فصل اول

نتیجه مهم اتحاد اولر:

با بررسی اتحاد اولر مشخص می‌شود که در هریک از حالات زیر سمت چپ اتحاد مساوی با صفر می‌شود

$a + b + c = 0$ یا $a = b = c$

در نتیجه سمت راست اتحاد اولر نیز برابر با صفر خواهد شد یعنی $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

بنابراین $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

* یعنی اگر سه عدد با هم برابر باشند یا مجموع آن‌ها صفر باشد آن‌گاه مجموع مکعبات آن‌ها با سه برابر حاصل‌ضربشان برابر است: $(a + b + c = 0$ یا $a = b = c) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

بسط دو جمله‌ای $(a + b)^n$:

ابتدا بسط دو جمله‌ای $(a + b)^n$ را برای n های کوچک محاسبه می‌کنیم:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a^1 + b^1$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

بنابراین: $$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

فصل دوم

یک جمله‌ای:
یک جمله‌ای عبارتی است جبری که در آن عددها و حروف با دو عمل ضرب و توان صحیح نامنفی به هم مربوط شده‌اند، به عبارت دیگر:

* یک جمله‌ای بر حسب x به صورت کلی ax^n تعریف می‌شود که در آن a یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی است. a را ضریب عددی و n را درجه می‌نامیم.
* اگر $a \in R$ و $n \in W$ ، آن‌گاه ax^n یک جمله‌ای است.
* در یک جمله‌ای ممکن است بیش از یک متغیر به کار رود.

مثال ۱) عبارت‌های جبری زیر همگی یک جمله‌ای هستند زیرا تمام آن‌ها را می‌توان به صورت ax^n نوشت به طوری که ضریب آن‌ها عدد حقیقی و توان n عددی صحیح و نامنفی باشد.

$$۲x^۵ \;,\; ۷۵y^{۱۰} \;,\; \frac{۱}{۲}xy^۲ \;,\; \frac{-۱۵}{۶}a^۷b^۸ \;,\; ۲\sqrt{۲x} \;,\; -\frac{\pi}{۱۱}x^۲y^۳z^۴$$

x ، xy ، $\sqrt{۲}$ ، $\frac{-۵}{۲}$ ، ۰ نیز یک‌جمله‌ای هستند.

* تمام اعداد حقیقی یک جمله‌ای‌های ثابت هستند.

مثال۲) هیچ‌کدام از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند:

$x^{-۱}$ ← زیرا توان x منفی است.

$-۳\frac{x^۲}{y}$ ← زیرا اگر آن را به‌صورت $-۳x^۲y^{-۱}$ بنویسیم توان y منفی خواهد بود.

$x^۲ + ۱$ ← از عمل جمع استفاده شده و دو جمله‌ای محسوب می‌شود.

$\sqrt{y}$ ← نمی‌توان آن را به صورت ax^n با شرایط یک جمله‌ای نوشت.

$\frac{۲۵x - y}{۲}$ نمی‌توان آن را به صورت ax^n با شرایط یک جمله‌ای نوشت.

ضریب عددی یک جمله‌ای:
عامل عددی در یک جمله‌ای را ضریب عددی آن گویند.

در یک جمله‌ای ax^n ، $a \in R$ ضریب عددی نام دارد.

مثال: در یک جمله‌ای‌های $x^۲$ ، $-y^۵$ ، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}xy$ ، $\frac{-۱۱}{۷}x$ ، $\pi z^۷$ عددهای ۱ ، -۱ ، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، $\frac{-۱۱}{۷}$ ، π ضرایب عددی هستند.

درجه‌ی یک جمله‌ای:

در یک جمله‌ای ax^n (اگر $a \neq ۰$ باشد) عدد n را درجه‌ی یک جمله‌ای می‌نامیم.

* درجه‌ی یک جمله‌ای همیشه صحیح و نامنفی است.
* درجه‌ی یک جمله‌ای ثابت غیر صفر را صفر تعریف می‌کنیم.
* درجه‌ی یک جمله‌ی ثابت صفر تعریف نشده است.
* برای به دست آوردن درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به چند متغیر توان‌های آن متغیرها را با هم جمع می‌کنیم.
* درجه‌ی یک جمله‌ای با چند متغیر: درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به تمام متغیرهای آن برابر است با مجموع توان‌های متغیرهای آن یک جمله‌ای.

مثال:

یک جمله‌ای	ضریب عددی	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به متغیرها
$۵x$	۵	x	۱	۱	۱
$-\frac{۳}{۷}x^۵y^۴z^۷$	$-\frac{۳}{۷}$	z , y , x	۵	۵ + ۴ = ۹	۵ + ۴ + ۷ = ۱۶
$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	ندارد	صفر	صفر	صفر
$۷x^۲z^۶$	۷	z , x	۲	۲	۲ + ۶ = ۸
$\sqrt{۲}x^{۱۰}y^۴$	$\sqrt{۱۲}$	y , x	۱۰	۱۰ + ۴ = ۱۴	۱۰ + ۴ = ۱۴
۸	۸	ندارد	صفر	صفر	صفر

یک جمله‌ای‌های متشابه:

دو یک جمله‌ای را متشابه گویند هرگاه متغیرها و توان متناظر آن‌ها در هر دو یکسان باشد.

