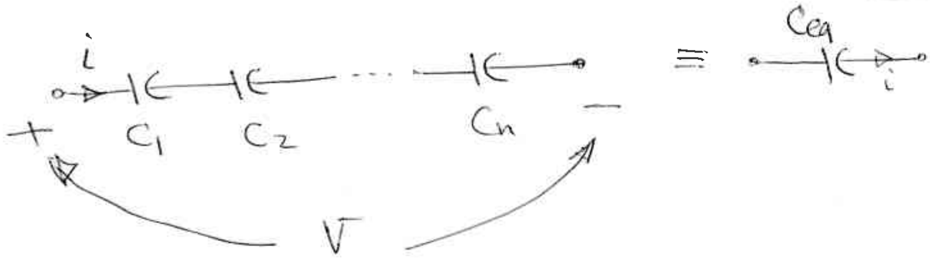
اتصال سری و موازی خازن‌ها و سلف‌ها:

الف) اتصال سری خازن‌ها:



$$i = i_1 = \cdots = i_n \qquad V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n \qquad V = V(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

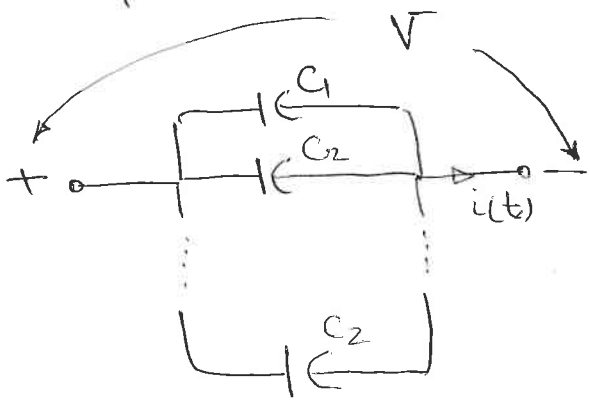
$$\rightarrow V = \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt + V_1(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt + V_2(0) + \cdots + \frac{1}{C_n}\int_0^t i\,dt + V_n(0)$$

$$\rightarrow V = \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}\right)}_{\frac{1}{C_{eq}}}\int_0^t i\,dt\Bigg] + \underbrace{V_1(0) + V_2(0) + \cdots + V_n(0)}_{V(0)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_n} \\[2ex] V(0) = V_1(0) + V_2(0) + \cdots + V_n(0) \end{cases}$$

در اتصال سری خازن‌ها بدون ارتباط به ظرفیت هر خازن بار تمام خازن‌ها یکسان است (تمام خازن‌ها یک بار را می‌گیرند)

ب) اتصال موازی خازن‌ها:



ولتاژ اولیه تمام خازن‌ها باید هم برابر باشند مانند اتصال موازی منابع ولتاژ که بدون برابر بودن مقادیر آنها امکان موازی کردنشان وجود نداشت

$$V_1(0) = V_2(0) = \cdots = V_n(0) \qquad V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$$

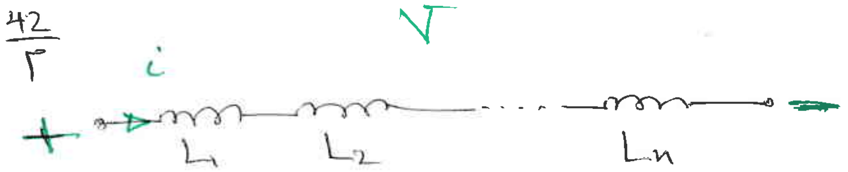
$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = C_1\frac{dV}{dt} + C_2\frac{dV}{dt} + \cdots + C_n\frac{dV}{dt}$$

$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)\frac{dV}{dt} = C_{eq}\,\frac{dV}{dt}$$

$$\longrightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

هر خازنی که C بزرگتری داشته باشد در این حالت بار بزرگتری می‌گیرد

ج) اتصال سری سلف‌ها:



در لحظه $t=0$ سلف شبیه منبع جریان ثابت

و جریان‌های اولیه آنها باید با هم یکی باشد چون kcl نقض می‌شود

شرط اتصال سری سلف‌ها: $i_1(0) = i_2(0) = \cdots = i_n(0)$

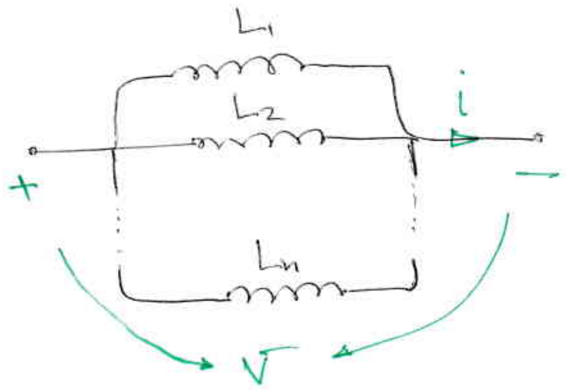
$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$\longrightarrow L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

$$i = i_1 = i_2 = \cdots = i_n$$

د) اتصال موازی سلف‌ها:



$$V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$$

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$$

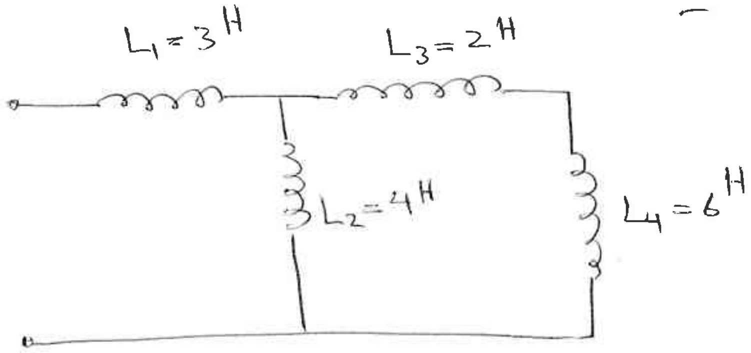
$$\rightarrow i = i_1(0) + \frac{1}{L_1}\int_0^t V dt + i_2(0) + \frac{1}{L_2}\int_0^t V dt + \cdots + i_n(0) + \frac{1}{L_n}\int_0^t V dt$$

$$\rightarrow i = \underbrace{i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0)}_{i(0)} + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)\int_0^t V dt$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \\ i(0) = i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0) \end{cases}$$

$i(0)$ جمع جبری است، هر i_j ممکن است مثبت یا منفی باشد

معادل و مدار سلفی و خازنی داده شده را ساده کنید

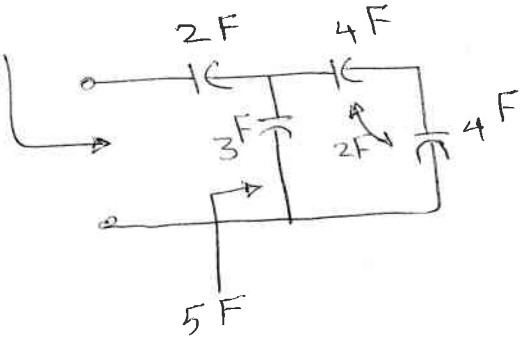


$$L_{34} = L_3 + L_4 = 2 + 6 = 8$$

$$L_2 \parallel L_{34} \quad L_{234} = \frac{4 \times 8}{4+8} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

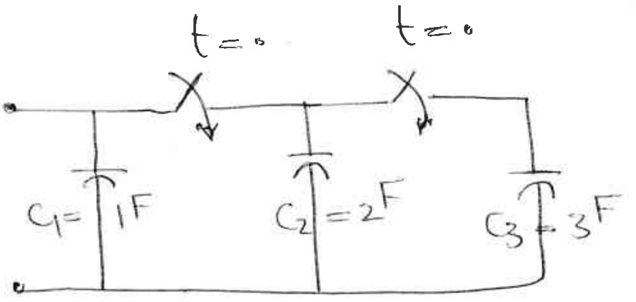
$$L_{1234} = \frac{8}{3} + 3 = 5.66^H$$

$\frac{5}{3.5}$



$$\frac{5 \times 2}{5+2} = \frac{10}{7}$$

فرض کنید ۳ خازن با ظرفیتهای ۱ و 2 و 3 فاراد بطور جداگانه با ولتاژهای ۱ و 2 و 3 ولت شارژ شده باشند اگر این سه خازن را بطور همزمان با یکدیگر موازی کنیم ولتاژ حاصل از اتصال موازی چقدر خواهد شد انرژی ذخیره شده در خازنها را قبل و بعد از اتصال مقایسه کنید



$$V_1(0^-) = 1^V \quad V_2(0^-) = 2^V \quad V_3(0^-) = 3^V$$

$$\begin{cases} q_1(0^-) = C_1 V_1(0^-) = 1^C \\ q_2(0^-) = C_2 V_2(0^-) = 4^C \\ q_3(0^-) = C_3 V_3(0^-) = 9^C \end{cases}$$

$$(C_1 + C_2 + C_3) V_{eq}(0^+) = q_1(0^-) + q_2(0^-) + q_3(0^-) = 14^C$$

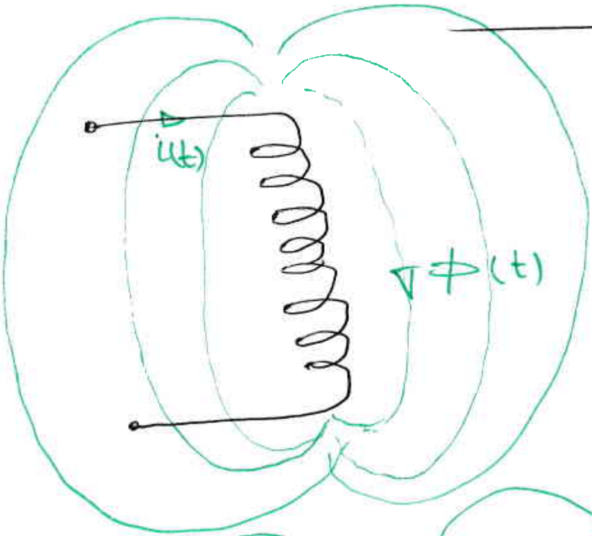
$$\rightarrow V_{eq}(0^+) = \frac{14^C}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{7}{3}^V$$

$\frac{44}{۴}$

$$W_1(0^-) = \frac{1}{2} C_1 V_1^2(0^-) = 0.5\ J$$
$$W_2(0^-) = \frac{1}{2} C_2 V_2^2(0^-) = 4\ J$$
$$W_3(0^-) = \frac{1}{2} C_3 V_3^2(0^-) = 13.5\ J$$
$$\Big\} \rightarrow W(0^-) = 18\ J$$

$$W(0^+) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3) \cdot V_{eq}^2(0^+) = \underline{16.33}\ J$$

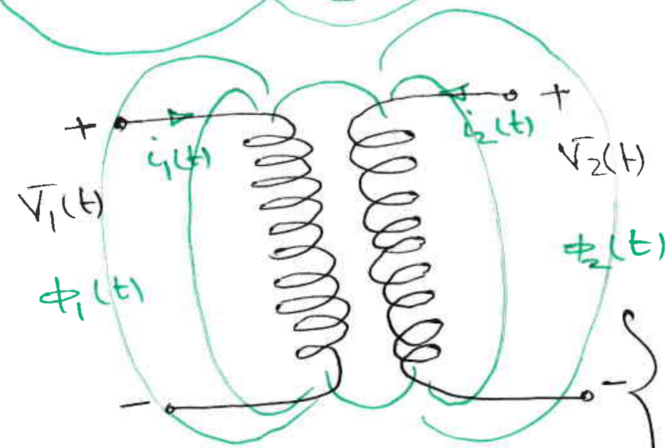
$18 - 16.33 = \underline{1.67}$ J این انرژی در هنگام وصل کلیدها بصورت جرقه تلف شده است



* اندوکتانس متقابل و ترانسفورماتور:

$$\Phi(t) = L\, i(t)$$

L: اندوکتانس



شار مغناطیسی تولید توسط سیم پیچ ۱ از سیم پیچ ۲ عبور می‌کند و بالعکس:

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M_{12}\, i_2(t) \\ \Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + M_{21}\, i_1(t) \end{cases}$$

یک ناشی از دو

M: اندوکتانس متقابل ، معمولاً $M_{12} = M_{21}$ ولی لزوماً اینگونه نیست

$$V_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2(t) = \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

انرژی ذخیره شده در سیم پیچ های ۱ و ۲:

$$W(i_1,i_2)=\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t)+\frac{1}{2}L_2 i_2^2(t)+M i_1 i_2$$

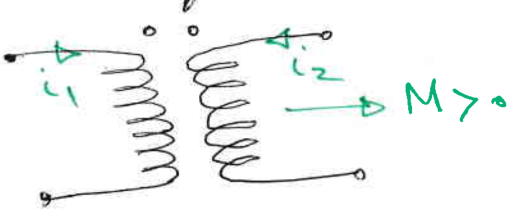
$(M i_1 i_2)$

این انرژی بیشتر در شار مشترک دو سیم پیچ ذخیره می شود

$$W(i_1,i_2)=\underbrace{W(i_1,0)}_{\text{فقط جریان } i_1 \text{ باشه}}+\underbrace{W(0,i_2)}_{\text{فقط جریان } i_2 \text{ باشه}}+\underbrace{M i_1 i_2}_{\text{انرژی شار مشترک}}$$

- فقط جریان i_1 باشه: انرژی ذخیره شده در سیم پیچ ۱ وقتی $i_2=0$
- فقط جریان i_2 باشه: انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی سیم پیچ ۲ وقتی $i_1=0$
- انرژی شار مشترک: انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی مشترک

نشان دهنده جهت میدان مغناطیسی



شارهای مغناطیسی می توانند همدیگر را تضعیف یا تقویت کنند

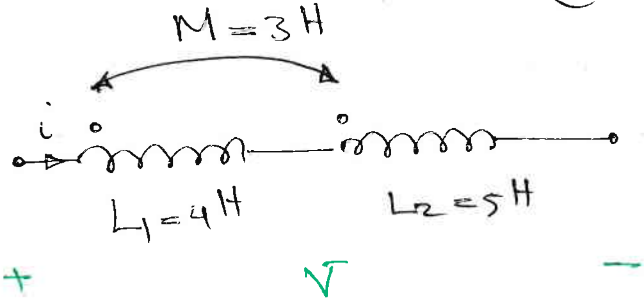
تقویت: $M>0$ — تضعیف: $M<0$

ضریب تزویج:

$$k=\frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}}$$

در بهترین حالت $k=1$ یعنی شار مغناطیسی مشترک زیادی بین دو سیم پیچ وجود دارد (حالت ایده آل) یعنی همان شاری که از سیم پیچ می گذرد از سیم پیچ مقابل هم عبور کند

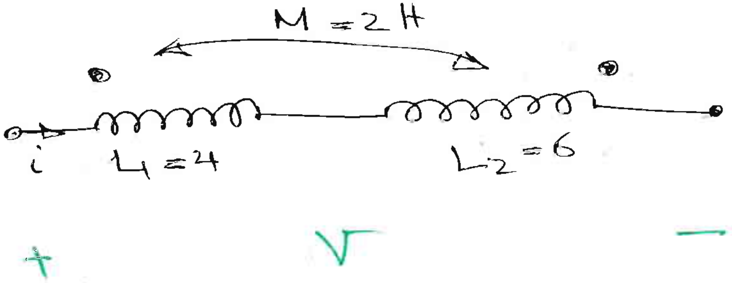
مثال: شکل زیر دو سلف را نشان می دهد که بطور مغناطیسی تزویج شده اند. در هر حالت اندوکتانس سری کل را حساب کنید



$$V=\underbrace{L_1\frac{di}{dt}+M\frac{di}{dt}}_{\text{در سیم پیچ ۱}}+L_2\frac{di}{dt}+M\frac{di}{dt}=\underbrace{(L_1+L_2+2M)}\frac{di}{dt}$$

