۳۱- جواب معادلهٔ دیفرانسیل $x^2ydy=(xy^2-e^{\frac{1}{x^3}})dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{y^2}{x^2}+2e^{\frac{1}{x^3}}=c$

۲) $\frac{y^2}{x^2}+2e^{\frac{1}{x^3}}=c$

۳) $-3\frac{y^2}{x^2}+2e^{\frac{1}{x^3}}=c$

۴) $3\frac{y^2}{x^2}+2e^{\frac{1}{x^3}}=c$

۳۲- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $e^xy'=e^x+e^y$، کدام است؟

۱) $y=x-\ln(c+x)$

۲) $y=x+\ln(c-x)$

۳) $y=x+\ln(c+x)$

۴) $y=x-\ln(c-x)$

۳۳- مسیرهای قائم بر دسته منحنی $y=e^{cx}$، کدام است؟

۱) $x^2+y^2(1-2\ln y)=c$

۲) $x^2-y^2(1-2\ln y)=c$

۳) $2x^2+y^2(1-2\ln y)=c$

۴) $2x^2-y^2(1-2\ln y)=c$

۳۴- یک جواب خصوصی معادلهٔ $y''-4y'+3y=e^x\cos 2x$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{8}e^x(\cos 2x+\sin 2x)$

۲) $\frac{1}{8}e^x(\cos 2x-\sin 2x)$

۳) $-\frac{1}{16}e^x(\cos 2x+\sin 2x)$

۴) $\frac{1}{16}e^x(\cos 2x-\sin 2x)$

۳۵- معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن و از کوچکترین مرتبه که e^x و $\sinh x$ و $\cosh x$ جواب‌های خصوصی آن باشد، کدام است؟

۱) $y' - y = 0$

۲) $y'' - y = 0$

۳) $y''' - y' = 0$

۴) چنین معادلهٔ دیفرانسیلی وجود ندارد.

۳۶- کدام گزینه جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $(x+3)^2 y'' - (x+3)y' + y = 0$ است؟

۱) $(x+3)\ln(x+3)$

۲) $(x+5)\ln(x+3)$

۳) $\ln^2(x+3)$

۴) $(x+3)^2$

۳۷- ریشه‌های معادله مشخصهٔ $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$ در همسایگی $x = 0$ کدام است؟

۱) $-1, -\frac{1}{2}$

۲) $-1, \frac{1}{2}$

۳) $1, -\frac{1}{2}$

۴) $1, \frac{1}{2}$

۳۸- در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم $x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$، نقاط تکین منظم یا نامنظم کدام است؟

۱) $x = 0$ و $x = 2$ هر دو نقطهٔ تکین منظم‌اند.

۲) $x = 0$ و $x = 2$ هر دو نقطهٔ تکین نامنظم‌اند.

۳) $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم، و $x = 2$ نقطهٔ تکین نامنظم است.

۴) $x = 0$ نقطهٔ تکین نامنظم، و $x = 2$ نقطهٔ تکین منظم است.

۳۹- تبدیل لاپلاس $\frac{1-\cos 2t}{t}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+4}$

۲) $\frac{1}{s}\ln\frac{s^2}{s^2+4}$

۳) $\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+4}{s^2}$

۴) $\frac{1}{s}\ln\frac{s^2+4}{s^2}$

۴۰- اگر $y(t)$ جواب مسئله با مقدار اولیهٔ زیر باشد، تبدیل لاپلاس $y(t)$ کدام است؟

$$y''+4y=\begin{cases}1 & 0\le t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}\qquad y(0)=y'(0)=0$$

۱) $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+4}$

۲) $\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+4}$

۳) $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^3+4s}$

۴) $\frac{1-e^{-\pi s}}{s^3+4s}$

معادلات دیفرانسیل - ابراهیم شاه ابراهیمی (دفترچه - 251F) (مهندسی هوافضا ۹۷)