به عبارت دیگر دو یک جمله‌ای متشابه فقط ممکن است در ضریب عددی با هم متفاوت باشند.

مثال: یک جمله‌ای متشابه:

الف) $\sqrt{۲}x^۲y \;,\; \frac{-۱}{۲}x^۲y \;,\; ۵x^۲y$ ب) $\frac{-۷}{۱۱}xyz^۵ , ۶۱xyz^۵ , xyz^۵$

یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه:

الف) $۲x^۳ , ۲x^۲$ ب) $۳xy^۲ , xy$

جمع یک جمله‌ای‌های متشابه:
یک جمله‌ای‌های متشابه را می‌توان (با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع) با هم جمع یا از هم تفریق نمود. یعنی ضریب آن‌ها را جمع و تفریق می‌کنیم.

$$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$$

مثال: جمع و تفریق یک جمله‌ای‌های متشابه زیر را انجام دهید.

$$۵x^۲y - ۱۱x^۲y + ۸x^۲y = (۵ - ۱۱ + ۸)x^۲y = ۲x^۲y$$

$$۳xyz + \frac{۷}{۲}xyz - ۲xyz = \left(۳ + \frac{۷}{۲} - ۲\right)xyz = \frac{۹}{۲}xyz$$

مثال: عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۲x^۲ - ۳x + ۵ - x^۲ + ۵x - ۱$

فقط یک جمله‌ای‌های متشابه را با هم جمع یا تفریق می‌کنیم:

$$= \left(۲x^۲ - x\right) + (-۳x + ۵x) + (۵ - ۱) = x^۲ + ۲x + ۴$$

ب) $۱۱x^۲y + ۷xy^۲ - xy + ۵xy^۲ + ۳xy - ۲x^۲y$

$$= \left(۱۱x^۲y - ۲x^۲y\right) + \left(۷xy^۲ + ۵xy^۲\right) + (-xy + ۳xy)$$

$$= ۹x^۲y + ۱۲xy^۲ + ۲xy$$

هر سه یک جمله‌ای غیرمتشابه هستند بنابراین ساده نمی‌شوند:

ج) $۳x^۲ - ۵xy + ۱$

ضرب یک جمله‌ای‌ها:
برای ضرب یک جمله‌ای باید ضریب‌ها را در هم ضرب کنیم و متغیرهای مشترک آن‌ها را نیز به‌صورت ضرب اعداد توان‌دار با پایه مشترک در هم ضرب کنیم.

$$ax^m \times bx^n = abx^{m+n} \quad \text{و} \quad ax^my^n \times bx^py^q = abx^{m+p}.y^{n+q}$$

حاصل‌ضرب چند یک‌جمله‌ای، یک جمله‌ای می‌باشد.
مثال: حاصل‌ضرب یک جمله‌ای‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\left(-۳x^۲y\right)\left(-۲xy^۵\right) = -۳ \times (-۲) \times x^{۲+۱}y^{۱+۵} = ۶x^۳y^۶$

ب) $\left(\frac{۲}{۵}a^۲b^۲\right)\left(\frac{۱۰}{۳}a^۲b^۳c\right)\left(\frac{۳}{۲}abc\right) = \left(\frac{۲}{۵} \times \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۳}{۲}\right) a^{۲+۲+۱}b^{۲+۳+۱}c^{۱+۱} = ۲a^۵b^۶c^۲$

توان رسانی یک جمله‌ای‌ها:
در توان رسانی یک جمله‌ای‌ها تمام ضرایب و متغیرها را به توان می رسانیم.

$$\left(ax^m\right)^n = a^n.\left(x^m\right)^n = a^n.\, x^{m.n}$$

مثال: توان رسانی‌های زیر را انجام دهید:

الف) $(۲xy)^۳ = ۲^۳x^۳y^۳ = ۸x^۳y^۳$

ب) $\left(-۳x^۳y^۳\right)^۲ = (-۳)^۲\left(x^۲\right)^۲\left(y^۳\right)^۲ = ۹x^۴y^۶$

ج) $\left(\frac{۱}{۲}x^۵yz^۲\right)^۴ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴.\left(x^۵\right)^۴.(y)^۴.\left(z^۲\right)^۴ = \frac{۱}{۱۶}x^{۲۰}y^۴z^۸$

چند جمله‌ای:
به مجموع چند یک جمله‌ای غیر متشابه، یک چند جمله‌ای می‌گوئیم.
مانند: $۲x+۱$, $۵x^۲-y+۳$, $x^۳+۳x^۲+x-۱۰$
که به ترتیب دو جمله‌ای، سه جمله‌ای و چهار جمله‌ای هستند.
امّا عبارت‌های $x+\frac{۲}{y}$ و $x^۲+x+\sqrt{x}$ چند جمله‌ای نیستند.
زیرا عبارت‌های $\frac{۲}{y}$ و $\sqrt{x}$ یک جمله‌ای نیستند.
* یک جمله‌ای‌های تشکیل‌دهنده‌ی چند جمله‌ای، جمله‌های چند جمله‌ای نامیده می‌شوند.

