

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

اگر به تمام داده‌ها ۱٫۵ واحد اضافه کنیم به میانگین نیز ۱٫۵ واحد اضافه می‌شود بنابراین میانگین در این جدول، برابر $۸٫۵ = ۱۰ - ۱٫۵$ است و مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ می‌باشند.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \Rightarrow ۸٫۵ = \frac{۳ \times ۴ + ۷ \times ۵ + ۱۱a + ۱۵ \times ۳}{۱۲ + a} \Rightarrow ۹۲ + ۱۱a = ۸٫۵a + ۱۰۲$$

$$\Rightarrow ۹۲ + ۲٫۵a = ۱۰۲ \Rightarrow ۲٫۵a = ۱۰ \Rightarrow a = ۴$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ میانگین داده‌های اول و دوم را باید حساب کنیم.

$$\text{میانگین داده‌های اول} = \frac{\overbrace{1+1+2+3+4+\dots+99+100}^k}{101} = \frac{1+k}{101}$$

$$\text{میانگین داده‌های دوم} = \frac{\overbrace{1+2+3+\dots+99+100+100}^k}{101} = \frac{k+100}{101}$$

$$\text{پس داریم: } \frac{k+100}{101} - \frac{1+k}{101} = \frac{99}{101}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ انحراف از میانگین داده‌ی x_i برابر $\bar{x} - x_i$ است و همواره مجموع انحراف از میانگین کل داده‌ها صفر است یعنی

$$\sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ می‌باشد.}$$

$$(-4 \times 5) + (-2 \times 11) + (-1 \times 9) + (0 \times 4) + (1 \times 8) + 2x + (3 \times 3) = 0 \rightarrow -34 + 2x = 0 \Rightarrow x = 17$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \Rightarrow ۱۳٫۱ = \frac{۱۶ + ۹ + ۱۷ + ۱۳ + ۱۰ + a + ۱۰ + ۱۷ + ۱۱ + ۱۶}{۱۰}$$

$$\Rightarrow ۱۳٫۱ = \frac{۱۱۹ + a}{۱۰} \rightarrow ۱۱۹ + a = ۱۳۱ \Rightarrow a = ۱۳۱ - ۱۱۹ \Rightarrow a = ۱۲$$

برای یافتن میانه، ابتدا باید داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

$$۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

$$\text{میان‌ی ده داده‌ی آماری} = \frac{\text{داده‌ی ششم} + \text{داده‌ی پنجم}}{۲} = \frac{۱۲ + ۱۳}{۲} = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲٫۵$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

در ابتدا مجموع اشتباهی داده‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \rightarrow ۱۱۲۴ = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{۴۵}$$

$$\rightarrow \text{مجموع اشتباهی داده‌ها} = ۱۱۲۴ \times ۴۵ = ۵۰۵۸۰$$

حال چون به جای ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است، یعنی مجموع داده‌ها $۱۸۰ = ۱۰۲۴ - ۱۲۰۴$ واحد بیشتر محاسبه شده است، در نتیجه مجموع درست داده‌ها برابر $۵۰۴۰۰ = ۵۰۵۸۰ - ۱۸۰$ است.

$$\text{میانگین} = \frac{۵۰۴۰۰}{۴۵} = ۱۱۲۰$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

نمره‌ی کل آزمون عمومی این داوطلب همان میانگین نمرات دروس عمومی ولی با حساب کردن ضریب هر درس است.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \Delta 8 = \frac{1}{11} ((4 \times 65) + (2 \times 52) + (3 \times 70) + 2x)$$

$$\rightarrow \Delta 8 = \frac{260 + 104 + 210 + 2x}{11} \rightarrow 638 = 574 + 2x \rightarrow x = 32$$

مجموع همه درصد فراوانی‌های نسبی همواره برابر ۱۰۰ درصد است. لذا داریم:

$$15 + 30 + 25 + \alpha = 100 \Rightarrow \alpha = 30$$

در نتیجه جدول فراوانی نسبی این داده‌های آماری، به صورت زیر است:

مرکز دسته x_i	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
فراوانی نسبی $\frac{F_i}{N}$	۰٫۱۵	۰٫۳۰	۰٫۲۵	۰٫۳۰

دقت کنید میانگین برابر است با مجموع حاصلضرب مرکز هر دسته در فراوانی نسبی آن دسته. برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - 20 = (-8 \times 0.15) + (-5 \times 0.3) + (-2 \times 0.25) + (0.3 \times 1) \Rightarrow \bar{x} - 20 = -2.9 \Rightarrow \bar{x} = 17.1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\text{فراوانی نسبی دسته اول} = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \rightarrow 0.1125 = \frac{\text{فراوانی مطلق}}{80} \rightarrow \text{فراوانی مطلق} = 80 \times 0.1125 = 9$$