31) $(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}})dx = x^2y\,dy \rightarrow \underbrace{(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}})}_{M}dx - \underbrace{x^2y}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$ $\xrightarrow{\text{کامل نیست}}$ $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy \xrightarrow{\times \frac{1}{N}} = -\frac{4xy}{x^2y} = \boxed{-\frac{4}{x}}$

$\rightarrow$ عامل $= e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \boxed{x^{-4}}$

روش حل:
معادله کامل در کنکور ارشد
دو مورد علاقه‌ی عجم طراحان هست.
بخصوص معادله‌ای که کامل نیست
و به کمک عامل تبدیل به کامل می‌شود

$\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{ضرب عامل}} \underbrace{(x^{-3}y^2 - x^{-4}e^{\frac{1}{x^3}})}_{M}dx - \underbrace{x^{-2}y}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^{-3}y$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x^{-3}y \rightarrow$ کامل شد

$\xrightarrow{c = \int M^{*}dx + \int N dy} c = \int \underbrace{-x^{-4}e^{x^{-3}}}_{I} - \int x^{-2}y\,dy \rightarrow c = \frac{1}{3}e^{x^{-3}} - \frac{x^{-2}y^2}{2}$

کوچولو انتگرال

$I = \int x^{-4}e^{x^{-3}}dx \quad \begin{cases} x^{-3} = t \\ -3x^{-4}dx = dt \end{cases}$

$= -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t = -\frac{1}{3}e^{x^{-3}}$

$\xrightarrow{\times 6} 6c = 2e^{\frac{1}{x^3}} - 3\frac{y^2}{x^2}$

$\xrightarrow{6c = C} \boxed{C = 2e^{\frac{1}{x^3}} - 3\frac{y^2}{x^2}}$

(گزینه ۳)

math-teacher.blog.ir

پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد
« کلیه رشته‌ها »
« ریاضی ۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل »

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

32) $e^{x}y' = e^{x} + e^{y} \longrightarrow e^{x}y' - e^{x} = e^{y} \xrightarrow{\div e^{y}}$ مزاحم

$\rightarrow \frac{e^{x}}{e^{y}}y' - \frac{e^{x}}{e^{y}} = 1 \quad \begin{cases} e^{-y} = t \\ -e^{-y}\cdot y' = t' \end{cases} \rightarrow -e^{x}t' - e^{x}t = 1$

$\xrightarrow{\div -e^{x}} t' + t = -e^{-x}$ (معادله مرتبه اول خطی) $\rightarrow$ عامل $= e^{\int 1\,dx} = e^{x} \xrightarrow[\text{در طرفین}]{\text{ضرب عامل}} \underbrace{e^{x}t' + e^{x}t}_{} = -1$

$(e^{x}\cdot t)' = -1$

$\xrightarrow{\int} e^{x}.t = -x + c \xrightarrow{t = e^{-y}} \frac{e^{x}}{e^{y}} = -x + c$

$\rightarrow e^{x-y} = -x + c \xrightarrow{\text{از } L_n} x - y = L_n(-x + c) \rightarrow \boxed{y = x - L_n(c - x)}$ (گزینه ۴)

«کلید رشد» $\boxed{\text{math-teacher.blog.ir}}$ ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

(پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد)

---

33) $y = e^{cx} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = ce^{cx} \longrightarrow y' = cy \rightarrow y' = \frac{y}{x}L_n y$

$\xrightarrow{L_n} L_n y = cx \rightarrow c = \frac{1}{x}L_n y$

$\xrightarrow[y' \to -\frac{1}{y'}]{\text{مسیر قائم}} -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}L_n y \longrightarrow -x\,dx = \underbrace{yL_n y\,dy}_{I} \longleftarrow$ تفکیک پذیر $\xrightarrow{\int}$

$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}L_n y - \frac{y^2}{4} + c \xrightarrow{x-4} 2x^2 + 2y^2L_n y - y^2 = -4c$ هر بلایی سرش آورد همین ثابت

$\boxed{\text{math-teacher.blog.ir}} \longrightarrow \boxed{2x^2 - y^2(1 - 2L_n y) = c}$ (گزینه ۴)

