

## آزمون های واریانس ناهمسانی

یکی از فروض رگرسیون خطی به روش حداقل مربعات معمولی (OLS) اینست که تمامی جملات پسماند دارای واریانس برابر هستند. در عمل این فرض چندان صادق نیست و در بسیاری از نمونه‌ها به دلایل مختلفی از قبیل شکل نادرست تابع مدل، وجود نقاط پرت، شکست ساختاری در جامعه آماری، یادگیری در طی زمان و... شاهد پدیده واریانس ناهمسانی هستیم. برای بررسی این مشکل آزمون‌هایی از قبیل آزمون وایت، آزمون پارک، آزمون گلجسر، آزمون گولدفلد-کوانت و آزمون بروش-پاگان توسط اقتصاددانان مختلف معرفی شده است.

۱. آزمون وایت،
۲. آزمون پارک،
۳. آزمون گلجسر،
۴. آزمون گولدفلد-کوانت
۵. آزمون بروش-پاگان

### آزمون وایت White Test

یکی از موضوعات مهمی که در اقتصاد سنجی به آن برخورد می‌کنیم موضوع واریانس ناهمسانی است. واریانس ناهمسانی به این معناست که در تخمین مدل رگرسیون مقادیر جملات خطا دارای واریانس‌های نابرابر هستند. در واقع ما در تخمین رگرسیون که با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی انجام می‌شود ابتدا فرض می‌کنیم که تمامی جملات خطا دارای واریانس‌های برابر هستند و بعد از آن که مدل را تخمین زدیم سپس با استفاده از یک سری روش‌ها و تکنیک‌ها به بررسی این فرض می‌پردازیم و این که آیا واقعاً در مدل ما واریانس همسانی وجود ندارد؟ ولی در مورد کارهای عملی اقتصاد سنجی همواره دو مسئله برای محقق پیش می‌آید:

۱) با توجه به آن که مقادیر جملات خطا در جامعه اصلی قابل مشاهده نمی‌باشد چگونه می‌توان به وجود واریانس ناهمسانی در مدل پی برد؟

۲) در عمل بسیار غیر محتمل است که دقیقاً تمامی واریانس‌های جملات خطا با یکدیگر برابر باشند و معمولاً واریانس‌ها مقداری با یکدیگر تفاوت دارند.

بنابراین سوال طبیعی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا معیاری آماری وجود دارد که میزان نابرابری واریانس‌ها را اندازه گیری کند تا با استفاده از آن بتوانیم بگوییم که اگر میزان نابرابری واریانس‌ها از مقداری

بیشتر باشد مدل ما مشکل واریانس ناهمسانی دارد. برای پاسخگویی به سوال فوق باید گفت که اقتصاددانان از روش‌های گوناگونی استفاده می‌کنند که یکی از پرکاربرترین روشها آزمون وایت است.

### ۱ موارد استفاده از آزمون وایت

### ۲ مراحل تست وایت

### ۳ روش دیگری برای آزمون وایت

### ۴ مقایسه دو روش آزمون وایت

**موارد استفاده از آزمون وایت:** معمولاً هنگامی از آزمون وایت استفاده می‌شود که توزیع واریانس جملات خطا را ندانیم و حدسی نیز در مورد آن نداشته باشیم و بنابراین آزمون وایت کلی‌ترین حالت را در نظر می‌گیرد و نسبت به تشخیص واریانس ناهمسانی بسیار حساس است.

**مراحل تست وایت: (۱)** ابتدا مدل اصلی را با فرض عدم واریانس ناهمسانی تخمین می‌زنیم (ما فرض کرده‌ایم که دو متغیر توضیحی داریم البته این به راحتی قابل تعمیم به حالت عمومی با  $k$  متغیر توضیحی نیز می‌باشد). (تخمین ۱) و آنگاه مقادیر پسماندها و مربع مقادیر پسماندها را محاسبه می‌کنیم.

(۲) سپس یک رگرسیون جدید بدین صورت می‌نوسیم: (تخمین ۲)

یعنی آن که مربع پسماندها را روی تک تک متغیرهای توضیحی، مربع متغیرهای توضیحی و نیز حاصل ضرب دو به دو متغیرها رگرسیون می‌زنیم. فایده این کار این است که تقریباً تمام حالت‌های ممکن واریانس ناهمسانی را در نظر گرفته‌ایم. البته ممکن است گفته شود که واریانس ناهمسانی می‌تواند در اثر اشکال دیگری از روابط میان پسماندها مثل تابع درجه سوم یا رادیکالی یا لگاریتمی ایجاد شود که در آزمون وایت آورده نشده‌اند ولی در جواب باید گفت:

اولاً: سایر حالت‌های واریانس ناهمسانی شباهت زیادی به حالت‌های در نظر گرفته شده در آزمون وایت دارند و بنابراین گویا در نظر گرفته شده‌اند. دوم آن که: اگر ما تعداد متغیرهای توضیحی را در تخمین ۲ بیش از اندازه زیاد کنیم دچار مشکل هم خطی در تخمین ۲ می‌شویم بنابراین به دلیل هم خطی ممکن است که ضریب تعیین مدل بالا رود و بنابراین ما به غلط مدلی زا که دارای واریانس ناهمسانی نیست دارای واریانس ناهمسانی بیندازیم.

