هر مجموع جزئی $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ از سری‌نامنفی $\sum a_n$ مجموع‌تعدادی متناهی عدد نامنفی است؛ و درنتیجه، خود عددی نامنفی می‌باشد. به‌علاوه، $\{s_n\}$ یک دنباله‌ٔ صعودی است، زیرا

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

این نکات ما را فوراً به حکم زیر می‌رساند که در بررسی سریهای نامنفی از اساس می‌باشد.

قضیهٔ ۴ (محک همگرایی برای سریهای نامنفی). *سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست‌اگردنبالهٔ $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی داشته باشد؛ یعنی، عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر n،*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C$$

اگر این عدد موجود نباشد، سری واگرا خواهد بود.

برهان. هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی داشته باشد، آنگاه $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار است. اما در این صورت، طبق قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۷۹۶، $\{s_n\}$ همگراست؛ و درنتیجه، $\sum a_n$ نیز چنین است. از آن‌سو، هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی نداشته باشد، آنگاه s_n به‌ازای هر n به قدرکافی بزرگ از $C > 0$ داده شده متجاوز است؛ درنتیجه، وقتی $n \to \infty$، $s_n \to \infty$. در این‌حالت $\{s_n\}$ واگراست؛ و لذا، $\sum a_n$ نیز چنین است.

اعشاریها و سریهای نامتناهی

مثال ۱. اعشاری نامختوم $0.c_1c_2\ldots c_n\ldots$ که در آن به ازای هر n، $0 \leq c_n \leq 9$، اختصاری است برای سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots \qquad (1)$$

نشان دهید که هرچنین سری همگراست، و این تاکنون به‌طور تلویحی فرض شده بود.

حل . سری (۱) نامنفی است؛ و لذا ، طبق قضیهٔ ۴ ، همگرایی آن درصورتی‌ثابت می‌شود که بتوان نشان داد که دنبالهٔ $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی دارد . اما این درست است ، زیرا به ازای هر n ،

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \le \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= \frac{9}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right] = \frac{9}{10}\,\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

مثال ۲ . فرض کنید $0.a_1 \dots a_m\overline{b_1 \dots b_n}\ (\neq 0)$ یک اعشاری مکرر باشد ، که در آن قالب ارقام $b_1 \dots b_n$ به طول n که روی آن خط‌کشیده شده به‌طور نامحدود تکرار خواهد یافت . (مثلا" ، در اعشاری $0.517\overline{29} = 0.517292929\dots$ داریم $a_1 = 5$ ، $a_2 = 1, a_3 = 7,$ $b_1 = 2, b_2 = 9$.) نشان‌دهید ، همانطورکه‌درصفحهٔ ۷ پیش‌بینی شد ، هر چنین اعشاری نمایش یک عدد گویاست که با خارج‌قسمت

$$\frac{p}{q} \qquad (q \neq 0)$$

دو عدد صحیح p و q تعریف می‌شود .

حل . فرض کنیم $A = a_1 \dots a_m$ و $B = b_1 \dots b_n$ ، که اینها رشته‌هایی از ارقام هستند نه حاصل ضرب ا در این صورت ، A و B اعداد صحیح مثبتی می‌باشند و ، پس از جمعبندی سری هندسی همگرا ،

$$\begin{aligned} 0.a_1 \dots a_m\overline{b_1 \dots b_n} &= \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m}\sum_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{1}{10^n}\right)^k = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)^k \\ &= \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}} = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^m}\,\frac{1}{10^n - 1}. \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$0.a_1 \dots a_m\overline{b_1 \dots b_n} = \frac{A(10^n - 1) + B}{10^m(10^n - 1)}, \tag{۲}$$

و اعشاری مکرر داده شده به صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح مثبت ، یعنی

$p = A(10^{n-1} - 1) + B$ و $q = 10^m(10^n - 1)$ ،بیان شده است . این خارج‌قسمت لزوما" تحویل‌ناپذیر نیست .

مثال ۳. عـــدد گویای نموده شده با اعشاری مکرر $4.3\overline{21}$ را به صورت تحویل‌ناپذیر پیدا کنید .

حل . با نوشتن $4.3\overline{21}$ به صورت $4 + 0.3\overline{21}$ روش مثال قبل را بر اعشاری مکرر $0.3\overline{21}$ اعمال نمایید . در اینجا $A = 3, B = 21, m = 1, n = 2$ و فرمـول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$0.3\overline{21} = \frac{3(10^2 - 1) + 21}{10(10^2 - 1)} = \frac{3(99) + 21}{10(99)} = \frac{318}{990},$$

که در آن آخرین کسر تحویل‌ناپذیر نیست ، زیرا صورت و مخرج هر دو (دقیقا") بر 2 و نیز بر 3 بخشپذیرند . بنابراین ،

$$0.3\overline{21} = \frac{106}{330} = \frac{53}{165},$$

که اکنون تحویل‌ناپذیر است ، زیرا 53 بر 3 ، 5 ، یا 11 بخشپذیر نیست ، عـوامـل اول عبارتنداز $165 = 3(5)(11)$. لذا ، بالاخره ،

$$4.3\overline{21} = 4 + \frac{53}{165} = \frac{713}{165},$$

که هنوز تحویل‌ناپذیر می‌باشد (چرا ؟)

باوجود موفقیتی که در بخش ۲.۹ در جمعبندی سریهای خاص داشتیم ، معمولا" یافتن مجموع دقیق یک سری همگرا مشکل یا غیرممکن است . خوشبختانه اگر همگرایی یـک سری به‌قدر کافی " سریع " باشد ، مجموع آن را می‌توان با جمعبندی تعـداد نسبتا" کمی از جملات اولیهٔ سری به‌خوبی تقریب کرد . بااینحال ، پیش از سعی در یافتن‌مجموع دقیق یا تقریبی یک سری باید ابتدا از همگرایی آن مطمئن‌بودا سری توافقی واگرا دراینجا اخطار است ، زیرا واگرایی آن چندان روشن نیست .

آزمون مقایسه . لذا ، هدف بعدی ما ارائهٔ آزمونهایی است که همگرایی یک‌سری را مشخص نماید . از قضیهٔ ۴ استفاده کرده ، آزمونی به دست می‌آوریم که در آن رفتار همگرایی یک سری رفتار همگرایی سری دیگر را معین می‌کند . این " آزمون مقایسه " مشابه دقیق قضیهٔ

۶ ، صفحهٔ ۶۸۲ ، برای انتگرالهای مجازی است .

قضیهٔ ۵ (آزمون مقایسه) . *فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی باشند به طوری‌که به ازای n های به قدر کافی بزرگ ، $a_n \le b_n$. در این صورت ،*
(یک) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد ، $\sum a_n$ نیز چنین است ؛
(دو) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد ، $\sum b_n$ نیز چنین است .

برهان . می‌توان فرض کرد که به ازای هر n ، $a_n \le b_n$ ، زیرا همانطور که در صفحهٔ ۸۱۳ نشان دادیم ، دو سری که فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا . فرض کنیم مجموعهای جزئی n م $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ترتیب s_n و t_n باشند . در این صورت ، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \le b_1 + \cdots + b_n = t_n$$

هرگاه $\sum b_n$ همگرا با مجموع T باشد ، آنگاه به ازای هر n ، $t_n \le T$ (چرا ؟) ؛ و لذا ، چون $s_n \le t_n$ بـه ازای هر n خواهیم داشت $s_n \le T$ ؛ درنتیجه ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ دارای کران بالایی می‌باشد . پس از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود که $\sum a_n$ نیز همگراست . درهمین‌وضع هرگاه $\sum a_n$ واگرا باشد ، آنگاه $\sum b_n$ نیز چنین است زیرا ، همانطور که لحظه‌ای‌پیش نشان داده شد ، همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب خواهد کرد .

گوییم سری $\sum b_n$ بر سری $\sum a_n$ *مسلط‌است* اگر به ازای n های به قدر کافی بـزرگ، $b_n \ge a_n$. لذا ،طبق قضیهٔ ۵ ،**هر سری تحت تسلط یک سری همگرا خود همگراست ولی هـر سری مسلط بر یک سری واگرا خود واگراست** . در اینجا ، مثل جاهای دیگر در این بخـش، سری مورد نظر نامنفی گرفته می‌شود .

مثال ۴ . سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (۳)$$

(بنابرتعریف ، $0! = 1$) تحت تسلط سری

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \qquad (۴)$$

است . برای‌تحقیق این‌امر ملاحظه‌می‌کنیم که‌اگرچه‌نامساوی $n! > 2^n$ بـه ازای $n = 0, 1, 2, 3$ برقرار نیست ، به ازای هـر $n \ge 4$ برقرار است ؛ درنتیجه ، هر جملهٔ سری (۳) باشروع از

جملهٔ پنجم از جملهٔ نظیردرسری (۴)کوچکتراست .اماسری (۴) همگراست ، زیرا از جملهٔ دوم به بعد یک سری هندسی باقدرنسبت $\frac{1}{2}$ است؛و در واقع ، مجموع آن 3 می‌باشد . بنابر این ، طبق آزمون مقایسه ، سری (۳) نیز همگراست و ، همانطور که در مثال ۵ ، صفحهٔ ۸۷۰ نشان داده شده است ، مجموعش مساوی e می‌باشد .

مثال ۵ . فرض کنیم p عددی کوچکتر از 1 باشد . چون $1^p = 1$ و n^x یک تابع صعودی‌از x به ازای $n \geq 2$ است ، داریم

$$n^p \leq n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

یا معادلا"

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

بنابراین ، اگر $p < 1$ ، سری

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

به نام سری p ، بر سری توافقی واگرای

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

مسلط است؛ و درنتیجه ، بنابر قضیهٔ ۵ ، خود واگرا می‌باشد . در واقع ، سری p واگـراست اگر $p \leq 1$ ، زیرا به ازای $p = 1$ به سری توافقی تحویل می‌یابد . در مثال ۱۰ نشان داده شد که سری p همگراست‌اگر $p > 1$. از قضیهٔ۵ می‌توان‌آزمون‌مقایسهٔ‌مفیدتری‌را نتیجه گرفت .

آزمون مقایسهٔ حد .

قضیهٔ ۶ (آزمون مقایسهٔ حد) . *فرض کنیم* $\sum a_n$ *و* $\sum b_n$ *دو سری با جملات مثبت باشند به‌طوری که*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \tag{۵}$$

که در آن حالت $L = \infty$ *مجاز است . در این صورت ، همگرایی* $\sum b_n$ *همگـرایی* $\sum a_n$ *را ایجاب می‌کند اگر* $0 \leq L < \infty$ *، حال آنکه واگرایی* $\sum b_n$ *واگرایی* $\sum a_n$ *را ایجاب‌می‌کند اگر* $L > 0$ *یا* $L = \infty$ *. بخصـوص ، اگر* L *عدد مثبتی باشد ، دوسری* $\sum a_n$ *و* $\sum b_n$ *یاهر دو همگرایند یا هر دو واگرا .*

برهان . چون a_n و b_n مثبت‌اند ، نسبت a_n/b_n و متقابل آن b_n/a_n به ازای هر n تعریف شده‌اند . فرض کنیم (۵) برقرار بوده و $0 \le L < \infty$ (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد) . در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N هست به طوری که

$$\frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

یا معادلاً ، به ازای هر $n > N$ ،

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n.$$

اگر $\sum b_n$ همگرا باشد ، سری نامنفی $\sum (L + \varepsilon)b_n$ ، حاصل‌از ضرب جملات $\sum b_n$ درعامل مثبت $L + \varepsilon$ ، همگراست (ر.ک. صفحهٔ ۸۱۲) ، و سپس همگرایی $\sum a_n$ از آزمون‌مقایسهٔ معمولی نتیجه‌می‌شود (قضیهٔ۵) . از آن سو ، هرگاه $\sum b_n$ واگرا بوده‌و $L > 0$ یا $L = \infty$ آنگاه ، چون نسبت متقابل b_n/a_n با رفتن $n \to \infty$ به حدی نامنفی نزدیک می‌شود (0 اگر $L = \infty$) ، سری $\sum a_n$ نیز واگراست ، زیرا در غیر این صورت ، همانطور که لحظه‌ای قبل نشان داده شد ، $\sum b_n$ همگراست که با فرض متناقض می‌باشد .

مثال ۶ . فرض کنیم

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n(n + 1)},$$

درنتیجه ، $\sum a_n$ سری p به ازای $p = 2$ است ، و $\sum b_n$ سری مطرح شده در مثال ۴ ، صفحهٔ ۸۰۸ است . در این صورت ، $\sum b_n$ همگرا (با مجموع 1) است ، و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n + 1)}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

بنابراین ، طبق قضیهٔ ۶ ، سری $\sum a_n = \sum (1/n^2)$ نیز همگراست . خواهیم دید که مجموع این سری $\pi^2/6$ می‌باشد .

مثال ۷ . با استفاده از قضیهٔ ۶ می‌توان برهان دیگری از همگرایی سری توافقی $\sum (1/n)$ به دست آورد . فرض کنیم

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

در این صورت ، همانطور که در مثال ۵ ، صفحه‌ٔ ۸۰۹ ، به‌آسانی نشان داده شد ، $\sum a_n$ واگراست و ، به کمک جانشانی $u = 1/x$ و قاعده‌ٔ هوپیتال ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)}{u}=\lim_{u\to0^+}\frac{D_u\ln(1+u)}{D_u u}=\lim_{u\to0^+}\frac{1}{1+u}=1.$$

بنابراین ، طبق قضیه‌ٔ ۶ ، سری $\sum b_n$ ، یعنی سری توافقی ، نیز واگرا می‌باشد .

مثال ۸ . آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \tag{۶}$$

همگراست یا واگرا؟

حل . تقریب

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}\approx\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است ، و چون $1/\sqrt{n}\ge 1/n$ ، از این تقریب معلوم می‌شود که سری (۶) بر سری توافقی واگرا مسلط است؛ و درنتیجه ، خود واگرا می‌باشد . لذا ، سری (۶) را با سری توافقی مقایسه می‌کنیم :

$$a_n=\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}},\qquad b_n=\frac{1}{n}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\infty,$$

و چون $\sum b_n$ سری توافقی واگراست ، از قضیه‌ٔ ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۶) ، نیز واگرا می‌باشد .

مثال ۹. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}} \tag{۷}$$

همگراست یا واگرا ؟

حل . تقریب

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}} \approx \frac{2n}{\sqrt{n^6}} = \frac{2}{n^2}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است ،و پیشنهاد می‌کند که سری (۷) با سری $\sum (1/n^2)$ که همگرایی آن در مثال ۶ ثابت شد ، مقایسه شود . لذا ، اختیار می‌کنیم

$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = 2,$$

و چون $\sum b_n = \sum (1/n^2)$ همگراست ، از قضیهٔ ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۷) ، نیز همگرا می‌باشد .

آزمون انتگرال . ما قبلا" به تشابه بین سریهای نامتناهی و انتگرالهای مجازی اشاره کرده‌ایم (ر.ک. صفحهٔ ۸۰۶) . با آزمون همگرایی بعدی اغلب می‌توان همگرایی یا واگرایی یک سری نامتناهی را از انتگرال مجازی مربوط به آن نتیجه گرفت .

قضیهٔ ۷ (آزمون انتگرال) . *فرض کنیم $f(x)$ یک تابع مثبت پیوسته باشد که بر بازهٔ $1 \le x < \infty$ نزولی است ، و به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $a_n = f(n)$. در این صورت ، سری*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

و انتگرال مجازی

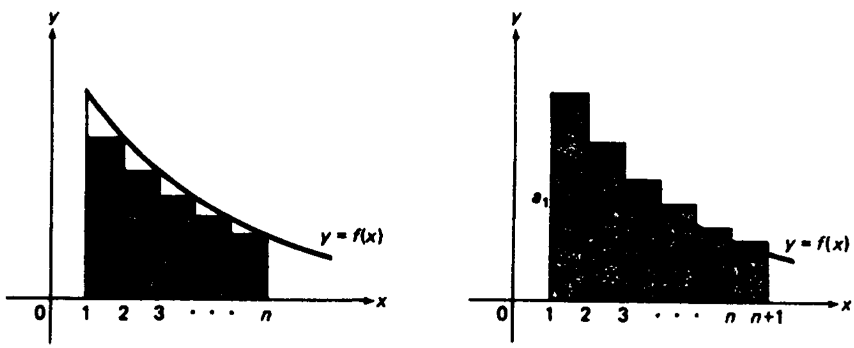
$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx \tag{۸}$$

یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

برهان. در شکل ۱۰ (آ) مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=n+1$ کمتراز مساحت کل مستطیلهای محیطی سایه‌دار است؛ و لذا،

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n, \tag{۹}$$

که در آن s_n مجموع جزئی n م سری $\sum a_n$ است. در شکل ۱۰ (ب) کمی متفاوت، مساحت



(ب) (آ)

شکل ۱۰

تحت منحنی $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=n$ از مساحت کل مستطیلهای محاطی سایه‌دار بزرگتر است؛ درنتیجه، این بار

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)\,dx. \tag{۹'}$$

فرض‌کنیم انتگرال مجازی (۸) واگرا باشد. در این صورت، چون $f(x)$ مثبت است، این فقط می‌تواند به این معنی باشد که حد مذکور در (۸) مساوی ∞ است. لذا، طرف چپ (۹) با رفتن $n\to\infty$ به ∞ نزدیک می‌شود؛ و درنتیجه، طرف راست s_n نیز چنین می‌کند؛ یعنی، $\sum a_n$ واگرا می‌باشد. از آن سو، فرض‌کنیم انتگرال (۸) همگرا با حد L

باشد . در این صورت ، به خاطر (۹') ، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)\,dx < a_1 + L$$

درنتیجه ، مجموعهای جزئی سری نامنفی $\sum a_n$ کران بالایی دارند . اما در این صورت ، بنابر قضیهٔ ۴ ، $\sum a_n$ همگرا می‌باشد .

اگر $\sum a_n$ یک سری با جملهٔ عمومی a_n باشد که با فرمول صریحی داده شده است ، ساده‌ترین راه برای یافتن تابع $f(x)$ که $f(n) = a_n$ تعویض n با x در فرمول مربوط به a_n است . اگر تابع حاصل بر $[1, \infty)$ پیوسته ، مثبت ، و نزولی باشد ، آزمون انتگرال قابل‌به کار بردن خواهد بود .

مثال ۱۰ . نشان دهید که سری p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست .

حل . از تعویض x با n در جملهٔ عمومی سری ، تابع مثبت پیوستهٔ $1/x^p$ به دست می‌آید که اگر $p > 0$ بر $[1, \infty)$ نزولی است ؛ درنتیجه ، آزمون انتگرال قابل‌اعمال است . به‌ازای $p = 1$ ، $1/x^p$ به صورت $1/x$ درمی‌آید و

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \to \infty} \ln x \Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} \ln u = \infty,$$

حال آنکه به ازای $0 < p < 1$ یا $p > 1$ ،

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

اما ، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود ،

$$\lim_{u \to \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{، اگر } p > 1 \\ \infty & \text{، اگر } 0 < p < 1 \end{cases}$$

بنابراین ، طبق آزمون انتگرال ، سری p همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $0 < p \leq 1$. (توجه کنید که برهان دیگری از واگرایی سری توافقی به دست آمده است .) اگر $p \leq 0$ ،

جملهٔ n م $1/n^p$ با رفتن $n \to \infty$ بــه 0 نزدیک می‌شود ، و سری p طبق قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۸۱۱ ، واگراست . از تلفیق این حالات ، بالاخره معلوم می‌شود که سری p همگــراست اگــر $p > 1$ و واگراست اگر $p \le 1$.

مثال ۱۱. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

طبق آزمون انتگرال واگراست ، زیرا انتگرال مجازی مربوطه واگرا می‌باشد :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^{u} = \lim_{u \to \infty} [\ln(\ln u) - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

در اینجا چون $1/(n \ln n)$ به ازای $n = 1$ تعریف نشده است ، برای حد جمعبندی پایینی و حد انتگرالگیری پایینی به جای 1 عدد 2 را اختیار می‌کنیم .

مثال ۱۲. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

بنابر آزمون انتگرال همگراست ، زیرا انتگرال مجازی مربوطه همگراست :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{u} = \lim_{u \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln u}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

مسائل

عدد گویا به شکل تحویل‌ناپذیر را بیابید که اعشاری مکرر داده شده نمایش‌آن باشد .

۱. $0.4\overline{9}$	۲. $3.\overline{79}$	۳. $0.\overline{215}$
۴. $6.3\overline{63}$	۵. $4.000\overline{72}$	۶. $0.0\overline{544}$
۷. $0.\overline{047619}$	۸. $0.0\overline{384615}$	۹. $5.10\overline{285714}$

۱۰. تحقیق کنید که هر عدد اعشاری مختوم به بی‌نهایت نه نمایش همان عدد گویـایی است که عدد اعشاری مختوم " بلافاصله پس از آن " نشان می‌دهد ، مثلاً ، $0.\overline{9} = 1$ ، $1.325\overline{9} = 1.326$ ، و از این قبیل .

با استفاده از آزمونهای مقایسه (قضیهٔ ۵ یا ۶) همگرایی یا واگرایی سری داده شده را تعیین کنید .

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)}$

۱۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4-n^2+1}{5n^6-n^3-2}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+4)}}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c>1)$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{100n-99}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

۳۰. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-5}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3}$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c^n} \quad (c>0)$

با استفاده از آزمون انتگرال (قضیهٔ ۷)، معین کنید که سری داده شده همگراست یا واگرا.

۳۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$

۳۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

۳۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

۳۹. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-6}$

۴۰. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-3}$

۴۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

۴۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$

۴۳. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2}$

۴۴. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

۴۵. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$

۴۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

۴۷. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$

۴۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

۴۹. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,[\ln(\ln n)]^2}$

۵۰. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}\sinh n$

۵۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

۵۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^2 n$

۵۳. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. نشان دهید که سری $\sum a_n^2$ نیز همگرا است.

۵۴. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی همگرا باشند. نشان دهید که سری $\sum a_nb_n$ نیز همگراست.