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

نحوه انتگرال گیری $\rightarrow I = \int yL_n y\,dy \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \begin{cases} L_n y = u \rightarrow \frac{dy}{y} = du \\ y\,dy = dv \rightarrow \frac{y^2}{2} = v \end{cases}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ فرمول انتگرال جزء به جزء $\Rightarrow \frac{y^2}{2}L_n y - \int \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y}dy = \boxed{\frac{y^2}{2}L_n y - \frac{y^2}{4}}$

34) $y'' - 4y' + 3y = e^{x}\cos 2x$

معادله مرتبه ۲ - خطی - با ضرایب ثابت
ناهمگن

روش حل:
با توجه به اینکه معادله مرتبه ۲ است و
همچنین سمت راست تساوی بصورت حاصلضرب است
پس از روش لاگرانژ استفاده می کنیم.
که در کنکور ارشد مورد علاقه همه طراحان است

$\xrightarrow{\text{قسمت همگن}} y'' - 4y' + 3y = 0$

$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جواب همگن}} \boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}}$

$\begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{3x} \end{cases} \rightarrow w(x) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{4x} - e^{4x} = \underline{2e^{4x}}$

فرمول: $c_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{w(x)} dx \longrightarrow c_1 = -\int \frac{\cancel{e^{3x}} \cdot e^{x}\cos 2x}{2\cancel{e^{4x}}} dx = \boxed{-\frac{1}{4}\sin 2x}$

فرمول: $c_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{w(x)} dx \longrightarrow c_2 = \int \frac{e^{x} \cdot e^{x}\cos 2x}{2e^{4x}} dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{-2x}\cos 2x\, dx}_{I}$

$= \boxed{\frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)}$

$\xrightarrow{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}} y = -\frac{1}{4}\sin 2x \cdot e^{x} + \frac{1}{8}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) \cdot e^{3x}$

$\xrightarrow{\text{ساده سازی}} y = -\frac{1}{4}\sin 2x \cdot e^{x} + \frac{1}{8}e^{x}\sin 2x - \frac{1}{8}e^{x}\cos 2x$

$y = -\frac{1}{8}e^{x} \cdot \sin 2x - \frac{1}{8}e^{x}\cos 2x$

(گزینه ۱) $\boxed{y = -\frac{1}{8}e^{x}(\sin 2x + \cos 2x)}$

ابراهیم شاه ابراهیمی
اردیبهشت ۹۷

معادلات دیفرانسیل - ابراهیم شاه ابراهیمی

(مهندسی هوافضا ۹۷) (251 F دفترچه)

math-teacher.blog.ir

35) e^x, $\sinh x$, $\cosh x$

$$y = c_1 e^x + c_2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + c_3\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$y = \left(c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2}\right)e^x + \left(-\frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2}\right)e^{-x}$$

$$y = Ae^x + Be^{-x} \rightarrow t = \pm 1 \rightarrow t^2 - 1 = 0 \rightarrow y'' - y = 0$$

گزینه ۲

math-teacher.blog.ir

36) $(x+3)^2 y'' - (x+3)y' + y = 0$ معادله مرتبه ۲ - خطی - با ضرایب متغیر - کوشی اویلر همگن

$\xrightarrow[x+3=u]{\text{تغییر متغیر}} u^2 y'' - uy' + y = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m(m-1) - m + 1 = 0$

$m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1, 1$ مضاعف

$\rightarrow y = c_1 u + c_2 \cdot u \cdot \ln u$

$\xrightarrow{x+3=u} \boxed{y = c_1(x+3) + c_2(x+3)\cdot\ln(x+3)} \xrightarrow[c_1=0,\ c_2=1]{\text{طبق گزینه}}$

$\boxed{y = (x+3)\cdot\ln(x+3)}$ (گزینه ۱)

ابراهیم شاه ابراهیمی اردیبهشت ۹۷
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

math-teacher.blog.ir

(پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد - کلیه رشته‌ها)