چند جمله‌ای استاندارد (متعارف):
اگر جملات یک چند جمله‌ای را از روی توان‌های یک متغیر به ترتیب نزولی از بزرگ به کوچک بنویسیم، چند جمله‌ای حاصل را نسبت به آن متغیر استاندارد یا متعارف گویند.
مثال: چند جمله‌ای $x^۴-۳x^۳+۵x^۲-۱$ بر حسب x استاندارد است.
امّا چند جمله‌ای $۴x+y^۲+۲$ استاندارد نیست.
یک چند جمله‌ای استاندارد بر حسب x ممکن است به صورت کلی زیر نوشته شود:

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_۱ x + a_۰ \ ; \ (n \in w)$$

که اعداد $a_۰$ تا a_n ضرایب عددی جمله‌های آن می‌باشند.

ساده کردن چند جمله‌ای‌ها:
به طور کلی برای ساده کردن چند جمله‌ای‌ها. یک جمله‌ای‌های متشابه آن را با هم جمع می‌کنیم.
مثال: چند جمله‌ای‌های زیر را ساده کنید و بگوئید ساده شده‌ی آن چند جمله‌ای است:

الف) $۵x^۲-۷x-۱۱-۲x^۲+۵x+۷$
$=\left(۵x^۲-۲x^۲\right)+(-۷x+۵x)+(-۱۱+۷)=۳x^۲-۲x-۴$ سه جمله‌ای است

ب) $۶x^۴-۵x^۳+۲x-۷x^۲+x^۳-۲-x^۴+۷x^۲+۴x^۳+۲$
$=\left(۶x^۴-x^۴\right)+\left(-۵x^۳+x^۳+۴x^۳\right)+\left(-۷x^۲+۷x^۲\right)+۲x+(-۲+۲)$
$=۵x^۴+۰+۰+۲x+۰=۵x^۴+۲x$ دوجمله‌ای است

قرینه‌ی یک چند جمله‌ای:
برای به‌دست آوردن قرینه‌ی یک چند جمله‌ای باید تمام جمله‌های آن را قرینه کنیم.

$$-(A+B)=-A-B\ ,\ -(A-B)=-A+B$$
$$-(A+B-C)=-A-B+C$$

مثال: قرینه چه جمله‌ای‌های زیر را بنویسید:

الف) $-۵x^۲+۳y-\frac{۱}{۲}x \xrightarrow{\text{قرینه}} ۵x^۲-۳y+\frac{۱}{۲}x$

ب) $۲xy-۳x^۲y+xy^۲ \xrightarrow{\text{قرینه}} -۲xy+۳x^۲y-xy^۲$

درجه‌ی چند جمله‌ای:

* درجه‌ی یک چند جمله‌ای برابر است با بزرگترین درجه‌ی جمله‌های آن چند جمله‌ای.
* برای به دست آوردن درجه‌ی چند جمله‌ای نسبت به چند متغیر مجموع توان‌های آن متغیرها را در هر جمله محاسبه نموده سپس بزرگترین عدد به دست آمده را به عنوان درجه‌ی چند جمله‌ای انتخاب می‌کنیم.
* در یک چند جمله‌ای می‌توان با ثابت در نظر گرفتن بقیه متغیرها، درجه را نسبت به یک متغیر خاص محاسبه نمود.

برای مثال درجه چند جمله‌ای زیر را محاسبه می‌کنیم:

$x^۲y^۲ + ۵x^۳y^۲ - y^۴$

توان متغیرها ۲ + ۲ , ۳ + ۲ , ۴ $\Rightarrow$ درجه نسبت به متغیرها = ۵

توان x ۲ , ۳ , ۰ $\Rightarrow$ درجه نسبت به x = ۳

توان y ۲ , ۲ , ۴ $\Rightarrow$ درجه نسبت به y = ۴

در چند جمله‌ای استاندارد $\left(n \in w , a_n \neq ۰\right)$ $a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots a_۱ x + a_۰$ ، عدد n درجه‌ی چند جمله‌ای نامیده می‌شود.