۵۵. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. در صورت وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \qquad \text{(یک)}$$

سری نامنفی همگرای $\sum a_n$ را طوری بیابید که در (یک) صدق نکند.

۵۶. نشان دهید که هر سری نامنفی همگرا که در آن $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد در (یک) صدق می‌کند.

۵۷. اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی بوده و در شرط (یک) صدق کند، آیا سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست؟

۵۸. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی از اعداد مثبت باشد. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

همگراست اگر و فقط اگر سری مربوطهٔ

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

همگرا باشد. این نتیجه به **آزمون تراکم‌کشی** معروف است.

راهنمایی. فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م $\sum a_n$ باشد. تحقیق کنید که‌اگر $n < 2^k$ ، $s_n \le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$ ، حال آنکه اگر $n > 2^k$ ، $s_n \ge \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k})$.

۵۹. با استفاده از آزمون تراکم‌کشی، نشان دهید که سری p همگراست اگر $p > 1$ وواگرا است اگر $p \le 1$ ،و این قبلاً" به‌وسیلهٔ آزمون انتگرال در مثال ۱۰ ثابت شده‌است.

۶۰. با استفاده از آزمون تراکم‌کشی، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \le 1$ (این امر مثالهای ۱۱ و ۱۲ را تعمیم می‌دهد).

۶۱. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$$

به ازای هر مقدار p واگراست.

۶۲. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}} \quad \text{و} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

هر دو همگرایند، اما سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

واگرا می‌باشد.

۴.۹ همگرایی مطلق و مشروط

سری به‌طور مطلق همگرا. بخش پیش به بررسی سریهای نامنفی، یعنی سریهایی که تمام جملاتشان اعدادی نامنفی‌اند، اختصاص داشت. حال به مطالعهٔ سریهای دلخواه (مثل بخش ۹.۲) پرداخته، اجازه می‌دهیم سری مورد نظر جملات مثبت و منفی داشته‌باشد. گوییم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

به‌طور *مطلق همگرا*ست اگر سری مربوطهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \qquad (1')$$

که جملاتش قدرمطلقهای جملات (۱) اند ، همگرا باشد . توجه کنید که این مفهوم جدید نقشی در نظریهٔ سریهای نامنفی ندارد ، زیرا اگر به ازای هر n ، $a_n \geq 0$ ، سریهای (۱) و ('۱) یکی خواهند بود . اهمیت واقعی همگرایی مطلق فقط در رابطه با سریهایی است که هم جملهٔ مثبت و هم جملهٔ منفی (و در واقع ، بی‌نهایت جمله از هر علامت) دارند،زیرا یک سری همگرا از این نوع ممکن است به‌طور مطلق همگرا باشد یا نباشد . به طور دقیقتر ، همانطور که لحظه‌ای بعد خواهیم دید ،باآنکه یک سری به‌طور مطلق همگرا باید همگرا باشد ، یک سری می‌تواند بدون همگرای مطلق بودن همگرا باشد .

مثال ۱ . سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots \qquad (2)$$

همگرا با مجموع

$$\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$$

است (در مثال ۱ ، صفحهٔ ۸۰۶ ، قرار می‌دهیم $a = 1, r = -\frac{2}{3}$). همچنین ، این سری به طور مطلق همگراست ، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots \qquad (2')$$

سری هندسی همگرای دیگری است ، این بار نامنفی با مجموع

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

میزان بزرگتر بودن مجموع دوم از مجموع اول را چگونه توضیح می‌دهید ؟

مثال ۲ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \qquad (3)$$

به نام *سری توافقی متناوب* ، به‌طور مطلق همگرا نیست ، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad (۳')$$

سری توافقی معمولی است ، که البته واگراست . علی‌رغم اینکه سری (۳) به‌طور مطلق‌همگرا نیست ولی همگراست . این امر در مثال ۴ به کمک یک آزمون همگرایی خاص نشان داده‌شده است .

سریهای به‌طور مشروط همگرا . همانطور که در ابتدای بخش گفتیم و با آخرین مثـال نشان دادیم ، سریهایی وجود دارند که بدون همگرای مطلق همگرا می‌باشند . یک چنین سری را *به طور مشروط همگرا* می‌نامند . وجود سری به‌طور مشروط‌همگرا نشان می‌دهد که *همگرایی همگرایی مطلق را ایجاب نمی‌کند* . از آن سو ، همانطور که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد ، *یک سری به‌طور مطلق همگرا باید همگرا باشد* .

قضیهٔ ۸ (همگرایی مطلق همگرایی را ایجاب می‌کند) . *فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری باشد به طوری که $\sum |a_n|$ همگرا باشد . در این صورت ، $\sum a_n$ نیز همگرا می‌باشد .*

برهان . فرض کنیم $\sum |a_n|$ همگرا باشد . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|) \qquad (۴)$$

نامنفی است ، زیرا

$$a_n+|a_n| = \begin{cases} 2a_n = 2|a_n| & \text{اگر } a_n \ge 0 \\ 0 & \text{اگر } a_n < 0 \end{cases}$$

و به‌علاوه (۴) تحت تسلط سری نامنفی همگرای $\sum 2|a_n|$ می‌باشد . از آزمون مقایسه (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۸۲۴) نتیجه می‌شود که سری (۴) نیز همگراست . اما در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

نیز چنین است ، زیرا تفاضل بین دوسری همگرا همگراست (ر.ک. صفحهٔ ۸۱۲) .

مثال ۳ . سری

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots \qquad (۵)$$

را درنظر می‌گیریم که از سری هندسی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots \qquad (\text{۵}')$$

به‌وسیلهٔ تغییر یک درمیان علایم از جملات‌سوم و چهارم به‌بعد به‌دست آمده است . چون سری (۵́) همگرا (با مجموع 2 .) است ، سری (۵) به‌طور مطلق همگراست ؛ و درنتیجـه ، بنابر قضیهٔ ۸ ، همگرا نیز هست . به عنوان تمرین ، نشان دهید که مجموع این‌سری‌هندسی تعدیل شده $\frac{6}{5}$ است .

سریهای متناوب . گوییم یک سری نامتناهی **متناوب** است اگر جملاتش به تناوب مثبت‌ومنفی باشند یعنی ، اگر جملات متوالی همواره مختلف‌العلامه باشند . لذا ، سری(۲) و (۳) مثالهای ۱ و ۲ متناوبند ولی سری (۵) در مثال قبل متناوب نیست ، زیرا شامل (بی‌نهایت) جفت جملات متوالی همعلامت می‌باشد . واضح است که هر سری متناوب را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نوشت :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots,$$

که در آن اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ همه مثبت می‌باشند . توجه کنید که در شکـل اول می‌توان به جای $(-1)^{n-1}a_n$ نوشت $(-1)^{n+1}a_n$.

آزمون سری متناوب . برای سریهای متناوب یک آزمون همگرایی خاص مهم وجود دارد که به لایب‌نیتز منسوب است :

قضیهٔ ۹ (آزمون سریهای متناوب با تخمین خطا) . *هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیداً "نزولی از اعداد مثبت باشد به‌طوری که*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0, \qquad (\text{۶})$$

آنگاه سری متناوب

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots \qquad (\text{۷})$$

همگراست . فرض کنیم $R_n = S - s_n$ خطای حاصل از تقریب مجموع S سری (۷) به وسیلهٔ مجموع جزئی n م آن باشد؛ یعنی ، فرض کنیم

$$R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots \qquad (۸)$$

باقیمانده پس از n جملهٔ سری (۷) باشد . در این صورت ، قدرمطلق R_n از اولین جملهٔ استفاده نشده در تقریب $S \approx s_n$ کوچکتر بوده و علامت این جمله را خواهد داشت؛ یعنی، $|R_n| < a_{n+1}$ و R_n با $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است (این‌همان علامت $(-1)^n$ را دارد زیرا a_{n+1} مثبت است) .

برهان . شرط (۶) باید اعمال شود ، زیرا در غیر این صورت سری (۷) واگرا خواهد بود (چرا؟) . فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری باشد . در این صورت ؛ مجموعهای جزئی s_{2k} با اندیس زوج را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}),$$

که طرف راست مجموعی از اعداد مثبت است ، زیرا $a_n > a_{n+1}$ ؛ و درنتیجه ، به ازای هر n $a_n - a_{n+1} > 0$. لذا ، مجموعهای جزئی با اندیس زوج همه مثبت‌اند ، و دنبالهٔ اکیداً صعودی $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ را تشکیل می‌دهند . این دنباله کراندار نیز هست ، زیرا

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} < a_1$$

(اعداد تفاضلی $a_2 - a_3, \ldots, a_{2k-2} - a_{2k-1}, a_{2k}$ همه مثبت‌اند) . بنابراین ، طبق قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۷۹۶ ، دنبالهٔ $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ دارای حد متناهی S است؛ یعنی ،

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = S,$$

که در آن S بوضوح مثبت می‌باشد . برای مجموعهای جزئی با اندیس فرد داریم

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1},$$

و درنتیجه ، به‌خاطر (۶) ،

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k} = S + 0 = S.$$

چون مجموعهای جزئی با اندیس زوج و اندیس فرد به همان حد S نزدیک می‌شوند، سری (۷) همگرا با مجموع S است ، و سری (۸) به همان دلیل صفحهٔ ۸۱۳ همگرا می‌باشد .

برای اثبات تخمین خطا ملاحظه می‌کنیم که خطا یا باقیماندهٔ R_n را می‌توان به شکل

زیر نوشت :

$$R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

که در آن سری داخل پرانتز به یک مجموع مثبت همگراست ، زیرا یک سری متناوب از نوع سری اصلی (۷) می‌باشد . بنابراین ، R_n با $(-1)^n$ همعلامت است ، و

$$\begin{aligned}|R_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots < a_{n+1},\end{aligned}$$

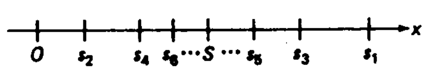
که در آن نامساوی از مثبت بودن اعداد تفاضلی $a_{n+2} - a_{n+3}, a_{n+4} - a_{n+5}, \ldots$ به‌دست می‌آید .

به آسانی معلوم می‌شود که هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیدا" نزولی از اعداد مثبت در شرط (۶) صدق کند ، آنگاه سری متناوب

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots, \qquad (۷')$$

که به جای a_1 با $-a_1$ شروع می‌شود ، نیز همگراست با مجموع S' که مساوی قرینهٔ مجموع S سری (۷) می‌باشد . این نتیجهٔ فوری این‌امر است که سری (۷') حاصل ضرب سری (۷) در -1 می‌باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهید هرگاه R'_n باقیمانده پس از n جملهٔ سری (۷') باشد ، آنگاه $|R'_n| < a_{n+1}$ و R'_n بـا $(-1)^{n+1}a_{n+1}$ ، یعنـی $(-1)^{n+1}$ ، همعلامت می‌باشد.

برهان قضیهٔ ۹ ظاهرا" پیچیده است ، ولی معنی شهودی آن کاملا" ساده می‌باشد . فرض کنید مجموعهای جزئی $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ سری متناوب (۷) را بر خط اعداد مثل شکل ۱۱ رسم کرده باشیم . در این صورت ، s_1 سمت راست O قرار دارد زیـرا $s_1 = a_1 > 0$ ،



شکل ۱۱

s_2 سمت چپ s_1 است زیـرا $s_2 - s_1 = -a_2 < 0$ ، s_3 سمـت راسـت s_2 اسـت زیـرا $s_3 - s_2 = a_3 > 0$ ، s_4 سمت چپ s_3 است ، زیرا $s_4 - s_3 = -a_4 < 0$ ، و تاآخر . (چرا هر مجموع جزئی s_n سمت راست مبداء قرار دارد ؟) همچنین ، همانطور کـه شکـل نشان می‌دهد ، مجموعهای جزئی $s_2, s_4, \ldots$ با اندیس زوج یک دنبالهٔ صعودی تشکیل می‌دهند ، حال آنکه مجموعهای جزئی $s_1, s_3, \ldots$ با اندیس فرد یک دنبالهٔ نزولی تشکیل می‌دهند . هر دو دنباله کراندار و یکنوایند ؛ و درنتیجه ، همگرا می‌باشند ؛ به‌علاوه ، باید حد یکسان

S را داشته باشند، زیرا جملات دو دنباله با رفتن $n \to \infty$ به هم نزدیک می‌شوند (توجه کنید که وقتی $n \to \infty$ ، $|s_{n+1} - s_n| = a_{n+1} \to 0$) واضح است که s_n سمت چپ S است اگر n زوج باشد و سمت راست S است اگر n فرد باشد؛ و درنتیجه، باقیماندهٔ $R_n = S - s_n$ با زوج بودن n مثبت و با فرد بودن n منفی می‌باشد. اما، دراین‌صورت، R_n بـا $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است، زیـرا $(-1)^n a_{n+1}$ با زوج بودن n مثبت و فرد بودن n منفی می‌باشـد. بالاخره، چون S بین هر جفت مجموع جزئی متوالی s_n و s_{n+1} قـرار دارد، نتیجه می‌شود که

$$|R_n| = |S - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}.$$

مثال ۴. اگر $p > 0$ ، دنبالهٔ $\{1/n^p\}$ اکیدا" نزولی و همگرا به 0 است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۹، سری متناوب

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} + \cdots \tag{۹}$$

همگرا می‌باشد. اگر $p > 1$ ، سری به‌طور مطلق همگراست، زیرا سری

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots, \tag{۹'}$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری متناوب (۹) اند، یک سری p همگرا می‌باشد. امـا اگر $0 < p \leq 1$ ، ســـری (۹') یک سری p واگراست، و در این حالت سری (۹) به‌طور مطلق همگرا نبوده بلکه فقط به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. به ازای $p = 1$ سری توافقی متناوب

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

به دست می‌آید که قبلا" در مثال ۲ مورد بحث قرار گرفت. خواهیم دید که مجمـوع این سری به‌طور مشروط همگرا $\ln 2$ است (ر.ک. مثال ۷، صفحهٔ ۸۷۳).

مثال ۵. سری متناوب

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots \tag{۱۰}$$

در شرایط قضیهٔ ۹ صدق می‌کند؛ و لذا، همگراست. اما سری

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots, \tag{۱۰'}$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری (۱۰)اند، واگرا می‌باشد. در واقع،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n-1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

درنتیجه، واگرایی (۱۰′) از واگرایی $\sum(1/n)$ [به کمک آزمون مقایسهٔ حد (قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۸۲۵)] نتیجه می‌شود. لذا، سری (۱۰) به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. در مثال ۸، صفحهٔ ۸۷۴، نشان خواهیم داد که مجموع این سری $\pi/4$ است.

مثال ۶. سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots \tag{۱۱}$$

بنابر قضیهٔ ۹ همگراست، ولی همگرایی آن از همگرایی مطلقش نیز نتیجه می‌شود زیرا، همانطور که در مثال ۴، صفحهٔ ۸۲۴، نشان‌دادیم، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots \tag{۱۱′}$$

همگرا می‌باشد. به‌کمک قسمت‌دوم قضیهٔ ۹ می‌توان خطای ناشی از تقریب مجموع‌سری (۱۱) با مجموع n جملهٔ اول آن را تخمین زد. مثلاً، فرض‌کنیم S مجموع (۱۱) بوده، و 8 جملهٔ اول را نگه می‌داریم:

$$S=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+R_8.$$

در این صورت، $1/8!$ اولین جملهٔ به کار نرفته است؛ درنتیجه، R_8 مثبت بوده و از $1/8! = 0.0000248\ldots$ کوچکتر است، حال آنکه

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}=\frac{1854}{5040}=\frac{103}{280}=0.367857\ldots.$$

لذا، می‌توان نتیجه گرفت که خطای تقریب $S\approx 103/280$ مثبت و کوچکتر از 0.000025 می‌باشد. در واقع، همانطور که در مثال ۵، صفحهٔ ۸۷۱، نشان داده شد، $S=e^{-1}=0.367879\ldots$.

آزمون سری متناوب (قضیهٔ ۹) در صورت نزولی بودن $\{a_n\}$ (ولی نه *اکیدا "نزولی*) برقرار است اگر تخمین خطا از $|R_n|<a_{n+1}$ به $|R_n|\le a_{n+1}$ تغییر نماید. برهان‌تعدیل جزئی برهان برای $\{a_n\}$ اکیدا" نزولی است و به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

مثال ۷. دنبالهٔ

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$$

نزولی است ولی اکیدا" نزولی نیست . سری متناوب مربوطهٔ

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

به‌طور مشروط به مجموع 0 همگراست ، و باقیماندهٔ R_n به ازای n زوج مساوی 0 و به ازای n فرد برابر اولین جملهٔ به کار نرفته می‌باشد .

مثال ۸. مجموع $2n$ جملهٔ اول سری متناوب

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots \\ = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots \end{aligned} \tag{۱۲}$$

دوبرابر مجموع جزئی n م سری توافقی واگراست ، زیرا

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} &= \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

لذا ، سری (۱۲) نیز (با آنکه وقتی $n \to \infty$ ، $a_n \to 0$) واگرا می‌باشد . این‌آزمون سری متناوب را نقض نمی‌کند ، زیرا دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی نیست . در واقع ، همانطور که به آسانی تحقیق می‌شود ، به ازای $k = 1, 2, \ldots$ ، a_{2k+1} از a_{2k} متجاوز می‌باشد .

تبصره. نباید این تصور پیش‌آید که یک سری متناوب که در شرایط قضیهٔ ۹ صدق نمی‌کند لزوما" واگراست . مثلا" ، سری

$$2 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

حاصل از سری $\sum (-1)^{n-1} (1/n^2)$ به‌وسیلهٔ ضرب تمام جملات با اندیس فرد در 2 (از

طریق مقایسه با سری $\sum(2/n^2)$ به‌طورمطلق همگراست، ولی قدرمطلق هر جمله باانديس فرد از جملهٔ پنجم به بعد از جملهٔ قبلی بزرگتر می‌باشد.

آرایش مجدد سریها. ***اگر یک‌سری به‌طور مطلق همگرا باشد، می‌توان جملاتش را بدون‌تغییر مجموع سری بدلخواه آرایش کرد، ولی‌اگر سری به‌طور مشروط همگرا باشد، جملاتش‌را می‌توان طوری آرایش کرد که سری جدید هر مجموعی را داشته باشد!*** اثبات این حکم ازحوصلهٔ یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است، ولی می‌توان آن را دریک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت. لذا، به بیان کیفی، همگرایی مطلق یک سری ناشی از کوچکی ذاتی جملاتش است؛ درنتیجه، سری حتی اگر تمام جملاتش با قدر مطلق آنها عوض شوند، همگرا می‌ماند، ولی همگرایی مشروط یک سری فقط به خاطر "مزیت"حذف دوبه‌دو جملات مثبت و منفی است؛ و لذا، به ترتیب آمدن این جملات بستگی دارد. در واقع، می‌توان تجدید آرایشهای ***واگرایی***از یک سری به‌طور مشروط همگرا پیدا نمود.

مثال ۹. فرض کنیم S مجموع سری توافقی متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

باشد (همانطور که در مثال ۴ گفتیم، $S=\ln 2\approx 0.693$). تجدید آرایشی از این سری بیابید که مجموعش $\frac{1}{2}S$ باشد.

حل. چون

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots.$$

امــا درج هر تعداد صفر بین جملات سری اثری بر همگرایی یا مقدار مجموع آن ندارد؛ و لذا،

$$S=1+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+0-\frac{1}{6}+\cdots, \tag{۱۳}$$

$$\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots. \tag{۱۳'}$$

از تفریق جمله به جملهٔ دوسری، یعنی تفریق هر جملهٔ (۱۳۹) از جملهٔ (۱۳)که دربالای آن قرار دارد، تجدید آرایش مطلوب به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots.$$

مسائل

معین کنید که سری داده‌شده (با جملات مثبت و منفی) به‌طور مطلق همگرا، به‌طورمشروط همگرا، همگرا، یا واگراست. درحالتی که سری با دادن چند جملهٔ اولیه مشخص‌شده‌است، فرض کنید قانون تشکیل برآمده از این جملات به ازای جمیع جملات سری برقرار باشد.

۱. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$

۲. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

۵. $\frac{1}{8} - \frac{2}{12} + \frac{3}{16} - \frac{4}{20} + \cdots$

۶. $\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \frac{1}{5\ln 5} + \cdots$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

۹. $1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{201} - \frac{1}{301} + \cdots$

۱۰. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \cdots$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$

۱۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\frac{n+1}{n}$

۱۵. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots$

۱۶. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\cdots$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$

۱۸. $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\cdots$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2)}{n}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(2n\pi/3)}{\sqrt{3}\,n}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{a}{n}\quad(a>0)$

۲۳. $a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\quad(a>0)$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)}$

هر یک از سریهای زیر طبق آزمون سری متناوب (قضیهٔ ۹) همگراست. فرض کنید R_n باقیماندهٔ سری پس از n جمله، یعنی خطای ناشی از تقریب مجموع سری بهوسیلهٔ مجموع جزئی nم، باشد. در مسائل ۲۵ تا ۲۹ علامت R_n را یافته و، به ازای n داده شده، یک کران بالایی برای $|R_n|$ پیدا نمایید. در مسائل ۳۰ تا ۳۴ کوچکترین مقداری از n را بیابید که به ازای آن R_n در نامساوی ذکرشده صدق نماید. (طبق معمول، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از چندجملهٔ اول برای جمیع جملات سری برقرار باشد.)

۲۵. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,\ n=99$

۲۶. $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}-\cdots,\ n=5$

۲۷. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots,\ n=6$

۲۸. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots,\ n=998$

۲۹. $-1+\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}-\cdots,\ n=8$

۳۰. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,\ |R_n|<0.001$

۳۱. $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots,\ |R_n|<0.0002$

۳۲. $\frac{1}{1!2!}-\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}-\frac{1}{4!5!}+\cdots,\ |R_n|<10^{-8}$

۳۳. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots,\ |R_n|<0.0005$

۳۴. $-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^4}+\frac{1}{6\cdot 2^5}-\cdots,\ |R_n|<0.0001$

۳۵. تجدید آرایش واگرایی از سری متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

به دست آورید.