اندوکتانس کل: $L_{total}=15H$

$$\to V=15\frac{di}{dt}=L_{total}\cdot\frac{di}{dt}$$

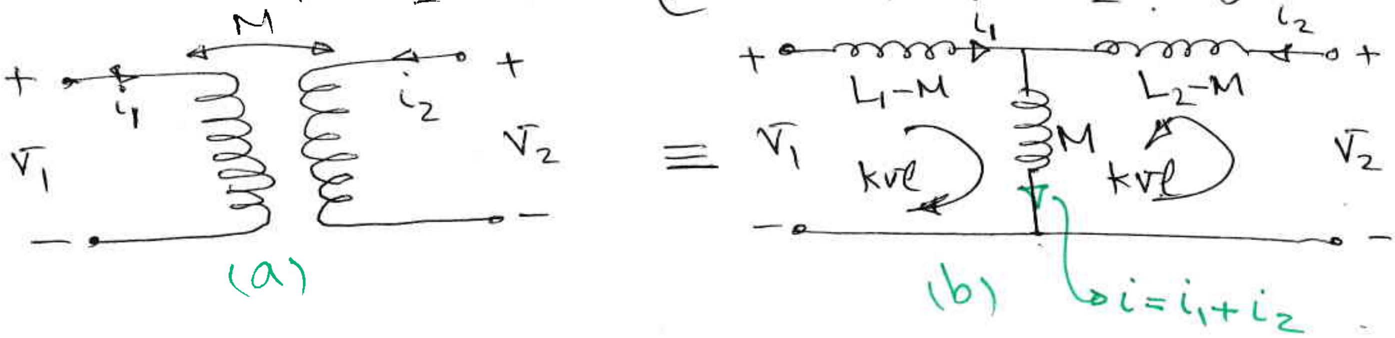


شکل:

$$V = V_1 + V_2 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

$$V = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = \cancel{8}\, L_{total} \cdot \frac{di}{dt} = 6 \frac{di}{dt}$$

شکل: ثابت کنید مدار معادل الکتریکی سلف‌های تزویج شده بصورت زیر خواهد بود



$$a)\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ V_2 = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$\boxed{kvl:}$ b) $V_1 = (L_1 - M) \dfrac{di_1}{dt} + M\left(\dfrac{d(i_1+i_2)}{dt} \right)$

$$\rightarrow V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

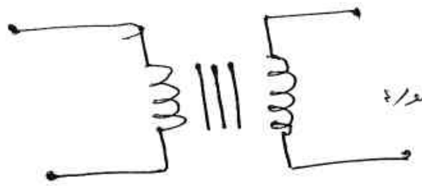
$$V_2 = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} + M\left(\frac{d(i_1+i_2)}{dt} \right) = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$\rightarrow V_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$\rightarrow$ (a) ≡ (b) سلف مدار a هم ارز سلف مدار b است

$\frac{47}{۳}$

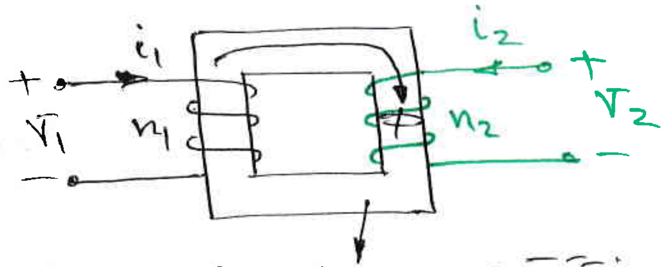
*** ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم‌پیچ:** (شار مغناطیسی که هر سیم‌پیچ (تمام) تولید می‌کند بطور کامل از سیم‌پیچ مقابل عبور می‌کند)



نماد ترانسفورماتور

$$V_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$V_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt}$$



$$\rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

محل واقعی عبور شار هسته آهنی است ← (هسته آهنی باعث تقویت شار مغناطیسی می‌شود)

تعداد دور سیم‌پیچ: n_1, n_2

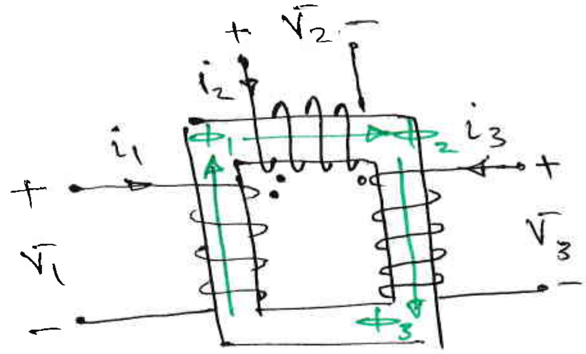
$$V_1 i_1 = -V_2 i_2 \rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{-V_2}{V_1} = \frac{-n_2}{n_1}$$

توانی که یک طرف تولید می‌کند طرف دیگر بطور کامل پس می‌دهد (در حالت ایده‌آل)

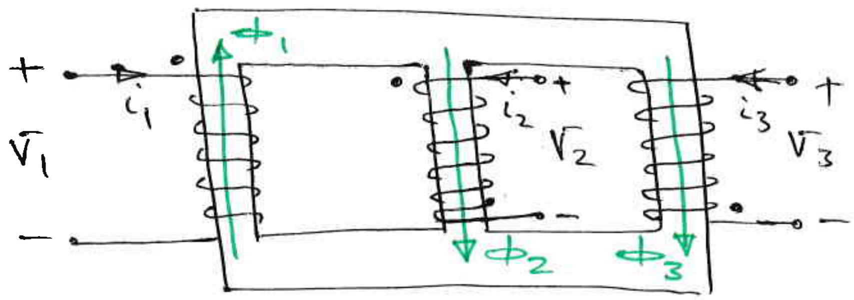
(جریان به شار (در سیم‌پیچ یک)

(شار به جریان در سیم‌پیچ ۲)

منفی به این دلیل است که سیم‌پیچ ۲ تولید کننده توان است و سیم‌پیچ ۱ مصرف کننده توان



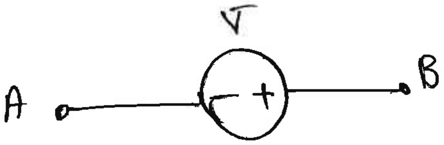
$$\begin{cases} V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} + M_{13}\frac{di_3}{dt} \\ V_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21}\frac{di_1}{dt} + M_{23}\frac{di_3}{dt} \\ V_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{31}\frac{di_1}{dt} + M_{32}\frac{di_2}{dt} \end{cases}$$



ϕ_1 , ϕ_2 همدیگر را تقویت و ϕ_2 و ϕ_3 همدیگر را تضعیف می‌کنند

فصل ۴ تمرین ۱، ۲، ۷، ۱۰

حل تمرین: صـ ۳۴ شکل بالای صفحه مهم است صـ ۳۸ تمرین ۲-۱ مهم تمرین ۲-۲ / تمرین ۱۱ فصل ۲



ابرگره:

kcl بین A , B وقتی که منبع جریان بین آنها قرار دارد

یک معادله از جمع kcl های A , B

$V_B - V_A = V$ یک معادله

فصل ۵ : مدارهای الکتریکی مرتبه اول

دو نوع ذخیره ساز انرژی داریم : الف) مدارهای RC (دارای خازن)

ب) مدارهای RL (شامل مقاومت و سیم پیچ)

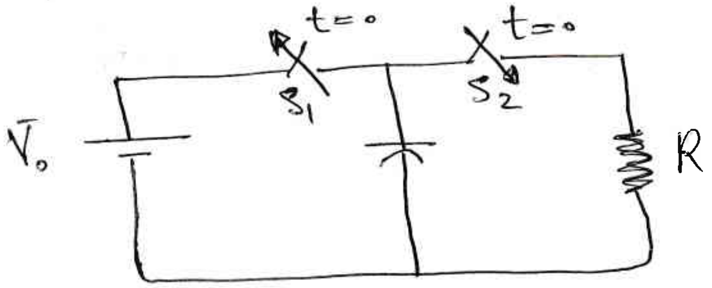
در حالت کلی مرتبه مدار برابر با تعداد عناصر ذخیره ساز مستقل منهای تعداد عناصر وابسته ناشی از حلقه‌های خازنی، کات‌ستهای سلفی، سری و موازی

پاسخ مدار : ولتاژ یا جریان کلی از شاخه‌های مدار که مشخص شده است

پاسخ کامل : پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر (شرط لازم قضیه این است که خطی باشد و از روش جمع آثار استفاده شود)

1 پاسخ ورودی صفر مدارهای RC : یعنی مداری که ورودی ندارد و فقط شرایط اولیه داریم : $(V_C(0))$

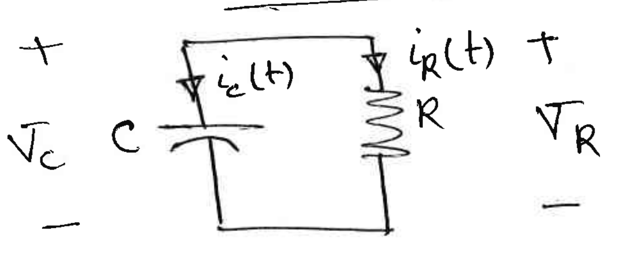
مثال : در مدار زیر کلید S_1 به مدت طولانی بسته و کلید S_2 باز است. در لحظه $t=0$ کلید S_1 قطع شده و خازن از طریق کلید S_2 به مقاومت R متصل می شود. ولتاژ دو سر مقاومت و جریان گذرنده از آن را در حوزه‌ای از زمان بدست آورید



$\forall t \in (-\infty, 0)$: S_1 : ON
S_2 : off

در مدارهای مرتبه اول فقط کافیست یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بنویسیم تا بعد از آن تمام پارامترها را بدست آوریم

$t>0$



$$V_R = V_C \rightarrow i_C(t) + i_R(t) = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_R}{R} + C\frac{dV_C}{dt} = 0$$

$\frac{50}{4}$

$$V_R = V_C \longrightarrow \frac{V_C}{R} + C\frac{dV_C}{dt} = 0 \to \boxed{\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = 0}$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$S + \frac{1}{RC} = 0 \to S = -\frac{1}{RC} \to \boxed{V_C(t) = k_1 e^{-\frac{t}{RC}} + k_2}$$

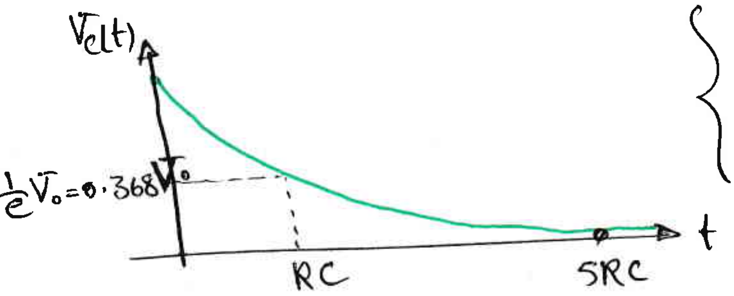
معادله مشخصه

$$\begin{cases} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = 0 \\ V_C(0) = V_0 \quad , V_C(\infty) = 0 \end{cases} \qquad V_C = k_1 e^{-\frac{t}{RC}} + k_2$$

$$\begin{matrix} V_C(0) = k_1 + k_2 = V_0 \\ V_C(\infty) = k_2 = 0 \end{matrix} \to k_1 = V_0 \to \boxed{V_C(t) = V_0 e^{-t/RC}}$$

$$V_R(t) = V_C(t) \to i_R(t) = \frac{V_C(t)}{R} \to \boxed{i_R(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$

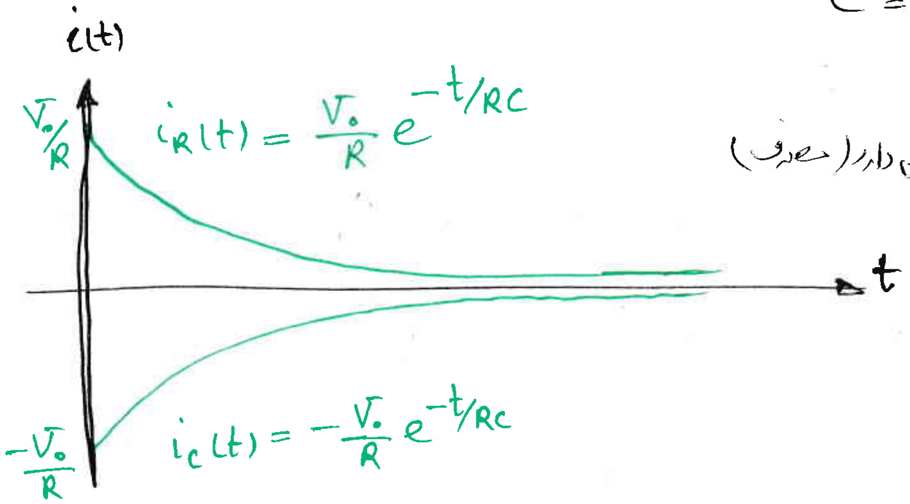
$$\text{if } t>0 \to i_C(t) = -i_R(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



$$\begin{cases} t = RC : V_C(RC) = V_0 e^{-1} = 0.368 V_0 \\ t = 5RC : V_C(5RC) = V_0 e^{-5} = 0.01 V_0 \end{cases}$$

5RC ، مدت زمانی که طول می‌کشد تا مدار به آرامش برسد.

$\tau = RC$ $\quad$ τ : ثابت زمانی

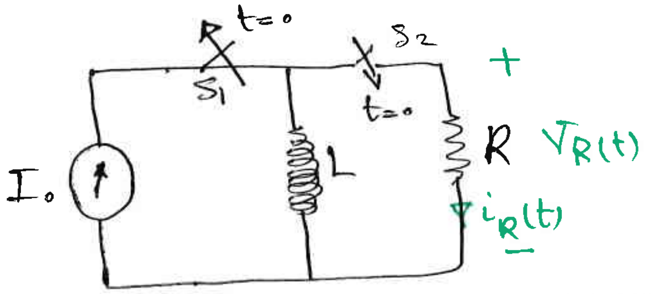


تخلیه خازن RC به مقاومت بستگی دارد (مصرف)

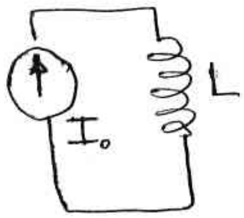
RC به خازن (تولید)

۲) پاسخ ورودی صفر مدار RL :

مثال: در مدار زیر کلید S_1 به مدت طولانی بسته بوده و در لحظه $t=0$ باز می‌شود. کلید S_2 در لحظه $t=0$ بسته می‌شود.
ولتاژ دو سر مقاومت و جریان عبوری از آن را به ازای زمان‌های $t>0$



$t \in (-\infty, 0)$: S_1 : on
S_2 : off

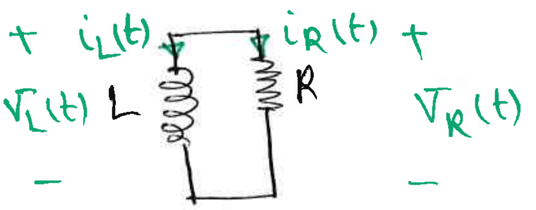
→ 

$i_L(0) = I_0$

(ولتاژ خازن و جریان سلف پرش ناگهانی ندارد) ← از معادله‌ی قبلی یعنی معادله‌ی بسته شدن کلیدها

چون جریان I_0 داریم.