جمع و تفریق چند جمله‌ای‌ها:

برای به دست آوردن مجموع چند جمله‌ای‌ها باید جمله‌های متشابه آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: مجموع چند جمله‌ای‌های زیر را به دست آورید:

الف) $A = ۷x^۲ - ۱ \quad , \quad B = ۵x^۲ + ۶x + ۴$

$A + B = \left(۷x^۲ + ۵x^۲\right) + ۶x + (-۱ + ۴) = ۱۲x^۲ + ۶x + ۳$

ب) $A = a^۴ - a^۲ + ۱ \quad , \quad B = ۲a^۴ + a^۳ + ۵ \quad , \quad C = -a^۳ - a^۲ + a$

$A + B + C = \left(a^۴ + ۲a^۴\right) + \left(a^۳ - a^۳\right) + \left(-a^۲ - a^۲\right) + a + (۱ + ۵)$

$= ۳a^۴ + ۰ + \left(-۲a^۲\right) + a + ۶ = ۳a^۴ - ۲a^۲ + a + ۶$

تفریق چند جمله‌ای‌ها:

برای تفریق دو چند جمله‌ای، چند جمله‌ای اول را با قرینه‌ی چند جمله‌ای دوم جمع می‌کنیم.

$A - B = A + (-B)$

مثال: تفریق‌های زیر را انجام دهید:

الف) $\left(x^۲ - x + ۴\right) - \left(۳x^۲ - ۲x + ۱\right)$

$= \left(x^۲ - x + ۴\right) + \left(-۳x^۲ + ۲x - ۱\right)$

$= \left(x^۲ - ۳x^۲\right) + (-x + ۲x) + (۴ - ۱) = -۲x^۲ + x + ۳$

ب) $\left(a^۲ - ab + b^۲\right) - \left(a^۲ + ab + b^۲\right)$

$= \left(a^۲ - ab + b^۲\right) + \left(-a^۲ - ab - b^۲\right) = \left(a^۲ - a^۲\right) + (-ab - ab) + \left(b^۲ - b^۲\right) = -۲ab$

ضرب یک جمله‌ای در چند جمله‌ای:
برای انجام ضرب یک جمله‌ای در چند جمله‌ای، یک جمله‌ای مورد نظر را در تمام جملات چند جمله‌ای ضرب می‌کنیم.
خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع　　$A \times (B + C - D) = AB + AC - AD$
مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $۵x^۲\left(۲x^۲ - ۳x + ۵\right) = \left(۵x^۲\right)\left(۲x^۲\right) + \left(۵x^۲\right)(-۳x) + \left(۵x^۲\right)(۵)$
$= ۱۰x^۴ - ۱۵x^۳ + ۲۵x^۲$

ب) $-۸a\left(۳a^۲ + ۷a\right) = (-۸a)\left(۳a^۲\right) + (-۸a)(۷a)$
$= -۲۴a^۳ - ۵۶a^۲$

ضرب چند جمله‌ای در چند جمله‌ای:
برای به دست آوردن حاصل‌ضرب دو چند جمله‌ای تمام جمله‌های چند جمله‌ای اول را در چند جمله‌ای دوم ضرب می‌کنیم.
$$(A + B) \times (C + D) = A(C + D) + B(C + D)$$
$$= AC + AD + BC + BD$$
مثال: حاصلضرب چند جمله‌ای‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $A = ۲x + ۴ \ , \ B = x + ۳$
$A \times B = (۲x + ۴)(x + ۳) = ۲x(x + ۳) + ۴(x + ۳) = ۲x^۲ + ۶x + ۴x + ۱۲$
$= ۲x^۲ + (۶ + ۴)x + ۱۲ = ۲x^۲ + ۱۰x + ۱۲$

ب) $\left(x^۲ - x + ۲\right)\left(۲x^۲ + x - ۱\right) = x^۲\left(۲x^۲ + x - ۱\right) - x\left(۲x^۲ + x - ۱\right) + ۲\left(۲x^۲ + x - ۱\right)$
$= ۲x^۴ + x^۳ - x^۲ - ۲x^۳ - x^۲ + x + ۴x^۲ + ۲x - ۲$
$= ۲x^۴ + \left(x^۳ - ۲x^۳\right) + \left(-x^۲ - x^۲ + ۴x^۲\right) + (x + ۲x) = -۲ \rightarrow ۲x^۴ - x^۳ + ۲x^۲ + ۳x - ۲$

تعبیر هندسی ضرب دو چند جمله‌ای:
فرض کنید مستطیل به ابعاد $x + ۲$ و $x + ۳$ داریم. در این‌صورت مساحت این مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب $(x + ۳)(x + ۳)$ که به صورت زیر می‌نویسیم.