مجموع سری توافقی متناوب $\ln 2$ است. تجدید آرایشی از سری بیابید که مجموع زیر را داشته باشد.

۳۶. $\frac{3}{2}\ln 2$ ۳۷. $2\ln 2$ ۳۸. 0

۳۹. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت و همگرا به 0 بوده، و

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

یک‌سری (در حالت کلی واگرا) باشد که مجموعهای جزئی $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ دنبالهٔ کرانداری چون $\{B_n\}$ بسازند. به کمک مسئلهٔ ۳۸، صفحهٔ ۳۶۶، نشان‌دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

همگراست. این آزمون همگرایی به **آزمون دیریکله** معروف است. نشان دهید که این آزمون سری متناوب را به عنوان حالتی خاص دربردارد.

همگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون دیریکله تحقیق نمایید.

۴۰. $1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{2}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{2}{15}+\frac{1}{17}-\cdots$

۴۱. $1+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{9}}+\cdots$

۴۲. $1-\frac{3}{2}-\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{6}-\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{1}{9}-\frac{3}{10}-\frac{5}{11}+\frac{7}{12}+\cdots$

توجه کنید که هیچیک از این سریها متناوب نیست.

۹.۵ آزمونهای نسبت و ریشه

حال دو آزمون همگرایی دیگر را عرضه می‌کنیم. این آزمونها، که در جای خود مهمند، در بررسی سریهای توانی که از بخش بعد شروع می‌شود، ابزارهای لازمی می‌باشند.

آزمون نسبت

قضیهٔ ۱۰ (آزمون نسبت). *فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد به‌طوری که*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \tag{1}$$

که در آن حالت $L=\infty$ مجاز است. در این صورت، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L=\infty$. آزمون به‌ازای $L = 1$ بی‌حاصل می‌باشد.

برهان. فرض کنیم (۱) به ازای $0 \le L < 1$ برقرار باشد (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد)، و r عددی در بازهٔ باز $(L, 1)$ باشد. در این صورت، به‌خاطر (۱) به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}|a_{N+1}| &< |a_N| r,\\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}| r < |a_N| r^2,\\ |a_{N+3}| &< |a_{N+2}| r < |a_N| r^3,\end{aligned}$$

و به‌طورکلی،

$$|a_{N+n}| < |a_N| r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{۲}$$

درنتیجه،

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots < |a_N|r + |a_N|r^2 + |a_N|r^3 + \cdots$$
$$= |a_N|r(1 + r + r^2 + \cdots).$$

سری سمت راست همگراست، زیرا یک سری هندسی همگرا می‌باشد؛ و درنتیجه، بنابرآزمون مقایسه (ر.ک. قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۸۲۴)، سری سمت چپ نیز همگرا می‌باشد. اما، دراین صورت، $\sum |a_n|$ همگراست، زیرا حذف تعدادی متناهی جمله از یک‌سری بر همگرایی‌آن اثری ندارد. به عبارت دیگر، $\sum a_n$ به‌طور مطلق همگرا می‌باشد.

حال فرض کنیم $L > 1$ یا $L = \infty$، و r را عددی در بازهٔ باز $(1, L)$ می‌گیریم اگر $L > 1$ یا در بازهٔ $(1, \infty)$ می‌گیریم اگر $L = \infty$. به‌خاطر (۱)، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به‌طوری که به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$$

و با همان استدلال قبل که در آن نامساویها عکس شده‌اند، به جای (۲) به دست‌می‌آوریم

$$|a_{N+n}| > |a_N|r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{۲'}$$

اما، در این صورت،

$$|a_{N+n}| > |a_N| > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

که با شرط لازم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

برای همگرایی $\sum a_n$ ناسازگار است؛ درنتیجه، $\sum a_n$ واگرا می‌باشد.

بالاخره، برای نشان‌دادن اینکه آزمون به‌ازای $L = 1$ بی‌حاصل است، آن را درمورد سه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

به کار می‌بریم. در هر حالت $L = 1$، و به آسانی می‌توان تحقیق کرد که با آنکه سری اول به‌طور مطلق همگراست، دومی به‌طور مشروط همگرا و سومی واگرا می‌باشد.

البته، اگر سری $\sum a_n$ نامنفی باشد، واژهٔ " به‌طور مطلق " در صورت قضیه زایدبوده و می‌توان آن را حذف کرد، و در این حالت (۱) به

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{۱'}$$

ساده می‌شود . آزمون نسبت خصوصا" وقتی موءثر است که جملهٔ n م a_n شامل فاکتوریل باشد ، چون در این صورت بسیاری از عوامل مشترک صورت و مخرج را می‌توان در محاسبهٔ نسبت $|a_{n+1}/a_n|$ حذف کرد .

مثال ۱ . در مثال ۴ ، صفحهٔ ۸۲۴ ، نشان داده شد که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

همگراست . این همگرایی از آزمون نسبت نیز نتیجه می‌شود ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(در اینجا ، و در زیر ، a_n نمایش جملهٔ n م سری مورد نظر می‌باشد) .

مثال ۲ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

به‌طور مطلق همگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \approx 0.37 < 1.$$

مثال ۳ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1.$$

مثال ۴ . حالت $L = \infty$ به‌وسیلهٔ سری $\sum n!$ توضیح داده شده است ، که از قبل می‌دانیم

واگراست (جملهٔ n م آن با رفتن $n \to \infty$ به 0 نزدیک نمی‌شود)؛ و در واقع ، آزمون نسبت در این سری نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

آزمون ریشه. برهان آزمون همگرایی زیر شبیه برهان آزمون نسبت است ، ولی عملاً" از آن ساده‌تر می‌باشد .

قضیهٔ ۱۱ (آزمون ریشه). *فرض کنیم سری $\sum a_n$ چنان باشد که*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L, \qquad (۳)$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز می‌باشد . در این صورت ، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L = \infty$. سری در حالت $L = 1$ بی‌حاصل خواهد بود .

برهان. اگر $0 \le L < 1$ ، r را عددی در بازهٔ باز $(L, 1)$ می‌گیریم . در این صورت ، به خاطر (۳) ، به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد ،

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$$

یا معادلاً"

$$|a_n| < r^n \qquad (n = N, N+1, \ldots). \qquad (۴)$$

بنابراین ،

$$\begin{aligned}|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots &< r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \cdots \\ &= r^N(1 + r + r^2 + \cdots),\end{aligned}$$

که در آن سری سمت راست یک سری هندسی همگراست . لذا ، طبق آزمون مقایسه ، $\sum |a_n|$ نیز همگراست؛ یعنی ، $\sum a_n$ به‌طورمطلق همگراست . اگر $L > 1$ یا $L = \infty$ ، r را عددی در بازهٔ $(1, L)$ می‌گیریم . در این صورت ، به جای (۴) ، داریم

$$|a_n| > r^n > 1 \qquad (n = N, N+1, \ldots), \qquad (۴')$$

درنتیجه ، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به 0 نزدیک‌نشده و سری $\sum a_n$ واگرا می‌باشد . اگر $L = 1$، آزمون

ریشه بی‌حاصل است ، و این را می‌توان با اعمال آن بـــــــر سه سری مذکور در آخر برها ن آزمون نسبت تحقیق نمود .

در اعمال آزمون ریشه ، توجه به

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} e^{(1/n)\ln c} = e^0 = 1,$$

که در آن $c > 0$ ، و به همین نحو ، همانطور که در مسئلهٔ ۵۶ ، صفحهٔ ۸۰۳ ، پیش بینی شده ،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{(1/n)\ln n} = e^0 = 1,$$

یاری‌دهنده است .

مثال ۵ . سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$$

به‌طور مطلق همگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

مثال ۶ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

همگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

مثال ۷ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1.$$

مثال ۸. حالت $L = \infty$ باسری $\sum n^n$ توضیح داده‌شده ، که‌از قبل واگرایی آن را می‌دانیم (چرا؟) ؛ و در واقع ، آزمون ریشه دراین سری نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

مسائل

همگرایی سریهای داده شده‌را با آزمون نسبت یا آزمون ریشه تحقیق‌کنید . اگر هردوآزمون بی‌حاصل بود ، از آزمون همگرایی دیگر استفاده‌نمایید . در سریهای با جملات مثبت‌ومنفی بین همگرایی مطلق و شرطی را از هم تمیز دهید .

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$

۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{(2n)!}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2-1}{(1.01)^n}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/9}}{3^n}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\left(\frac{19}{7}\right)^n$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{4^n}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(-3)^n}{(2n+1)!}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n/2}}{n\pi^n}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(c+1)\cdots(c+n-1)}{n^n}$

۲۱. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^p}{n!}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات ناصفر باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

نشان دهید که $\{a_n\}$ همگرا به 0 است.

تحقیق کنید که

۲۶. $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ (c دلخواه)

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n$ همگراست.

۲۹. می‌توان نشان داد هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن حالت $L=\infty$ مجاز است، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L. \qquad \text{(یکَ)}$$

سریی مثال بزنید که همگرایی آن را بتوان با آزمون ریشه ثابت‌کرد، ولی‌آزمون‌نسبت به خاطر عدم وجود (یک) از کار بیفتد. (لذا، با آنکه محاسبهٔ حد (یک) اغلب‌از حد (یکَ) در حالاتی‌که هر دو وجود دارند آسانتر است،آزمون ریشه عملاً "ازآزمون نسبت قویتر می‌باشد.)

تحقیق کنید که

۳۰. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

۳۱. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n} = \frac{4}{e}$

۳۲. همگرایی سری

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \cdots$$

را، که در آن a و b اعداد مثبت متمایزی هستند، تحقیق نمایید.

۶.۹ سریهای توانی

فرض کنیم x متغیر مستقلی بوده، و $\{a_n\}$ دنبالهای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت، هر سری نامتناهی به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{۱}$$

یک *سری توانی* (نسبت به x) نام دارد، و اعداد $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *ضرایب* یا جملات سری نامیده می‌شوند. در اینجا حد پایینی جمعبندی به جای 1 مساوی 0 است، زیرا سری توانی معمولا" با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود. توجه کنید که جملات سری توانی $\sum a_n x^n$، به‌جای عدد مثل سریهایی‌که قبلا" درنظر گرفته‌ایم (که گاهی‌برای تمایز آنها با سریهایی که جملاتشان تابع‌اند سریهای عددی نامیده می‌شوند) *تابع* می‌باشند. اگر $a_N \neq 0$ و به ازای هر $n > N$، $a_n = 0$، سری‌توانی (۱) به‌صورت زیر تحویل‌می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N \qquad (a_N \neq 0),$$

که یک‌چندجمله‌ای از درجهٔ N است. لذا، به‌بیان نادقیق، سریهای‌توانی‌چندجمله‌ایهایی هستند که بی‌نهایت جمله دارند. اگر $x = 0$، طرف راست (۱) به تنها جملهٔ ثابت a_0 تحویل‌می‌شود. برای‌آنکه طرف چپ (۱) نیز به ازای $x = 0$ به a_0 تحویل شود، قرارداد $0^0 = 1$ را می‌پذیریم؛ درنتیجه، حتی اگر $x = 0$، $a_0 x^0 = a_0$.

اگر c ثابت باشد، می‌توان سری توانی کلیتر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \tag{۱'}$$

را نیز درنظر گرفت که به‌جای‌توانهای x مستلزم توانهای $x - c$ است. طبیعی است که (۱') به ازای $c = 0$ به (۱) تحویل می‌شود. در واقع، نیازی به بررسی جداگانهٔ سری‌به شکل (۱') نیست، زیرا هرچیز بخواهیم در باب سری (۱') بدانیم می‌توانیم از تحلیل سری (۱) با همان ضرایب آموخته و سپس تغییر متغیر به $x - c$ بدهیم (ر.ک. بحث صفحهٔ ۸۶۰).

فرض کنیم x مقدار ثابت r را بگیرد که عددی حقیقی است. در این صورت، سری توانی $\sum a_n x^n$، که جملاتش تابعند، به صورت سری $\sum a_n r^n$ درمی‌آید که جملاتش عدد می‌باشند، و سری عددی $\sum a_n r^n$ را می‌توان با استفاده از روشهای بخشهای ۲.۹ تا ۵.۹ بررسی کرد. هر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x = 0$ (بداهتا") همگراست، زیرا به تنها جملهٔ ثابت a_0 تحویل می‌شود. سری ممکن است فقط به ازای $x = 0$ همگرا باشد، یا ممکن

است به ازای هر مقدار از x همگرا باشد، ولی به‌طورکلی به ازای مقادیر ناصفری‌از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگرا می‌باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $a_n = n!$ که در آن $0! = 1$. در این صورت، سری توانی $\sum a_n x^n$ فقط به ازای $x = 0$ همگراست. این از آزمون نسبت نتیجه می‌شود، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty,$$

مگر آنکه $x = 0$.

مثال ۲. اگر $a_n = 1/n^n$، سری توانی $\sum a_n x^n$ (با حد جمعبندی پایینی ۱) به ازای‌هر x به‌طور مطلق همگراست. این از آزمون ریشه نتیجه می‌شود، زیرا به ازای هر مقدار x،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n} = 0$$

مثال ۳. یکی از ساده‌ترین سریهای توانی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

است که، همانطور که قبلاً از مثال ۱، صفحهٔ ۸۰۶، می‌بینیم، به ازای هر x دربازهٔ باز $(-1, 1)$ همگراست و به ازای سایر مقادیر x واگرا می‌باشد.

همگرایی سریهای توانی. بررسی همگرایی ما از سریهای توانی مبتنی بر نتیجهٔ کلیدی زیر است.

قضیهٔ ۱۲ (خاصیت همگرایی اساسی سریهای توانی). *هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ به‌ازای $x = r$ که $r \neq 0$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای‌هر x که $|x| < |r|$ به‌طورمطلق همگراست. هرگاه سری به ازای $x = s$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که $|x| > |s|$ نیز واگرا می‌باشد.*

برهان. هرگاه سری $\sum a_n r^n$ همگرا باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۸۱۱، دنبالهٔ $\{a_n r^n\}$ همگرا به 0 است. بخصوص، بنابر قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۷۹۳، $\{a_n r^n\}$ کراندار است به این معنی که ثابتی چون $C > 0$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر n، $|a_n r^n| \le C$. اما در

این صورت ،

$$|a_n x^n| = |a_n r^n|\left|\frac{x}{r}\right|^n \le C\left|\frac{x}{r}\right|^n,$$

درنتیجه ، سری $\sum |a_n x^n|$ تحت تسلط سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\left|\frac{x}{r}\right|^n = C\left(1 + \left|\frac{x}{r}\right| + \left|\frac{x}{r}\right|^2 + \cdots\right)$$

می‌باشد. اگر $|x/r| < 1$ ، یا معادلا " $|x| < |r|$ ، این سری هندسی همگراست، و در این‌صورت ، بنا بر آزمون مقایسه $\sum |a_n x^n|$ نیز همگرا می‌باشد . به عبارت دیگر ، $\sum a_n x^n$ به ازای هر x که $|x| < |r|$ به‌طورمطلق همگرا می‌باشد .

برای اثبات حکم دوم ، ملاحظه‌می‌کنیم که اگر سری $\sum a_n x^n$ به ازای $x = s$ واگرا باشد. نمی‌تواند در نقطهٔ x که $|x| > |s|$ همگرا باشد . زیرا در این صورت ، بنابر قسمت اول برهان، $\sum a_n s^n$ نیز همگراست ، که با فرض متناقـض می‌باشد .

بازهٔ همگرایی . فرض کنیم I مجموعهٔ نقاطی باشد که به ازای آنها سری $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت ، همانطور که از نماد برمی‌آید ، I همواره یک بازه است ، به نام ***بازهٔ همگرایی*** (که احتمالا " می‌تواند تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ یا " بازهٔ تبـاه شدهٔ " $I = [0, 0]$ شامل فقط نقطهٔ 0 باشد) .

قضیهٔ ۱۳ (بازهٔ همگرایی یک سری توانی) . *فرض کنیم I مجموعهٔ تمام نقاط x باشد که به ازای آنها سری توانی $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت ، I بازه‌ای است که 0 نقطهٔ میانی آن می‌باشد .*

برهان (اختیاری). نقطهٔ 0 همواره متعلق به I است ، زیرا هر سری توانی به‌ازای $x = 0$ همگراست . هرگاه $x = 0$ تنها نقطه در I باشد ، آنگاه I به بازهٔ $[0, 0]$ تحویل می‌شود ، ولی در غیر این صورت I شامل دست کم دو نقطهٔ متمایز u و v می‌باشد . فـرض کنیـم r نقطه‌ای بین u و v باشد . در این صورت ، $|r| < |u|$ یا $|r| < |v|$ ، زیرا r باید از دسـت کم یکی یا هر دو نقطهٔ u و v به مبداء نزدیکتر باشد . لذا ، طبق قضیهٔ ۱۲ ، سـری $\sum a_n x^n$ بـه ازای $x = r$ (به‌طور مطلق) همگراست ؛ یعنی ، r نیز متعلق به I است . لذا ، هروقت مجموعهٔ I شامل دو نقطهٔ متمایز u و v باشد ، شامل هر نقطهٔ r بین u و v نیز می‌باشد. بنابراین ، I یک بازه می‌باشد (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۳۰) . به‌علاوه ، هرگاه r یک نقطهٔ

درونی I باشد. آنگاه $-r$ نیز متعلق به I می‌باشد. در واقع، در این حالت همیشه می‌توان نقاط u و v در I را طوری یافت که r بین u و v واقع باشد. اما، در این صورت، بنا بر استدلالی که هم اکنون شد، $\sum |a_n r^n|$ همگراست؛ ودرنتیجه، $\sum |a_n(-r)^n|$ چنین است. به عبارت دیگر، $\sum a_n x^n$ به ازای $x = -r$ (به‌طور مطلق) همگراست؛ یعنی، $-r$ متعلق به I می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که I دارای نقطهٔ میانی 0 می‌باشد.

به‌طور خلاصه، از قضیهٔ ۱۳ فوراً نتیجه می‌شود که سری توانی $\sum a_n x^n$ درست به یکی از صور زیر رفتار می‌کند:

(یک) سری فقط به ازای $x = 0$ همگراست، مثل مثال ۱، و در این صورت، بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[0, 0]$ تحویل می‌شود که فقط شامل نقطهٔ 0 است.

(دو) سری به ازای هر x (به‌طورمطلق) همگراست، مثل مثال ۲، و در این صورت، I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

(سه) سری به‌ازای مقادیر ناصفری از x همگرا و به‌ازای سایر مقادیر واگراست. دراین‌صورت، I یک بازهٔ متناهی به شکل $(-R, R)$، $[-R, R]$، $[-R, R)$ یا $(-R, R]$، که $R > 0$، است و این بسته به‌رفتار سری درنقاط $x = R$ و $x = -R$ است که‌باید جداگانه بررسی شود. در اینجا مهم‌است توجه شود که برهان قضیهٔ ۱۳ ما را مجاز به‌این‌نتیجه‌گیری که نقاط انتهایی I متعلق به I هستند نمی‌کند؛ و در واقع، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، بازهٔ همگرایی I ممکن است شامل یک یا هر دونقطهٔ انتهایی نباشد. به‌عبارت دیگر، سری ممکن است به ازای $x = R$ یا $x = -R$ همگرا باشد یا نباشد.

شعاع همگرایی. عدد R درحالت (سه) *شعاع همگرایی* سری‌توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد. حالت (یک) را می‌توان حالت جزء (سه) نظیر به $R = 0$، و حالت (دو) را حالت جزء (سه) نظیر به $R = \infty$ تلقی کرد.

مثال ۴. در سری هندسی $\sum x^n$ مثال ۳، شعاع همگرایی 1 است. بازهٔ همگرایی بازهٔ باز $(-1, 1)$ است، زیرا $\sum x^n$ به ازای $|x| \geq 1$، بخصوص به ازای $x = \pm 1$، واگراست. به طورکلی، سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = 1 + \frac{x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{R}\right)^n + \cdots$$

دارای شعاع همگرایی R و بازهٔ همگرایی $(-R, R)$ می‌باشد.

مثال ۵. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots \qquad (۲)$$

معلوم می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x|=|x|.$$

لذا، سری به ازای $|x|<1$ به‌طورمطلق همگرا و به ازای $|x|>1$ واگرا می‌باشد. درنتیجه، شعاع همگرایی 1 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ نیمباز $[-1,1)$ است. در واقع، به ازای $x=1$، سری (۲) به سری توافقی واگرای

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

تبدیل می‌شود، ولی به ازای $x=-1$ به سری متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

بدل خواهد شد. اگر در (۲) x را به $-x$ تغییر دهیم، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots$$

را به‌دست می‌آوریم که مجددا" شعاع‌همگرایی 1 را دارد، ولی به ازای $x=1$ به‌طورمشروط همگراست و به ازای $x=-1$ واگرا می‌باشد. بنابراین، این بار بازهٔ همگرایی $(-1,1]$ است؛ یعنی، بازهٔ نیمباز دیگر باهمان نقاط انتهایی ±1.

مثال ۶. سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{4}+\cdots \qquad (۳)$$

یک سری توانی است‌که فقط شامل توانهای زوج x است. بااعمال‌آزمون نسبت نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{n+2}\frac{n+1}{x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x|^2=x^2.$$

لذا، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $x^2<1$ یا معادلا" $|x|<1$، و واگراست‌اگر $x^2>1$ یا معادلا" $|x|>1$؛ درنتیجه، شعاع همگرایی 1 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ بستهٔ

$[-1, 1]$ می‌باشد. در واقع، با گذاردن $x = 1$ و $x = -1$ در سری (۳)، یک سری به‌طور مشروط همگرا، یعنی سری توافقی متناوب، به دست می‌آوریم.

مثال ۷. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+1)^2} = 1 + \frac{x}{5 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{5^2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 4^2} + \cdots \tag{۴}$$

معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)^2} \frac{5^n(n+1)^2}{x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{|x|}{5} = \frac{|x|}{5}.$$

لذا، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $|x| < 5$ و واگراست اگر $|x| > 5$؛ درنتیجه، شعاع همگرایی 5 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ بستهٔ $[-5, 5]$ می‌باشد. در واقع، سری (۴) به ازای $x = 5$ به سری همگرای

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

تبدیل می‌شود (سری p به ازای $p = 2$)، حال آنکه به ازای $x = -5$ بــه سری به طور مطلق همگرای

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

بدل خواهد شد.