$t \in (0, +\infty)$



$i_L(0) = I_0$

$i_L(\infty) = 0$

KVL: $V_L(t) = V_R(t)$

KCL: $i_R(t) + i_L(t) = 0 \rightarrow \frac{V_R(t)}{R} + i_L(t) = 0 \rightarrow \frac{V_L(t)}{R} + i_L(t) = 0$

$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \longrightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0 \rightarrow S + \frac{R}{L} = 0$

$\rightarrow S = -\frac{R}{L}$

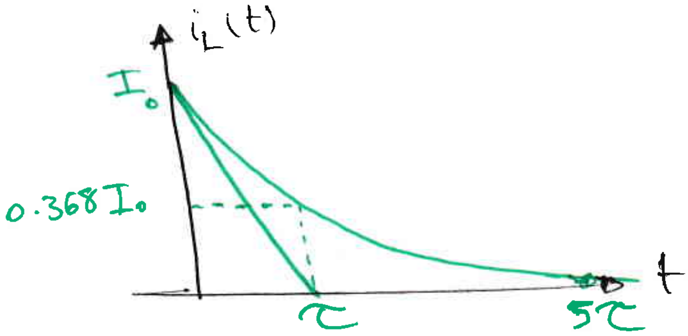
$\rightarrow i_L(t) = k_1 e^{-\frac{R}{L}t} + k_2$

$\left.\begin{array}{l} i_L(0) = 0 = k_1 + k_2 \\ i_L(\infty) = 0 = k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = I_0 \longrightarrow$ $\boxed{i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$

$$i_R(t) = -i_L(t) = -I_0 e^{-R/L\, t}$$

$$V_R(t) = R\, i_R(t) = -R I_0\, e^{-R/L\, t}$$

$$V_L(t) = V_R(t) = L \frac{di_L}{dt}$$



ثابت زمانی : $\frac{L}{R} : \tau \rightarrow i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{-I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\left(\frac{L}{R}\right)$ از جنس ثانیه است

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{-I_0}{\tau}$$

چون $i_L(t)$ از توانش و بطور کلی باید بدون دیمانسیون باشد

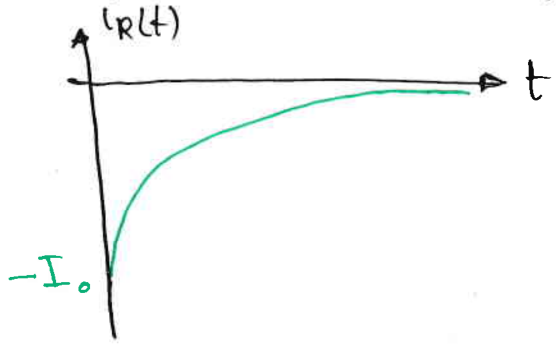
if: $t = \frac{L}{R} = \tau \rightarrow i_L(\tau) = I_0 e^{-1}$

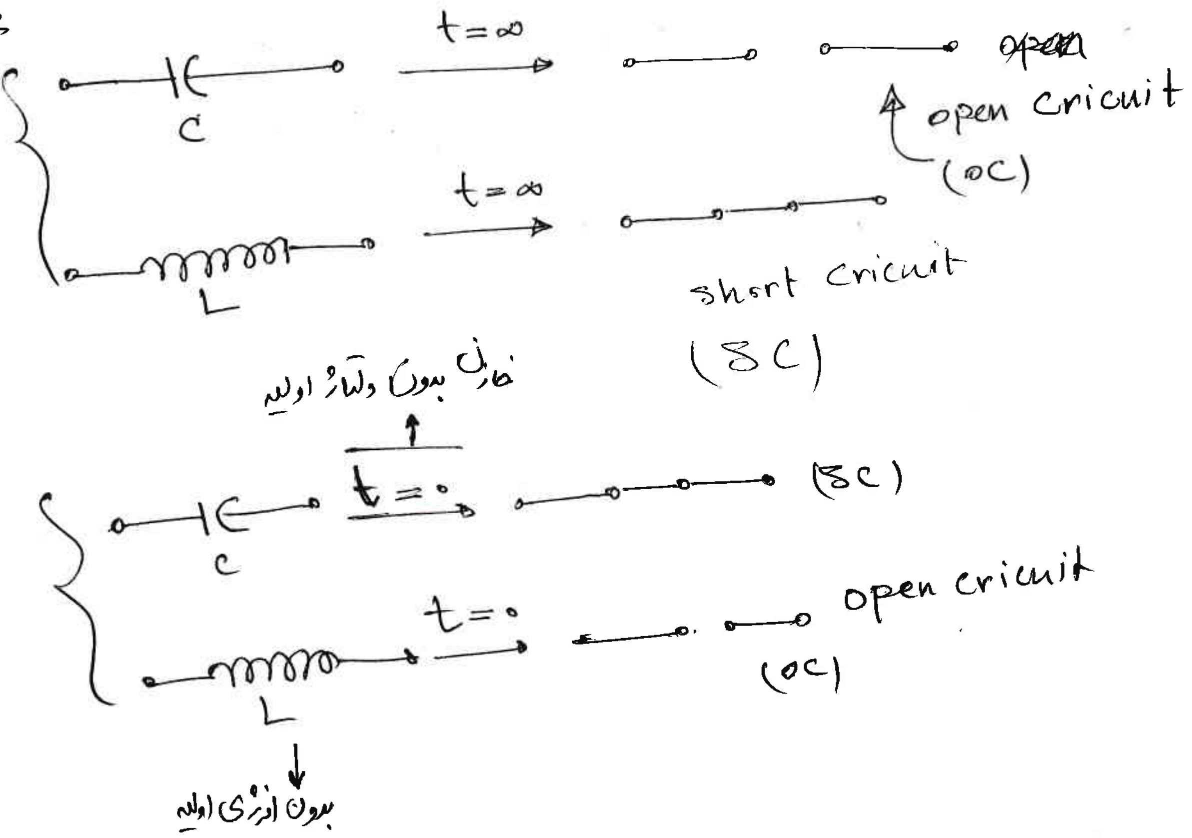
if $t = 5\tau \rightarrow i_L(5\tau) = I_0 e^{-5} = 0.01 I_0$

هرچقدر سلف بزرگتر باشد یا مقاومت کوچکتر باشد مدت زمان بیشتری طول می‌کشد تا $\left(i_L(t)\right)$ مصرف شود و دامنه نمودار در محور زمان افزایش پیدا می‌کند

مصرف کمتر

تولید بیشتر





روابط بدست آمده تاکنون:

پاسخ ورودی صفر مدار RC:

$$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

$$V_C(t) = V_0 e^{\frac{-t}{R_{eq}\cdot C_{eq}}}$$

R_{eq} : مقاومت تونن دیده شده از دو سر خازن معادل

C_{eq} : خازن معادل تمامی خازن های مدار مرتبه اول

V_0 : ولتاژ اولیه خازن معادل

پاسخ ورودی صفر مدار RL:

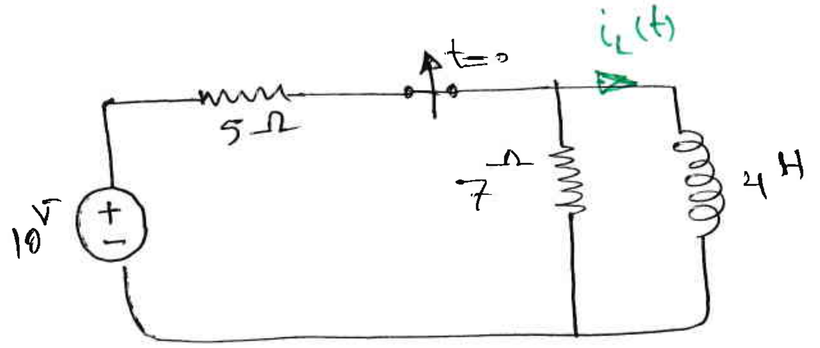
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R_{eq}}{L_{eq}}\cdot t}$$

L_{eq} : سلف یا اندوکتانس معادل

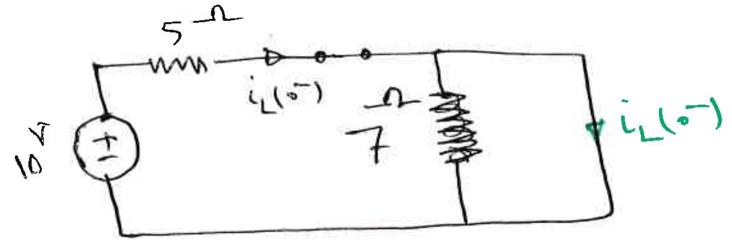
R_{eq} : مقاومت تونن دیده شده از دو سر L_{eq}

I_0 : جریان اولیه سلف معادل

مثال: در مدار زیر فرض کنید کلید به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود. برای زمانهای $t>0$ تغییرات جریان $i_L(t)$ را بیابید.



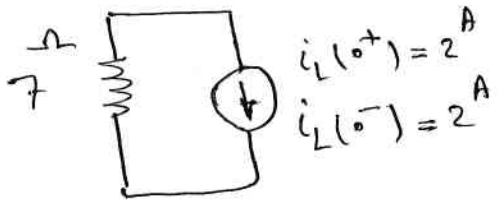
الف) رسم مدار در $t=0^-$ (قبل از باز شدن کلید)



$$KVL:\ -10^V+5i_L(0^-)=0 \rightarrow i_L(0^-)=2^A$$

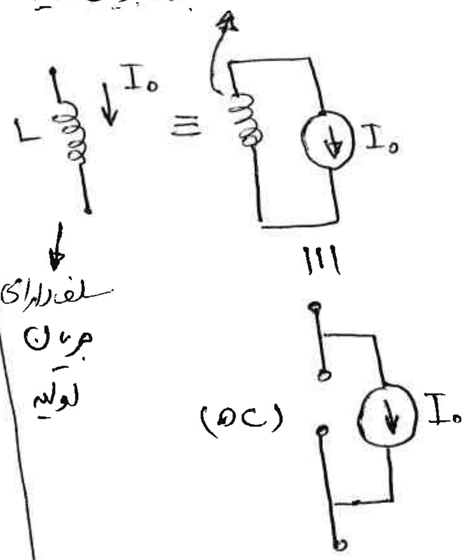
(ولتاژ دو سر 7^{Ω} صفر است)

ب) رسم مدار در $t=0^+$ (بعد از قطع شدن کلید)



در کلید لحظه (ع) بعد از $t=0$ جریان سلف همان 2^A است.

سلف بدون جریان اولیه

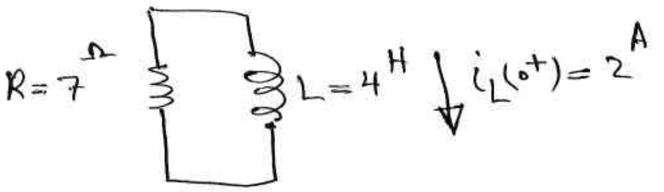


زمان

سلف دارای جریان اولیه

حالت دائم:

ج: رسم مدار در $t>0$



$$i_L(t)=i_L(0^+).e^{-R/L\,t}=2e^{-\frac{7}{4}t} \quad t>0$$

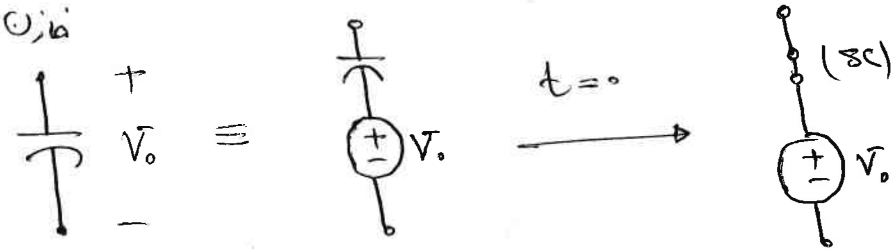
ثابت زمانی : $\tau:\frac{4}{7}$

زمان به آرامش رسیدن مدار (5τ) Sec

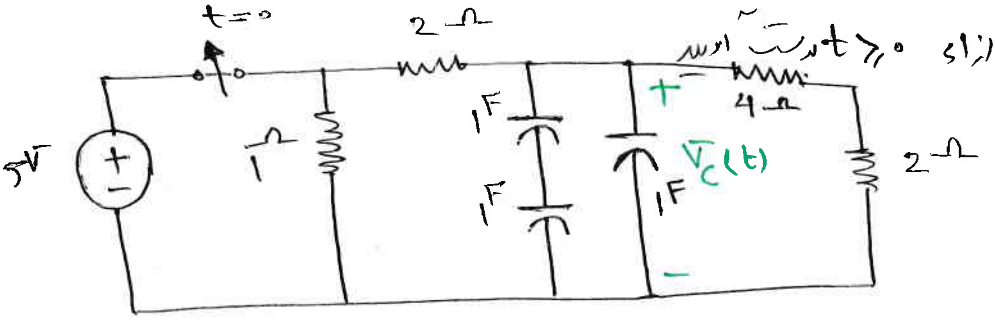
$$5\tau=\left(5\times\frac{4}{7}\right)=\frac{20}{7}\ Sec$$

خازن با ولتاژ اولیه V_0

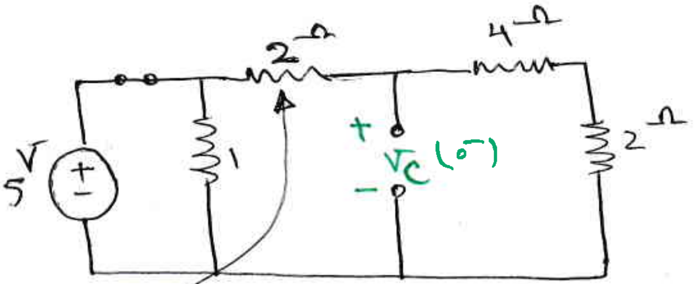
$\boxed{\frac{55}{3}}$



مثال: در مدار زیر $V_c(t)$ را به ازای $t \geq 0$ بدست آورید



الف) رسم مدار در $t=0^-$

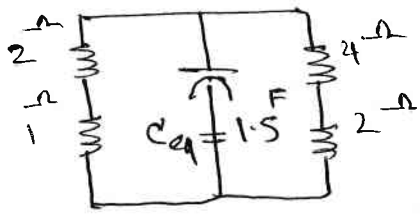


$C_{eq} = 1.5\,F$

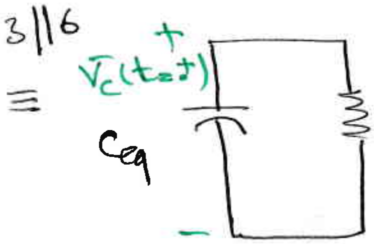
$$V_c(0^-) = \frac{6 \not{\!}(4+2)}{6+2} \times 5^V = \frac{15}{4}(V)$$

قانون تقسیم ولتاژ: در شاخه سری

ب) رسم مدار در $t \geq 0$



$3 \| 6$



$R_{eq} = 6 \| 3 = 2^{\Omega}$

$$V_c(t) = V_c(0^+) \cdot e^{\frac{-t}{R_{eq} \cdot C_{eq}}}$$

$$V_c(0^+) = \frac{15}{4}\,V$$

$$\rightarrow V_c(t) = \frac{15}{4} e^{\frac{-t}{1.5 \times 2}} = \frac{15}{4} e^{\frac{-t}{3}}$$

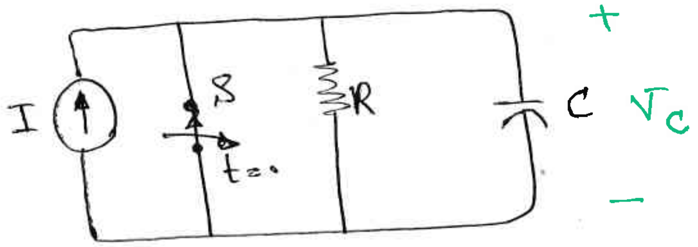
ثابت زمانی $\tau = 3^{\,Sec}$

پاسخ کامل: پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

پاسخ حالت صفر مدارهای RC , RL:

فرض می‌کنیم شرایط اولیه (ولتاژ خازن و جریان سلف) برابر صفر هستند. پاسخ مدار را صرفاً به ورودی‌ها بدست می‌آوریم

مثال: در مدار زیر کلید S به مدت طولانی بسته بوده و در لحظه $t=0$ باز می‌شود. ولتاژ دو سر خازن را برای لحظات بزرگتر از صفر بدست آورید.