با اضافه کردن ۱۰ داده‌ی بیشتر از میانه، فراوانی مطلق دسته‌ی اول تغییر نمی‌کند ولی تعداد کل داده‌ها ۱۰ واحد افزایش می‌یابد.

$$\text{فراوانی نسبی جدید دسته‌ی اول} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0.1$$

اگر تمام داده‌های آماری را در عددی ضرب کنیم، میانگین نیز در آن عدد ضرب می‌شود و اگر از تمام داده‌های آماری، مقداری ثابت را کم کنیم، از میانگین نیز آن مقدار ثابت کم می‌شود.

$$\text{میانگین} = (57 - 12) \times 3 = 45 \times 3 = 135$$

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$5, 7, 9, 10, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 17, 19$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مد} = 15 \\ \text{میان} = \frac{\text{داده‌ی هفتم} + \text{داده‌ی ششم}}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13.5 \\ \text{مُد} = 15 - 13.5 = 1.5 \end{cases} \Rightarrow \text{میان} - \text{مد} = 1.5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۱۵ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۷ و ۳۱ می‌باشند.

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۳ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - 23 = \frac{1}{15} ((3 \times (-8)) + (4 \times (-4)) + (5 \times 0) + (2 \times 4) + (1 \times 8))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 23 = \frac{1}{15} (-24 - 16 + 8 + 8) \rightarrow \bar{x} - 23 = -\frac{24}{15} \rightarrow \bar{x} - 23 = -1.6 \rightarrow \bar{x} = 21.4$$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۲۰ واحد کم می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$x_i - 120$	-۱۰	-۴	۲	۸	۱۴
F_i	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

$$\bar{x} - 120 = \frac{1}{50} ((-10 \times 5) + (-4 \times 8) + (2 \times 15) + (8 \times 12) + (14 \times 10))$$

$$= \frac{1}{50} (-50 - 32 + 30 + 96 + 140) = \frac{184}{50} = 3.68 \rightarrow \bar{x} = 120 + 3.68 = 123.68$$

از روی نمودار مستطیلی، جدول فراوانی به این صورت می‌باشد:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

حدود دسته‌ها	[۹, ۱۱)	[۱۱, ۱۳)	[۱۳, ۱۵)	[۱۵, ۱۷)	[۱۷, ۱۹)
مرکز دسته‌ها	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
فراوانی مطلق	۸	۱۱	۱۶	۱۴	۱۱

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم:

$$\bar{x} - 14 = \frac{1}{60} ((8 \times (-4)) + (11 \times (-2)) + (16 \times 0) + (14 \times 2) + (11 \times 4))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 14 = \frac{1}{60}(-32 - 22 + 28 + 44) \rightarrow \bar{x} - 14 = \frac{18}{60}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = 0,3 \rightarrow \bar{x} = 14,3$$

چون هیچ داده‌ی تکراری وجود ندارد، پس x یکی از اعداد داده‌شده خواهد بود و همان داده‌ای است که مد را تشکیل می‌دهد. یعنی:

$$x = \text{مد} = \text{میان} = \text{میانگین}$$

حال داریم:

$$\frac{75 + 80 + 85 + 90 + 100 + 110 + x}{7} = x$$

$$\Rightarrow 7x = 540 + x \rightarrow 6x = 540 \rightarrow x = \frac{540}{6} = 90$$

چون از تمام داده‌ها فقط یکی داریم پس حتماً x یکی از همین داده‌ها می‌باشد و مد نیز هست. اگر x برابر یکی از این داده‌ها نباشد مد وجود ندارد. چون میانگین باید با مد برابر باشد پس میانگین این داده‌ها نیز x است.

$$x = \frac{63 + 70 + 66 + 50 + 77 + 65 + 64 + x}{8} \Rightarrow 8x = 455 + x \Rightarrow 7x = 455 \rightarrow x = 65$$

اگر داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم میانه نیز ۶۵ می‌شود که اگر غیر از این بود جواب، گزینه‌ی چهارم بود.

ابتدا از روی نمودار مستطیلی، جدول فراوانی را تشکیل می‌دهیم.