از مثالهای قبل واضح است که یک سری توانی ممکن است در هر دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی I خود به‌طور مطلق همگرا، به‌طور مشروط همگرا، یا واگرا باشد، یا در یک نقطهٔ انتهایی I به‌طور مشروط همگرا و در نقطهٔ انتهایی دیگر واگرا باشد. به‌عنوان تمرین نشان دهید یک سری توانی نمی‌تواند در یک نقطهٔ انتهایی I به‌طور مطلــق همگرا و در نقطهٔ انتهایی دیگر واگرا یا به‌طور مشروط همگرا باشد.

البته، یک سری توانی لازم نیست جملهٔ ثابت داشته باشد؛ و در واقع، ممکن است با توانی از x شروع شده و ممکن است فاقد توانی (متناهی یا نامتناهی) از x باشد.

مثال ۸. با اعمال آزمون ریشه بر سری توانی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n} = \frac{2^2 x^4}{(\ln 2)^2} + \frac{3^2 x^6}{(\ln 3)^3} + \frac{4^2 x^8}{(\ln 4)^4} + \cdots,$$

که شامل فقط توانهای زوجی از x با شروع از x^4 است، معلوم می‌شود که به ازای هرمقدار x،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2x^{2n}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\ln n}|x|^2 = 0$$

(به یاد آورید که وقتی $n \to \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \to 1$) . لذا، این سری به ازای هر x به طور مطلق همگراست؛ یعنی، شعاع همگرایی ∞ و بازهٔ همگرایی $(-\infty, \infty)$ دارد.

در سری توانی به شکل کلیتر $\sum a_n(x-c)^n$ ، که در آن c ثابت دلخواهی است، مجموعهٔ نقاطی که به‌ازای آنها سری همگراست مجددا "یک بازهٔ مانند I ، به نام ***بازهٔ همگرایی***، است؛ و در واقع، سه حالت ذکر شده در صفحهٔ ۸۵۷ به صورت زیر درمی‌آید:

(یکُ) سری فقط به ازای $x = c$ همگراست، و در این صورت بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[c, c]$ شامل تنها نقطهٔ c تحویل می‌شود.

(دُو) سری به ازای هر x (به‌طورمطلق) همگراست، و در این صورت I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

(سَه) سری به ازای بعضی مقادیر x که مساوی c نیستند همگرا بوده و به ازای سایر مقادیر واگرا می‌باشد. دراین‌صورت، I یک‌بازهٔ متناهی به‌شکل $(c-R, c+R)$ ، $[c-R, c+R]$ ، $[c-R, c+R)$ یا $(c-R, c+R]$ است و این‌بسته به‌رفتار سری‌درنقاط $x = c + R$ و $x = c - R$ است که باید جداگانه بررسی شوند.

برای به دست آوردن این حالات از حالات قبلی (یک)، (دو)، و (سه) در مورد سری توانی به شکل $\sum a_nx^n$ ، کافی است توجه کنیم که هرگاه متغیر یک سری توانی‌از x به $x - c$ تغییر کند، آنگاه بازهٔ انتگرالگیری آن c واحد به راست در امتداد خط‌حقیقی انتقال می‌یابد اگر $c > 0$ ، و $|c|$ به چپ انتقال می‌یابد اگر $c < 0$. مثل قبل، عدد R در حالت (سَه) ***شعاع همگرایی*** سری توانی $\sum a_n(x-c)^n$ نام دارد، و حالات (یکُ) و (دُو) نظیر $R = 0$ و $R = \infty$ می‌باشند. توجه کنید که R همواره نصف طول بازهٔ همگرایی است، و طول بازه‌های $[c, c]$ و $(-\infty, \infty)$ مساوی 0 و ∞ تلقی می‌شود.

مثال ۹ . سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} = 1 + \frac{x-6}{2} + \frac{(x-6)^2}{3} + \frac{(x-6)^3}{4} + \cdots \qquad (۲')$$

یک سری توانی نسبت به $x-6$ است‌که از تعویض x با $x-6$ در سری (۲) به‌دست‌می‌آید. چون (۲) دارای شعاع همگرایی 1 و بازهٔ همگرایی $[-1, 1)$ است، سری (′۲) همان شعاع همگرایی 1 را دارد ولی با بازهٔ همگرایی مختلف؛ یعنی، بازهٔ $[6-1, 6+1) = [5, 7)$ شش واحد به راست.

به صورت دیگر، با اعمال مستقیم آزمون نسبت بر سری (′۲)، به دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{n+2}\,\frac{n+1}{(x-6)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x-6| = |x-6|.$$

پس نتیجه‌می‌شودکه سری (′۲) به طورهمگراست اگر $|x-6| < 1$، یعنی‌اگر $-1 < x-6 < 1$ یا معادلاً $5 < x < 7$، و واگراست اگر $|x-6| > 1$، یعنی‌اگر $x-6 > 1$ یا $x-6 < -1$ که با $x > 7$ یا $x < 5$ معادل می‌باشد. به‌علاوه، به ازای $x = 7$ سری به سری توافقی واگرا تبدیل می‌شود، حال آنکه به ازای $x = 5$ به سری توافقی متناوب (به‌طور مشروط) همگرا بدل می‌شود. لذا، مثل قبل، سری به شعاع همگرایی 1 و بازهٔ همگرایی $[5, 7)$ می‌باشد.

مثال اخیر ما روش صریحی برای ساختن تمام ردهٔ سریهای توانی با شعاع همگرایی یکسان به دست می‌دهد، و در بخش بعد به کار خواهد رفت.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی بوده، و $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = 1. \tag{۵}$$

نشان دهید که سری $\sum c_n a_n x^n$ همان شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ را دارد.

حل *(اختیاری)*. فرض کنیم R شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ و R' شعاع همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ باشد. همچنین، $R \neq 0, R \neq \infty$. به ازای هر نقطهٔ $x \neq 0$ در $(-R, R)$، ابتدا نقطهٔ r را طوری می‌گیریم که $|x| < |r| < R$؛ درنتیجه، $\sum |a_n r^n|$ همگراست، و بعداز عدد صحیح N داریم

$$\sqrt[n]{c_n} < \frac{|r|}{|x|},$$

یا معادلاً، به ازای هر $n > N$،

$$c_n|x|^n < |r|^n$$

(این به خاطر (۵) و نامساوی $|r|/|x| > 1$ میسر است) . پس اگر $n > N$ ،

$$|c_n a_n x^n| = c_n|a_n|\,|x|^n < |a_n|\,|r|^n = |a_n r^n|$$

درنتیجه ، سری $\sum |c_n a_n x^n|$ تحت تسلط سری همگرای $\sum |a_n r^n|$ می‌باشد . بنابراین ، طبق آزمون مقایسه ، $\sum c_n a_n x^n$ (به‌طور مطلق) همگراست . لذا ، نشان داده‌ایم که x متعلق‌به بازهٔ‌همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ است‌هروقت x متعلق به بازهٔ همگرایی $\sum a_n x^n$ باشد. پس‌نتیجه می‌شود که $R' \geq R$ (همگرایی هر دو سری به ازای $x = 0$ بدیهی است) .

حال فرض کنیم

$$a'_n = c_n a_n, \qquad c'_n = \frac{1}{c_n}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1,$$

و دقیقا " همین استدلال در مورد سری $\sum a'_n x^n = \sum c_n a_n x^n$ با شعاع همگرایی R' و سری $\sum c'_n a'_n x^n = \sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R نشان می‌دهد که $R \geq R'$. اما نامساویهای $R' \geq R$ و $R \geq R'$ همراه باهم ایجاب می‌کنند که $R' = R$.

بالاخره ، اگر $R = 0$ ، نامساوی $R \geq R'$ ایجاب می‌کند که $R' = 0$ ، حال‌آنکه اگر $R = \infty$ ، $\sum c_n a_n x^n$ بــه ازای هر x همگراست (چرا؟) ؛ درنتیجه ، $R' = \infty$. لــذا ، در هر حــالت ، $R' = R$ ؛ یعنی ، دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum c_n a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی یکسان می‌باشند .

به عنوان کاربردی از مثال ۱۰ ، ملاحظه می‌کنیم که دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum n^p a_n x^n$ به ازای هر عدد حقیقی p شعاع همگرایی یکسانی دارند ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^p = 1.$$

مسائل

شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده را بیابید .

۱ . $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-\pi)^n$ ۲ . $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$

۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{3/2}}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$

۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}(x+5)^n$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

۱۰. $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n$

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} x^n \quad (0 < c < 1)$

۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!(n+4)!} x^n$

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)} x^{2n}$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-3)^n$

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2}(x+e)^n$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0, b>0)$

۱۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} x^n$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right) x^n$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right) x^n$

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n)x^n$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$

۲۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n}$

۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n$

۲۷. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+c^n)x^n \quad (0 \le c < \infty)$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{4n}$

۲۹. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{3^{n^2}}$

۳۱. به ازای سری توانی $\sum a_n x^n$ ، فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \qquad \text{(یک)}$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L, \qquad \text{(یکَ)}$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است. نشان دهید که شعاع همگرایی R سری داده‌شده با فرمول

$$R = \begin{cases} 1/L \text{ ، } & 0 < L < \infty \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & L = \infty \text{ اگر} \\ \infty \text{ ، } & L = 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad \text{(دو)}$$

داده می‌شود (در این مسئله نتایج آزمونهای نسبت وریشه درمورد شعاع همگرایی یک سری توانی که درآن یکی ازحدود (یک) و (یکَ) وجود دارد خلاصه شده‌است. درواقع، وجود (یک) وجود (یکَ) را ایجاب می‌کند ولی عکس آن درست نیست؛ (ر.ک مسئلهٔ ۲۹، صفحهٔ ۸۵۳.) لذا، سریهایی توانی وجود دارند که درآنها حد (یکَ) وجود دارد ولی حد (یک) موجود نیست. همچنین، سریهای مانند سری مسئلهٔ ۳۷ وجوددارند که به ازای آنها نه حد (یک) وجود دارد نه حد (یکَ).)

سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R داده شده است که $0 < R < \infty$. شعاع همگرایی سریهای زیر را بیابید.

۳۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

۳۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} a_n x^n$

۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n$

۳۵. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p x^n$ (p دلخواه)

۳۶. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn} \quad (p = 2, 3, \ldots)$

فرض کنید حد (یک) یا (یکَ)، بنابر نیاز، وجود داشته باشد.

۳۷. نشان دهید که هیچیک از حدود (یک) و (یکَ) در مورد سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n x^n$$

وجود ندارد. شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی این سری را بیابید.

۷.۹ مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

مجموع یک سری توانی. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با بازهٔ همگرایی I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف‌شده و مقدارش در هر نقطهٔ r در I مجموع سری $\sum a_n r^n$ است. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد، و می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (۱)$$

همواره به یاد داشته باشید که مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ *تابعی* از متغیر x است برخلاف مجموع سری $\sum a_n r^n$ که عدد می‌باشد. انتظار این می‌رفت، زیرا $\sum a_n x^n$ سریی است که جملاتش توابعی از x اند، ولی $\sum a_n r^n$ یک سری عددی است؛ یعنی، سریی که جملاتش عدد می‌باشند (r یک‌مقدار خاص‌از x است). فرمول (۱) **بسط سری توانی** f (در $x = 0$) نام دارد.

مثال ۱. سری توانی $\sum x^n$ یک‌سری‌هندسی با بازهٔ همگرایی $I = (-1, 1)$ است. به‌علاوه همانطور که از مثال ۱، صفحهٔ ۸۰۶، می‌دانیم،

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

مجموع سری $\sum x^n$ است ولی فقط بر بازهٔ I، زیرا سری خارج I واگرا می‌باشد. درنتیجه،

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (۲)$$

بسط سری توانی این تابع می‌باشد.

به‌طورکلی، فرض کنیم $\sum a_n(x-c)^n$ یک‌سری‌توانی نسبت‌به $x - c$ با بازهٔ همگرایی

I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطهٔ r در I مجموع سری عددی $\sum a_n(r-c)^n$ می‌باشد. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n(x-c)^n$ نـام دارد، و می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n. \qquad (\text{۱}')$$

فرمول (۱′) بسط سری توانی f در $x = c$ نـام دارد[1]، و این در صورت $c = 0$ بـه فرمول (۱) تحویل می‌شود. در مثال ۴ نشان دادیم که ضرایب a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ در عبـارت (۱′) به‌طور منحصر به فرد توسط تابع f و ثابت c معین می‌شود.

مثال ۲. سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots \qquad (\text{۳})$$

همگراست اگر و فقط اگر $|x-1| < 1$، ولی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots, \qquad (\text{۳}')$$

که نیز هندسی است، همگراست اگر و فقط اگر $|x/2| < 1$ یا معادلاً" $|x| < 2$. از تعویض x در فرمول (۲) ابتدا با $x - 1$ و سپس با $x/2$، معلوم می‌شود که هر دو سری (۳) و (۳′) دارای مجموع یکسان

$$\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

می‌باشند. لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

دارای بسط سری توانی

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots \qquad (|x| < 2)$$

---

۱. بسط " در $x = c$ " به این معنی است که نقطهٔ میانی بازهٔ همگرایی سری توانی $x = c$ می‌باشد. گاهی به جای این از عبارت " نسبت به $x = c$ " استفاده می‌کنیم که به همان معنی می‌باشد.

در $x = 0$ و بسط

$$\frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots \qquad (|x-1| < 1)$$

در $x = 1$ است. توجه کنید که بازهٔ همگرایی سری (۳′) مساوی $(-2, 2)$ است، حال‌آنکه بازهٔ همگرایی (۳) بازهٔ کوچکتر $(0, 2)$ می‌باشد. این با معنی است، زیرا بازهٔ همگرایی سری توانی f نمی‌تواند شامل نقطهٔ $x = 2$ باشد که در آن f به بی‌نهایت نزدیک‌می‌شود.

به ازای سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{۴}$$

می‌توان با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از (۴) دو سری توانی جدید تشکیل می‌داد؛ یعنی، می‌توان سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \tag{۵}$$

را تشکیل داد که جملهٔ عمومی‌اش مشتق $a_n x^n$ است، و سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \tag{۶}$$

که جملهٔ عمومی‌اش انتگرال $a_n x^n$ (از 0 تا x) می‌باشد. *هر سه سری (۴)، (۵)، و (۶) دارای شعاع همگرایی یکسان‌اند.* در واقع، ضرب یک سری توانی در x یا تقسیم یک سری توانی بدون جملهٔ ثابت بر x اثری بر شعاع همگرایی ندارد (چرا نه؟)؛ درنتیجه، سری (۵) همان شعاع همگرایی

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \tag{۵′}$$

را دارد، ولی سری (۶) شعاع همگرایی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n \tag{۶′}$$

را خواهد داشت. اما (۵′) و (۶′) هر دو به‌شکل $\sum c_n a_n x^n$ می‌باشند، که در آن‌وقتی $n \to \infty$ ، $\sqrt[n]{c_n} \to 1$ ، زیرا وقتی $n \to \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \to 1$ (ر.ک. صفحهٔ ۸۵۱) و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{-(1/n)\ln(n+1)} = e^0 = 1.$$

بنابراین، طبق مثال ۱۰، صفحهٔ ۸۶۱، معلوم می‌شود که دوسری (۵′) و (۶′) همان شعاع

همگرایی سری اصلی (۴) را دارند؛ و درنتیجه، سریهای مشتقگیری شده و انتگرالگیری شدهٔ (۵) و (۶) نیز چنین می‌باشند. کاربرد مکرر این استدلال نشان می‌دهد که *حاصل هرچند بار مشتقگیری یا انتگرالگیری جمله به جمله از سری توانی* $\sum a_n x^n$ *سری‌توانی‌دیگری با همان شعاع همگرایی می‌باشد.*

مشتقگیری از سری توانی. قضیهٔ زیر رابطهٔ بین تابع مجموع یک سری توانی و تابع مجموع سری مشتقگیری شده را به ما می‌دهد. علی‌رغم سادگی صورت قضیه، برهانی تکنیکی دارد و لذا حذف می‌شود. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به کتابی در حساب دیفرانسیل‌وانتگرال پیشرفته مراجعه نماید.

قضیهٔ ۱۴ (مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی). *فرض‌کنیم* $\sum a_n x^n$ *یک سری توانی با شعاع همگرایی* R *باشد. در این صورت، تابع*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

یعنی مجموع سری توانی که بر بازهٔ باز $(-R, R)$ *مشتقپذیر و دارای‌مشتق‌زیراست:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad (۷)$$

که مساوی مجموع سری حاصل از مشتقگیری جمله به جمله از سری داده شده می‌باشد.

با کاربرد مکرر قضیهٔ ۱۴، معلوم می‌شود که f در هر نقطهٔ $(-R, R)$ از هر مرتبه مشتق دارد؛ این امر را می‌توان خلاصه‌کرد و گفت‌که f بر $(-R, R)$ *بی‌نهایت بار مشتقپذیر* است. به‌علاوه، مشتقپذیری f بر $(-R, R)$ پیوستگی f بر $(-R, R)$ را ایجاب می‌کند. لذا، **مجموع هر سری توانی یک تابع پیوسته می‌باشد.**

انتگرالگیری از سریهای توانی. به کمک قضیهٔ ۱۴ می‌توان به‌آسانی رابطهٔ بین f و تابعی که مجموع سری *انتگرالگیری* شده است را به دست آورد.

قضیهٔ ۱۵ (انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی). *فرض‌کنیم* $\sum a_n x^n$ *یک سری توانی با شعاع همگرایی* R *باشد. در این صورت، تابع*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[0, x]$ از $(-R, R)$ انتگرالپذیر است که انتگرالش

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

مساوی مجموع سری حاصل از انتگرالگیری جمله به جمله از سری دادهشده است.

برهان. انتگرالپذیری f بر $[0, x]$ نتیجهٔ فوری پیوستگی f بر $(-R, R)$ است. قبلاً" نشان داده‌ایم که سری

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

دارای شعاع همگرایی R است، و بوضوح $F(0) = 0$. مشتقگیری جمله به جمله ازاین سری فوراً" سری اصلی $f(x) = \sum a_n x^n$ را نتیجه می‌دهد؛ ولذا، بنابرقضیهٔ ۱۴، $F'(x) = f(x)$. پس نتیجه می‌شود که

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(توجه کنید که این چگونه شرط $F(0) = 0$ را وارد می‌کند). حال فرمول مطلوب (۸) را می‌توان با متحدگرفتن دو عبارت مربوط به $F(x)$ به دست آورد.

حال چند مثال از مشتقگیری جمله به جمله از سریهای توانی عرضه می‌کنیم.

مثال ۳. کاربرد آزمون نسبت یا ریشه فوراً" نشان می‌دهد که سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{۹}$$

دارای شعاع همگرایی 1 است. ازرابطهٔ (۹) با استفاده از قضیهٔ ۱۴ دوبار مشتق‌می‌گیریم به دست می‌آید

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \tag{۹'}$$

و

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}. \tag{۹''}$$

سه سری (۹)، (۹')، و (۹") همه دارای شعاع همگرایی 1 هستند، ولی به‌آسانی تحقیق می‌شود (به عنوان تمرین انجام دهید) که بازهٔ همگرایی (۹) بازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$

است، بازهٔ همگرایی (۹') بازهٔ *نیمباز* $(-1, 1]$ است، و بازهٔ همگرایی ("۹) بازهٔ *باز* $(-1, 1)$ می‌باشد. لذا، با آنکه مشتقگیری از یک سری توانی همگرایی را در هر نقطهٔ درونی بازهٔ همگرایی I حفظ می‌کند، ممکن است همگرایی در نقاط انتهایی I را نابود سازد.

مثال ۴. هرگاه دوسری توانی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ در همسایگی نقطهٔ $x = 0$ مجموع یکسان داشته باشند، آنگاه دوسری یکی هستند؛ یعنی، توانهای یکسان x دارای ضرایب یکسان می‌باشند. در واقع، با گذاردن $x = 0$ در اتحاد

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \qquad (۱۰)$$

فوراً به دست می‌آوریم $a_0 = b_0$. به‌علاوه، به خاطر قضیهٔ ۱۴، اتحاد (۱۰) در صورت مشتقگیری از طرفین به تعداد دفعات مساوی برقرار می‌ماند. با n بار مشتقگیری از (۱۰) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2 + \cdots \\ = n!b_n + (n+1)!b_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}b_{n+2}x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

که پس‌از قراردادن $x = 0$ به‌دست‌می‌آید $a_n = b_n$. بنابراین، به‌ازای‌هر $n = 0, 1, 2, \ldots$، $a_n = b_n$. این استدلالی است مشابه استدلال به کار رفته در قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۶۴۲، راجع به ضرایب چندجمله‌ایهای یکسان که در مورد سریهای توانی بیان شده است. به طور کلی، هرگاه $\sum a_n(x-c)^n$ و $\sum b_n(x-c)^n$ دو سری توانی نسبت به $x - c$ باشند که در همسایگی نقطهٔ $x = c$ دارای مجموع یکسانند، آنگاه دو سری یکی می‌باشند (در اتحاد $\sum a_n(x-c)^n \equiv \sum b_n(x-c)^n$ و اتحادهای ناشی از مشتقگیری مکرر قرار دهید $x = c$). لذا، ضرایب یک بسط به صورت سری توانی $f(x) = \sum a_n(x-c)^n$ *منحصراً* به وسیلهٔ تابع f معین می‌شوند؛ و نیز، البته با انتخاب ثابت c.