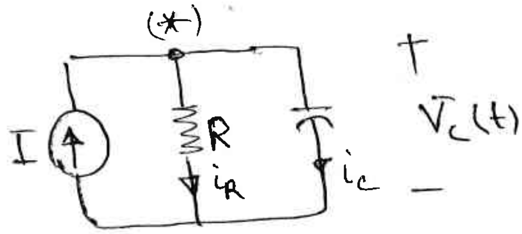


ورودی: منابع انرژی

شرایط اولیه: انرژی ذخیره شده در مدار

$V_c(0)=0$

$V_c(t)=?\quad t>0$



$KCL(*):\ I=i_R+i_c$

$I=i_R+i_c \rightarrow \frac{V_c}{R}+C\frac{dV_c}{dt}=I$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{RC}V_c=\frac{I}{C} \\ V_c(0)=0\ ,\ V_c(\infty)=RI \end{cases}$$

در $t=\infty$ خازن از مدار خارج می‌شود (اتصال باز) پس ولتاژ دو سر آن می‌شود RI

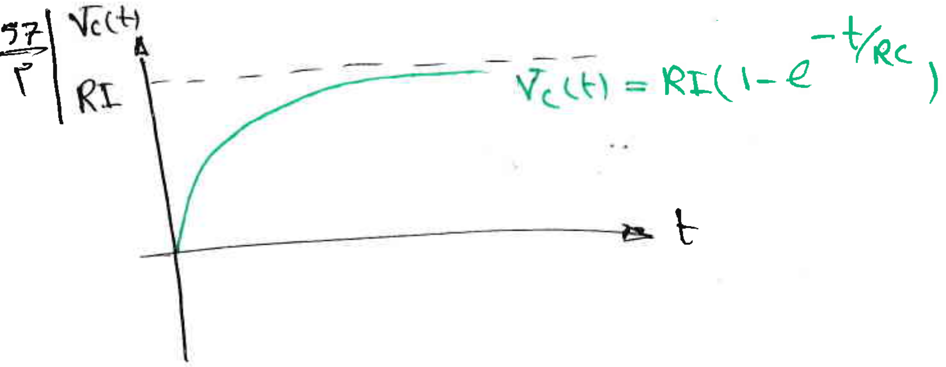
$$S+\frac{1}{RC}=0 \rightarrow S=\frac{-1}{RC} \rightarrow V_c(t)=k_1e^{-t/RC}+k_2$$

$$V_c(0)=k_1+k_2=0 \rightarrow k_1=-k_2$$

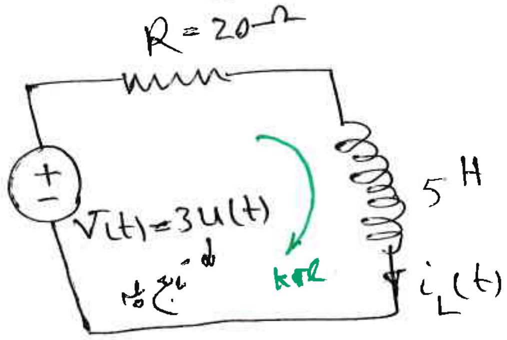
$$V_c(\infty)=k_2=RI \rightarrow k_1=-RI$$

$$\rightarrow V_c(t)=-RIe^{-t/RC}+RI=RI(1-e^{-t/RC})$$

97/۲



مثال: پاسخ حالت صفر جریان $I_L(t)$ را برای زمانهای بزرگتر از صفر بدست آورید



اگر $i_L(0)$ صفر نباشد باید آنرا صفر در نظر گرفت

چون پاسخ حالت صفر را داریم حساب می‌کنیم

$\cancel{i_L(t)=0}$ $\quad i_L(0)=0$

$t>0$

$$KVL: \; -V(t) + 20\, i_L(t) + 5\frac{di_L}{dt} = 0 \qquad V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} + 4 i_L = \dfrac{3}{5} \\ i_L(0) = 0 \qquad i_L(\infty) = \dfrac{3}{20}(A) \end{cases} \xleftarrow{\text{بعبارتی}} KVL: \; -3 + 20\, i_L(t=\infty) = 0$$

$$\rightarrow i_L(\infty) = \frac{3}{20}$$

$$S + 4 = 0 \rightarrow S = -4 \rightarrow i_L(t) = k_1 e^{-4t} + k_2$$

$$\begin{cases} i_L(0) = 0 \rightarrow k_1 + k_2 = 0 \\ i_L(\infty) = \dfrac{3}{20} = k_2 \end{cases} \rightarrow k_1 = -\frac{3}{20}$$

$$\rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{3}{20}(1 - e^{-4t})}$$

پاسخ حالت صفر برای مدار RC:

$$V_c(t) = RI(1 - e^{-t/RC})$$

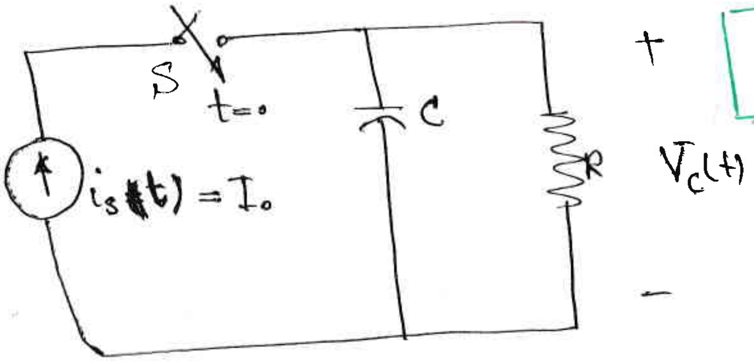
پاسخ حالت صفر برای مدار RL:

$$i_L(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R/L\, t})$$

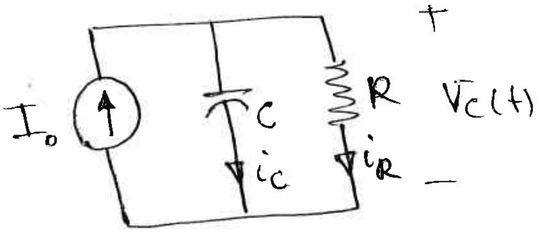
۴/۲

مثال: در مدار زیر کلید در لحظه $t=0$ وصل می‌شود، ولتاژ دو سر خازن را برای $t \geq 0$ بدست آورید

داده شده: $\boxed{V_C(0) = V_0}$



رسم مدار در $t > 0$:



$V_C(0) = V_0$

$$\text{KCL}: \quad I_0 = i_R + i_C \rightarrow \frac{V_C}{R} + C\frac{dV_C}{dt} = I_0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_C}{dt} + \dfrac{V_C}{RC} = \dfrac{I_0}{C} \\ V_C(0) = V_0 \\ V_C(\infty) = RI_0 \end{cases} \qquad \rightarrow S + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow S = \frac{-1}{RC}$$

$$\rightarrow V_C(t) = k_1 e^{-t/RC} + k_2$$

$$V_C(0) = V_0 = k_1 + k_2$$

$$V_C(\infty) = k_2 = RI_0$$

$$k_1 = V_0 - RI_0$$

$$\rightarrow V_C(t) = (V_0 - RI_0)e^{-t/RC} + RI_0$$

$$\rightarrow V_C(t) = \underbrace{V_0 e^{-t/RC}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{RI_0(1 - e^{-t/RC})}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

پاسخ کامل در مدارهای RC:

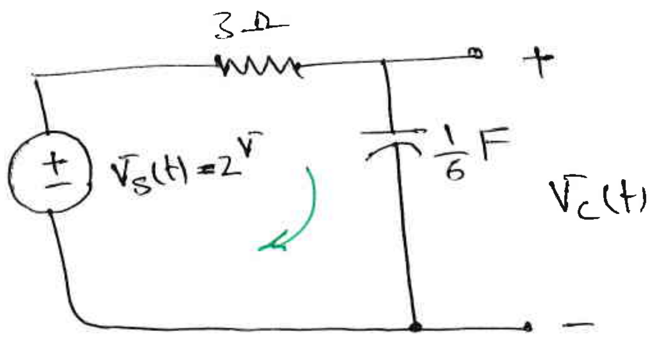
$$V_C(t) = V_0 e^{-t/RC} + RI(1 - e^{-t/RC})$$

پاسخ کامل در مدارهای RL:

$$i_L(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

59 / ۳

در مدار زیر فرض کنید $V_s(t) = 2^V$, $V_c(0) = 1^V$, $V_c(t)$, $i(t)$ برای زمان های بزرگتر از صفر بدست آورید



$V_c(0) = 1^V$

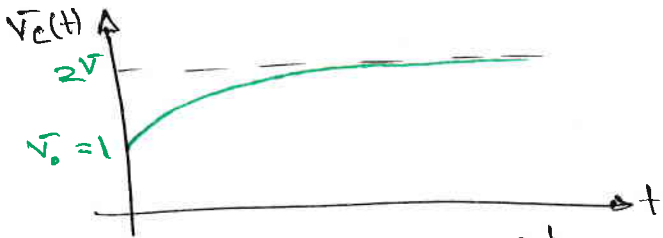
KVL: $-2 + 3i_c + V_c = 0 \rightarrow -2 + 3 \times \frac{1}{6}\frac{dV_c}{dt} + V_c = 0$

$\frac{dV_c}{dt} + 2V_c = 4 \rightarrow S + 2 = 0 \rightarrow S = -2$

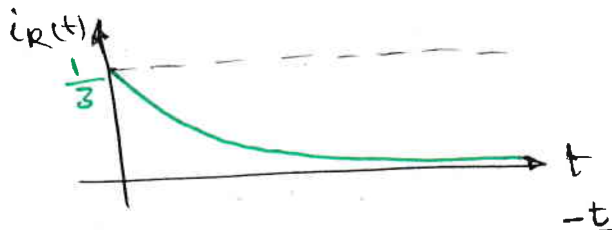
$\rightarrow V_c(t) = k_1 e^{-2t} + k_2$

$V_c(0) = 1 = k_1 + k_2$

$V_c(\infty) = 2 = k_2$ $\rightarrow k_1 = -1$ $\rightarrow \boxed{V_c(t) = -e^{-2t} + 2}$



$i_R = i_c = \frac{1}{6}\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{6} \times 2e^{-2t} = \frac{1}{3}e^{-2t}$



$V_c(t) = (V_c(0) - V_c(\infty))\, e^{\frac{-t}{RC}} + y(\infty)$

$= (1 - 2)e^{-t/3\times\frac{1}{6}} + 2 = -e^{-2t} + 2$

۵ / ۳

* شرایط اولیه در مدار کلید زنی :

الف) پیوستگی جریان سلف و ولتاژ خازن : همانطور که اشاره شد

(قبل و بعد از کلید زنی) کلید زنی در مدار در لحظه t_0 :

$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0) = i_L(t_0^+)$$

$$V_C(t_0^-) = V_C(t_0) = V_C(t_0^+)$$

حال در زمان کلید زنی با توجه به نکته قبل و مدلهای در نظر گرفته شده برای سلف و خازن در فصل قبل (با توجه به اینکه خازن در لحظه اولیه اتصال کوتاه و سلف اتصال باز است فقط منبع ولتاژ سری با خازن یا منبع جریان موازی با سلف باقی می ماند) می توان مدار را تحلیل کرد

خازن در لحظه بعد از کلید زنی :

$$V_C(t_0^+) = V_C(t_0^-)$$

(به صورت منبع ولتاژ در نظر می گیریم)

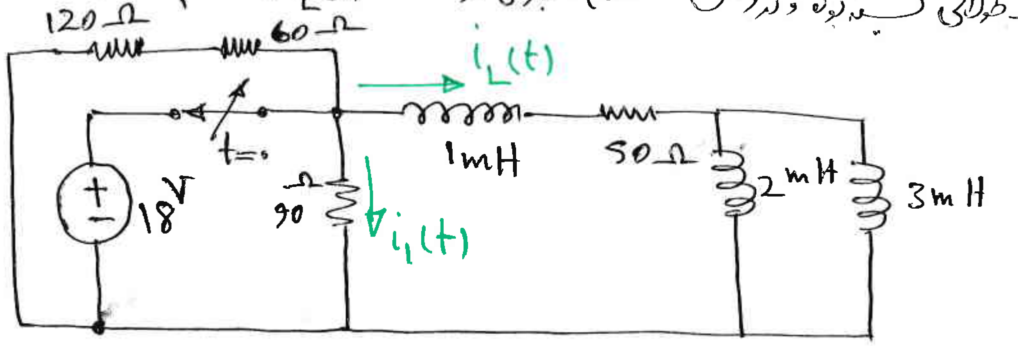
سلف در لحظه بعد از کلید زنی :

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$$

(به عنوان یک منبع جریان در نظر می گیریم)

تمرین فصل پنجم : ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۹ ،

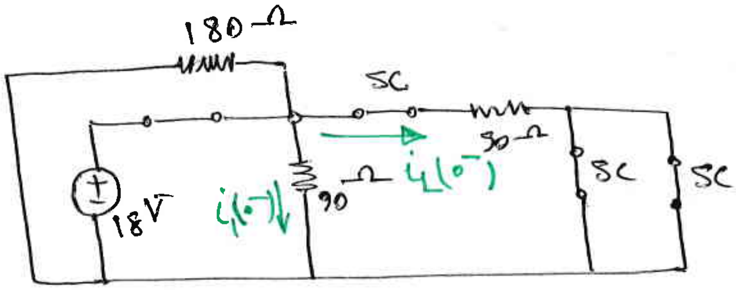
مثال : در مدار زیر کلید به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$ باز می شود $i_1(t)$, $i_L(t)$ را برای $t \geq 0$ بدست آورید.