(۳) آزمون  $F$  را برای معنی دار بودن کل رگرسیون از طریق فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

البته می‌توانیم از آماره  $F$  زیر که به آماره  $F$  معروف است هم استفاده کنیم که در این صورت با توزیع کای دو با درجه آزادی ۵ مقایسه می‌کنیم:

آماره  $F$  دارای توزیع فیشر با درجه آزادی ۵ و  $5n-1$ ، که در آن  $n$  تعداد مشاهدات می‌باشد. همچنین آماره  $LM$  دارای توزیع کای دو با ۵ درجه آزادی می‌باشد.

۴) مرحله قضاوت: اگر از آماره  $F$  استفاده کردیم آنگاه با درجه آزادی گفته شده مقایسه می‌کنیم و اگر از آماره  $LM$  استفاده کردیم آنرا با توزیع کای دو با درجه آزادی مربوطه مقایسه می‌کنیم، در این آزمون فرض صفر این است که واریانس همسانی داریم و بنابراین اگر آماره محاسبه شده از مقدار جدول بیشتر باشد در آن صورت مدل تصریح شده ابتدایی ما دارای واریانس ناهمسانی است.

**روش دیگری برای آزمون وایت:** در این روش به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا مدل اصلی را با فرض عدم واریانس ناهمسانی تخمین می‌زنیم و آنگاه مقادیر پسماندها و مربع مقادیر پسماندها را محاسبه می‌کنیم.

۲) سپس با استفاده از پسماندهایی که به دست آورده‌ایم این بار یک رگرسیون جدید مینوسیم که مربع مقادیر پسماندها را به عنوان متغیر توضیحی و مقادیر تخمینی  $Y$  و مربع مقادیر تخمینی  $Y$  را به عنوان متغیر توضیحی در آن می‌آوریم. سپس این رگرسیون را تخمین می‌زنیم.

۳) برای تخمینی که به دست آورده‌ایم آماره اف یا ال ام را مثل حالت قبلی محاسبه می‌کنیم.

۴) اگر از آماره اف استفاده کرده‌ایم آن را با توزیع فیشرف با درجه آزادی ۲ و  $n-2$  مقایسه می‌کنیم و اگر از آماره ال ام استفاده کرده‌ایم آن را با توزیع چی دو با درجه آزادی ۲ مقایسه می‌کنیم. در این شیوه نیز مثل شیوه قبل فرض صفر آن است که ما دارای واریانس ناهمسانی نمی‌باشیم و بنابراین اگر مقدار آماره آزمون از مقدار جدول بیشتر باشد در آن صورت مدل تصریح شده ابتدایی ما مشکل واریانس ناهمسانی دارد.

**مقایسه دو روش آزمون وایت:** همان طور که مشخص است نحوه کلی و مراحل هر دو روش آزمون وایت یکسان است و تفاوت تنها در این است که در روش دوم به جای آن که مربع مقادیر پسماند را روی تک تک متغیرهای توضیحی و مربعاتشان و نیز حاصل ضربشان رگرسیون بنزیم روی مقادیر تخمینی متغیر وابسته و نیز مربع مقادیر تخمینی متغیر وابسته رگرسیون می‌زنیم و بنابراین با این کار باعث افزایش درجه آزادی مدل می‌شویم و در نتیجه در مرحله مقایسه نیز با توزیع  $F$  یا توزیع کای دو با درجه آزادی کمتری مقایسه می‌کنیم.

### آزمون بروش-پاگان *Test Breusch and A. R. Pagan*

به منظور آزمون واریانس ناهمسانی در مدل‌های رگرسیون خطی استفاده می‌شود و وابستگی واریانس جملات پسماند بدست آمده از رگرسیون خطی را به مقادیر متغیرهای توضیح دهنده مدل، بررسی می‌کند. این آزمون از ساده‌ترین آزمون‌های مورد استفاده در این زمینه است و توسط آقایان بروش و پاگان در سال ۱۹۷۹ معرفی شده است.

**مراحل آزمون بروش-پاگان:** آزمون واریانس ناهمسانی به روش بروش-پاگان شامل چهار مرحله است:

۱- مدل رگرسیونی را با فرض واریانس همسانی تخمین می‌زنیم و جملات پسماند بدست آمده را نگاه می‌داریم:

۲- مجذور جملات پسماند را روی متغیرهای توضیح دهنده  $X$  رگرسیون می‌زنیم. این معادیه رگرسیونی به بررسی ارتباط معنادار بین جملات پسماند و متغیرهای توضیح دهنده می‌پردازد. بدست آمده از این رگرسیون را نگه می‌داریم:

۳- با استفاده از بدست آمده، آماره  $LM$  و آماره  $F$  مربوطه را حساب می‌کنیم. آماره  $LM$  دارای توزیع کای دو با درجه آزادی  $k$  و آماره  $F$  دارای توزیع اف با درجه آزادی  $k$ ،  $n-k-1$  است.

با توجه به سطح اطمینان مورد نظرمان، مقادیر بحرانی متناظر با این آمارهها را از جداول توزیع‌های مربوطه بدست می‌آوریم، اگر مقادیر این آمارهها از مقادیر بحرانی بیشتر باشد، فرض صفر که دلالت بر واریانس همسانی دارد، رد می‌شود. لذا می‌توان گفت جملات پسماند ارتباط معناداری با متغیرهای توضیح دهنده  $X$  دارند پس واریانس ناهمسانی داریم.