مثال ۵. از آزمون نسبت فوراً نتیجه می‌شود که سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

به ازای هر x همگراست. بنابرقضیهٔ ۱۴،

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

درنتیجه، سری مشتقگیری شده دقیقاً" همان سری اصلی است. لذا، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = y,$$

تحت شرط اولیهٔ

$$y|_{x=0} = 1,$$

که با گذاردن $x = 0$ در سری مربوط به $f(x)$ به دست می‌آید، صدق می‌نماید. همانطور که از بخش ۶.۶ می‌دانیم، $y = e^x$ جواب منحصر به فرد این مسئلهٔ مقدار اولیه است. بنابر این،

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{۱۱}$$

و ما بسط به صورت سری توانی e^x در $x = 0$ را یافته‌ایم.

اگر در فرمول (۱۱) اول $x = 1$ و سپس $x = -1$ اختیار کنیم، می‌توانیم دو سری عددیی که قبلاً" با آنها مواجه شدیم جمعبندی کنیم؛ یعنی،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e \tag{۱۲}$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots = e^{-1}. \tag{۱۲'}$$

در واقع، حال می‌توان بااستفاده‌از (۱۲) عدد e را با هر دقت مطلوب حساب‌کرد. مثلاً"، فرض کنید هشت جملهٔ اول سری (۱۲) را نگهداشته و از جملات دیگر صرف‌نظرکرده‌باشیم. در این صورت، خطای مرتکب شده مساوی است با

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \cdots = \frac{1}{8!} + \frac{1}{8! \cdot 9} + \frac{1}{8! \cdot 9 \cdot 10} + \cdots,$$

که مسلماً" از مجموع سری هندسی

$$\frac{1}{8!}\left[1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{8!}\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8!}\frac{9}{8} \approx 2.8 \times 10^{-5}$$

کوچکتر است . بنابراین ، می‌توان مطمئن بود که تقریب

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{685}{252} \approx 2.7183$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است (در واقع ، $e = 2.7182818\ldots$). دراینجا از این امر استفاده می‌کنیم که یک تقریب **تا n رقم اعشار دقیق** است اگر قدر مطلق خطای تقریب از $0.5 \times 10^{-n} = 5 \times 10^{-n-1}$ کوچکتر باشد .

تبصره . در مثال قبل تمایز مختصری بین تقریب $e \approx \frac{685}{252}$ و تقریب $e \approx 2.7183$ وجود دارد . تقریب اول فقط تحت **خطای برشی** ناشی از حذف تمام جز هشت جملهٔ اول سری (۱۲) است ، حال آنکه تقریب دوم تحت **خطای گردکردن** اضافی که در نمایش کسر $\frac{685}{252}$ به صورت یک اعشاری با چهار رقم صورت می‌گیرد نیز قرار دارد . اگر قدر مطلق خطای گردکردن نزدیک کران بالایی خود 5×10^{-5} بوده و خطای برشی همان علامت خطای گردکردن را داشته باشد ، مجموع خطاهای برشی و گردکردن ممکن‌است‌از 5×10^{-5} تجاوز کند ؛ لذا ، چهارمین رقم تقریب $e \approx 2.7183$ را می‌توان غیرمسلم (ولی فقط به اندازهٔ ± 1) دانست . تحلیل بیشتر نشان می‌دهد که این رخ نمی‌دهد ؛ درنتیجه ، تقریب $e \approx 2.7183$ تا چهار رقم اعشار درست است . برای آنکه مطالب ساده باشند ، از حالا به بعد در تقریبات مبتنی بر سریهای نامتناهی از خطاهای گردکردن صرف نظر خواهیم کرد .

مثال ۶ . ما قبلاً " از مثال ۱ می‌دانیم که

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (|x| < 1). \tag{۱۳}$$

با استفاده از قضیهٔ ۱۴ ، از این سری جمله به جمله مشتق می‌گیریم ، به دست می‌آید

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad (|x| < 1), \tag{۱۳'}$$

که بسط به صورت سری توانی تابع $1/(1-x)^2$ در $x = 0$ است . توجه کنید که (۱۳') را می‌توان از (۱۳) نیز با ضرب صوری " چند جمله‌ای نامتناهی " $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ در خودش به دست آورد :

$$\begin{array}{r} 1 + \ x + \ x^2 + \ x^3 + \cdots \\ 1 + \ x + \ x^2 + \ x^3 + \cdots \\ \hline 1 + \ x + \ x^2 + \ x^3 + \cdots \\ x + \ x^2 + \ x^3 + \cdots \\ x^2 + \ x^3 + \cdots \\ x^3 + \cdots \\ \hline 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{array}$$

مشروعیت این روند نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر منسوب به کشی، که آن را بدون برهان ذکر می‌کنیم: *فرض کنیم* $f(x) = \sum a_n x^n$ *و* $g(x) = \sum b_n x^n$ *دو سری توانی با شعاعهای همگرایی* R_a *و* R_b باشند. در این صورت، اگر $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ ،

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots$$

حال، به کمک قضیهٔ ۱۵، به چند مورد انتگرالگیری جمله به جمله از سریهای توانی می‌پردازیم.

مثال ۷. با انتگرالگیری جمله به جمله از سری هندسی همگرای

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \qquad (|x| < 1) \tag{۱۴}$$

به دست می‌آوریم

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

اما

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

زیرا $|x| < 1$؛ و لذا،

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (|x| < 1), \tag{۱۵}$$

که بسط سری توانی تابع $\ln(1+x)$ در $x = 0$ است. قضیهٔ ۱۵ اعتبار این بسط را فقط

به ازای $-1 < x < 1$ تضمین می‌کند، ولی شک داریم که به ازای $x = 1$ نیز برقرار باشد، زیرا طرف راست (۱۵) به ازای $x = 1$ به یک سری توافقی متناوب به طور مشروط همگرا تبدیل می‌شود. در واقع، بسط (۱۵) به ازای $x = 1$ برقرار *است*؛ و لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2. \qquad (۱۵')$$

این نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر که به ریاضیدان اعجوبهٔ نروژی نیلز آبل[1] (۱۸۰۲–۱۸۲۹) منسوب می‌باشد: *هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R به‌ازای $x = R$ همگرا باشد، آنگاه مجموعش از چپ در $x = R$ پیوسته است*؛ *یعنی*،

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

قضیهٔ آبل در اعمال بر سری (۱۵)، که در $x = 1$ همگراست، می‌گوید که

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(1 + x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

و این فرمول (۱۵') را ثابت می‌کند، زیرا حد موجود در آن چیزی جز $\ln 2$ نیست.

مثال ۸. از تغییر x به x^2 در بسط (۱۴) معلوم می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (|x| < 1).$$

انتگرالگیری جمله به جمله از این سری توانی نتیجه می‌دهد که

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}.$$

اما

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan x,$$

درنتیجه، بسط سری توانی $\arctan x$ در $x = 0$ مساوی است با

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x| < 1). \qquad (۱۶)$$

---

1. Neils Abel

این نتیجه به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، جیمز گرگوری[1]، که آن را در ۱۶۷۱ کشف کرد، سری گرگوری نام دارد. به‌ازای $x = 1$، طرف‌راست (۱۶) به‌صورت سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ درمی‌آید که بنابر آزمون متناوب به‌طور مشروط همگراست. بنابراین، قضیهٔ آبل می‌گوید که

$$\lim_{x \to 1^-} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

چون این حد $\arctan 1 = \pi/4$ است، پس نتیجه می‌شود که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

این سری آنقدر کند همگراست که برای محاسبهٔ π مفید نیست، ولی راه دیگری برای استفاده از سری گرگوری برای محاسبهٔ π وجود دارد که دقتش زیاد می‌باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۸۴، صفحهٔ ۹۱۸).

مثال ۹. در مثال ۴، صفحهٔ ۶۷۱، از قاعدهٔ سیمپسون برای تقریب انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

تا چهار رقم اعشار استفاده کردیم. حال راه بسیار ساده‌تری برای تقریب I نشان می‌دهیم که مبتنی بر استفاده‌از سریهای توانی‌است، که درآن مقادیر عددی انتگرالده‌لازم نمی‌شوند. از تغییر x به $-x^2$ در فرمول (۱۱)، بسط سری توانی

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

به دست می‌آید، که به ازای هر x معتبر است. در این صورت، با انتگرالگیری جمله‌به‌جمله از این سری از 0 تا 1، معلوم می‌شود که

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \cdots$$

فرض کنیم R_n خطای حاصل از تقریب I به وسیلهٔ مجموع n جملهٔ اول سری عددی سمت راست باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۸۳۷، قدرمطلق R_n از اولین جملهٔ

1. James Gregory

استفاده نشده کوچکتر است؛ یعنی ،

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+1)n!},$$

و اگر $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ ، می‌توان مطمئن بود که تقریب تا چهار رقم اعشـار دقیق است. چون

$$\frac{1}{13 \cdot 6!} \approx 1.1 \times 10^{-4}, \qquad \frac{1}{15 \cdot 7!} \approx 1.3 \times 10^{-5},$$

کوچکترین عدد صحیح n که $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ مساوی 7 است . پس نتیجه‌می‌شود که‌تقریب

$$\begin{aligned} I &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0.7468 \end{aligned}$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است .

سری دوجمله‌ای . بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای ، هرگاه r عدد صحیح نامنفیی باشد ، آنگاه

$$\begin{aligned} (1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 \\ + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^r \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

(در فرمول (۵) ، صفحهٔ ۳۶۴ ، قرار می‌دهیم $a = 1, b = x, n = r$) . مثال اخیـر ایـن فرمول را به حالتی که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است تعمیم می‌دهد .

مثال ۱۰ . سری توانی

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n \\ &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است ، *سری دوجمله‌ای* نام دارد . اگر r عدد صحیح نامنفیی باشد ، سری دوجمله‌ای مختوم بوده و به چندجمله‌ای (۱۷) از درجهٔ r تحویـل می‌شود ، ولی در غیر این صورت بی‌نهایت جمله وجود دارند و سری دارای شعاع همگرایی

1 می‌باشد (این را به کمک آزمون نسبت نشان دهید) . لذا ، تابع $f(x)$ بر بازهٔ $-1 < x < 1$ تعریف شده است . با مشتقگیری جمله به جمله از (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$f'(x) = r + r(r-1)x + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots, \qquad (۱۸')$$

که پس از ضرب در x به صورت زیر درمی‌آید :

$$xf'(x) = rx + r(r-1)x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^n + \cdots$$

حال پس از توجه به این امر که ضریب x^n در (۱۸') آخرین جملهٔ نوشته شده نبوده بلکه جملهٔ بعدی (نوشته نشده) یعنی

$$\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)}{n!}x^n.$$

است ، دو سری اخیر را به هم می‌افزاییم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f'(x) &+ xf'(x) \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)}{n!} + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}\right]x^n \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{r-n}{n}+1\right)x^n \\ &= r + r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n \\ &= r\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n\right] = rf(x). \end{aligned}$$

لذا ، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1+x)y' = ry, \qquad (۱۹)$$

تحت شرط اولیهٔ

$$y|_{x=0} = 1, \qquad (۱۹')$$

حاصل از قراردادن $x = 0$ در (۱۸) صدق می‌کند .

معادلهٔ (۱۹) را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد ، ولی ساده‌تر است‌که جواب $y = (1+x)^r$ را حدس بزنیم ، ناشی از این امر که چون مشتقگیری درجهٔ $(1+x)^r$ را یکی کم می‌کند ، عامل اضافی $1 + x$ طرف چپ (۱۹) آن را جبران خواهد کرد . فوراً می‌بینیم که این جواب در شرط اولیهٔ (۱۹') صدق می‌کند . لذا ، بالاخره تابع $f(x)$ در

(۱۸) را مساوی $(1+x)^r$ یافته‌ایم؛ درنتیجه، (۱۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1). \qquad (۲۰)$$

این بسط سری دوجمله‌ای $(1+x)^r$ قضیهٔ دوجمله‌ای (۱۷) را به‌حالت نمای حقیقی‌دلخواه r تعمیم می‌دهد.

مسائل

تابع گویای داده شده را به صورت سری توانی در $x = 0$ بسط داده، و شعاع همگرایی R را مشخص نمایید.

۱. $\dfrac{1}{3-x}$ ۲. $\dfrac{x}{1+x}$ ۳. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

۴. $\dfrac{x^{11}}{1-x}$ ۵. $\dfrac{x}{2x+1}$ ۶. $\dfrac{1}{1-x^2}$

۷. $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ ۸. $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$ ۹. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

۱۰. فرض کنید $f(x) = \sum a_n x^n$. به کمک مثال ۴، نشان دهید اگر f زوج باشد، $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$، حال آنکه اگر f فرد باشد، $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$.

فرض کنید، مثل مثال ۲، $f(x) = 1/(2-x)$. بسط سری توانی f را در نقاط زیر بیابید.

۱۱. در $x = 3$ ۱۲. در $x = -1$

تابع داده شده را در $x = 0$ به صورت سری توانی بسط داده، و شعاع همگرایی R رامشخص نمایید.

۱۳. $x^2 e^{-x}$ ۱۴. xe^{x^3} ۱۵. $\sinh x$

۱۶. $\cosh x$ ۱۷. $a^x \quad (a > 0)$ ۱۸. $\ln \dfrac{1}{1-x^2}$

۱۹. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ ۲۰. $(1+x)\ln(1+x)$ ۲۱. $\ln(1-x+x^2)$

به کمک فرمول (۲۰)، پنج جملهٔ اول بسط سری دوجمله‌ای تابع داده شده را بیابید.

۲۲. $(1+x)^{1/2}$ ۲۳. $(1+x)^{1/3}$ ۲۴. $(1+x)^{-1/2}$

۲۵. $(4-x)^{3/2}$ ۲۶. $(8+x)^{2/3}$ ۲۷. $(1-x^2)^{-10}$

بسط سری توانی زیر را بیابید.

۲۸. $\ln x$ در $x = 1$ ۲۹. $\ln(2+2x+x^2)$ در $x = -1$

۳۰. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} + \cdots \qquad \text{(یک)}$$

یک سری توانی نیست ، زیرا جملات‌نمایی‌اند نه توانهایی از x . نشان دهیدکه‌سری (یک) همگراست اگر و فقط اگر x در بازهٔ $(0, \infty)$ قرار داشته باشد . مجموع این سری روی $(0, \infty)$ چیست ؟ آیا $(0, \infty)$ یک بازهٔ همگرایی ممکن برای یک سری‌توانی است ؟

با استفاده از سه جملهٔ اول سری دو جمله‌ای (۲۰) ، ریشهٔ داده شده را تقریب کنید . در هر حالت تحقیق کنید که تقریب تا پنج رقم اعشار دقیق است .

۳۱. $\sqrt{1.04}$ ۳۲. $\sqrt[3]{0.975}$ ۳۳. $\sqrt[4]{79}$

۳۴. $\sqrt[5]{33}$ ۳۵. $\sqrt[6]{65}$ ۳۶. $\sqrt[7]{126}$

۳۷. با استفاده از سری دوجمله‌ای ، نشان دهید که

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

مشروط براینکه $|x| < 1$.

۳۸. با مشتقگیری مستقیم از بسط سری توانی $\cosh x$ و $\sinh x$ (ر.ک. مسائل ۱۵ و ۱۶) ، تحقیق کنید که $D_x \cosh x = \sinh x,\ D_x \sinh x = \cosh x$.

۳۹. با استفاده از سری گرگوری (۱۶) ، نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

۴۰. نشان دهید که مجموع $y = f(x)$ سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' - y = 0$ صدق می‌کند .

۴۱. سری توافقی‌متناوب $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ آنقدر کند همگراست که در محاسبهٔ $\ln 2$ ارزش عملی ندارد . نشان دهید که $\ln 2$ مجموع سری‌همگرای بسیار سریعترزیر نیز هست :

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \cdots\right). \qquad \text{(دو)}$$

۴۲. با استفاده از فرمول (دو)، $\ln 2$ را تا پنج رقم اعشار تقریب نمایید.

مجموع سریهای توانی زیر را بیابید.

۴۳. $1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$

۴۴. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)$

بسط سری توانی تابع x تعریف شده با انتگرال داده شده را بیابید.

۴۵. $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2}\, dt$

۴۶. $\displaystyle\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt$

۴۷. $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{t}\, dt$

۴۸. $\displaystyle\int_0^x \cosh t^2\, dt$

در مسائل ۴۵ تا ۴۷، انتگرالده $f(x)$ را در $x = 0$ با پیوستگی تعریف کنید؛ یعنی، قرار دهید $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

با استفاده از سری توانی، انتگرال داده شده را تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

۴۹. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^4}\, dx$

۵۰. $\displaystyle\int_0^{1/5} \frac{\sinh x}{x}\, dx$

۵۱. $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\, dx$

۵۲. $\displaystyle\int_0^{2/3} \frac{dx}{1 + x^5}$

۵۳. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{1 - x}.$$

بسط سری توانی g در $x = 0$ را بیابید.

۸.۹ قضیهٔ تیلور و موارد استعمال آن

در بخش بعد به مسئلهٔ یافتن بسط سری توانی یک تابع می‌پردازیم. در حل این مسئله از یک قضیهٔ اساسی در تقریب‌توابع به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها استفاده می‌کنیم که به بروک‌تیلور[1] ریاضیدان انگلیسی (۱۷۳۱–۱۶۸۵) منسوب است. برای آشنایی با قضیهٔ تیلور، ابتدا حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که به **قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته** معروف است.

قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته. *فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر باشد؛ یعنی، f*

1. Brook Taylor

در هر نقطه از I مشتق متناهی داشته باشد. در این صورت، با نوشتن x و t به جای b و c در قضیهٔ مقدار میانگین (۷)، صفحهٔ ۲۵۸، داریم

$$f(x) = f(a) + f'(t)(x-a), \tag{۱}$$

که در آن t نقطه‌ای بین a و x است. اگر t را با a عوض کنیم، تقریب خط مماس

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \neq a) \tag{۲}$$

را خواهیم داشت.

وقتی این تقریب در بخش ۳.۲ معرفی شد، دیدیم که خطای تقریب بـه ازای $|x-a|$ کوچک کوچک است، ولی ما به تخمین خطا به‌ازای مقدار داده شده‌ای از $x-a$ (جز مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحهٔ ۲۰۴) نمی‌پردازیم. حال تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین (۱) را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان خطا را در حالتی که f، علاوه‌بر مشتق اول داشتن، مشتق دوم دارد تخمین زد.

قضیهٔ ۱۶ (قضیهٔ مقدار میانی تعمیم یافته). فرض کنیم f در هر نقطه از بازهٔ I مشتق دوم متناهی داشته باشد[1]، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(t)}{2}(x-a)^2. \tag{۳}$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \qquad g(x) = (x-a)^2,$$

درنتیجه، در حالت خاص،

$$h(a) = g(a) = 0, \qquad h'(x) = f'(x) - f'(a).$$

در این صورت، با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین‌کشی (ر.ک. قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱) بر توابع h و g بر بازهٔ $[a, x]$ اگر $x > a$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$، داریم

---

۱. وجود مشتق دوم f'' بر I وجود و پیوستگی تابع f و مشتق اولش f' بر I را ایجاب می‌کند (چرا؟). به‌طورکلی، وجود مشتق‌مرتبهٔ $n+1$، $f^{(n+1)}$ بر I وجودوپیوستگی $f, f', \ldots, f^{(n)}$ بر I را ایجاب می‌کند.

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(x)-h(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{h'(t_1)}{g'(t_1)}=\frac{f'(t_1)-f'(a)}{2(t_1-a)},$$

که درآن t_1 بین a و x قرار دارد (تحقیق کنید که مفروضات قضیهٔ کشی برقرارند) . اما ، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین معمولی اعمال شده بر تابع f' در بازهٔ $[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ،

$$f'(t_1)-f'(a)=f''(t)(t_1-a),$$

که در آن t بین a و t_1 ، و درنتیجه بین a و x ، قرار دارد . لذا ، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست که

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{f''(t)(t_1-a)}{2(t_1-a)}=\frac{f''(t)}{2}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x)=\frac{f''(t)}{2}g(x)=\frac{f''(t)}{2}(x-a)^2,$$

که با فرمول (۳) معادل می‌باشد . به‌طورکلی ، نقطهٔ t به هر دوی a و x بستگی دارد .

خطای تقریب خط مماس. جملهٔ آخر سمت راست (۳) خطای

$$E_{\mathrm{TL}}=\frac{f''(t)}{2}(x-a)^2$$

تقریب خط مماس (۲) است . بخصوص ، اگر f'' بر I پیوسته باشد ، نتیجه می‌شود که

$$|E_{\mathrm{TL}}|\le\frac{1}{2}(x-a)^2\max|f''|, \tag{۴}$$

که در آن $\max|f''|$ ماکزیمم $|f''(t)|$ بر بازهٔ بسته با نقاط انتهایی a و x می‌باشد .

مثال ۱ . $\cos 47°$ را بااستفاده‌از تقریب خط مماس (۲) به ازای $a=45°=\pi/4$ تخمین بزنید . سپس، با استفاده از نامساوی (۴) ، نشان دهید این تقریب تا سه رقم‌اعشاردقیق است .

حل . هرگاه $f(x)=\cos x$ ، آنگاه $f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x$ ، و فرمول (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\cos x=f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)=\cos a-(x-a)\sin a.$$

با اختیار

$$x=47°=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90},$$

داریم

$$\cos 47° = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{90}\right) \approx 0.682.$$

ماکزیمم $|f''(t)| = |\cos t|$ بر بازهٔ $[45°, 47°]$ عبارت است از $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$. بنابراین طبق نامساوی (۴)،

$$|E_{TL}| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 4.3 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4},$$

و می‌توان مطمئن بود که تقریب ما از $\cos 47°$ تا سه رقم اعشار دقیق است.

قضیهٔ تیلور. قضیهٔ ۱۶ اولین تظریف قضیهٔ مقدار میانگین مستلزم مشتقات متوالی f و توانهای متوالی $x - a$ است. اینها همه حالات خاصی از قضیهٔ زیرند که اثباتش تا حدودی تکنیکی است؛ و لذا، به آخر بخش موکول شده است.