مرکز دسته‌ها	۵	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی مطلق	۵	۸	۱۰	۷	۲

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۹ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 9 = \frac{1}{32}((5 \times (-4)) + (8 \times (-2)) + (10 \times 0) + (7 \times 2) + (2 \times 4))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 9 = \frac{1}{32}(-20 - 16 + 0 + 14 + 8) \rightarrow \bar{x} - 9 = \frac{-14}{32} \rightarrow \bar{x} = 9 - 0,4375 = 8,5625$$

وقتی گفته می‌شود که حداقل میانگین برای پذیرش ۷۵ است یعنی $\bar{x} \geq 75$ است.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \frac{1}{4+2+3+8}(4x + (2 \times 90) + (3 \times 81) + (8 \times 70)) \geq 75$$

$$\rightarrow \frac{1}{17}(4x + 180 + 243 + 560) \geq 75 \rightarrow \frac{4x + 983}{17} \geq 75$$

$$\rightarrow 4x + 983 \geq 1275 \rightarrow 4x \geq 1275 - 983 \rightarrow 4x \geq 292 \rightarrow x \geq \frac{292}{4} \rightarrow x \geq 73$$

بنابراین حداقل نمره‌ی ادبیات باید ۷۳ باشد.

داده‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 15$$

میان‌های داده‌ها $\frac{8+9}{2} = 8,5$ و مد داده‌ها برابر ۸ می‌باشد. اختلاف آن‌ها برابر $8,5 - 8 = 0,5$ می‌باشد.

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۳۶ و ۳۸ و ۴۰ و ۴۲ و ۴۴ می‌باشند و برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۴۰ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - 40 = \frac{1}{50}((9 \times (-4)) + (10 \times (-2)) + (14 \times 0) + (11 \times 2) + (6 \times 4))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 40 = \frac{1}{50}(-36 - 20 + 22 + 22) \rightarrow \bar{x} - 40 = -\frac{1}{5} \rightarrow \bar{x} = 40 - \frac{1}{5} = 39,8$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$Q_1 = \frac{14 + 15}{2} = 14,5$$

$$12, 14, 14, 15, 16, 18, 20, 20, 21, 24, 25, 26 \rightarrow Q_2 = \frac{18 + 20}{2} = 19$$

$$Q_3 = \frac{21 + 24}{2} = 22,5$$

میانگین داده‌های بزرگ‌تر از Q_1 و کوچک‌تر از Q_3 یعنی میانگین اعداد ۱۵ تا ۲۱.

$$\bar{x} = \frac{15 + 16 + 18 + 20 + 20 + 21}{6} = \frac{110}{6} = \frac{55}{3} = 18,33$$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۲ واحد کم می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۱)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 22 = \frac{1}{20} ((2 \times (-6)) + (4 \times (-3)) + (6 \times 0) + (3 \times 3) + (5 \times 6))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 22 = \frac{1}{20} (-12 - 12 + 0 + 9 + 30) \rightarrow \bar{x} = \frac{15}{20} + 22 = 22 + 3a$$

$$\rightarrow 3a = \frac{15}{20} \rightarrow a = \frac{1}{4} = 0,25$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۲)

برای راحتی در محاسبات از داده‌ها ۱۲ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{1}{24} ((2 \times (-4)) + (5 \times (-2)) + (5 \times 0) + (9 \times 2) + (3 \times 4))$$

$$\rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{1}{24} (-8 - 10 + 0 + 18 + 12) \rightarrow \bar{x} - 12 = \frac{12}{24} \rightarrow \bar{x} = 12 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 12,5 = 12 + 2a \rightarrow 2a = 0,5 \rightarrow a = 0,25$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۳)

میانگین چهار داده $\rightarrow 8 = 4 \times 8 = 32$

میانگین هشت داده $\rightarrow 4 = 8 \times 4 = 32$

$$\text{میانگین دوازده داده} = \frac{32 + 32}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

ابتدا از همه داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم واضح است از میانگین نیز ۱۴ واحد کم خواهد شد: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۴)

$x - 14$	-4	-2	0	1	3	4
f	5	8	7	10	6	4

$$\bar{x} - 14 = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{\sum_{i=1}^5 f_i} = \frac{5(-4) + 8(-2) + 7(0) + 10(1) + 6(3) + 4(4)}{5 + 8 + 7 + 10 + 6 + 4}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = \frac{-20 - 16 + 0 + 10 + 18 + 16}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\Rightarrow \bar{x} - 14 = 0,2 \Rightarrow \bar{x} = 14,2$$

چون تعداد داده‌ها ۶ می‌باشد، داده وسط یعنی $14,5 = \frac{14 + 15}{2}$ برابر میانه است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۵)

برای محاسبه میانگین ابتدا از همه داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم:

$x - 14$	-4	-2	0	1	2	4
f	6	9	10	12	8	5

$$\bar{x} - 14 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{6(-4) + 9(-2) + 10(0) + 12(1) + 8(2) + 5(4)}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} = \frac{12}{100} \Rightarrow \bar{x} = 14,12$$

$$\text{میانگین} - \text{میانه} = 14,12 - 14,5 = -0,38$$