برای $t>0$ باید مدار تحلیل شود تا جریان سلف یا ولتاژ خازن بدست آید

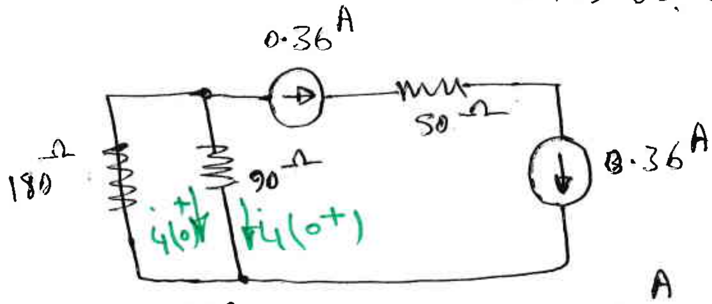
- تحلیل مدار $t=0^-$:

– تحلیل مدار در $t=0^-$:



$$i_L(0^-) = \frac{18^V}{50^\Omega} = 0.36^A \qquad i_1(0^-) = \frac{18}{90} = 0.2^A$$

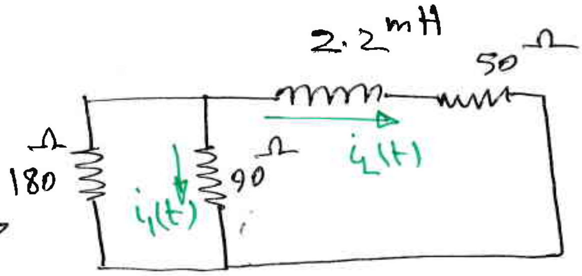
– تحلیل مدار در $t=0^+$: که لحظه بعد از کلیدزنی سلف به صورت منبع جریان در می‌آید به اندازه ۰.۳۶ آمپری که قبل از کلیدزنی از آن عبور می‌کرده است.
(پاسخ ورودی صفر)

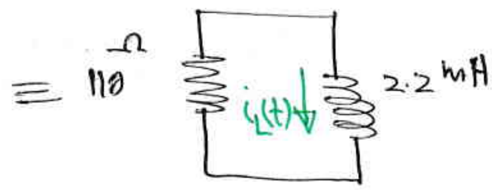


فقط ولتاژ خازن و جریان سلف پیوسته اند که به طور شانسی به طور مثال $i_1(0)$ از 0.2 به -0.24 تبدیل شده است دیگه سیگنال پیوسته نیست.

$$i_1(0^+) = -\frac{180}{180+90}\times 0.36 = -0.24^A$$

– تحلیل مدار در $t>0$





$$i_L(0^+) = 0.36^A$$

$$i_L(t) = i_L(0^+)\cdot e^{-R/L\, t} = 0.36\, e^{-\frac{110}{2.2\times10^{-3}}\cdot t} = 0.36\, e^{-50000t}$$

ثابت زمانی مدار : $\tau = \left(\frac{1}{50000}\right)^{sec}$

$i_1(t) = -0.24 e^{-50000t}$ ⟵ $i_1(t)$ یا از فرمول شامل ثابت می‌آید

$i_1(t) = i_1(0^+) e^{-50000t}$

یا از قانون تقسیم جریان در شاخه‌های موازی که $i_L(t)$ بین دو شاخه 90^Ω و 180^Ω تقسیم می‌شود

$$i_1(t) = -\frac{180}{180+90}\cdot i_L(t)$$

* حل سریع مدارهای مرتبه اول:

$$y(t) = (y(0) - y(\infty))\, e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$

پاسخ کامل هر مدار مرتبه اول برای $t>0$ ، ($y(t)$ برای $t>0$)

مجهولات: $y(0)$, $y(\infty)$, τ

به کمک اصول اتصال کوتاه شدن سلف و اتصال باز شدن خازن، $y(\infty)$ را در مدار بدست می‌آوریم

تحلیل مدار در $t=0^-$ ، جایگزینی سلف با منبع جریان و خازن با منبع ولتاژ در $t=0^+$ ، روش بدست آوردن $y(0)$ است.

در مدارهای RC : $\tau = R_{eq} \cdot C_{eq}$ ؛ C_{eq} : خازن معادل پس از سری و موازی سازی ، R_{eq} : مقاومت تونن دیده شده از دو سر خازن

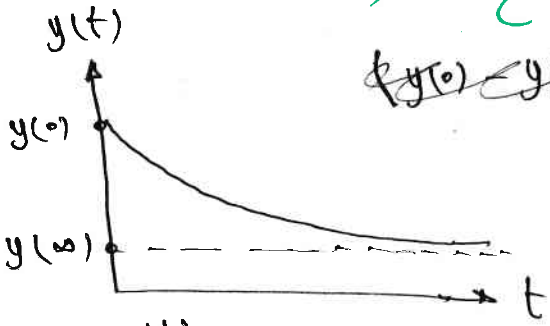
در مدارهای RL : $\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}}$ ؛ L_{eq} : سلف معادل پس از سری و موازی سازی ، R_{eq} : مقاومت تونن دیده شده از دو سر L_{eq}

$$y(t) = \underbrace{(y(0) - y(\infty))\, e^{-t/\tau}}_{\text{پاسخ حالت گذرا}} + \underbrace{y(\infty)}_{\text{پاسخ حالت دائمی}}$$

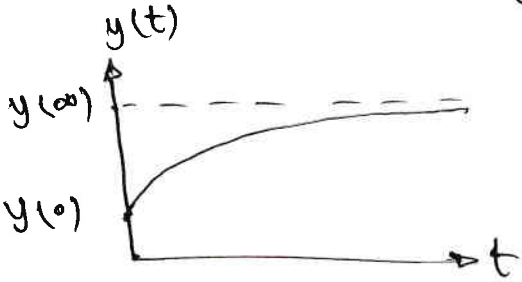
رسم $y(t)$:

~~$(y(0) < y(\infty))$~~

حالت اول $y(0) > y(\infty)$ ←

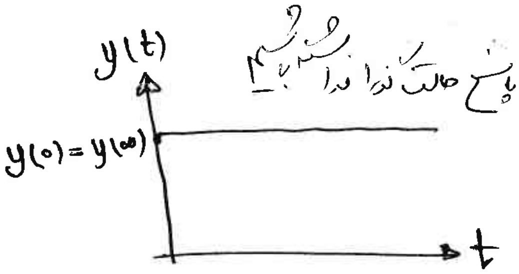


حالت دوم، $y(0) < y(\infty)$: ←

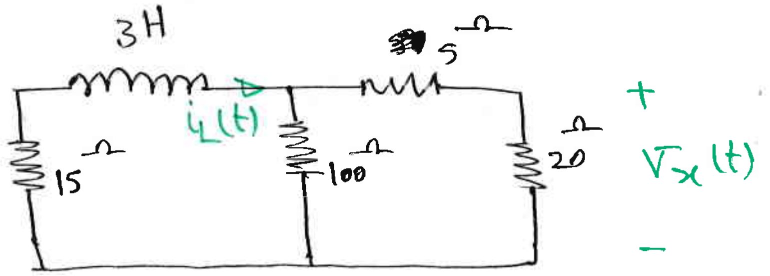


حالت سوم، $y(0) = y(\infty)$ ← $y(t) = y(\infty)$

سؤال: اندازه مقاومت R را طوری تعیین کنید که برای محاسبه $V_x(t)$ پاسخ حالت گذرا نداشته باشیم



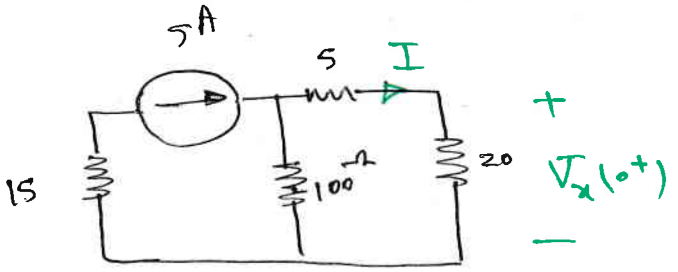
مثال: در مدار شکل زیر $i_L(0)=5^A$ است. برای $t \geq 0$ ، $i_L(t), V_x(t)$ را بدست آورید



$i_L(0) = 5^A$ $\qquad$ $i_L(t), V_x(t), t > 0 = ?$

چون سلف داریم و جریان سلف پیوسته است، $i_L(t)$ هم همان $i_L(0)$ است

– رسم مدار در $t=0^+$:

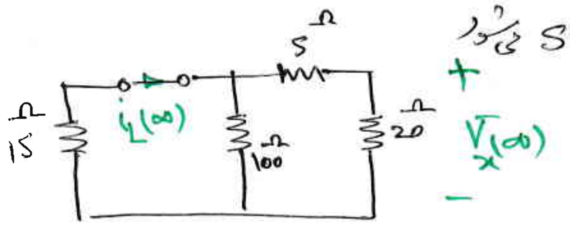


$$I = \frac{100}{100+25} \times 5^A = 4A$$

$$V_x(0^+) = 20I = 20 \times 4 = 80^V$$

$$i_L(0^+) = 5^A$$

– رسم مدار در $t=\infty$ ← سلف تبدیل به SC می‌شود

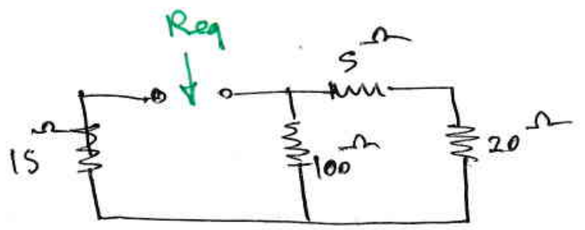


$$V_x(\infty) = i_L(\infty) = 0$$

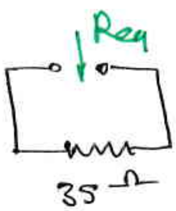
– بدست آوردن τ (ثابت زمانی)

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}}$$

R_{eq}: مقاومت دیده شده از دو سر سلف



$\equiv$



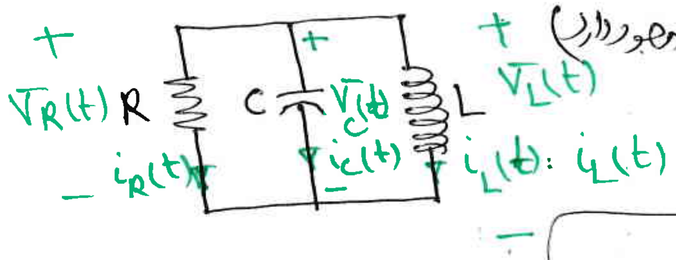
$$\rightarrow \tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{3}{35} = 0.086 \text{ (Sec)}$$

چون ترم [illegible] ندارد:

$$\begin{cases} V_x(t) = (80-0)e^{-0.086t} + 0 \\ i_L(t) = (5-0)e^{-0.086t} + 0 \end{cases}$$

فصل ۶ مدارهای مرتبه دوم (مدارهای خطی و تغییر ناپذیر با زمان)

— با ورودی صفر: (انرژی اولیه در مدار وجود دارد)



$i_L(0) > 0 \quad , \quad v_C(0) > 0$

$$\begin{cases} v_R(t) = v_C(t) = v_L(t) \\ i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{v_R(t) = v_C(t)}$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{v_C(t)}{R}$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,dt$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$$

$v_C(t) = v_L(t)$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)\,dt$$

بازنویسی معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار برحسب (v_C)

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0$$

$$\rightarrow \frac{v_C(t)}{R} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)\,dt + C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

از عبارت مشتق می‌گیریم تا انتگرال از بین برود

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}v_C + C\frac{d^2v_C}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = 0}$$

م.د مدار برحسب v_C

شرایط اولیه

$$\begin{cases} v_C(0) = V_0 \\ \frac{dv_C}{dt}(0) = \frac{1}{C}i_C(0) = -\frac{1}{C}(i_R(0) + i_L(0)) = -\frac{1}{C}\left(\frac{v_C(0)}{R} + i_L(0)\right) \\ \rightarrow \frac{dv_C}{dt}(0) = -\frac{1}{C}\left(\frac{V_0}{R} + I_0\right) \end{cases}$$

V_0 , I_0

بررسی معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار برحسب $i_L(t)$:

$$i_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_L(t)}{R} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{dV_L}{dt} = LC\frac{d^2 i_L}{d^2 t}$$

$$\rightarrow i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0 \longrightarrow \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{d^2 t} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0}$$

م.د حاکم بر مدار برحسب i_L

شرایط اولیه:
$$\begin{cases} i_L(0) = I_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0) = \dfrac{V_L(0)}{L} = \dfrac{V_C(0)}{L} = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

$$\longrightarrow S^2 + \frac{1}{RC} S + \frac{1}{LC} = 0 \longrightarrow \boxed{S_{1,2} = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}}$$

$$S_{1,2} = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\Delta'}$$

بررسی حالتهای مختلف Δ': $\Delta' = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}$

۱) $\Delta' > 0$ (میرایی شدید) $S_1, S_2 < 0$

$$i_L(t) = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t} + k_3$$

(حالت میرایی شدید) چون S_1 و S_2 منفی‌اند هر دو عبارت بصورت نمایی نزولی اند

$$\xrightarrow{t=0} \quad \underline{|k_1 e^{S_1 t}, k_1 e^{S_2 t}|}$$

$$i_L(0) = I_0 = k_1 + k_2 + k_3$$

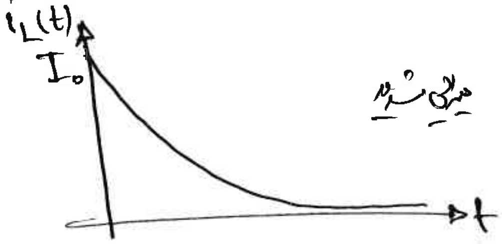
$$i_L(\infty) = 0 = k_3$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_0}{L} = k_1 S_1 e^{S_1 t} + k_2 S_2 e^{S_2 t} = k_1 S_1 + k_2 S_2 = \frac{V_0}{L}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = I_0 \\ k_1 S_1 + k_2 S_2 = \dfrac{V_0}{L} \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول $\longrightarrow$ k_1 و k_2 بدست می‌آیند

$\frac{66}{۳}$



میرا شده

---

2) $\Delta' = 0$ (حالت میرایی بحرانی) : $S_{1,2} = \frac{-1}{2RC}$ $\qquad \underline{S_1 = S_2 < 0}$

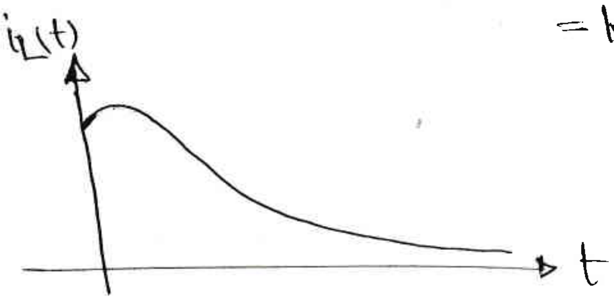
$$i_L(t) = k_1 e^{S_1 t} + k_2 t e^{S_1 t} + k_3$$

$$i_L(\infty) = 0 = k_3$$

$$i_L(0) = I_0 = k_1 + k_3 = k_1$$

$$\cancel{\frac{di_L}{dt}(0) = k_1 S_1 + k_2} \qquad \frac{di_L}{dt}(0) = k_1 S_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_1 t} + k_2 S_1 t e^{S_1 t}$$

$$= k_1 S_1 + k_2 = \frac{V_0}{L}$$



3) حالت میرایی ضعیف $\Delta' < 0$ $\quad S_{1,2}$ $\qquad S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$