قضیهٔ ۱۷ (قضیهٔ تیلور). *فرض کنیم f در هر نقطه از بازهٔ I مشتق مرتبهٔ $n + 1$ متناهی داشته، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \qquad (۵) \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

فرمول تیلور و چند جمله‌ایهای تیلور. فرمول (۵) به *فرمول تیلور* (*با باقیمانده*) معروف است. این فرمول تابع $f(x)$ را در مجاورت $x = a$ به صورت مجموع

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

چندجمله‌ای

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (۶)$$

از درجهٔ n نسبت به متغیر $x - a$ و جملهٔ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

به نام *باقیمانده*، نمایش می‌دهد. (چون $P_n(x)$ در حالت کلی مجموع $n+1$ جمله‌است، باقیماندهٔ $R_n(x)$ علی‌رغم زیرنویس n عملاً باقیمانده پس‌از $n+1$ جمله می‌باشد.) چند جمله‌ای $P_n(x)$ **چند جمله‌ای تیلور** n م f در $x=a$ نام‌دارد، و دارای این خاصیت‌کلیدی است که مقدار آن و مقادیر n مشتق اولش در نقطهٔ $x=a$ با مقدارتابع f و مقادیر n مشتق اول f در $x=a$ یکی است. در واقع، j مشتقگیری متوالی از فرمول (۶) نتیجه می‌دهدکه

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}$$
$$= f^{(j)}(a) + f^{(j+1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-j)!}(x-a)^{n-j}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, n),$$

و سپس با گذاردن $x=a$ در آن فوراً خواهیم داشت

$$P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

در پرتو این تناسب مشتقات، انتظارداریم $P_n(x)$ تقریب‌مناسبی‌به $f(x)$ درمجاورت $x=a$ باشد، که با بزرگترشدن n بهتر‌می‌شود، و این، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، معمولاً درست است[1].

مثال ۲. تابع $f(x)=e^x$ را به‌وسیلهٔ چهار چندجمله‌ای‌تیلور اول‌خود درمجاورت $x=0$ تقریب نمایید.

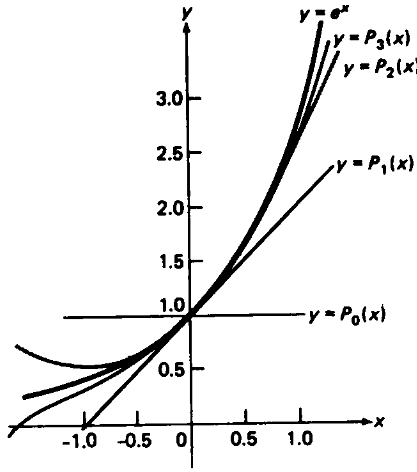
حل. چون به ازای هر n، $f^{(n)}(x) = D_x^n e^x = e^x$، چهار چندجمله‌ای‌تیلور اولیه (به ازای $a=0$) عبارتنداز

$$P_0(x) = f(0) = 1,$$
$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$
$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

---

۱. *این به خاطر وجود تابعی که در آن تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ به ازای هر n ضعیف است (ر. ک. مثال ۷ در آخر بخش) استثناء نیز دارد.*

شکل ۱۲ نمودارهای e^x و این چندجملەایها را در یک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد. البته، تقریب $e^x \approx P_0(x)$ خیلی خام است، زیرا $P_0(x)$ دارای مقدار ثابت 1 است، ولی



تقریب e^x بەوسیلهٔ چندجملەایهای تیلور

شکل ۱۲

$e^x \approx P_1(x)$ تقریب خط مماس است، که بەازای مقادیر کوچک $|x|$ کاملاً مناسب است. تقریب بهتر با $e^x \approx P_2(x)$ داده می‌شود، که در آن نمودار e^x در مجاورت $x = 0$ با سهمی

$$y = P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$$

تقریب می‌شود تا با خط مستقیم $y = P_1(x) = 1 + x$. اما تقریب e^x بەوسیلهٔ چندجملەای مکعبی $P_3(x)$ از این هم بهتر است. در واقع، بنابر قضیهٔ تیلور،

$$e^x = P_3(x) + R_3(x),$$

که در آن

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}x^4 = \frac{e^t}{24}x^4 \quad (\text{بین } 0 \text{ و } x \;\; t)$$

درنتیجه، خطای تقریب $e^x \approx P_3(x)$ روی تمام بازهٔ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ مثبت و کوچکتر از

$$\frac{e^{1/2}}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.0043$$

است. در اینجا از این استفاده کرده‌ایم که ماکزیمم e^t بر این بازه $e^{1/2}$ است، زیرا e^t یک تابع صعودی است.

مثال ۳. فرمول تیلور را برای تابع $f(x) = 1/x$ در نقطهٔ $a = 1$ به ازای $n = 3$ بنویسید.

حل. تابع و چهار مشتق اول آن عبارتنداز

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

با گذاردن $a = 1$ و $n = 3$ در فرمول (۵) و فرض $x > 0$ (چرا؟) ، معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{x} = f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$+ \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-1)^4$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{t^5},$$

که در آن t بین 1 و x است.

مثالهای زیر طرق استفاده‌از فرمول تیلور به‌عنوان یک‌ابزارمحاسبه‌ای‌را نشان‌می‌دهند.

مثال ۴. با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$ ، تقریب خط مماس $\cos 47°$ داده‌شده‌در مثال ۱ را بهتر کنید.

حل. فرض‌کنیم $f(x) = \cos x$. در این صورت، $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x$ ، $f'''(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$ ، و با انتخاب $n = 3$ در فرمول (۵) داریم

$$\cos x = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-a)^4$$

$$= \cos a - (x-a)\sin a \frac{(x-a)^2}{2}\cos a + \frac{(x-a)^3}{6}\sin a + \frac{(x-a)^4}{24}\cos t,$$

که در آن t بین a و x است. این به ازای $a = 45° = \pi/4, x = 47°$ نتیجه می‌دهد که

$$\cos 47° = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\cos t \qquad (45° < t < 47°),$$

و درنتیجه،

$$\cos 47^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{\pi}{90}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right]\approx 0.6819983, \qquad (۷)$$

که در آن خطای این تقریب، که به خاطر وجود " دو جملهٔ بیشتر " شامل توانهای دوم و سوم $\pi/90$ با تقریب خط مماس در مثال ۱ فرق دارد، با باقیماندهٔ زیر داده میشود:

$$R_3=\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\cos t \qquad (45^\circ < t < 47^\circ).$$

ولی ماکزیمم $\cos t$ بر بازهٔ $[45^\circ, 47^\circ]$ عبارت است از $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. بنابراین،

$$R_3\le\frac{1}{24\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\approx 4.4\times 10^{-8}<5\times 10^{-8},$$

و میتوان مطمئن بود که تقریب (۷) تا هفت رقم اعشار دقیق است.

مثال ۵. چندجملهای $Q(x)=4-2x-x^2+x^3$ را به یک چندجملهای با متغیر جدید $x+1$ تبدیل نمایید.

حل. با اختیار $f(x)=Q(x), a=-1, n=3$ در فرمول تیلور، داریم

$$Q(x)=Q(-1)+Q'(-1)(x+1)+\frac{Q''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{Q'''(-1)}{3!}(x+1)^3+R_3(x),$$

که در آن باقیماندهٔ $R_3(x)$ به دلیل $Q^{(4)}(x)\equiv 0$ صفر است (بیشتر توضیح دهید). ولی

$$Q'(x)=-2-2x+3x^2, \qquad Q''(x)=-2+6x, \qquad Q'''(x)=6,$$

و لذا،

$$Q(-1)=4, \qquad Q'(-1)=3, \qquad Q''(-1)=-8, \qquad Q'''(-1)=6,$$

درنتیجه،

$$Q(x)=4+3(x+1)-4(x+1)^2+(x+1)^3.$$

این را میتوان بهطور جبری با تحقیق اینکه عبارت سمت راست متحدا" مساوی $4-2x-x^2+x^3$ است بهآسانی امتحان کرد.

مثال ۶. با استفاده از فرمول تیلور، نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

حل. با اختیار $f(x) = \sin x, a = 0, n = 4$ در فرمول تیلور و توجه به اینکه

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$$

داریم

$$\sin x = \sin 0 + x\cos 0 - \frac{1}{2}x^2 \sin 0 - \frac{1}{6}x^3 \cos 0 + \frac{1}{24}x^4 \sin t$$
$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \sin t,$$

که در آن t بین 0 و x قرار دارد. بنابراین،

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \sin t}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}x \sin t\right) = \frac{1}{6}$$

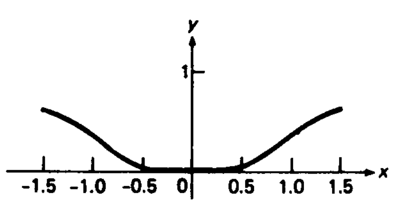
(وقتی $x\to 0$، $t\to 0$). این حد قبلاً در مثال ۳، صفحهٔ ۳۱۶، به کمک قاعدهٔ هوپیتال حساب شده است.

با وجود آنکه یک تابع معمولاً بهوسیلهٔ چندجملهایهای تیلور با درجهٔ بهقدر کافی بالای آن بهخوبی تقریب میشود، مثال بعدی نشان میدهد که حالاتی استثنایی نیز میتوانند رخ دهند.

مثال ۷. فرض کنید $P_n(x)$ چندجملهای تیلور n م تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}، & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 \quad ، & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۳ باشد. نشان دهید که به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$، $P_n(x) \equiv 0$.



نمودار $y = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}، & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 \quad ، & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$

شکل ۱۳

حل (اختیاری) . چون

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

$(t = 1/x^2)$ ، تابع f در $x = 0$ پیوسته است . به‌علاوه ، اگر $x \neq 0$ ،

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

که در آن $Q_{3n}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $3n$ است . اما ، به کمک جانشانی $t = 1/x^2$ و قاعدهٔ هوپیتال ، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{n/2}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e^{2t/n}}\right)^{n/2} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2t/n}}\right)^{n/2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{D_t t}{D_t e^{2t/n}}\right)^{n/2} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2/n)e^{2t/n}}\right)^{n/2} = 0$$

درنتیجه ، به ازای هر چندجمله‌ای $Q(x)$ ،

$$\lim_{x\to 0} Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

فرض کنیم $f^{(k)}(0) = 0$. در این صورت ،

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} Q^*_{3k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0,$$

که در آن از چندجمله‌ای بودن $Q^*_{3k+1}(x) = xQ_{3k}(x)$ از درجهٔ $3k + 1$ استفاده می‌کنیم. بنابراین ، اگر $f^{(k)}(0)$ مساوی صفر باشد ، $f^{(k+1)}(0)$ نیز چنین است . اما $f'(0)$ مساوی صفر است ، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0,$$

و درنتیجه ،بنابراستقرا ی ریاضی ، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $f^{(n)}(0) = 0$ (ر.ک. ضمیمه، صفحهٔ ۱۵۷۸) .

لذا ، تابع f و تمام مشتقاتش (از هر مرتبهٔ دلخواه) در $x = 0$ صفرند . این به خاطر " تخت بودن " پایین منحنی $y = f(x)$ در مجاورت $x = 0$ است (ر.ک. شکل ۱۳) .

پس نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$ از f در $x = 0$ متحد صفر است. درنتیجه اگر $x \neq 0$ ، درصد خطای تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ همواره، بی‌توجه به مقدار n ، مساوی ٪100 می‌باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۲۰۴).

برهان قضیهٔ ۱۷ *(اختیاری)*. فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad g(x) = (x-a)^{n+1}$$

(به یاد آورید که $f^{(0)} \equiv f$). در این صورت، پس از n مشتقگیری متوالی از h ،

$$h'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$h''(x) = f''(x) - f''(a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$h^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a),$$

$$h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a),$$

حال آنکه

$$g'(x) = (n+1)(x-a)^n,$$

$$g''(x) = (n+1)n(x-a)^{n-1},$$

$$\vdots$$

$$g^{(n-1)}(x) = (n+1)n(n-1)\cdots 3(x-a)^2,$$

$$g^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

درنتیجه، در حالت خاص،

$$h(a) = g(a) = 0, \quad h'(a) = g'(a) = 0, \ldots, \quad h^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) = 0.$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین کشی بر توابع h و g بر بازهٔ $[a, x]$ اگر $x > a$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)},$$

که در آن t_1 بین a و x قرار دارد. با اعمال مجدد همین قضیه بر توابع h' و g' بر بازهٔ

$[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ، درمی‌یابیم که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{h'(t_1) - h'(a)}{g'(t_1) - g'(a)} = \frac{h''(t_2)}{g''(t_2)},$$

که در آن t_2 بین a و t_1 ، و درنتیجه بین a و x ، است. بالاخره، پس از n بار کاربرد قضیهٔ مقدار میانگین، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h^{(n)}(t_n)}{g^{(n)}(t_n)} = \frac{f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a)}{(n+1)!(t_n - a)},$$

که در آن t_n بین a و t_{n-1} ، و درنتیجه بین a و x ، است. اما، با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین بر تابع $f^{(n)}$ در بازهٔ $[a, t_n]$ یا $[t_n, a]$ ، داریم

$$f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(t)(t_n - a),$$

که در آن t بین a و t_n ، و درنتیجه بین a و x ، است. لذا، نقطه‌ای مانند t بین a و x وجود دارد به طوری که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(t)(t_n - a)}{(n+1)!(t_n - a)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\, g(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

که با فرمول (۵)، صفحهٔ ۸۸۳، معادل می‌باشد. به‌طور کلی، نقطهٔ t به a ، x ، و n وابسته خواهد بود.

مسائل

اعداد زیر را با استفاده از تقریب خط مماس (۲) تخمین بزنید.

۱. $\sqrt{171}$ ۲. $\sqrt[3]{215}$

۳. $1/2.01$ ۴. $\ln(0.98)$

۵. $\tan 43°$ ۶. $\arctan(1.04)$

در هر حالت، پس از تخمین خطا به وسیلهٔ (۴)، تعداد ارقام اعشاری دقیق را پیدا نمایید.

چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$ و باقیماندهٔ $R_n(x)$ را به ازای مقادیر مشخص a و n برای تابع داده

شده بیابید .

۷. $\sqrt{x}, a = 4, n = 2$

۸. $1/x^2, a = -2, n = 3$

۹. $e^{-x}, a = 1, n = 3$

۱۰. $xe^x, a = 0, n = 4$

۱۱. $\ln x, a = 2, n = 4$

۱۲. $x \ln x, a = e, n = 3$

۱۳. $\cos x, a = 0, n = 6$

۱۴. $\sin x, a = \pi/4, n = 3$

۱۵. $\tan x, a = 0, n = 3$

۱۶. $x \cos x, a = \pi/2, n = 5$

۱۷. $\sin^2 x, a = 0, n = 6$

۱۸. $1/(1 - x), a = 2, n = 4$

۱۹. $\sinh x, a = 1, n = 3$

۲۰. $\ln(\cos x), a = 0, n = 4$

۲۱. محاسبات مسئلهٔ ۱ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 2$ به جای تقریب خط مماس تکرار کرده و ، پس از تخمین باقیمانده ، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۲. همین کار را در مسئلهٔ ۲ انجام دهید .

۲۳. همین کار را در مسئلهٔ ۳ انجام دهید .

۲۴. محاسبات مسئلهٔ ۴ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$ تکرار کرده و ، پس از تخمین باقیمانده ، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۵. همین کار را در مسئلهٔ ۵ انجام دهید .

۲۶. همین کار را در مسئلهٔ ۶ انجام دهید .

۲۷. تحقیق کنید که اگر $94 \le x \le 106$ ، تقریب $\sqrt{x} \approx 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$ تا دو رقم اعشار دقیق است .

۲۸. فرض کنید x نقطه‌ای در بازهٔ $[-1, 1]$ باشد . نشان دهید که قدرمطلق خطای تقریب $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ از $\frac{1}{24}$ متجاوز نیست ، حال آنکه قدرمطلق خطای تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ از $\frac{1}{120}$ تجاوز نمی‌کند .

۲۹. فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور n م تابع بی‌نهایت مشتقپذیر f بر بازهٔ $[-a, a]$ در $x = 0$ باشد . نشان دهید اگر f بر $[-a, a]$ زوج باشد ، $P_n(x)$ فقط شامل توانهای زوج x است و اگر f بر $[-a, a]$ فرد باشد ، فقط شامل توانهای فرد x می‌باشد .

چندجمله‌ای داده شدهٔ $Q(x)$ را به یک چندجمله‌ای از متغیر جدید ذکر شده تبدیل نمایید .

۳۰. $Q(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, x + 1$

۳۱. $Q(x) = 4 - 3x^2 + 2x^4 - x^6, x - 1$

۳۲. $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4, x + 2$

۳۳. $Q(x) = 1 + 2x^2 - 4x^3 + x^4, x - 5$

۳۴. $Q(x) = x^3, x - \frac{1}{2}$

۳۵. $Q(x) = x^4 + 1, x - 10$

حد داده شده را با استفاده از فرمول تیلور حساب کنید.

۳۶. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

۳۷. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

۳۸. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

۳۹. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

۴۰. تعمیم زیر از آزمون مشتق دوم برای اکسترمم موضعی را ثابت کنید (قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۲۷۲): هرگاه

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad (n \geq 2),$$

و مشتق n م $f^{(n)}(a)$ متناهی و مخالف صفر باشد، آنگاه f در a مینیمم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a) > 0$، و f در a ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a) < 0$، ولی اگر n فرد باشد اکسترمم نخواهد داشت.

۹.۹ سریهای تیلور و ماکلورن

بنابر فرمول تیلور (ر.ک. صفحهٔ ۸۸۳)، هرگاه تابع f در هر نقطه از بازهٔ I شامل نقطهٔ a دارای مشتق مرتبهٔ $n+1$ م متناهی باشد، آنگاه به ازای هر x در I،

$$(1) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

که درآن باقیماندهٔ $R_n(x)$ عبارت است از

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\text{بین } a \text{ و } x \; t).$$

فرض کنیم f بر I بی‌نهایت بار مشتقپذیر باشد؛ درنتیجه، f از هر مرتبه بر I مشتق دارد. در این صورت، (۱) به ازای n بدلخواه بزرگ برقرار است. این پیشنهاد می‌کند که سری

نامتناهی زیر را بررسی کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \qquad (۲)$$

سری (۲) ، که یک‌سری توانی نسبت‌به متغیر $x - a$ است ، بی‌توجه به همگرا بودن‌یا نبودن سری به f ، *سری (بسط) تیلور f در* $x = a$ نامیده می‌شود . این انتساب لازم است ، زیرا حالاتی وجود دارند که سری تیلور f همگرا به f نمی‌باشد (ر.ک. مثال ۶ زیر) .بااینحال تنها حالتی که اهمیت عملی دارد وقتی است که سری تیلور f همگرا به f است ، و در این صورت گوییم " f مجموع سری تیلور خود می‌باشد " .

همگرایی سری تیلور . ممکن است بودن f به عنوان مجموع سری تیلور خود را تابع رفتار باقیماندهٔ $R_n(x)$ در فرمول تیلور (۱) بدانید . قضیهٔ زیر صحت این امر را نشان‌می‌دهد.

قضیهٔ ۱۸ (**محک همگرایی برای یک سری تیلور**) . *سری تیلور (۲) بر بازهٔ I همگرا به f است اگر و فقط اگر به ازای هر x در I ،*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (۳)$$

برهان . فرمول (۱) برحسب چندجمله‌ایهای تیلور

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

و این چندجمله‌ایها مجموعهای جزئی سری تیلور (۲) می‌باشند . بنابراین ، (۲) بر I همگرا به f است اگر و فقط اگر

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \quad (x \text{ در } I)$$

یا معادلاً

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - P_n(x)] = 0 = \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (x \text{ در } I)$$

لذا، اگر شرط (۳) برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad (۴)$$

با اطمینان کامل از اینکه سری توانی سمت راست به تابع سمت چپ همگراست. به‌ازای $a = 0$ ، سری تیلور (۴) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \qquad (۵)$$

یک سری تیلور به شکل خاص (۵) را غالباً، به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، کولین ماکلورن[1] (۱۶۹۸–۱۷۴۶)، یک سری **ماکلورن** می‌نامند.

مثال ۱. فرض کنیم $\sum c_n(x-a)^n$ یک‌سری توانی با بازهٔ همگرایی I و مجموع f باشد. نشان دهید که $\sum c_n(x-a)^n$ سری **تیلور** f در $x = a$ است. (لذا، سری تیلور تابع مجموع یک سری توانی خود سری توانی می‌باشد.)

حل. بنابر قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، می‌توان از سری توانی

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (x \text{ در } I)$$

n بار مشتق گرفت. از این نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots \quad (x \text{ در } I)$$

که پس از گذاردن $x = a$ در آن ایجاب می‌کند که

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(توجه کنید که $f^{(0)} \equiv f,\ 0! = 1$). اما، در این صورت،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

یعنی، $\sum c_n(x-a)^n$ سری تیلور f در $x = a$ است. طبعاً، این سری تیلور در هر نقطه از I همگرا به f می‌باشد.

---

1. Colin Maclaurin

مثال ۲. سری ماکلورن e^x را بیابید .

حل . هرگاه $f(x) = e^x$ ، آنگاه به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$ ، و سری ماکلورن (۵) به صورت زیر درمی‌آید :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{۶}$$

مشروط بر اینکه سری سمت راست همگرا به e^x باشد . برای تحقیق این امر ، باقیماندهٔ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

را بررسی می‌کنیم ، که در آن t بین 0 و x قرار دارد (توجه کنید t علاوه‌بر x به n نیز وابسته است) . واضح است که اگر x معلوم باشد ، به ازای هر n

$$0 \le |R_n(x)| \le M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \tag{۷}$$

که در آن M ماکزیمم e^t بر بازهٔ $[0, x]$ است اگر $0 < x$ یا بر بازهٔ $[x, 0]$ است اگر $x < 0$ ؛ یعنی ،

$$M = \begin{cases} e^x \quad \text{،} \quad x > 0 \ \text{اگر} \\ 1 \quad \text{،} \quad x < 0 \ \text{اگر} \end{cases}$$

به‌علاوه ، به ازای هر x ثابت ،

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0 \tag{۸}$$

زیرا ، بنابر آزمون نسبت ، سری توانی با جملهٔ عمومی $x^n/n!$ به‌طور مطلق همگراست (تحقیق کنید) . بنابراین ، با گرفتن حد در (۷) وقتی $n \to \infty$ ، معلوم می‌شود که‌وقتی $n \to \infty$ ، $|R_n(x)| \to 0$ ، یا معادلاً" به ازای هر x ،

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

(توجه کنید که به ازای هر n ، $R_n(0) = 0$) . لذا ، سری (۶) بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ همگرا به e^x می‌باشد .