مساحت مستطیل $= (x + ۳)(x + ۲) = x(x + ۲) + ۳(x + ۲) = x^۲ + ۲x + ۳x + ۶ = x^۲ + ۵x + ۳$

هم‌چنین می‌توانیم مستطیل مورد نظر را به چهار مستطیل کوچکتر تقسیم کنیم:
ملاحظه می‌شود که هر کدام از جملات حاصل‌ضرب، مساحت مستطیل‌های کوچکتر را به دست می‌دهد.

	x	۳
x	$x^۲$	$۳x$
۲	$۲x$	۶

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای:
در تقسیم یک جمله‌ای به یک جمله‌ای، ضریب‌های عددی را بر هم و متغیرهای مشابه را نیز بر هم تقسیم کنیم:

$$ax^m y^n \div bx^p y^q = \frac{a}{b} \cdot \frac{x^m}{x^p} \cdot \frac{y^n}{y^q} = \frac{a}{b}x^{m-p} \cdot y^{n-q} \; ; (b, x, y \neq ۰)$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) $۸y^۵ \div ۲y^۳ = \left(\frac{۸}{۲}\right)\left(\frac{y^۵}{y^۳}\right) = ۴y^{۵-۳} = ۴y^۲$

ب) $۲۷x^۴y^۲ \div ۳xy^۴ = \left(\frac{۲۷}{۳}\right)\left(\frac{x^۴}{x}\right)\left(\frac{y^۲}{y^۴}\right) = ۹x^{۴-۱}y^{۲-۴} = ۹x^۳y^{-۲}$

ج) $\frac{۵۶xy^۴z^۲}{۲۴xy^۳z^۳} = \frac{۷ \times ۸ \times x \times y^{۴-۳}}{۳ \times ۸ \times x \times z^{۳-۲}} = \frac{۷y}{۳z}$

تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای:
در تقسیم چند جمله‌ای به یک جمله‌ای تمام جمله‌های چند جمله‌ای را بر یک جمله‌ای مورد نظر تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \; , \; \frac{A+B-C}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) $\frac{۹x^۲ + ۶x}{۳x} = \frac{۹x^۲}{۳x} + \frac{۶x}{۳x} = ۲x + ۲$

ب) $\left(۱۸x^۲y - ۱۲xy + ۶xy^۲\right) \div (۳xy) = \frac{۱۸x^۲y}{۳xy} - \frac{۱۲xy}{۳xy} + \frac{۶xy^۲}{۳xy}$

$= ۶x - ۴ + ۲y$

تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای:

برای انجام تقسیم دو چند جمله‌ای بر هم مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

مرحله ۱) چند جمله‌ای‌های مقسوم و مقسوم‌علیه را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

مرحله ۲) جمله‌ی با بزرگترین درجه مقسوم را بر جمله با بزرگترین درجه مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در خارج قسمت می‌نویسیم.

مرحله ۳) حاصل مرحله‌ی قبل را در تمام جملات مقسوم علیه ضرب می‌کنیم و نتیجه را زیر مقسوم نوشته از آن کم می‌کنیم.

مرحله ۴) اگر درجه چند جمله‌ای حاصل از مرحله ۳ از درجه مقسوم علیه کمتر باشد آن را به عنوان باقی‌مانده در نظر می‌گیریم و در غیر این صورت مراحل قبل را دوباره تکرار می‌کنیم.

مثال ۱) مراحل تقسیم دو چند جمله‌ای را در تقسیم چند جمله‌ای $1 + 3x^2 - 2x^4$ بر $x^2 - 1$ بررسی می‌کنیم.
ابتدا هر دو چند جمله‌ای را به صورت توان‌های نزولی (استاندارد) می‌نویسیم.

$2x^4 - 3x^2 + 4x^2 + 1 \quad \big| \quad x^2 - 1$

$2x^2$ ⟷ سپس جمله $2x^4$ را بر x^2 تقسیم می‌کنیم $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

$-(+2x^4 - 2x^2)$ ‏ $2x^2$ را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم $2x^2(x^2 - 1) = 2x^4 - 2x^2$

$-3x^3 + 6x^2 + 1$ ‏ $-3x$ ⟷ و از مقسوم‌علیه کم می‌کنیم $-3x^3$ را بر x^2 تقسیم می‌کنیم $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

$-(-3x^3 + 3x)$ ‏ $-3x$ را در مقسوم‌علیه ضرب $-3x(x^2 - 1) = -3x^3 + 3x$

$6x^2 - 3x + 1$ ‏ 6 ⟷ و از مقسوم کم می‌کنیم $6x^2$ را بر x^2 تقسیم می‌کنیم $\frac{6x^2}{x^2} = 6$

$-(6x^2 - 6)$ ‏ 6 را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم $6(x^2 - 1) = 6x^2 - 6$ و از مقسوم کم می‌کنیم

$-3x + 7$ ⟶ باقی‌مانده　درجه چند جمله‌ای حاصل کمتر از درجه مقسوم‌علیه است پس تقسیم به پایان می‌رسد

بنابراین خارج قسمت برابر است با: $2x^2 - 3x + 6$ و باقی‌مانده برابر است با: $-3x + 7$