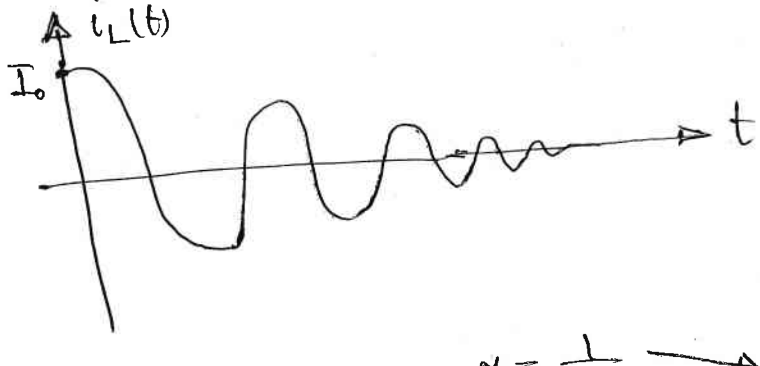
$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad : \quad S_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_d$$

$$\begin{cases} j = i = \sqrt{-1} \\ \alpha = \frac{1}{2RC} \\ \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \end{cases}$$

دو فرم جواب برای i_L:

$$\begin{cases} i_L(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + k_2) + k_3 \\ i_L(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + k_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + k_3 \end{cases}$$

$\frac{67}{2}$



میرایی ضعیف :

۴) حالت بدون میرایی : $\alpha = \frac{1}{2RC} \longrightarrow \alpha = 0$

دو فرم جواب برای $i_L(t)$

$$\begin{cases} i_L(t) = k_1 \cos(\omega_d t + k_2) + k_3 \\ i_L(t) = k_1 \cos \omega_d t + k_2 \sin \omega_d t + k_3 \end{cases}$$

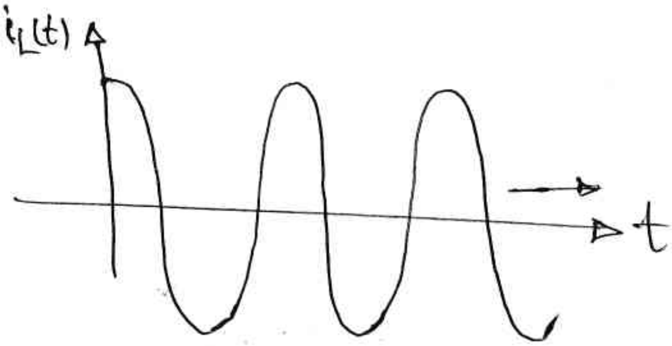
در این حالت :

~~$S_{1,2} = \pm j\omega_d$~~

$S_{1,2} = \pm j\omega_d$

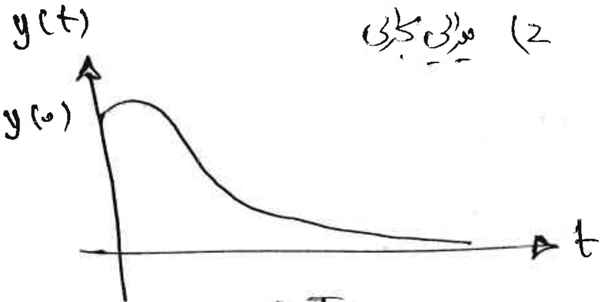
$j = i = \sqrt{-1}$

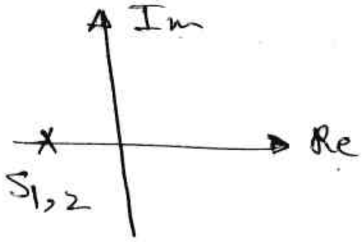
$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



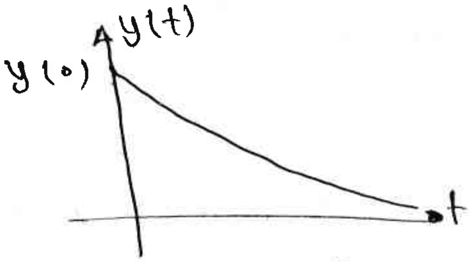
$C = \infty$ یا $R = \infty$ ← $\alpha = 0$

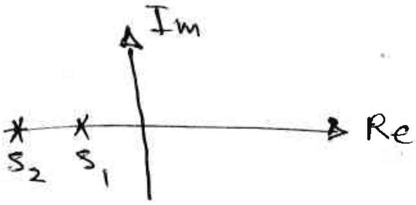
۲) میرایی بحرانی



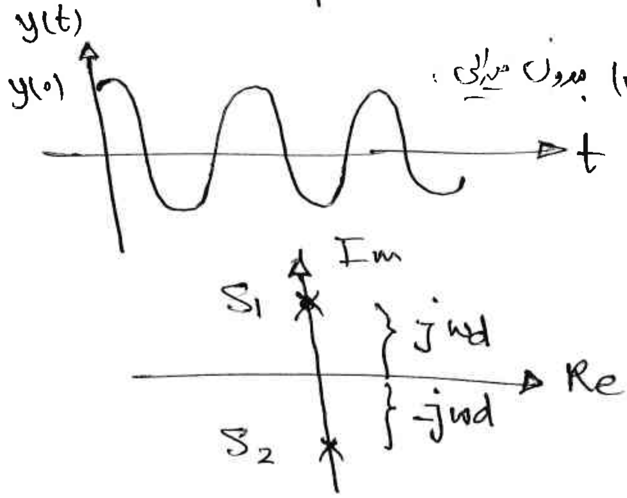


۱) میرایی شدید ($\Delta' > 0$) $S_1 , S_2 < 0$

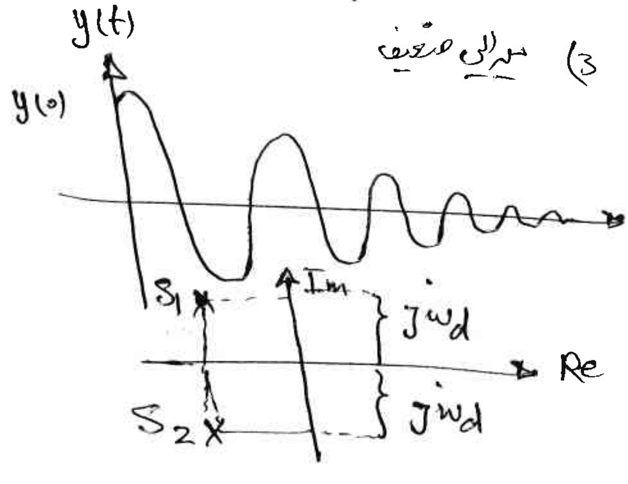




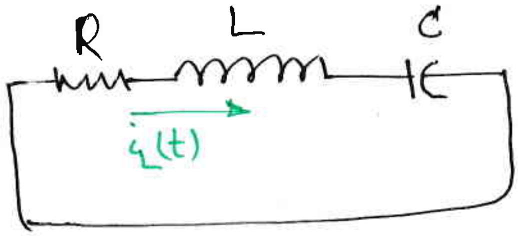
۴) بدون میرایی :



۳) میرایی ضعیف



در مدار زیر فرض کنید $R=6\,\Omega$ ، $L=1\,H$ و $C=0.2\,F$ باشد. اگر شرایط اولیه بصورت $i_L(0)=1\,A$ ، $\frac{di_L}{dt}(0)=0\ (A/s)$ باشد. $i_L(t)$ را بیابید. (پاسخ ورودی صفر)



$$KVL:\ V_R+V_L+V_C=0 \rightarrow R\,i_L+L\frac{di_L}{dt}+V_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_L\,dt=0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt}+6\frac{di_L}{dt}+5i_L=0 \xrightarrow{\text{نوشتن معادله مشخصه}} S^2+6S+5=0$$

$$\rightarrow (S+1)(S+5)=0 \rightarrow \begin{cases} S_1=-1 \\ S_2=-5 \end{cases}$$

حالت میرایی شدید $(\Delta>0)$

$$i_L(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-5t}$$

$$i_L(0)=k_1+k_2=1 \quad ①$$

$$\frac{di_L}{dt}=-k_1e^{-t}-5k_2e^{-5t}\Big|_{t=0}=-k_1-5k_2=0$$

$$\rightarrow k_1=-5k_2 \quad ②$$

$$①,② \rightarrow -5k_2+k_2=1 \rightarrow k_2=-0.25 \rightarrow k_1=1.25$$

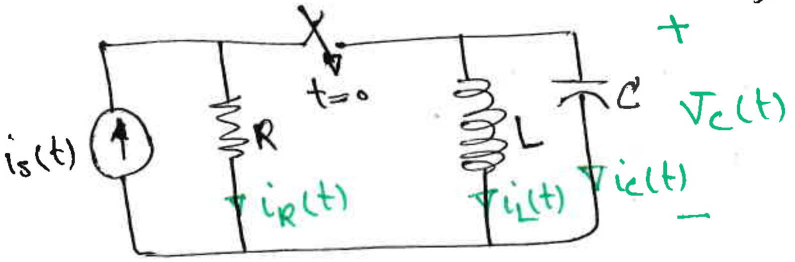
$$\rightarrow \boxed{i_L(t)=1.25e^{-t}-0.25e^{-5t}}$$

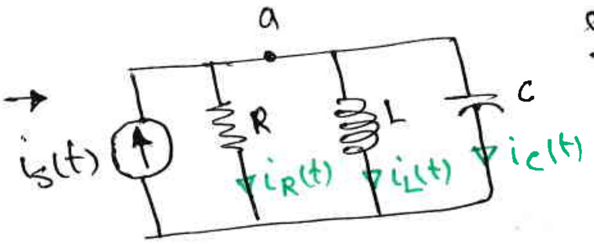
پاسخ ورودی صفر!

* پاسخ حالت صفر - تحریک با منبع ورودی (در این حالت فقط ورودی داریم و شرایط اولیه نداریم)

* مثال: در مدار داده شده کلید در لحظه $t=0$ بسته می شود

$i_L(t)$ را برای $t>0$ بدست آورید





شرایط اولیه
$$\begin{cases} i_L(0)=0 \\ V_C(0)=0 \end{cases}$$

$$KCL(a): \quad i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_s(t)$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L+LC\frac{d^2i_L}{dt^2}=i_s \longrightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=\frac{1}{LC}i_s$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} i_L(0)=0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0)=\dfrac{1}{L}V_C(0)=0 \end{cases}$$

$$i_L(t)=i_{Lh}(t)+i_{Lp}(t)$$

$i_{Lh}(t)$: پاسخ حالت گذرا (جواب عمومی)

$i_{Lp}(t)$: (جواب خصوصی) پاسخ حالت دائمی
پس از اتمام حالت گذرا

$\boxed{\text{پاسخ حالت دائمی (جواب خصوصی) شکل سیگنالهایش بصورت سیگنالهای منبع انرژی خواهد بود (منبع ورودی)}}$

~~جهت بدست آوردن $i_{Lh}(t)$ از (۱) استفاده می کنند (جواب عمومی)~~

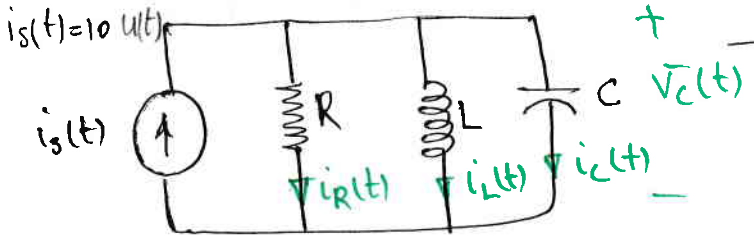
مثال:
$$i_s(t)=k \longrightarrow i_{Lp}(t)=k_1$$
$$i_s(t)=kt \longrightarrow i_{Lp}(t)=k_1+k_2t$$
$$i_s(t)=k\sin(\omega t+\theta_1) \longrightarrow i_{Lp}(t)=k_1\sin(\omega t+k_2)$$

که ضرایب مجهول در جواب خصوصی از قرار دادن جواب در معادله دیفرانسیل بدست می آیند

No. ۲

در مدار زیر، ولتاژ $V_C(t)$ را برای دو حالت الف) $C=\frac{1}{4}F$ ب) $C=\frac{1}{8}F$ بدست آورید

$i_s(t)=10$



$i_s(t)=10\,u(t)$

$R=2\,\Omega$

$L=2\,H$

$V_C(t)=?$

$$\begin{cases} V_C(0)=0 \\ i_L(0)=0 \end{cases}$$

$$i_R+i_L+i_C=i_s$$

$$\longrightarrow \frac{V_C}{R}+i_L(0)+\frac{1}{L}\int_0^t V_C(t)\,dt+C\frac{dV_C}{dt}=i_s$$

مشتق

$$\longrightarrow \frac{1}{R}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{L}V_C+C\frac{d^2V_C}{dt^2}=\frac{di_s}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{LC}V_C=\frac{1}{C}\frac{di_s}{dt}}$$

$$i_R(0^+)+i_L(0^+)+i_C(0^+)=i_s(0^+)$$

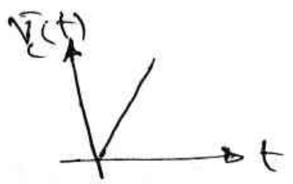
$$\downarrow$$

$$\frac{V_C(0^+)}{R}=\frac{0}{R}$$

$$i_C(0^+)=i_s(0^+)-i_L(0^+)-i_R(0^+)$$

$$\longrightarrow i_C(0^+)=\underbrace{10}_{i_s(0^+)}-0-0$$

$$V_C(0)=0$$



شرایط اولیه

$$\begin{cases} V_C(0^+)=0 \\ \frac{dV_C}{dt}(0^+)=\frac{1}{C}i_C(0^+)=\frac{1}{C}(10-0-0)=\frac{10}{C} \end{cases}$$

$$V_C(t)=\underbrace{V_{ch}(t)}_{\text{عمومی}}+\underbrace{V_{cp}(t)}_{\text{خصوصی (دائمی)}}$$

$\frac{71}{۳}$

پاسخ حالت دائمی :

$$v_{cp}(t)=k_1 \xrightarrow[\text{قرار میدهیم}]{\text{در معادله دیفرانسیل}} 0+0+\frac{1}{LC}k_1=\frac{1}{C}\times 0 \longrightarrow k_1=0 \longrightarrow \boxed{v_{cp}(t)=0}$$

پاسخ حالت گذرا نشان می‌دهد که چگونه به حالت دائمی می‌رسد.