37) $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$

$$\xrightarrow[\text{فرم استاندارد}]{\div 2x^2} y'' + \underbrace{\left(\frac{3x-2x^2}{2x^2}\right)}_{P(x)} y' - \underbrace{\frac{(x+1)}{2x^2}}_{q(x)} y = 0$$

چون $x=0$ ریشه مخرج عبارات P و q است ← نقطه غیرعادی (یا منفرد، تکین، اثرو له)

فرمول
$$\begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) \\ q_0 = \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)^2 q(x) \end{cases} \to \begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x \to 0} x\left(\frac{3x-2x^2}{2x^2}\right) = \boxed{\frac{3}{2}} \\ q_0 = \lim\limits_{x \to 0} x^2\left(-\frac{(x+1)}{2x^2}\right) = \boxed{\frac{-1}{2}} \end{cases} \to \text{منتظم}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m(m-1) + P_0 m + q_0 = 0 \quad (\text{فرمول})$$

$$\to m(m-1) + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \to m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \begin{cases} \boxed{m = -1} \\ \boxed{m = \frac{1}{2}} \end{cases}$$ (گزینه ۲)

math-teacher.blog.ir

(پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد - کلیه رشته‌ها)

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - ارزی بهبهٔ ۹۷

38) $x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$

$$\xrightarrow[\text{استانداردسازی}]{\div x(x-2)^2} y'' + \underbrace{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)^2}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{\cancel{(x-2)}}{x(x-2)^{\cancel{2}}}}_{q(x)} y \longrightarrow$$ نقاط $x=0$ و $x=2$ تکین اند

$$\xrightarrow{x=0} \begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x \to 0} x\left(\frac{3}{(x-2)^2}\right) = 0 \\ q_0 = \lim\limits_{x \to 0} x^2\left(\frac{1}{x(x-2)}\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{منتظم} \qquad \xrightarrow{x=2} \begin{cases} P_0 = \lim\limits_{x \to 2} (x-2)\left(\frac{3}{(x-2)^2}\right) = \infty \end{cases} \to \text{نامنتظم}$$

(گزینه ۳)

پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد کلیه رشته‌ها math-teacher.blog.ir

39) $\dfrac{1-\cos 2t}{t}$ تکنیک : $\mathcal{L}\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)=\int_s^\infty F(s)\,ds$

یعنی باید ابتدا لاپلاس $(1-\cos 2t)$ را یابیم سپس از آن انتگرال s تا ∞ بگیریم.

$$\mathcal{L}(1-\cos 2t)=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(\cos 2t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1-\cos 2t}{t}\right)=\int_s^\infty\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds=\left(\ln s-\frac{1}{2}\ln(s^2+4)\right)\Big|_s^\infty$$

$$=\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Big|_s^\infty=\cancel{\ln 1}-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}=\boxed{-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}=\ln\sqrt{\frac{s^2+4}{s^2}}=\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+4}{s^2}}$$ (گزینه ۳)

math-teacher.blog.ir

(پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد کلیه رشته ها)

ابراهیم شاه ابراهیمی اردیبهشت ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

40) $y''+4y=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$ $y(0)=y'(0)=0$

ابتدا باید تابع ۲ ضابطه را به یک عبارت تبدیل کنیم.

$\to y''+4y=1+(0-1)u_\pi(t)$

$\to y''+4y=1-u_\pi(t)\xrightarrow{\text{لاپلاس بگیر}}\mathcal{L}(y'')+4(\mathcal{L}y)=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(u_\pi(t))$

$\to s^2F(s)-\cancel{sf(0)}-\cancel{f'(0)}+4F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-\pi s}}{s}$

$\to F(s)(s^2+4)=\dfrac{1-e^{-\pi s}}{s}\longrightarrow\boxed{F(s)=\dfrac{1-e^{-\pi s}}{s^3+4s}}$ (گزینه ۴)

math-teacher.blog.ir

پاسخ تشریحی ریاضیات کنکور ارشد

ابراهیم شاه ابراهیمی اردیبهشت ۹۷