مثال ۲)

$4x^3 - 24x^2 + 12x - 5 \quad \big| \quad 2x - 1$

$2x^2$ ⟵ $4x^3 \div 2x = 2x^2$

$-(4x^3 - 2x^2)$ ⟵ $2x^2(2x - 1) = 4x^3 - 2x^2$

$-22x^2 + 21x - 5$ ‏ $-11x$ ⟵ $-22x^2 \div 2x = -11x$

$-(-3x^3 + 3x)$ ⟵ $-11x(2x - 1) = -22x^2 + 11x$

$10x - 5$ ‏ 5 ⟵ $10x \div 2x = 5$

$-(10x - 5)$ ⟵ $5\ (2x - 1) = 10x - 5$

0

خارج قسمت $= 2x^2 - 11x + 5$　　باقی‌مانده $= 0$

دامنه‌ی تعریف عبارات جبری:

دامنه‌ی تعریف یک عبارت جبری عبارت است از مجموعه‌ی همه مقادیر قابل قبول برای متغیرهای آن عبارت جبری.
دامنه تعریف را با حروف D نشان می‌دهیم (Domain)
به طور مثال در عبارت $A = ۲x - ۱$ تمام مقایر حقیقی برای x قابل قبول هستند بنابراین دامنه‌ی A مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد $D_A = R$

و برای عبارت $B = \frac{۱}{x - ۱}$ تمام مقادیر حقیقی به جز عدد یک قابل قبول هستند زیرا جاگذاری عدد ۱ برای x مخرج کسر B را مساوی صفر می‌کند و قابل قبول نیست بنابراین $D_B = R - \{۱\}$ دامنه تعریف عبارت $\frac{۱}{x}$ برابر است $R - \{۰\}$

عبارات جبری متحد:

هرگاه دو عبارت جبری به ازای تمام مقادیر دامنه تعریف مشترکشان دارای مقدارهای عددی مساوی باشند گوئیم این دو عبارت در دامنه تعریف مشترکشان متحد هستند مانند عبارات x و $\frac{x^۲}{x}$ که به ازای همه مقادیر حقیقی غیر صفر $R - \{۰\}$ متحد هستند. عبارت‌های $(x - y)(x + y)$ و $x^۲ - y^۲$ به ازای تمام x, y های حقیقی متحد می‌باشند.

اتحاد جبری:

اتحاد جبری، یک نساوی است، شامل یک یا چند متغیر که به ازای تمام مقادیر دامنه تعریف، آن تساوی برقرار است و به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌شود.
مانند: $(x + ۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$ و $(x + ۱)(x + ۲) = x^۲ + ۳x + ۲$ و $(x + ۱)(x - ۱) = x^۲ - ۱$
هر سه تساوی بالا به ازای تمام مقادیر حقیقی x برقرار می‌باشند و لذا هرکدام یک اتحاد هستند.

معادله:

اگر یک تساوی جبری شامل متغیر فقط به ازای بعضی از مقادیر دامنه تعریف برقرار باشد به آن معادله می‌گوئیم.
مانند تساوی $۲x + ۷ = x + ۱۲$ که فقط به ازای $x = ۵$ برقرار است.

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اثبات:

$$\text{طرف چپ} = (a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$$
$$= a(a \pm b) \pm b(a \pm b)$$
$$= a^2 \pm ab \pm ab + b^2$$
$$= a^2 \pm 2ab + b^2 = \text{طرف راست}$$

* حاصل مربع یک دو جمله‌ای برابر است با مجموع مربع‌های هریک از جمله‌ها و دو برابر حاصل‌ضرب جمله‌ها.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید:

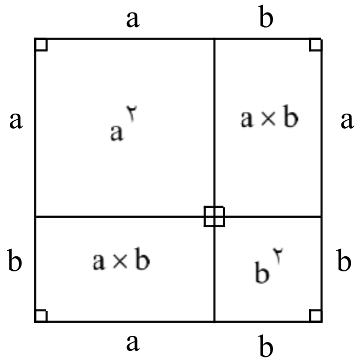
الف) $(x+5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

ب) $(3x-7)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(7) + 7^2 = 9x^2 - 42x + 49$

ج) $(5a+3b)^2 = (5a)^2 + 2(5a)(3b) + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$

تعبیر هندسی اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



مربعی به ضلع $a+b$ در نظر می‌گیریم در این‌صورت مساحت آن برابر است با $(a+b)^2$. همچنین می‌توانیم مربع مورد نظر را به صورت چند مربع کوچک در نظر بگیریم:

یک مربع به ضلع a و به مساحت a^2.

یک مربع به ضلع b و به مساحت b^2.

دو مربع مستطیل به ابعاد $b \times a$ و به مساحت $2ab$ که مجموع آن‌ها مربع بزرگ را تشکیل می‌دهد.

اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

اثبات: $\text{طرف چپ} = (a-b)(a+b)$

$$= a(a+b) - b(a+b)$$

$$= a^2 + ab - ba - b^2$$

$$= a^2 - b^2 = \text{طرف راست}$$

عبارت‌های $a - b$ و $a + b$ را مزدوج یکدیگر می‌گویند (یک جمله ثابت و دیگری قرینه شده است)

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد مزدوج به‌دست آورید:

الف) $(3y+4)(3y-4) = (3y)^2 - 4^2 = 9y - 16$

ب) $(-4xy - 3y)(-4xy + 3y) = (-4xy)^2 - (3y)^2 = 16x^2y^2 - 9y^2$

ج) $\left(7x^2 - 4y^3\right)\left(7x^2 + 4y^3\right) = \left(7x^2\right)^2 - \left(4y^3\right)^2 = 49x^4 - 16y^6$

د) $\left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{2}x\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}y\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right) = \frac{3}{4}y^2 - 2x^2$

اتحاد مربع سه جمله‌ای: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

اثبات: برای اثبات از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال: با استفاده از اتحاد سه جمله‌ای حاصل را به دست آورید:

الف) $(5x + y + 1)^2 = (5x)^2 + y^2 + 1^2 + 2(5x)(y) + 2(5x)(1) + 2(y)(1)$

$$= 25x^2 + y^2 + 1 + 10xy + 10x + 2y$$

ب) $\left(x^2 + x + 1\right)^2 = \left(x^2\right)^2 + x^2 + 1^2 + 2\left(x^2\right)(x) + 2(x)(1) + 2\left(x^2\right)(1)$

$$= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2$$

$$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

ج) $(3x - 5y + 2z)^2 = (3x)^2 + (-5y)^2 + (2z)^2 + 2(3x)(-5y) + 2(3x)(2z) + 2(-5y)(2z)$

$$= 9x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 30xy + 12xz - 20yz$$

د) $\left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + 2(x)(-1) + 2(x)\left(\frac{-1}{x}\right) + 2(-1)(-1x)$

$$= x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} - 2x - 2 + \frac{2}{x} = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

اتحاد جمله مشترک: $(x+a)(a+b)=x^{2}+(a+b)x+ab$

اثبات: $(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$

$$=x^{2}+bx+ax+ab$$
$$=x^{2}+(a+b)x+ab$$

در اتحاد جمله مشترک حاصل‌ضرب دو، دو جمله‌ای محاسبه می‌شود که یک جمله‌ی آن‌ها مشترک می‌باشد حاصل برابر خواهد بود با مربع جمله مشترک به اضافه حاصل‌ضرب جملات غیر مشترک در جمله مشترک به اضافه ضرب جملات غیر مشترک.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر به دست آورید:

الف) $(2x+3)(2x+5)=(2x)^{2}+(3+5)(2x)+3\times 5$

$$=4x^{2}+16x+15$$

ب) $\left(8x^{2}-5\right)\left(7x^{2}+7\right)=\left(8x^{2}\right)^{2}+(-5+7)\left(8x^{2}\right)+(-5)(7)$

$$=64x^{4}+16x^{2}-35$$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله: $(a+b)\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)=a^{3}+b^{3}$

$$(a-b)\left(a^{2}+ab+b^{2}\right)=a^{3}-b^{3}$$

اثبات: $(a\pm b)\left(a^{2}\pm ab+b^{2}\right)=a\left(a^{2}\pm ab+b^{2}\right)\pm b\left(a^{2}\pm ab+b^{2}\right)$

$$=a^{3}\pm a^{2}b+ab^{2}\pm ba^{2}-ab^{2}\pm b^{3}$$
$$=a^{3}\pm b^{3}$$

توجه: در سمت چپ اتحاد در پرانتز کوچک مجموع یا تفاضل دو جمله قرار دارد و در پرانتز بزرگ مربع آن دو جمله و حاصل‌ضرب آن‌ها با علامت قرینه در سمت راست اتحاد نیز مجموع یا تفاضل مکعبات دو جمله قرار دارد.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $(x+3y)\left(x^{2}-3xy+9y^{2}\right)=?$

$$(x+3y)\left(x^{2}-x(3y)+(3y)^{2}\right)=x^{3}+(3y)^{3}=x^{3}+27y^{3}$$

ب) $(2x-5y)\left(4x^{2}+10xy+25y^{2}\right)=?$

$$(2x-5y)\left((2x)^{2}+(2x)(5y)+(5y)^{2}\right)=(2x)^{3}-(5y)^{3}=8x^{3}-125y^{3}$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

اثبات:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \\ &= a\left(a^2 + 2ab + b^2\right) + b\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $$\begin{aligned}(2x+5y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 + (5y)^3 \\ &= 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3\end{aligned}$$