به یاد می‌آورید که برقراری (۶) قبلاً" در مثال ۵ ، صفحهٔ ۸۷۰ ، به روش کاملاً"

متفاوتی ثابت شده است .

سریهای ماکلورن $\sin x$ و $\cos x$

مثال ۳ . سری ماکلورن $\sin x$ را بیابید .

حل . هرگاه $f(x) = \sin x$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1,\\
& & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin\frac{n\pi}{2},\\
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

و (۵) به صورت زیر درمیآید :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{۹}$$

اما باقیمانده مساوی است با

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(t+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

که در آن t بین 0 و x است (x در اینجا دلخواه ولی ثابت است) . چون به ازای t و n دلخواه

$$\left|\sin\left(t+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right| \le 1$$

داریم

$$0 \le |R_n(x)| \le \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

و درنتیجه، به‌خاطر (۸)،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

بنابراین، (۹) سری ماکلورن $\sin x$ برتمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. سری (۹) رامی‌توان به‌طور فشرده نیز نوشت:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

مثال ۴. سری ماکلورن $\cos x$ را بیابید.

حل. می‌توان استدلالی شبیه استدلال مثال قبل آورد، ولی ساده‌تر آن است که از سری ماکلورن $\sin x$، به کمک قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، جمله به جمله مشتق بگیریم. از این فورا" نتیجه می‌شود که

$$\cos x = \frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

یعنی،

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

مثال ۵. سری تیلور $\sin x$ را در $x = \pi/4$ بیابید.

حل. این بار داریم

$$f(x) = \sin x, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

و (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots\right],$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[\![n/2]\!]}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, \tag{۱۰}$$

که درآن $[\![n/2]\!]$ قسمت صحیح $n/2$ است. اساساً" همان تحلیل مثال ۳ از باقیمانده نشان می‌دهد که به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

لذا، سری تیلور (۱۰) بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ همگرا به $\sin x$ می‌باشد.

مثال ۶. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

مجموع سری تیلور خود در $x = 0$ نیست.

حل. فرض کنیم $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م f در $x = 0$ باشد. همانطور که در مثال ۷، صفحهٔ ۸۸۸، نشان دادیم، به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $P_n(x) \equiv 0$؛ درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \equiv 0.$$

پس نتیجه می‌شود که مجموع سری تیلور f در $x = 0$ مساوی f نیست، بلکه مساوی تابعی است که متحد صفر می‌باشد.

لازم است تأکید کنیم که استفادهٔ مستقیم فرمول (۴) یا (۵) برای یافتن سری تیلور یا ماکلورن یک تابع اغلب به‌محاسباتی منجرمی‌شود که بسیار زیاد یا دست‌نیافتنی هستند.

لذا ، همواره باید در پی راههایی برای بیان یک سری تیلور جدید برحسب سری تیلوری‌که از قبل بر ما معلوم است باشیم . مثلا " ، برای یافتن سری ماکلورن x^4e^x ،به‌جای محاسبهٔ مشتقات x^4e^x ، محاسبهٔ آنها در $x = 0$ ، و گذاردن مقادیر حاصل در فرمول (۵) ، کافی است سری ماکلورن معلوم e^x را در x^4 ضرب می‌کنیم ، که فورا " نتیجه می‌دهد

$$x^4e^x = x^4\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$
$$= x^4 + x^5 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+4}}{n!} + \cdots.$$

به همین نحو ، برای یافتن سری تیلور e^x در $x = 1$ ، کافی است توجه کنیم که

$$e^x = e^1e^{x-1} = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots\right],$$

زیرا در سری ماکلورن e^x می‌توان x را با $x - 1$ عوض کرد (چرا؟) .

هرگاه سری تیلور تابع f در $x = a$ همگرا به f باشد ، آنگاه دقیقا " مساوی چیزی است که قبلا " بسط سری توانی f در $x = a$ نامیده‌شد .این نتیجهٔ فوری خاصیت یکتایی سری توانی است که در مثال ۴ ، صفحهٔ ۸۷۰ ، بحث شد . لذا ، در یافتن سری تیلور ،تمام تکنیکهای بخش ۹.۷ هنوز در اختیار ما بوده و می‌توان آنها را آزادانه به کار برد .به‌کمک آنهاست که اغلب می‌توان سری تیلور تابع معلوم f را غیرمستقیم ، بدون محاسبهٔ مشتقات f یا بررسی باقیماندهٔ $R_n(x)$ ، پیدا کرد . مثلا " ، ما قبلا " در مثال ۸، صفحهٔ ۸۷۴ ، سری ماکلورن $\arctan x$ را به دست آورده‌ایم .

مسائل

۱. نشان دهید که به ازای هر x ،

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(یک)}$$

از فرمول (۵) شروع کرده و رفتار باقیماندهٔ $R_n(x)$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی نمایید .

۲. از سری (یک) مستقیما " نتیجه بگیرید که سری

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(یگ)}$$

به ازای هر x معتبر است .

۰۳. نشان دهید که

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (0 \le x < 1). \qquad \text{(دو)}$$

از فرمول (۵) شروع کرده، و رفتار باقیمانده‌ٔ $R_n(x)$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی نمایید. (اعتبار این بسط سری توانی $\ln(1+x)$ بر بازهٔ بزرگتر از $-1 < x < 1$ قبلاً در مثال ۷، صفحهٔ ۸۷۳، به روشی دیگر ثابت شده است.)

۰۴. با بررسی باقیماندهٔ $R_n(1)$، نشان دهید که فرمول (دو) به ازای $x = 1$ نیز معتبر است؛ درنتیجه، همانطور که قبلاً در صفحهٔ ۸۷۴ به کمک قضیهٔ آبل نشان دادیم،

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \qquad \text{(دوَ)}$$

پنج جملهٔ اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۰۵. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ۰۶. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

۰۷. $e^x \cos x$ ۰۸. $e^x \sin x$

سه جملهٔ اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۰۹. $\ln(1 + e^x)$ ۰۱۰. $e^{\sin x}$

۰۱۱. $e^{\cos x}$ ۰۱۲. $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$

۰۱۳. چهار جملهٔ اول سری ماکلورن $e^{1/(1-x)}$ را بیابید.

۰۱۴. با استفاده از فرمول $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$، سری ماکلورن تابع $\cos^2 x$ را بیابید.

سری تیلور $\sin x$ را در نقاط زیر بیابید.

۰۱۵. $\pi/6$ ۰۱۶. $-\pi/3$ ۰۱۷. $\pi/2$ ۰۱۸. π

سری تیلور $\cos x$ را در نقاط زیر بیابید.

۰۱۹. $\pi/4$ ۰۲۰. $\pi/2$ ۰۲۱. $-\pi$ ۰۲۲. 2π

سری تیلور عبارات زیر را بیابید.

۰۲۳. $\sqrt{x}$ در $x = 4$ ۰۲۴. $\sqrt[3]{x}$ در $x = -1$

۰۲۵. $1/x^2$ در $x = 1$ ۰۲۶. e^x در $x = -2$

۰۲۷. $e^{x/3}$ در $x = 2$ ۰۲۸. $\sin^2 x$ در $x = 0$

۰۲۹. با استفاده از سری ماکلورن، نشان دهید به ازای هر x، $\cosh x \le e^{ax^2}$ اگر وفقط اگر

$a \geq \frac{1}{2}$

۳۰. سری ماکلورن توابع

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt, \qquad C(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt,$$

به نام *انتگرالهای فرنل*[1] را بیابید که در بررسی بعضی از پدیده‌های نوری ظاهر می‌شوند.

۳۱. سری ماکلورن تابع

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$$

را به "روش ضرایب نامعین" بیابید: یعنی، بافرض $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$، ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ را طوری اختیار کنید که

$$1 - x + x^2 \equiv (1 + x + x^2)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots).$$

(این فرایند با " تقسیم متوالی " صورت بر مخرج معادل است.) مقدار $f^{(5)}(0)$ چقدر است؟

با استفاده از روش ضرایب نامعین، چهار جملهٔ اول سری ماکلورن توابع زیر را بیابید.

۳۲. $\sec x$ ۳۳. $\tan x$

۹.۱۰ روش نیوتن

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $I = [a, b]$ مشتقپذیر (و درنتیجه، پیوسته) بوده، و f' هرگز بر I صفر نشود. همچنین، $f(a)f(b) < 0$؛ درنتیجه، $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه‌اند. بنا بر قضیهٔ مقدار میانی، معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای جواب یا ریشهٔ r در (a, b) است، و r منحصر به فرد است، زیرا f بر I یکنواست (چرا؟). در صفحهٔ ۱۵۴ یک روش تقریب r با دقت مطلوب، به نام **روش تنصیف**، ارائه شد، ولی روش ارزش عملی زیادی ندارد، زیرا برای به دست آوردن دقتی کم به اعمال زیادی نیاز داریم. حال، به کمک قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیهٔ تیلور به ازای $n = 1$)، روش بسیار تواناتری برای تقریب r، به نام **روش نیوتن**، به دست می‌آوریم. در این روش، که به **روش نیوتن ــ رفسون**[2] نیز معروف است، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از " تقریبات متوالی " به r تولید می‌شود، که‌در بسیاری

---

1. *Fresnel*

2. *Raphson*

از حالات خیلی سریع به r همگرا می‌باشد.

قضیهٔ ۱۹ (روش نیوتن). فرض کنیم تابع f بربازهٔ $I = [a, b]$ مشتق دوم پیوسته داشته باشد به طوری که f' و f'' بر I ناصفر بوده و $f(a)f(b) < 0$. همچنین، $\{x_n\}$ دنبالهٔ تعریف شده با فرمول بازگشتی زیر باشد:

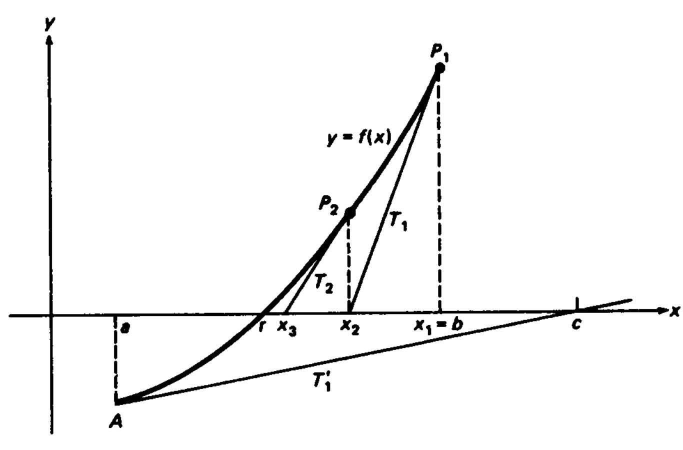
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

که در آن $x_1 = b$ اگر f' و f'' همعلامت باشند، ولی $x_1 = a$ اگر f' و f'' مختلف العلامه باشند. در این صورت، $\{x_n\}$ همگرا به r، یعنی ریشهٔ منحصر به فرد معادلهٔ $f(x) = 0$ در I، بوده و نیز

$$|x_{n+1} - r| \le \frac{M}{2m} |x_n - r|^2, \tag{2}$$

که در آن m مینیمم $|f'(x)|$ بر I و M ماکزیمم $|f''(x)|$ بر I است.

تعبیر هندسی روش نیوتن. برهان قضیهٔ ۱۹ نسبتاً ظریف است، و از اینرو به آخر بخش برده شده است. با اینحال، تعبیر هندسی ساده‌ای برای روش نیوتن وجود دارد که‌درشکل ۱۴ برای حالتی که f' و f'' هر دو بر $I = [a, b]$ مثبت‌اند شرح داده شده است؛ درنتیجه، f بر I صعودی و به بالا مقعر بوده و $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. چون f' و f'' همعلامت‌اند،



تعبیر هندسی روش نیوتن

شکل ۱۴

جملهٔ اول دنبالهٔ x_n مساوی $x_1 = b$ ، یعنی نقطهٔ انتهایی راست I ، اختیار شده‌است . فرض کنیم T_1 مماس (چپ) بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P_1 = (x_1, f(x_1))$ باشد . در این صورت ، خط T_1

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

با قطع x

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

می‌باشد ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 1$ است . به همین نحو ، هرگاه T_2 مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P_2 = (x_2, f(x_2))$ باشد ، آنگاه خط T_2

$$y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2),$$

با قطع x

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

است ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 2$ می‌باشد ؛ و همین‌طور هرچند مرحله که مطلوب باشد . از شکل واضح است که تحت شرایط مطلوب ، دنبالهٔ تقریبات متوالی $\{x_n\}$ باسرعت زیاد به قطع x خود منحنی $y = f(x)$ ، یعنی ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ ، همگراست . این ، به‌طور جبری ، نتیجه‌ای است از فرمول (۲) ، که نشان می‌دهد که قدرمطلق خطا در هر مرحله از تقریب از حاصل‌ضرب یک ثابت در مربع خطای مرحلهٔ قبل تجاوز نمی‌کند. مثلاً " فرض کنیم $M/2m = 1$ و $|x_n - r| < 5 \times 10^{-5}$ ؛ درنتیجه ، تقریب $r \approx x_n$ تا چهار رقم اعشار دقیق است . پس

$$|x_{n+1} - r| < |x_n - r|^2 < 25 \times 10^{-10} = 2.5 \times 10^{-9},$$

درنتیجه ، تقریب بعدی $r \approx x_{n+1}$ قبلاً " تا هشت رقم اعشار دقیق خواهد بود!

شکل ۱۴ همچنین نشان می‌دهد که اگر دقیق نباشیم ، چگونه روش نیوتن فرومی‌ریزد. فرض کنید برای تابع f این شکل جملهٔ اول دنبالهٔ $\{x_n\}$ را (به خاطر نیاز در قضیهٔ ۱۹) به جای $x_1 = b$ ، $x_1 = a$ اختیار کرده باشیم . در این صورت ، چون مماس بر $y = f(x)$ در $A = (a, f(a))$ خط T_1' است که قطع x ش c خارج بازهٔ I که f بر آن تعریف شده قرار دارد ، فرایند تقریب پس از درست یک مرحله به حال توقف درمی‌آید . اگر مفروضات دیگر قضیه نقض شوند ، ممکن است دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به وسیلهٔ فرمول (۱) *واگرا* گردد (ر.ک. مسائل ۲۰ و ۲۱) . حتی در حالاتی که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا باشد ، البته مطلوب انتخاب تقریب اولیهٔ x_1 به قدر کافی نزدیک ریشهٔ r است و این کار با رسم نمودار f و

حدس مقدار r ، یااستفادهاز روش تقریب دیگری برای تخمین مقدماتی r ،صورت‌می‌گیرد .
از فرمول (۱) معلوم می‌شود که هرگاه $x_{n+1} = x_n$ ، آنگاه $f(x_n) = 0$ ؛ درنتیجه، $r = x_n$. در همین وضع ، اگر N رقم اعشاری اولیهٔ x_n و x_{n+1} یکی باشند ، مرسوم است که فرض می‌کنند تقریب $r \approx x_n$ تا دست کم N رقم اعشار دقیق است ، ولی برای آنکه مطمئن باشیم ، می‌توانیم خطا را با استفاده از فرمول (۲) تحلیل کنیم .

تبصره . گوییم دنبالهٔ

$$x_1, x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \ldots, x_{n+1} = g(x_n), \ldots$$

از جملهٔ اولیهٔ x_1 خود با *تکرار* تابع g تولید می‌شود . اگر x_1 و g در شرایط مناسبی صدق کنند ، می‌توان نشان داد که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به *نقطهٔ ثابتی* از g است؛ یعنی ، به نقطه‌ای چون r به طوری که $g(r) = r$. لذا ، روش نیوتن متناظر تکرار با تابع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (۳)$$

است ، و قضیهٔ ۱۹ شرایطی به ما می‌دهد که همگرایی این فرایند تکرار را تضمین می‌کند . توجه کنید که r یک نقطهٔ ثابت تابع تکرار (۳) است اگر و فقط اگر r ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد .

مثال ۱ . با استفاده از روش نیوتن ، $\sqrt{3}$ را تا هشت رقم اعشار تقریب کنید .

حل . چون $(1.7)^2 = 2.89$ و $(1.8)^2 = 3.24$ ، پس $\sqrt{3}$ بین 1.7 و 1.8 قرار دارد . هرگاه $f(x) = x^2 - 3$ ، آنگاه $f(r) = 0$ اگر و فقط اگر $r = \sqrt{3}$. به‌علاوه ، $f'(x) = 2x$ ؛ و لذا ، طبق فرمول (۱) ،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

لذا ، تقریب $(n+1)$ م x_{n+1} متوسط تقریب قبلی x_n و 3 تقسیم بر x_n می‌باشد . بازهٔ I دراینجا $[1.7, 1.8]$ است ،و قضیهٔ ۱۹ تقریب‌اولیهٔ $x_1 = 1.8$ را می‌خواهد ،زیرا $f'(x) = 2x$ و $f''(x) = 2$ هر دو بر I مثبت می‌باشند . با استفاده از ماشین حساب یا کامپیوتر ، چند تقریب بعدی را تا هشت رقم اعشار محاسبه می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$x_1 = 1.8$$
$$x_2 = 1.73333333$$

$$x_3 = 1.73205128$$
$$x_4 = 1.73205081$$
$$x_5 = 1.73205081$$

چون x_4 و x_5 تا هشت‌رقم اعشاری یکی هستند ، نتیجه‌می‌گیریم که‌تقریب $r = \sqrt{3} \approx 1.73205081$ تا هشت رقم اعشار دقیق است ، و این در مثال بعد تأیید خواهد شد .

مثال ۲ . در مثال قبل ، تقریبهای $x_3 \approx \sqrt{3}$ و $x_4 \approx \sqrt{3}$ چقدر دقیق‌اند ؟

حل . با اختیار $r = \sqrt{3}$ در فرمول (۲) ، داریم

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{M}{2m}|x_n - \sqrt{3}|^2,$$

که در آن m مینیمم $|f'(x)| = 2|x|$ بر $I = [1.7, 1.8]$ و M ماکزیمم $|f''(x)| = 2$ بر I است . اما $m = 2(1.7) = 3.4$ ، $M = 2$ ؛ و درنتیجه ،

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3.4}|x_n - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10}|x_n - \sqrt{3}|^2$$

$(1/3.4 \approx 0.294)$. بنابراین ،

$$|x_2 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10}|x_1 - \sqrt{3}|^2 = \frac{3}{10}|1.8 - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

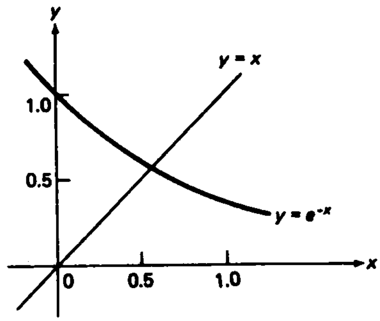
$$|x_3 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10}|x_2 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 3^3 \times 10^{-7} = 2.7 \times 10^{-6},$$

$$|x_4 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10}|x_3 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^7\left(\frac{1}{10}\right)^8 = 3^7 \times 10^{-15} \approx 2.2 \times 10^{-12}.$$

لذا ، تقریب $x_3 \approx \sqrt{3}$ تا 5 رقم اعشار دقیق است ، حال آنکه تقریب $x_4 \approx \sqrt{3}$ تا 11 رقم اعشار دقیق می‌باشد . توجه کنید که این تخمین خطا محاسبهٔ تقریب بعدی $x_5 \approx \sqrt{3}$ را ، که تا 23 رقم اعشار دقیق است ، ناضرور می‌سازد .

مثال ۳ . معادلهٔ $x - e^{-x} = 0$ را به روش نیوتن حل کنید .