الف) $C=\frac{1}{4}F \quad , \quad v_{ch}(t)=?$

$$\frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_c}{dt}+\frac{1}{LC}v_c=\frac{1}{C}\frac{di_s}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2}+2\frac{dv_c}{dt}+2v_c=4\frac{di_s}{dt} \rightarrow s^2+2s+2=0$$

$$\rightarrow s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-2}}{1}=-1\pm j \rightarrow$$ میرایی ضعیف

$$v_{ch}(t)=k_1e^{-t}\cos t+k_2e^{-t}\sin t$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} v_c(0)=0 = v_{ch}(0)+v_{cp}(0)=0 = k_1+0=0 \rightarrow \boxed{k_1=0} \\ \frac{dv_c}{dt}(0)=\frac{10}{C}=40 \end{cases}$$

$$v_c(0)=v_{ch}(0)+v_{cp}(0)=0$$

$$\rightarrow v_{ch}(0)=0$$

$$\frac{dv_c}{dt}(0)=\frac{dv_{ch}}{dt}(0)+\frac{dv_{cp}}{dt}(0)$$

$$\frac{dv_{ch}}{dt}=-k_1e^{-t}\cos t-k_1e^{-t}\sin t-k_2e^{-t}\sin t+k_2e^{-t}\cos t$$

$$\frac{dv_{ch}}{dt}(0)=-k_1+k_2=40 \rightarrow \underline{k_2=40}$$

$$\rightarrow \boxed{v_{ch}(t)=40e^{-t}\sin t}$$

$$v_c(t)=v_{ch}(t)+v_{cp}(t)=40e^{-t}\sin t+0$$

$$\rightarrow \boxed{v_c(t)=40e^{-t}\sin t}$$

72/۴

ب) $C=\frac{1}{8}$, $V_{ch}(t)=?$

$$\frac{d^2V_c}{dt^2}+4\frac{dV_c}{dt}+4V_c=8\frac{di_s}{dt} \rightarrow s^2+4s+4=0$$

$$s_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-4}=-2$$

حالت میرائی بحرانی

$$V_{ch}(t)=k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}$$

$$\begin{cases} V_c(0)=0 \\ \frac{dV_c}{dt}(0)=\frac{10}{C}=80 \end{cases}$$

$\cancel{V_c(0)=V_{cp}(0)}$.

$$\left.\begin{array}{l} V_{cp}=0 \rightarrow V_c(0)=V_{ch}(0)=0 \\ V_{ch}(0)=k_1 \end{array}\right\} \rightarrow k_1=0$$

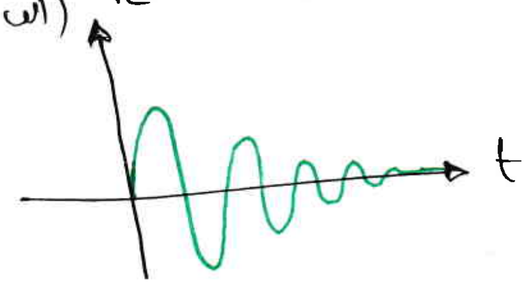
$$\frac{dV_c}{dt}(0)=\frac{dV_{ch}}{dt}(0) \Big/ \frac{dV_{ch}}{dt}=-2k_1e^{-2t}+k_2e^{-2t}-2k_2te^{-2t}\Big|_{t=0}=-2k_1+k_2$$

$\rightarrow \underline{k_2=80}$

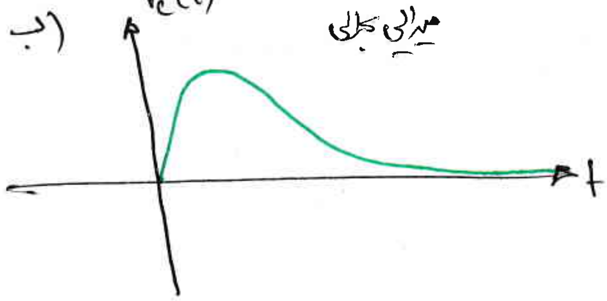
$$\rightarrow V_{ch}(t)=80te^{-2t}$$

$$V_c(t)=V_{ch}(t)+V_{cp}(t)=\underline{80te^{-2t}}$$

الف) $V_c(t)$ میرائی ضعیف



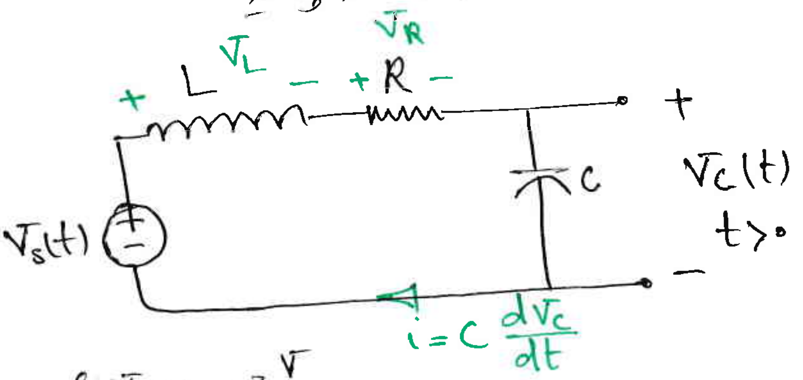
ب) $V_c(t)$ میرائی بحرانی



پاسخ کامل مدارهای مرتبه ۲ = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

مثال: در مدار زیر فرض کنید $R=3\Omega$, $C=1F$, $L=2^H$ و اگر $V_s(t)$ باشد: $V_s(t)=\frac{t}{10}$. مطلوبست

$V_c(0)=3^V$ و $i_L(0)=1^A$ باشند ولتاژ دو سر خازن را برای زمانهای بزرگتر از صفر پیدا کنید



$V_s(t)=\frac{t}{10}$

$$\begin{cases} V_c(0)=3^V \\ i_L(0)=1^A \end{cases}$$

kvl: $\underline{V_R+V_c+V_L=V_s}$ ①

$$RC\frac{dV_c}{dt}+V_c+L\frac{di_L}{dt}=RC\frac{dV_c}{dt}+V_c+LC\frac{d^2V_c}{dt^2}=V_s$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2V_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{LC}V_c=\frac{1}{LC}V_s} \rightarrow \underline{\frac{d^2V_c}{dt}+1.5\frac{dV_c}{dt}+0.5V_c=0.5V_s}$$

$V_c(0)=3^V$ ② $\frac{dV_c}{dt}(0)=\frac{1}{C}i(0)=\frac{1}{C}i_L(0)=1(V/s)$

③ $V_s(t)=\frac{t}{10} \rightarrow V_{cp}(t)=A+Bt \xrightarrow{\text{در معادله}} \boxed{0+1.5B+0.5A+0.5Bt=0.05t}$

$$\rightarrow \begin{cases} 0.5B=0.05 \rightarrow B=0.1 \\ 1.5B+0.5A=0 \quad \underline{A=-0.3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V_{cp}(t)=-0.3+0.1t}$$

④ $V_c(t) = V_{ch}(t) + V_{cp}(t) = V_{ch}(t) + 0.1t - 0.3$

$V_{ch}(t)$ [illegible]

$\underline{V_{ch}(t)\ \text{[illegible]}}$: $s^2 + 1.5s + 0.5 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -0.75 \pm \sqrt{0.56 - 0.5}$

$\rightarrow s_1 = -1 \quad , \quad s_2 = -0.5 \longrightarrow$ میرای شدید

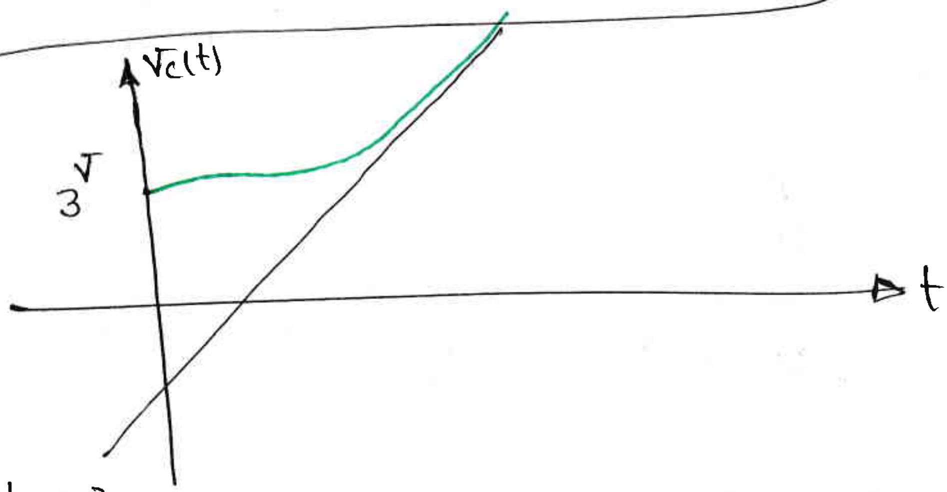
$V_{ch}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-0.5t}$

$V_c(0) = \begin{cases} V_{ch}(0) = k_1 + k_2 - 0.3 = 3 \\ + V_{cp}(0) \end{cases}$

$\frac{dV_c}{dt} = -k_1 e^{-t} - 0.5 k_2 e^{-0.5t} + 0.1 \Big|_{t=0} = -k_1 - 0.5k_2 + 0.1 = 1 \ (V/s)$

$\rightarrow k_1 = -5.1 \quad k_1 = -5.1 \quad k_2 = 8.4 \longrightarrow V_{ch}(t) = -5.1 e^{-t} + 8.4 e^{-0.5t}$

$\rightarrow \boxed{V_c(t) = 8.4 e^{-0.5t} - 5.1 e^{-t} + 0.1t - 0.3}$

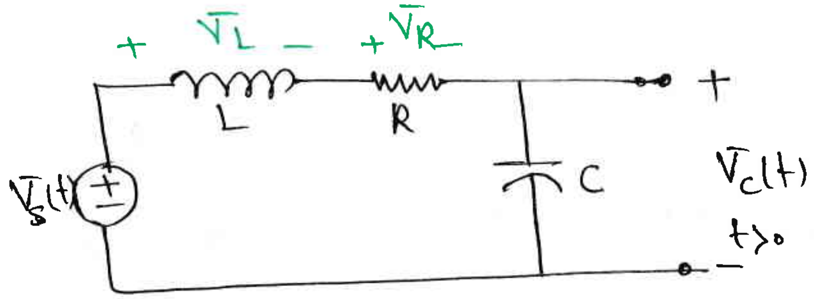


$0.1t - 0.3$

پاسخ حالت دائمی

$\frac{75}{۳}$

مثال: در مدار زیر در صورتی که $V_c(0)=6^V$ و $i_L(0)=2^A$ باشد. فقط $V_c(t)$ را برای $t>0$ بدست آورید



$i = c\frac{dv}{dt}$

$$\begin{cases} R = 2\,\Omega \\ C = 0.2\,F \\ L = 1\,H \end{cases} \qquad V_s(t) = 10^V \quad V_c(0) = 6^V \quad i_L(0) = 2^A$$

$\underline{V_c(t) = ?}$

$V_s = V_L + V_R + V_c$

$V_s = L\frac{di}{dt} + Ri_L + V_c$

① $$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}V_s$$

$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V_c = V_s$

$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV}{dt} + V_c = \frac{1}{LC}V_s$

② $$\begin{cases} V_c(0) = 6^V \\ \frac{dV_c}{dt}(0) = \frac{i_L(0)}{C} = 5\,i_L(0) = 10\,(V/s) \end{cases}$$

③ $V_{cp}(t) = K_1 = 10^V$ ④ $V_c(t) = V_{ch}(t) + 10$

معادله مشخصه $S^2 + 2S + 5 = 0 \rightarrow S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j$ میرایی ضعیف

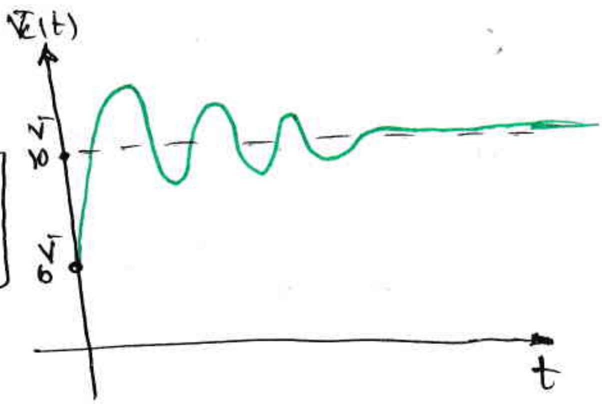
$V_{ch}(t) = k_1 e^{-t}\cos 2t + k_2 e^{-t}\sin 2t$

$\rightarrow V_c(0) = k_1 + 10 = 6 \rightarrow \underline{k_1 = -4}$

$$\frac{dV_c}{dt} = -k_1 e^{-t}\cos 2t - 2k_1 e^{-t}\sin 2t - k_2 e^{-t}\sin 2t + 2k_2 e^{-t}\cos 2t$$

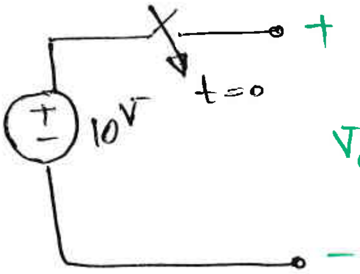
$\rightarrow \frac{dV_c}{dt}(0) = -k_1 + 2k_2 = 10 \rightarrow \underline{k_2 = 3}$

$$\rightarrow \boxed{V_c(t) = -4e^{-t}\cos 2t + 3e^{-t}\sin 2t + 10}$$



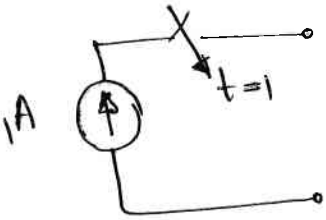
\# : پاسخ مدارهای خطی به ورودی پله :

(قطع و وصل کلید به صورت پله مدل می‌شود)



$V_c(t) = 10\,u(t)$

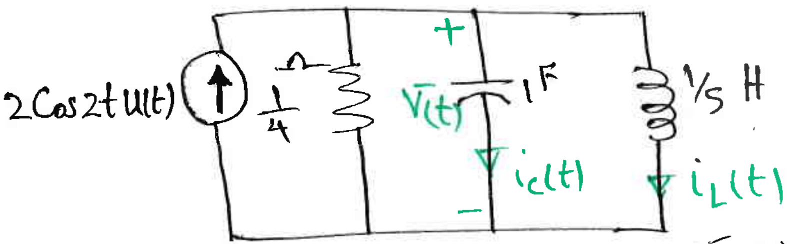
پیوستگی جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها در قبل و بعد از کلیدزنی وجود دارد



$i(t) = u(t-1)$

مثال: در مدار الکتریکی زیر $V(0)=V'(0)=0$ و $i_L(t)$ را بدست آورید.