ب) $$\begin{aligned}(3x-4y)^3 &= (3x)^2 - 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 - (4y)^3 \\ &= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3\end{aligned}$$

کاربرد اتحادها:
یکی از موارد کاربرد اتحادها انجام محاسبات به روش‌های ساده‌تر می‌باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای
$$\begin{aligned}305^2 &= (300+5)^2 = 300^2 + 2(300)(5) + 5^2 \\ &= 90000 + 3000 + 25 \\ &= 93025\end{aligned}$$

ب) استفاده از اتحاد مزدوج
$$490 \times 510 = (500-10)(500+10) = 500^2 - 10^2 = 250000 - 100 = 249900$$

ج) استفاده از اتحاد جمله مشترک
$$\begin{aligned}105 \times 102 &= (100+5)(100+2) = 100^2 + (5+2)(100) + (5)(2) \\ &= 10000 + 700 + 10 = 10710\end{aligned}$$

دو نتیجه از اتحادهای مربع دو جمله‌ای:
با استفاده از اتحادهای مربع مجموع و تفاضل دو جمله خواهیم داشت:

الف)
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

ب)
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \left(a^2 + 2ab + b^2\right) = 4ab$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

مجموع توان‌های n ام دوجمله:

اگر مجموع و حاصل‌ضرب دو جمله به ترتیب $S = x + y$ و $P = x . y$ باشد می‌توانیم مجموع توان‌های n ام این دو جمله را به‌وسیله اتحادها محاسبه کنیم. مثال:

اگر داشته باشیم $a + b = ۳$ و $ab = ۱$ مطلوبست محاسبه‌ی:

الف) $a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab = ۳^۲ - ۲(۲) = ۵$

ب) $a^۳ + b^۳ = (a + b)^۳ - ۳ab(a + b) = ۳^۳ - ۳(۱)(۳) = ۲۷ - ۹ = ۲۱$

ج) $|a - b| = ?$ $\qquad (a - b)^۲ = (a + b)^۲ - ۴ab = ۳^۲ - ۴ = ۵ \Rightarrow |a - b| = \sqrt{۵}$

تعمیم اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله:

$$a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$$
$$a^۳ - b^۳ = (a - b)\left(a^۲ + ab + b^۲\right)$$
$$a^۴ - b^۴ = (a - b)\left(a^۳ + a^۲b + ab^۲ + b^۳\right)$$
$$a^۵ - b^۵ = (a - b)\left(a^۴ + a^۳b + a^۲b^۲ + ab^۳ + b^۴\right)$$
$$\vdots$$
$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + a^{n-۳}b^۲ + \ldots + ab^{n-۲} + b^{n-۱}\right) \ ; (n \in N)$$
$$a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + a^{n-۳}b^۲ - \ldots - ab^{n-۲} + b^{n-۱}\right) \ ; (\text{فرد } n)$$

اتحاد اولر: اتحاد اولر به دو شکل نوشته می‌شود:

الف) $(a + b + c)\left(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ac\right) = a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc$

ب) $\frac{۱}{۲}(a + b + c)\left[(a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (a - c)^۲\right] = a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc$

به آسانی می‌توان از مقایسه دو شکل اتحاد اولر نتیجه گرفت که:

تساوی مهم: $a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ac = \frac{۱}{۲}\left[(a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (a - c)^۲\right]$

مثال: $(۲x - y + ۱)\left(۴x^۲ + y^۲ + ۱ + ۲xy - ۲x + y\right) = (۲x)^۳ + (-y)^۳ + ۱^۳ - ۳(۲x)(-y)(۱)$
$= ۸x^۳ - y^۳ + ۱ + ۶xy$

نکات بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$:

با کمی دقت نکات زیر از بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ قابل نتیجه‌گیری است.

۱) مجموع جملات در بسط $(a+b)^n$ برابر است با $n+۱$ جمله.

۲) بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ نسبت به a و b متقارن است. و ضرایب جملات از دو طرف برابر می‌باشند.

۳) بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ یک چند جمله‌ای همگن از درجه‌ی n است، یعنی مجموع توان‌های a و b در هر جمله برابر است با n.

۴) ضریب هر جمله برابر است با حاصل‌ضرب ضریب جمله‌ی قبل در توان حرف اول جمله قبل، تقسیم بر تعداد جملات قبلی.

$$\text{ضریب هر جمله} = \frac{\text{توان حرف اول در جمله قبل} \times \text{ضریب جمله قبل}}{\text{تعداد جملات قبل}}$$

۵) مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ برابر است با: $(۱+۱)^n = ۲^n$

مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ برابر است با: $(۱-۱)^n = ۰$

۶) ضرایب چند جمله‌ای خالص از بسط $(a+b)^n$ از مثلث خیام قابل استخراج است.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

ضرایب $(a+b)^n$ را می‌توان از سطر $n+۱$ بدست آورد.