حل . از شکل ۱۵ معلوم می‌شود که این معادله فقط یک‌ریشهٔ r دارد که طول نقطهٔ اشتراک خط $y = x$ با منحنی $y = e^{-x}$ است ، و گویی $r \approx 0.5$ تقریب اولیهٔ مناسبی می‌باشد . با



شکل ۱۵

اختیار $f(x) = x - e^{-x}, f'(x) = 1 + e^{-x}$ در فرمول (۱)، به دست می‌آوریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n e^{-x_n} + e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n + 1}{e^{x_n} + 1}.$$

چند تقریب اولیه را تا شش رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$x_1 = 0.5$$
$$x_2 = 0.566311$$
$$x_3 = 0.567143$$
$$x_4 = 0.567143$$

لذا، نتیجه می‌گیریم که تا شش رقم اعشار $r \approx 0.567143$. اگر $x_1 = 0.6$ را تقریب اولیه بگیریم، در عوض به دست می‌آوریم

$$x_1 = 0.6$$
$$x_2 = 0.566950$$
$$x_3 = 0.567143$$
$$x_4 = 0.567143$$

که همان جواب با همان تعداد مراحل به ما می‌دهد. این با قضیهٔ ۱۹ تعارضی ندارد، که انتخاب x_1 را نقطهٔ انتهایی چپ بازهٔ $I = [0.5, 0.6]$ پیشنهاد می‌کند، زیرا $f'(x) = 1 + e^{-x}$ و $f''(x) = -e^{-x}$ مختلف‌العلامه می‌باشند. بالاخره، اگرچه قضیه همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در صورت انتخاب نقطهٔ انتهایی دیگر تضمین نمی‌کند، ولی مسلماً " نمی‌گوید که $\{x_n\}$ همگرا نمی‌شود، و اگر همگرایی رخ دهد، تعارضی برای پیروزی وجود ندارد. توجه کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌ازای $x_1 = 0.5$ یکنواست، ولی نه به ازای $x_1 = 0.6$. این را چطور تحلیل می‌کنید؟

برهان قضیهٔ ۱۹ (اختیاری). با اختیار $x = r$ و $a = x_n$ در قضیهٔ مقدارمیانگین‌تعمیم یافته (۳)، صفحهٔ ۸۸۱، داریم

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2}(r - x_n)^2,$$

که در آن t_n بین x_n و r قرار دارد. بنابراین،

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r + \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

یا معادلاً

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - r)^2, \tag{۴}$$

زیرا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{۵}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که علامت $f(x_1)$ همواره با علامت f'' یکی است [1]. لذا، از (۴) و (۵) معلوم می‌شود که $r < x_2 < x_1 = b$ اگر f' و f'' هم‌علامت باشند ولی $a = x_1 < x_2 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند. چون x_1 و x_2 در یک طرف r واقعند، $f(x_2)$ با $f(x_1)$ هم‌علامت‌است. لذا، کاربرد دیگری‌از فرمولهای (۴) و (۵) نشان‌می‌دهد که $r < x_3 < x_2 < x_1$ اگر f' و f'' هم‌علامت باشند، حال آنکه $x_1 < x_2 < x_3 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند. در واقع، کاربرد مکرر این استدلال نشان می‌دهد که به ازای هر n، $r < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1$ اگر f' و f'' هم‌علامت باشند، حال آنکه به ازای هر n $x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند؛ لذا، در هر حالت، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ یکنوای کراندار (نزولی در حالت اول و صعودی در حالت دوم) می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۷۹۶، $\{x_n\}$ به حد L همگراست. این حد مساوی r می‌باشد. در واقع، با حدگیری از طرفین (۵) وقتی $n \to \infty$، به دست می‌آوریم

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)},$$

---

۱. به‌طور مشروح، $f(a) < 0, f(b) > 0$ اگر $f' > 0$، ولی $f(a) > 0, f(b) < 0$ اگر $f' < 0$. هرگاه f' و f'' هم‌علامت‌باشند، آنگاه $f' > 0, f'' > 0$ یا $f' < 0, f'' < 0$، و در هر دوحالت $f(x_1) = f(b)$ با f'' هم‌علامت است. از آن سو، هرگاه f' و f'' مختلف‌العلامه‌باشند، آنگاه $f' > 0, f'' < 0$، یا $f' < 0, f'' > 0$، و مجدداً در هر دو حالت $f(x_1) = f(a)$ با f'' هم‌علامت می‌باشد.

که $f(L)=0$ و درنتیجه $L=r$ را ایجاب می‌کند. برای اتمام برهان، ملاحظه می‌کنیم که نامساوی (۲) درصورت قضیه نتیجهٔ فوری فرمول (۴) و معنی اعداد m و M می‌باشد.

مسائل

کمیات زیر را با استفاده از روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

۱. $\sqrt{2}$ ۲. $\sqrt[3]{11}$ ۳. $\sqrt[4]{75}$

۴. $\sqrt[5]{1000}$ ۵. $\sqrt[6]{800}$

۶. فرض کنید c عددی مثبت و k عددی صحیح بزرگتر از 1 باشد. نشان دهید که دنبالهٔ تقریبات متوالی $\{x_n\}$ داده شده با فرمول بازگشتی

$$x_{n+1}=\left(1-\frac{1}{k}\right)x_n+\frac{1}{k}cx_n^{1-k} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

به ازای هر تقریب‌اولیهٔ $x_1>0$ به $\sqrt[k]{c}$ همگراست.

۷. معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-x-1=0$ دارای دو ریشهٔ $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ است. به ازای چه مقادیری از تقریب اولیهٔ x_1 دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به وسیلهٔ روش نیوتن‌به‌ریشهٔ مثبت همگراست؟ به ریشهٔ منفی همگراست؟ به ازای چه مقداری از x_1 روش فرو می‌ریزد؟

۸. فرض کنید روش نیوتن برای تقریب $\sqrt[3]{7}$، با شروع از تقریب اولیهٔ $x_1=2$، به کار رفته باشد. نشان دهید که تقریب $\sqrt[3]{7}\approx x_4$ تا نه رقم اعشار دقیق است.

۹. در مثال ۱، صفحهٔ ۱۵۴، روش تنصیف برای یافتن تقریب خامی به ریشهٔ r معادلهٔ $2x^5+2x^2+x-3=0$ در بازهٔ $(0,1)$ به کار گرفته شد. با استفاده از روش نیوتن، r را تا شش رقم اعشار تقریب نمایید.

۱۰. با شکل نشان دهید که معادلهٔ $e^{-x}-\sin x=0$ بی‌نهایت ریشهٔ مثبت دارد. سپس با استفاده از روش نیوتن، دو کوچکترین ریشه را تا چهار رقم اعشار تقریب‌نمایید.

۱۱. نشان دهید که معادلهٔ $x^3-6x+1=0$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد، و هر ریشه را به کمک روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

با استفاده از روش نیوتن، معادلهٔ داده شده را تا سه رقم اعشار حل کنید.

۱۲. $x^4-4x-4=0 \quad (-1<x<0)$

۱۳. $(x+1)^2x=1$ ۱۴. $e^x-x^2+1=0$

۱۵. $x+\ln x-3=0$ ۱۶. $x^2+\ln x-2=0$

۱۷. $4\sin x-x=0 \quad (x>0)$

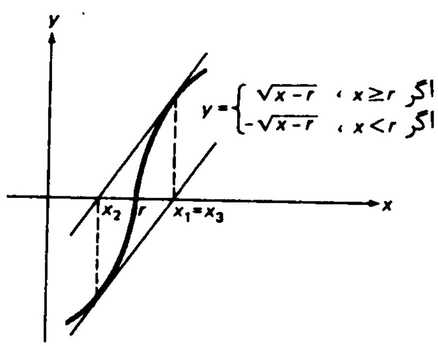
۱۸. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x < 0)$

۱۹. $\tan x = x \quad (\pi/2 < x < 3\pi/2)$

۲۰. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r} & \text{اگر } x \geq r \text{ ،} \\ -\sqrt{x-r} & \text{اگر } x < r \text{ ،} \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۶ ، فقط در r ریشه دارد . نشان دهید که اگر $x_1 \neq r$ ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست ، و بین مقادیر x_1 و $x_2 = 2r - x_1$ نوسان می‌کند . این مطلب را تعبیر هندسی کنید .



شکل ۱۶

۲۱. تابع $f(x) = (x-r)^{1/3}$ فقط در r ریشه دارد . نشان دهید اگر $x_1 \neq r$ ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست و مقادیر با قدرمطلق بدلخواه بزرگ اختیار می‌کند . این مطلب را تعبیر هندسی نمایید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

دنباله‌های نامتناهی

فرمولهای بازگشتی

حد یک دنباله ، دنباله‌های همگرا و واگرا

دنباله‌های کراندار و بی‌کران ، دنباله‌های یکنوا

همگرایی یک دنبالهٔ یکنوای کراندار

سریهای نامتناهی ، مجموعهای جزئی یک سری

سریهای همگرا و واگرا ، مجموع یک سری

سری هندسی ، سری توافقی ، سری p
شرط لازم برای همگرایی
باقیمانده‌ٔ یک سری
محک همگرایی برای سریهای نامنفی
آزمونهای مقایسه ، آزمون انتگرال
همگرایی مطلق در مقابل همگرایی مشروط
سری متناوب ، آزمون سری متناوب
تجدید آرایش سریها
آزمونهای نسبت و ریشه
سری توانی ، سریهای عددی در مقابل سریهای توابع
بازهٔ همگرایی و شعاع همگرایی یک سری توانی
مجموع (تابع) یک سری توانی
مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی
سری دوجمله‌ای
قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته
قضیهٔ تیلور ، فرمول تیلور با باقیمانده
چندجمله‌ایهای تیلور
سریهای تیلور و ماکلورن
روش نیوتن

سریهای عددی مهم

سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ (همگرا به $a/(1-r)$ اگر $|r| < 1$ ، واگرا اگر $|r| \geq 1$)

سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (واگرا)

سری p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (همگرا اگر $p > 1$ ، واگرا اگر $p \leq 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ (سری گرگوری)

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$$ (سری دوجمله‌ای)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ (سری تیلور)

خلاصه‌ای از آزمونهای همگرایی برای سریهای عددی[1]

هرگاه:	آنگاه:
$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	$\sum a_n$ واگراست (قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۸۱۱)
$a_n \geq 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C$	$\sum a_n$ همگراست (قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۸۲۱)
$a_n \geq 0, b_n \geq 0, a_n \leq b_n$	همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند واگرایی $\sum a_n$ واگرایی $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند (قضیهٔ ۵، صفحه ۸۲۴)
$a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$	همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 \leq L < \infty$ واگرایی $\sum b_n$ واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 < L \leq \infty$ (قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۸۲۵)
$a_n = f(n)$ ، f بر $[1, \infty)$ پیوسته، مثبت، و نزولی باشد	$\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد (قضیهٔ ۷، صفحهٔ ۸۲۸)
$\sum \lvert a_n \rvert$ همگرا باشد	$\sum a_n$ همگراست (قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۸۳۶)
$a_n > a_{n+1}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$	$\sum (-1)^{n-1} a_n$ همگراست (قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۸۳۷)
$a_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$	$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \leq \infty$ (قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۸۴۷)
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = L$	$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \leq \infty$ (قضیهٔ ۱۱، صفحهٔ ۸۵۰)

۱. $\sum$ اختصاری است برای $\sum_{n=1}^{\infty}$

مسائل تکمیلی

حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ را (در صورت وجود) بیابید، که‌در آن a_n ، n مین رقم در بسط اعشاری اعداد زیر است.

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{1}{8}$ ۳. $\frac{1}{7}$ ۴. π

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا به 0 را طوری بیابید که

۵. $\{a_n/b_n\}$ همگرا به 0 باشد.

۶. $\{a_n/b_n\}$ همگرا به 1 باشد.

۷. $\{a_n/b_n\}$ واگرا و کراندار باشد.

۸. $\{a_n/b_n\}$ واگرا و بی‌کران باشد.

۹. نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $[0, 1]$ طوری تعریف شده باشد که وقتی $x \to 0^+$ ، $f(x) \to L$ ، آنگاه وقتی $n \to \infty$ ، $f(1/n) \to L$.

حد داده شده را محاسبه کنید.

۱۰. $\lim\limits_{n\to\infty} n \tan \dfrac{1}{n}$ ۱۱. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

۱۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

۱۳. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-3n})$

۱۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

۱۵. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a|<1, |b|<1)$

۱۶. $\lim\limits_{n\to\infty} nc^n \quad (|c|<1)$ ۱۷. $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin \dfrac{2n-1}{4n}$

۱۸. $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan \sqrt[n]{n}$ ۱۹. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

۲۰. تحقیق کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1,$$

حال آنکه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88.$$

راهنمایی . در حالت اول از قضیهٔ ساندویچ برای دنباله‌های داده شده در مسئلهٔ ۵۴ ، صفحهٔ ۸۰۲ ، استفاده کنید ؛ در حالت دوم ، طرف چپ را به صورت حد یک مجموع‌ریمان برای تابع $1/\sqrt{1+x^2}$ را بر $[0, 1]$ تعبیر نمایید .

۲۱ . فرض‌کنید c چنان عددی‌باشد که $0 < c < 1$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$a_1 = c \text{ ، } a_{n+1} = (2 - a_n)a_n \text{ اگر } n \geq 2$$

همگرا به 1 است .

۲۲ . تحقیق کنید که جملهٔ عمومی دنبالهٔ فیبوناچی $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول‌بازگشتی

$$a_1 = 1 \text{ ، } a_2 = 1 \text{ ، } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ اگر } n \geq 3$$

(مثل مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۸۰۱) از فرمول صریح زیر به دست می‌آید :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

۲۳ . فرض‌کنید c عددی مثبت باشد . نشان دهید که دنبالهٔ

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}}, \quad a_3 = \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \ldots,$$

تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$a_1 = \sqrt{c} \text{ ، } a_n = \sqrt{c + a_{n-1}} \text{ اگر } n \geq 2$$

همگرا به حد

$$L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

می‌باشد . (توجه کنید اگر $c = 2$ ، $L = 2$.)

۲۴ . نشان دهید دنبالهٔ $\{c_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad c_n = \frac{1}{2}(c_{n-1} + c_{n-2}) \text{ اگر } n \geq 3$$

همگرا به حد $\frac{1}{3}(a + 2b)$ است .

راهنمایی. توجه کنید که $c_n - c_{n-1} = -\frac{1}{2}(c_{n-1} - c_{n-2})$.

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنبالهٔ همگرایی با حد L باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L. \qquad (\text{یک})$$

آیا (یک) همگرایی $\{a_n\}$ به L را ایجاب می‌کند؟

۲۶. می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1. \qquad (\text{دو})$$

این نتیجه، که به *فرمول استرلینگ*[1] معروف است، به تقریب

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad (\text{دو}')$$

برای n فاکتوریل منجر می‌شود. خطای درصد این تقریب به ازای $n = 5$؟ به ازای $n = 10$ چقدر است؟

حدود زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید.

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

۲۸. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$

۲۹. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

۳۰. $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n/2} n!}{n^n}$

۳۱. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$

۳۲. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$

عبارات زیر را با استفاده از فرمول (دو′) تقریب نمایید.

۳۳. $\ln 40!$

۳۴. $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 49$

۳۵. $\int_0^{\pi/2} \sin^{31} x\, dx$

۳۶. $\int_0^{\infty} x^{50} e^{-x}\, dx$

۳۷. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{11}}$

۳۸. $\int_0^1 x^{15}(1-x)^{16}\, dx$

اگر سری داده شده همگرا باشد، مجموع آن را بیابید. در غیر این صورت، واگرایی آن را مشخص نمایید. درحالتی که سری با چند جملهٔ اولیه داده شده است، فرض کنید قانون

1. Stirling

تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد .

۳۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$

۴۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$

۴۱. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$

۴۲. $\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\frac{7}{(3\cdot 4)^2}+\cdots$

۴۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)}$

۴۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)(c+n+2)}$

۴۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

۴۶. $\frac{1+2}{1-2}+\frac{1+2+4}{1-2+4}+\frac{1+2+4+8}{1-2+4-8}+\cdots$

۴۷. سری $\cdots+(\frac{3}{2}-1)+(\frac{5}{4}-1)+(\frac{9}{8}-1)$ راه‌دیگرنوشتن‌سری‌هندسی‌همگرای $\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ را نشان می‌دهد . ثابت کنید سری حاصل از پرانتزها واگراست .

۴۸. **میانگین توافقی** دو عدد مثبت x و y عددی است چون h به طوری که

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

یعنی ، متقابل h متوسط (یا میانگین حسابی) متقابلهای x و y است . نشان‌دهید هر جملهٔ سری توافقی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

جز اولی میانگین توافقی دوجملهٔ مجاور خود می‌باشد .

۴۹. به ازای دو عدد مثبت x و y ، فرض‌کنید $g=\sqrt{xy}$ میانگین هندسی آنها بوده و h میانگین توافقی آنها ، به صورت تعریف شده در مسئلهٔ قبل ، باشد . تحقیق کنید که $h<g$ مگرآنکه $x=y$ ، که دراین صورت $h=g$. (این را با مسئلهٔ ۱۹ ، صفحهٔ ۱۹ ، مقایسه کنید .)

۵۰. فرض‌کنید n عدد صحیح مثبتی باشد . نشان دهید $1/n$ دارای نمایش اعشاری مختوم

است اگر و فقط اگر اعداد صحیح نامنفیی چون p و q وجود داشته باشند به‌طوری‌که $n = 2^p 5^q$.

اعداد گویای تحویل ناپذیر با نمایشهای اعشاری زیر را بیابید .

۵۱. $0.1234\overline{5}$ ۵۲. $0.12\overline{345}$ ۵۳. $0.\overline{12345}$

۵۴. نشان دهید که اعشاری $0.12345678910111213\ldots$ حاصل از نوشتن مرتب تمام اعداد صحیح مثبت پس از ممیز یک عدد گنگ است .

همگرایی سری داده شده را با هر آزمونی که می‌خواهید بررسی کنید . درحالتی که سری با چند جملهٔ اولیه داده شده است ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد . اگر سری جملات مثبت و منفی داشته باشد ، همگرایی مطلق و مشروط را تمیز دهید .

۵۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n}$ ۵۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

۵۷. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

۵۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

۵۹. $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots$

۶۰. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ ۶۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^n}$

۶۲. $\frac{5}{2} + \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 8 \cdot 11}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$

۶۳. $100 - \frac{100 \cdot 101}{1 \cdot 3} + \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \cdots$

۶۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+(1/n)}}{[n+(1/n)]^n}$ ۶۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{\tanh n}$

۶۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n$ ۶۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

۶۸. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{3}{2^6} + \cdots$

۶۹. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln (n!)}$

۷۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^n$

۷۱. فرض کنید d_n تعداد اعداد صحیح مثبتی باشدکه مقسوم علیه (کامل) n اند. مثلاً" $d_4 = 3$ زیرا 4 دارای مقسوم علیه‌های 1 ، 2 ، و 4 است، $d_5 = 2$ زیرا 5 دارای مقسوم علیه‌های 1 و 5 است، $d_6 = 4$ زیرا 6 دارای مقسوم علیه‌های 1 ، 2 ، 3 ، و 6 است، و از این قبیل. شعاع و بازهٔ همگرایی سری توانی $\sum d_n x^n = d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots$ را بیابید.

تابع داده شده را در $x = 0$ به سری توانی بسط دهید.

۷۲. $\frac{1 - x}{1 + x^2}$

۷۳. $\frac{1}{1 + x + x^2}$

۷۴. $\frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)}$

۷۵. $\frac{x^2}{(1 - x^3)^2}$

۷۶. $(1 - x^2)^{-3/2}$

۷۷. $\frac{1}{1 + x - 2x^2}$

۷۸. $\ln \frac{1 + x}{1 - x} + 2 \arctan x$

۷۹. $[\ln (1 - x)]^2$

۸۰. $(\arctan x)^2$

۸۱. نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na + 1} = 1 - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{2a + 1} - \frac{1}{3a + 1} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{x^a + 1} \qquad (a > 0). \qquad \text{(سه)}$$

با استفاده از فرمول (سه) ، مجموع سریهای زیر را بیابید.

۸۲. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

۸۳. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots$

۸۴. با شروع از فرمول ماشن

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۶۲، صفحهٔ ۴۷۹) و استفاده از سری گرگوری برای arctan x، π را تا هشت رقم اعشار تقریب نمایید.

۸۵. نشان دهید

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}, \qquad \text{(چهار)}$$

که در آن $\{a_n\}$ دنبالهٔ فیبوناچی است.

۸۶. به کمک مسئلهٔ ۲۲، نشان دهید که شعاع همگرایی سری (چهار) مساوی است با $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$.

۸۷. فرض کنید a عددی مثبت باشد. تحقیق کنید که

$$\ln a = 2\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\cdots\right),$$

که در آن

$$b=\frac{a-1}{a+1},$$

و با استفاده از این فرمول، $\ln 3$ را تا چهار رقم اعشار تقریب کنید.

۸۸. بنابر نظریهٔ خصوصی نسبیت اینشتن (ر.ک. مسئلهٔ ۵۴، صفحهٔ ۴۴۳)، انرژی کل یک ذره به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند عبارت است از

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

که در آن c سرعت نور است ($\approx 300{,}000$ km/sec). نشان دهید هرگاه v درمقایسه با c کوچک باشد، آنگاه، با تقریبی مناسب،

$$E=mc^2+K,$$

که در آن $K=\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی نیوتنی ذره است (ر.ک. صفحهٔ ۴۲۹). توجه کنید که هر دو فرمول مربوط به E انرژی mc^2 را به یک ذره به جرم m درحال سکون ($v=0$) می‌دهند، بدین ترتیب " تعادل جرم و انرژی " را بیان می‌نمایند.

۸۹. فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ 4 باشد به‌طوری که

$$P(2)=-1,\qquad P'(2)=0,\qquad P''(2)=2,$$
$$P'''(2)=-12,\qquad P^{(4)}=24.$$

$P(-1)$، $P'(0)$، و $P''(1)$ را پیدا کنید.

۹۰. $\sin 55^\circ$ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n=3$ و $a=60^\circ=\pi/3$ تخمین زده، و

نشان دهید جواب تا پنج رقم اعشار دقیق است .

۹۱ . فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور n م تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ بوده ، و $R_n(x)$ باقیماندهٔ نظیر باشد ؛ درنتیجه ، $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.نشان‌دهید $R_n(x)$را می‌توان به شکل *انتگرالی* زیر نوشت :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du \qquad \text{(پنج)}$$

اگر $f^{(n+1)}(u)$ بر بازه با نقاط‌انتهایی a و x پیوسته باشد . نشان دهید (پنج) ایجاب می‌کند که

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(t بین a و x)

و این شکل باقیمانده است که در صفحهٔ ۸۸۳ داده‌ایم .

راهنمایی . از قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها استفاده‌کنید(ر .ک . مسئلهٔ ۲۷ ، صفحهٔ ۴۴۱) .

۹۲ . مشتق پنجم $x^2\sqrt[3]{1+x}$ در $x = 0$ را با استفاده از سری تیلور حساب‌کنید .

۹۳ . مشتق دهم x^6e^x در $x = 0$ را با استفاده از سری تیلور حساب کنید .

۹۴ . سری ماکلورن چندجمله‌ای $P(x)$ چیست ؟

۹۵ . شش جملهٔ اول سری ماکلورن e^{2x-x^2} را بیابید .

راهنمایی . توجه کنید که

$$e^{2x-x^2} = (e^{2x})(e^{-x^2}).$$

انتگرال داده شده را با استفاده از سری توانی تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید .

۹۶ . $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ ۹۷ . $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$

در هر حالت ، انتگرالده $f(x)$را با پیوستگی در $x = 0$ تعریف کنید ؛ یعنی ، قرار دهید

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

معادلهٔ داده شده را به روش نیوتن تا سه رقم اعشار حل کنید .

۹۸ . $x\ln x = 1$ ۹۹ . $xe^{x^2} = 1$

۱۰۰ . $x + \arctan x - 1 = 0$