$V(0)=V'(0)=0$ دانیم وضعیت نحوه تغییرات $V(t)$, $i_c(t)$



دانیم مدارها اگر یک سیگنال را بدست آوردیم

تمام سیگنال‌های دیگر نیز به همان صورت است

در تمام المان‌ها

مثلاً: سینوسی شد ← بقیه سیگنال‌ها هم سینوسی شده هستند

---

① $i_R(t) + i_L(t) + i_c(t) = 2\cos 2t \quad (t>0)$

$$4V(t) + i_L(0) + 5\int_0^t V\,dt + \frac{dV}{dt} = 2\cos 2t$$

$i_s = 2\cos 2t\, u(t)$ ↓ فرکانس $2\,\frac{Rad}{s}$ است

$$\boxed{\frac{d^2V}{dt^2} + 4\frac{dV}{dt} + 5V = -4\sin 2t}$$

② $V(0) = V'(0) = 0$

③ $V_p(t) = A\cos(2t+B)$

④ $V_h(t)$: $s^2+4s+5=0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm j$

$$V_h(t) = k_1 e^{-2t}\cos(t+k_2)$$

$\frac{77}{۳}$

$$\frac{dV_p}{dt} = -2A\sin(2t+B) \rightarrow \frac{d^2V_p}{dt^2} = -4A\cos(2t+B)$$

جایگذاری در معادله

$$\longrightarrow -4A\cos(2t+B) - 8A\sin(2t+B) + 5A\cos(2t+B) = -4\sin 2t$$

$$\underbrace{B = 97^\circ}_{\text{فاز}} \quad \underbrace{A = 0.5}_{\text{دامنه}} \quad \rightarrow \underline{V_p(t) = 0.5\cos(2t+97^\circ)}$$

حل بعنوان تمرین

قوانین مثلثاتی و تبدیل جمع به ضرب sin , cos

$$V(t) = k_1 e^{-2t}\cos(t+k_2) + \underbrace{0.5\cos(2t+97^\circ)}_{\text{حالت دائمی}}$$

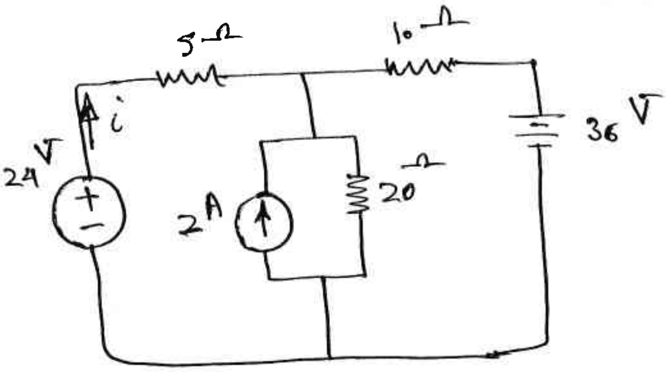
~~تمرین فصل پنجم ۱۲~~

تمرین فصل ۶: ۲ - ۴ - ۵ - ۶ - ۸ - ۱۱ - ۱۳ - ۱۴

حل تمرین:

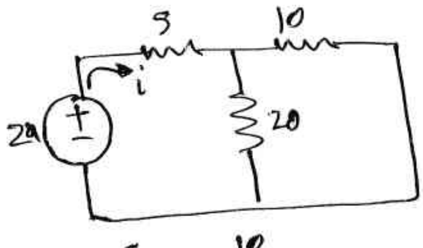
فصل ۳ تمرین ۱۱ ص ۸۰ * جریان i را با استفاده از روش جمع آثار بیابید:

جمع آثار

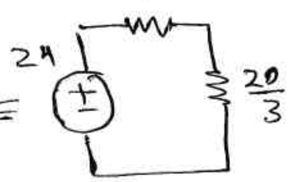


$V = RI$

① $i_{24V} = ?$

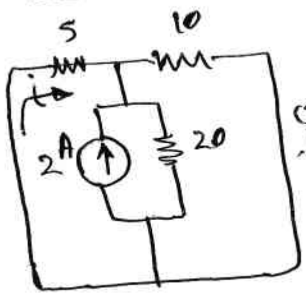


$=$



$$\rightarrow i_{24} = \frac{24}{5+\frac{20}{3}} = \frac{۷۲}{۳۵}$$

② $i_{2A} : ?$



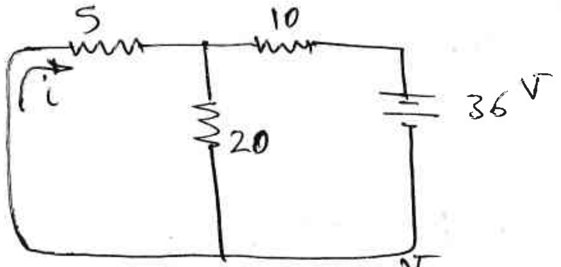
تقسیم جریان بین شاخه‌های موازی

$$10 \| 20 = \frac{20}{3}$$

$$i_{2A} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{20}{3}+5} \times 2 = \frac{-8}{7}$$

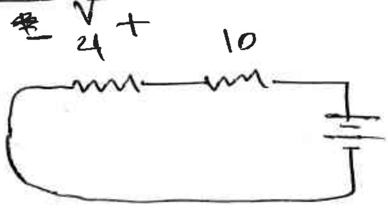
$\frac{78}{۳}$

(3)



$20 \parallel 5 = 4\,\Omega$

$i_{36} = ?$



$V_{4\Omega} = \frac{4}{10+4} \times 36 = \frac{72}{7}$

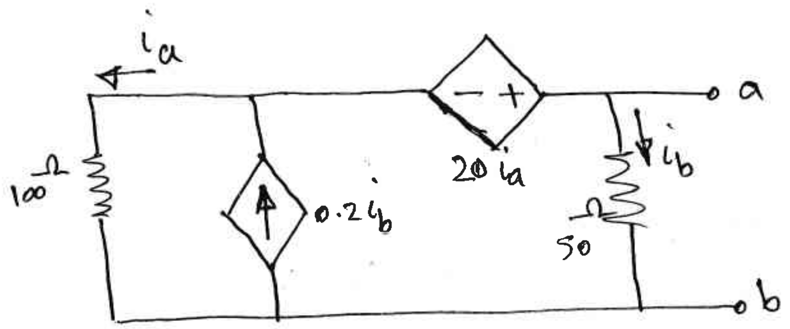
$i_{36} = \frac{-\frac{72}{7}}{5} = \frac{-72}{35}$

در اصل جمع آثار منابع وابسته انرژی حذف نمی‌شوند

$i = \frac{۷۲}{۳۵} - \frac{۸}{۷} - \frac{۷۲}{۳۵} = -\frac{8}{7}$

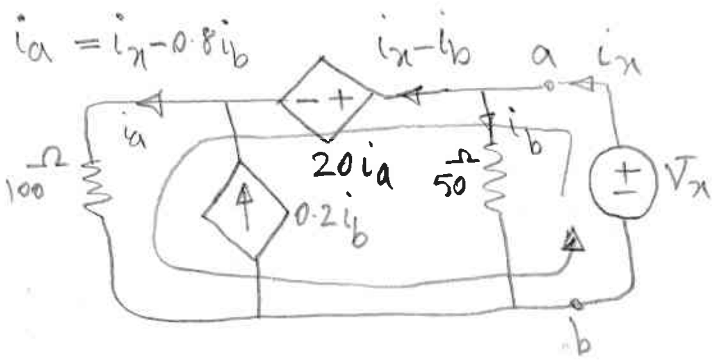
مسأله ۱۴ صفحه ۸۱ (روش کلی برای حل مسائل هم ارز تونن و نورتن)

در مدار ارائه شده هم ارز تونن از دو سر a و b را بیابید



$V_x = R_{th}\, i_x + V_{th}$

حل:



$$\begin{cases} i_x = i_b = \frac{V_x}{50} \\ i_a = i_x - 0.8\, i_b \end{cases}$$

$$-V_x + 20 i_a + 100(i_x - 0.8 i_b) = 0$$

$i_a = i_x - 0.8 i_b$

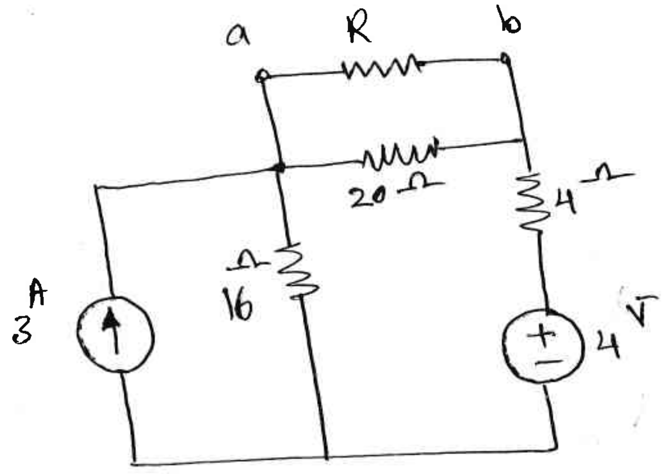
$$\longrightarrow -V_x + 20\left(i_x - 0.8 \frac{V_x}{50}\right) + 100\left(i_x - 0.8 \frac{V_x}{50}\right) = 0$$

$$\longrightarrow V_x = 120 i_x - 0.32 V_x - 1.6 V_x \longrightarrow ۲,۹۲ V_x = ۱۲۰ i_x$$

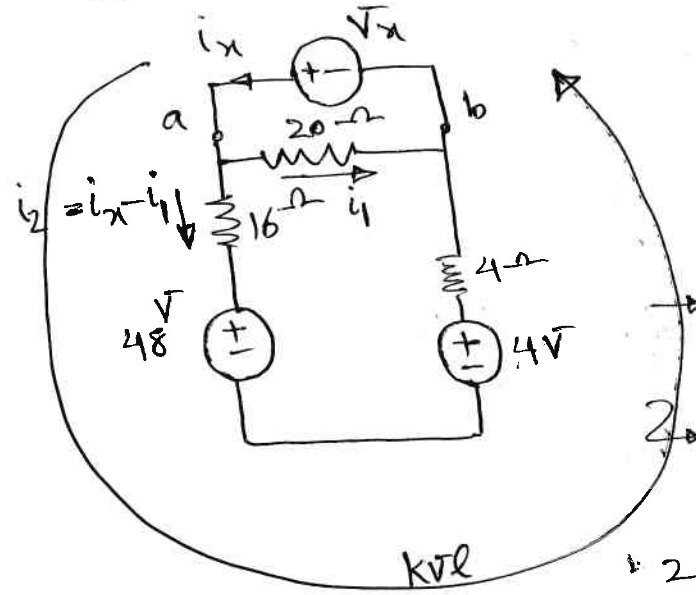
$$\longrightarrow V_x = \frac{۱۲۰}{۲,۹۲} i_x = ۴۱/۰۱ i_x$$

79/۳ $V_x = R_{th} i_x + V_{th}$ حل: $V_x = 41.1\, i_x \longrightarrow \begin{cases} R_{th} = 41.1\,\Omega \\ V_{th} = 0 \end{cases}$

۱۵/ص۸۱ در مدار نشان داده شده با استفاده از معادل تونن از دو سر a و b، مقدار R را به گونه‌ای بیابید که حداکثر توان در مقاومت R تلف گردد.



حل:



$i_1 = \frac{V_x}{20}$

حل:

$-V_x + 16(i_x - i_1) + 48 - 4 + 4(i_x - i_1) = 0$

$\to V_x = 16\left(i_x - \frac{V_x}{20}\right) + 44 + 4i_x - \frac{V_x}{5}$

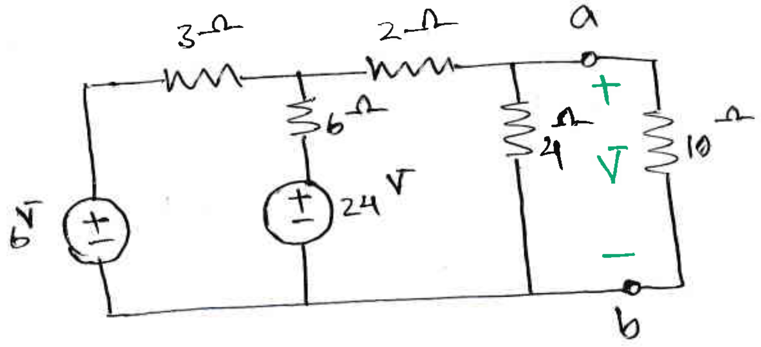
$\to V_x = 16 i_x - \frac{4}{5} V_x + 44 + 4 i_x - \frac{V_x}{5}$

$2V_x = 16 i_x + 4 i_x + 44 = 20 i_x + 44$

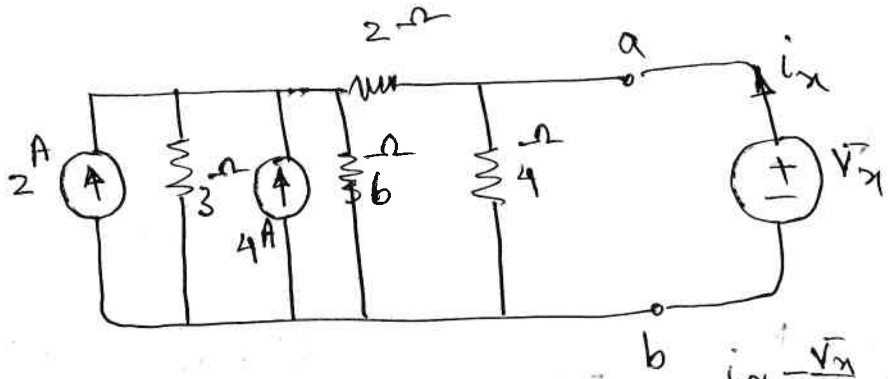
$\to \boxed{V_x = 10 i_x + 22}$

$\to \begin{cases} R_{th} = 10\,\Omega \\ V_{th} = 22\,V \end{cases}$

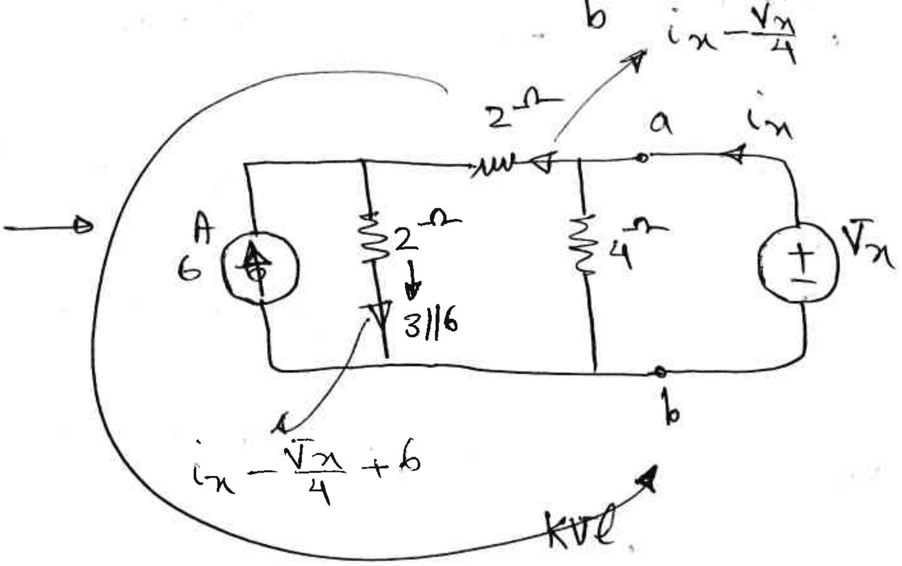
۱۷ ص ۸۲ مدار هم ارز تونن از دو سر a و b را برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل تعیین کنید
سپس ولتاژ V را بیابید



حل:



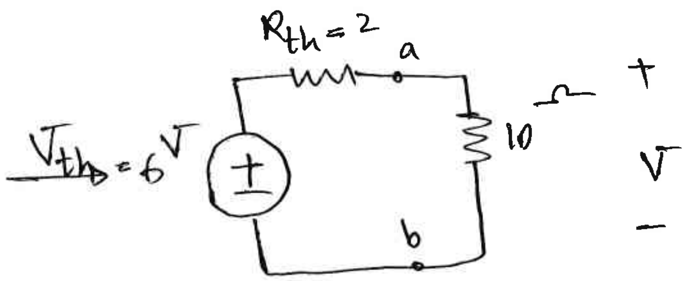
$V_x = R_{th} i_x + V_{th}$



$$\text{kvl}: -V_x + 2\left(i_x - \frac{V_x}{4}\right) + 2\left(i_x - \frac{V_x}{4} + 6\right) = 0$$

$$-V_x - \frac{V_x}{2} - \frac{V_x}{2} + 2i_x + 2i_x + 12 = 0$$

$$\rightarrow 2V_x = 4i_x + 12 \rightarrow \underline{V_x = 2i_x + 6} \rightarrow \begin{cases} R_{th} = 2 \\ V_{th} = 6 \end{cases}$$



$$V = \frac{10}{10+2} \times 6 = 5^V$$

2. $\underline{V = 5^V}$